arXiv:2304.02519v3 [math.AG] 2 Nov 2023

霍奇相似、代数类与 KUGA-SATAKE 簇

MAURO VARESCO

Abstract. 本文引入超凯勒流形超越格的霍奇相似概念，并研究这些霍奇态射的霍奇猜想。通过研究具有辛自同构的 K3 曲面，我们证明了具有二次全实乘法的 K3 曲面的前四个四维族的一般成员的平方的霍奇猜想。然后我们证明 Kuga–Satake构造关于霍奇相似的函子性。这意味着，如果两个超凯勒流形的 Kuga–Satake 霍奇猜想成立，则它们超越格之间的每个霍奇相似在与 Lefschetz同构复合后是代数的。特别地，我们推断广义 Kummer 变形类型的超凯勒流形的超越格的霍奇相似是代数的。

Introduction

0.1. 超凯勒流形与霍奇猜想。设 X 为一个超凯勒流形，并设 $T(X) \subseteq H^2(X,\mathbb{Q})$ 为其超越格，即相对于 Beauville–Bogomolov 二次型，它是 X 在 $H^2(X,\mathbb{Q})$ 中的 N´eron–Severi 群的正交补。以下观察表明了这一概念与霍奇猜想的相关性：设 X 和 Y 为超凯勒流形。根据 Lefschetz (1,1)定理，霍奇态射 $H^2(X,\mathbb{Q}) \to H^2(Y,\mathbb{Q})$ 是代数的，当且仅当诱导的霍奇态射 $T(X) \to T(Y)$ 是代数的。回顾一下，若霍奇态射 $H^2(X,\mathbb{Q}) \to H^2(Y,\mathbb{Q})$ 所对应的霍奇类在 $H^{2n,2n}(X \times Y,\mathbb{Q})$ 中是代数的，则称该霍奇态射为代数的，其中 $2n$ 是 X 的维数。

一般而言，超越格之间的霍奇态射是否为代数的尚不明确。不过，对于霍奇等距这一类情形，已有令人鼓舞的结果。回顾一下，若霍奇同构 $T(X) \to T(Y)$ 关于 X 和 Y上的 Beauville–Bogomolov 二次型是等距，则称其为霍奇等距。Buskin [3]的一个结果后来由 Huybrechts [12] 重新证明，表明射影K3曲面的超越格之间的霍奇等距是代数的。Markman [16] 也证明了，$\mathrm{K3}^{[n]}$-型超凯勒流形的超越格之间的霍奇等距同样是代数的，其中超凯勒一词对应原文中的 hyperk¨ahler。

在本文中，我们介绍霍奇等距的一种自然推广，并将其称为霍奇相似：如果一个霍奇同构将二次型乘以一个称为乘子的非零标量，则称其为霍奇相似，见定义 1.2。注意，霍奇等距是乘子为一的霍奇相似。霍奇相似自然出现于两种情形中。主要情形是超凯勒流形 ¨，其自同态域 $E := \mathrm{End}^{\mathrm{Hdg}}(T(X))$ 是次数为二的全实域：事实上，每个次数为

二的全实域都同构于 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$，其中 d 为某个正整数。于是可见， $\sqrt{d}$: $T(X) \to T(X)$ 是一个霍奇相似。这立即由以下事实得出：由于 E 是全实的，Rosati 对合是恒等映射。注意，在这种情况下， E 由霍奇相似生成。霍奇相似的第二个例子来源如下：给定一个超凯勒流形 ¨，可能存在另一个超凯勒流形 ¨ Y，其超越格与 $T(X)(\lambda)$ 霍奇等距，其中 $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$ 为某个数；这里的 (λ) 表示二次型乘以 λ。于是， $T(X)$ 的恒等映射定义了一个自然的霍奇态射 $T(Y) \to T(X)$，它是一个霍奇相似。在本文撰写之时，能够证明为代数的、并非等距的霍奇相似实例非常少。例如，对于具有全实自同态域 $E = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 的 K3 曲面，仅在某些此类 K3 曲面的一维族中证明了 $\sqrt{d}$ 的代数性。这是 Schlickewei [19] 的结果，随后在 [20] 中得到了推广。注意，相关文献中的证明涉及对这些 K3 曲面的 Kuga–Satake 簇的霍奇猜想进行研究，并未利用如下事实：在这些情形下， E 由霍奇相似生成。

0.2. K3 曲面的霍奇相似与辛自同构。回顾一下，两个 K3 曲面乘积的霍奇猜想等价于 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Hdg}}(T(X)\ T(Y))$ 中元素的代数性。这由 K¨unneth 分解以及二次型 q_X 将 $(T(X) \otimes T(Y))^{2,2} \cap (T(X) \otimes T(Y))$ 与 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Hdg}}(T(X)\ T(Y))$ 等同这一事实得出。如上所述，两个 K3 曲面的超越格之间的霍奇等距已知是代数的。特别地，只要 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Hdg}}(T(X)\ T(Y))$ 由霍奇等距生成， $X \times Y$ 的霍奇猜想就成立。当 $T(X)$ 与 $T(Y)$ 霍奇等距，且 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Hdg}}(T(X)\ T(Y))$ 是 $\mathbb{Q}$ 或 CM 域时，便属于这种情形。

第 2 节的主要结果是证明：对于具有二次全实乘法的某些 K3 曲面族，其中一些霍奇相似具有代数性:

定理0.1（定理 2.1、2.9 和 2.15）。设 X 是一个 K3 曲面，与具有阶为 p 的辛自同构且满足 $p = 2$ 的 K3 曲面霍奇等距。进一步假设 $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ 包含于 X 的自同态域中。那么， $\sqrt{p}$: $T(X) \to T(X)$ 是代数的。特别地，若 $\mathrm{End}^{\mathrm{Hdg}}(T(X)) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{p})$，则关于 $X \times X$ 的霍奇猜想成立。

“X 与带有阶为 p的辛自同构的 K3 曲面霍奇等距”这一条件，等价于对 $p = 2$有 $T(X) \hookrightarrow U_{\mathbb{Q}}^3 \oplus E_8(-2)_{\mathbb{Q}}$，并且对 $p = 3$有 $T(X) \hookrightarrow U_{\mathbb{Q}}^3 \oplus (A_2)_{\mathbb{Q}}^2$。这是命题 2.5 和命题2.11根据 Nikulin[17], 、van Geemen 和 Sarti [10], 以及 Garbagnati 和 Sarti [7]的经典结果推导得出的。利用超越格上的这些条件，我们证明，满足定理0.1假设的 K3 曲面族，对 $p = 2$ 至多为四维，对 $p = 3$至多为二维。随后，我们在命题 2.6 和命题 2.12 中构造了这类具有最大维数的族。特别是，定理0.1给出了首批四维 K3 曲面族：这些曲面具有次数为二的全实乘法，且可证明其一般成员的平方满足霍奇猜想；同时也给出了首个二维 K3 曲面族：这些曲面具有次数为二的全实乘法，且可证明其所有成员的平方都满足霍奇猜想。

0.3. Kuga–Satake 簇与霍奇相似。在第 3 节中，我们证明，Kuga–Satake构造关于霍奇等距的函子性可以如下意义下扩展至霍奇相似：

命题 0.2（命题 3.1）。设 $\psi\colon (V,q) \to (V',q')$ 是 K3 型极化霍奇结构之间的霍奇相似。那么，存在阿贝尔簇的一个同源 $\psi_{\mathrm{KS}}\colon \mathrm{KS}(V) \to \mathrm{KS}(V')$，使下图交换

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & V' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ H^1(\mathrm{KS}(V),\mathbb{Q})^{\otimes 2} & \xrightarrow{(\psi_{\mathrm{KS}})_*^{\otimes 2}} & H^1(\mathrm{KS}(V'),\mathbb{Q})^{\otimes 2} \end{array},$$

其中，竖直箭头分别是 V 和 V'的 Kuga–Satake 对应。

在第 3.1 节中，我们利用了这样一个观察：二次空间的相似会诱导偶克利福德代数的同构。借此，我们推广了 Kreutz、Shen 和 Vial 的结果 [13]；该结果表明，定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上的两个超Kähler流形的第二德拉姆–贝蒂上同调之间的德拉姆–贝蒂等距，在 Andr´e 的意义下是 motivated。我们在命题 3.8 中指出，也可以使用参考文献中的同一证明来说明德拉姆–贝蒂相似是 motivated。

在第 4 节中，我们利用命题 0.2 中证明的 Kuga–Satake构造的函子性，推导出以下结论：

定理 0.3（定理 4.5）。设 X' 和 X 是两个满足 Kuga–Satake 霍奇猜想的超霍奇流形。那么，对于任意霍奇相似 $\psi\colon T(X') \to T(X)$，复合映射

$$T(X') \xrightarrow{\psi} T(X) \xrightarrow{h_X^{2n-2}\cup\bullet} H^{4n-2}(X,\mathbb{Q})$$

是代数的，其中 $2n := \dim X$，且 h_X 是 X上的一个丰沛除子的上同调类。

根据 Voisin 的一个结果 [23]（该结果基于 Markman [15] 和 O'Grady [18], 此前的研究），广义库默尔型超霍奇流形满足 Kuga–Satake 霍奇猜想。这是满足定理 0.3 假设的流形的主要实例来源。由于 Foster [6], 已证明这些流形在二次次数上的 Lefschetz 标准猜想，定理 0.3 表明，两个广义库默尔型超霍奇流形的超越格之间的霍奇相似是代数的。利用这些簇的自同态域总是由霍奇相似生成这一事实，我们进而得出以下结论：

定理 0.4（定理 5.1）。设 X 和 X' 是广义库默尔型超凯勒流形，满足 $T(X)$ 和 $T(X')$ 在霍奇意义下相似。那么， $T(X')$ 与 $T(X)$ 之间的每个霍奇态射都是代数的。

请注意，与 K3 曲面和 $\mathrm{K3}^{[n]}$ 型超k¨ahler 流形的情形不同，对于超k¨ahler 流形，霍奇等距的代数性此前尚未得到证明

其类型为广义库默尔型。此外，请注意，定理 0.4 也适用于不同维数的广义库默尔型超k¨ähler 流形。

对于 K3 曲面，Lefschetz 标准猜想显然成立。因此，如果 Kuga–Satake 霍奇猜想对给定的两条 K3 曲面成立，定理 0.3 表明，它们的超越格之间的每个霍奇相似都是代数的。特别地，这为我们上文提到的 [19, 20]所研究的、具有二次全实域的一维 K3 曲面族中的 K3 曲面的平方上的霍奇猜想提供了一个更直接的证明。

对于 $\mathrm{K3}^{[n]}$ 型超K¨ähler 流形，Kuga–Satake 霍奇猜想目前仅对某些族已知：论文 [5] 证明了该猜想对可数多个四维 $\mathrm{K3}^{[3]}$ 型超K¨ähler 流形族成立。回顾一下，对于 $\mathrm{K3}^{[n]}$ 型超K¨ähler 流形，Charles 和 Markman [4]已证明 Lefschetz 标准猜想。因此，我们推得 [5]中出现的 $\mathrm{K3}^{[3]}$ 型超K¨ähler 流形的霍奇相似具有代数性。

最后补充说明，定理 0.3 中的流形 X 和 X' 既不假定具有相同的变形类型，也不假定维数相同。

Acknowledgements

我谨向我的博士导师 Daniel Huybrechts 致谢，感谢他对本文所作的修正以及提出的诸多建议。我也感谢 Charles Vial 审阅本文的初稿，并建议我在德拉姆–贝蒂类的背景下应用相似性。此外，感谢 Alice Garbagnati 和 Giacomo Mezzedimi 在格理论方面给予的帮助，也感谢 Eyal Markman 向我推荐了文章 [6]。本研究由 ERC 协同资助项目 HyperK 资助，资助协议编号为 854361。

1. 主要定义

本文中，所有簇均假定为射影簇。除非另有说明，我们所考虑的簇的定义域为 $\mathbb{C}$。

超 ¨Kähler 流形是一个单连通、射影、紧致的 K¨ähler 流形 X，其 $H^0(X, \Omega_X^2)$ 由处处非退化的辛形式生成。记 q_X 为 Beauville–Bogomolov 二次型，它是定义在 $H^2(X, \mathbb{Q})$ 上的非退化二次型。回忆一下，q_X 诱导出如下直和分解

$$H^2(X, \mathbb{Q}) = \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{Q}} \oplus T(X),$$

其中，NS(X) 是 X 的 N´éron–Severi 群，$T(X)$ 是 X 的超越格。在讨论超凯勒流形 X 的超越格时，我们始终指的是 $H^2(X, \mathbb{Q})$ 中的有理二次子空间 $T(X)$。数对 $(T(X), -q_X)$ 给出了 K3 型极化霍奇结构的一个例子：

定义 1.1. 权为二的有理霍奇结构 V 称为 K3 型，如果

$$\dim_{\mathbb{C}} V^{2,0} = 1, \text{ and } V^{p,q} = 0 \text{ for } |p - q| > 2.$$

此外，若一对 (V,q) 是 K3 型极化霍奇结构，且 $q\colon V\otimes V\to\mathbb{Q}(-2)$ 是霍奇结构态射，其实扩张在 $(V^{2,0}\oplus V^{0,2})\cap V_{\mathbb{R}}$上负定，并且符号差为 $(\dim V-2,2)$，则称该对为 K3 型极化霍奇结构。

设 $E:=\mathrm{End}^{\mathrm{Hdg}}(T(X))$ 为霍奇结构 $T(X)$ 的自同态代数。由于 $T(X)$ 是不可约霍奇结构，E 是一个域。如 [11, Thm. 3.3.7] 中所述，E 要么是全实域，要么是复乘域。回顾一下，若域扩张 E of $\mathbb{Q}$ 的每个嵌入$E\hookrightarrow\mathbb{C}$ 的像都包含在 $\mathbb{R}$ 中，则称其为全实；若 $E=F(\rho)$，其中 F 是全实域，且 ρ 满足以下条件，则称其为复乘：

$$\sigma(\rho)^2\in\sigma(F)\cap\mathbb{R}_{<0},\quad\forall\sigma\colon E\hookrightarrow\mathbb{C}.$$

这两种情形可通过 Rosati 对合的作用来区分；它是 E 上的对合，将元素 $e\in E$ 映射为满足下式的元素 $e'\in E$：

$$q_X(ev,w)=q_X(v,e'w),\quad\forall v,w\in T(X).$$

当 E 是全实域时，Rosati 对合是恒等映射；当 E 是复乘域时，它的作用是复共轭。

如文　引言中所述，本文聚焦于霍奇相似这一概念　　：

定义 1.2. 设 (V,q_V) 和 $(V',q_{V'})$ 是 K3 型极化霍奇结构，且设$\psi\colon\ V\to V'$ 是一个霍奇同构。若存在非零的 $\lambda_\psi\in\mathbb{Q}$ 使得 ψ，则称 ψ 是一个霍奇相似。

$$q_{V'}(\psi v,\psi w)=\lambda_\psi q_V(v,w),\quad\forall v,w\in V.$$

我们称 λ_ψ 为 ψ的乘子。乘子为 $\lambda_\psi=1$的霍奇相似 ψ 称为霍奇等距。

若两个超凯勒流形的超越格之间存在霍奇相似（分别地，霍奇等距），则称它们霍奇相似（分别地，霍奇等距）。注意，霍奇相似的乘子总是正数。

2. Symplectic automorphisms and algebraic Hodge similarities

设 X 是一个 K3 曲面，并记 q 为由交形式的负形式在 $T(X)$上给出的极化。通过 q将 $T(X)$与其对偶等同，我们得到

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Hdg}}(T(X))\simeq(T(X)\otimes T(X))^{2,2}\cap(T(X)\otimes T(X)).$$

这表明，证明 X^2 的霍奇猜想等价于证明 $\mathrm{End}^{\mathrm{Hdg}}(T(X))$ 中的每个元素都是代数的。本节将考虑具有辛自同构的 K3 曲面，并构造一些 K3 曲面 X，使得 $\mathbb{Q}(\sqrt{p})\subseteq\mathrm{End}^{\mathrm{Hdg}}(T(X))$，且可以证明其中的霍奇相似 $\sqrt{p}$ 是代数的。

出发点是以下观察：给定一个带有阶为 p 的辛自同构的 K3 曲面 X，存在一个 K3 曲面 Y以及一个代数的霍奇相似 $\varphi\colon\ T(Y)\to T(X)$，其乘子为 p。为证明这一点，回顾一下，根据 [11, 命题 15.3，11], 素数 p 至多为 7，σ_p 的不动点集是有限个点的并，且 X/σ_p 的极小解消是一个 K3 曲面Y。此外，Y 也可以如下得到：对 X 进行有限次爆破后

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\sigma}_p$的不动点集，得到一个带有自由作用 $\widetilde{\sigma}_p$ 的代数簇 X，并且 $Y \simeq X/\widetilde{\sigma}_p$。也就是说，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\beta} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X/\sigma_p \end{array} .$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$由于 $\pi\colon X \to Y$是次数为 p的有限映射，而 $\beta\colon X \to X$ 仅收缩例外除子，因此我们看到

$$\varphi := \beta_* \pi^* \colon T(Y) \to T(X)$$

是乘子为 p的霍奇相似。注意， φ 是代数的。由此构造，我们得出以下结论：

定理 2.1. 设 X 是一个 K3 曲面，与具有素数阶 p辛自同构的 K3 曲面霍奇等距。进一步假设 $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \subseteq \mathrm{End}^{\mathrm{Hdg}}(T(X))$。那么，霍奇相似 $\sqrt{p}$ 是代数的。

证明。由于根据 [3] 和 [12], ，K3 曲面之间的霍奇等距是代数的，我们可以假设X 具有一个阶为 p的辛自同构。设 ψ 是 $T(X)$上的乘子为p的霍奇相似；根据假设，由于 $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \subseteq \mathrm{End}^{\mathrm{Hdg}}(T(X))$，它确实存在。如上所述，记 Y为商 X/σ_p的极小解消，则映射 $\varphi := \beta_* \pi^* \colon T(Y) \to T(X)$是乘子为 p的霍奇相似。因此，复合映射 $\varphi^{-1} \circ \psi \colon T(X) \to T(Y)$是霍奇等距。特别地，根据 [3] 和 [12]， $\varphi^{-1} \circ \psi$ 是代数的。由于 φ 是代数的，我们得出$\psi = \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$ 是代数的。证明完毕。□

注 2.2。“X 与带有阶为 p 的辛自同构的 K3 曲面等距”和“ X 的自同态域包含 $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$”这两个条件彼此无关。事实上，具有阶为 p 的辛自同构的一般 K3 曲面，其自同态域等于 $\mathbb{Q}$。此外，注意到，“ X 的自同态域包含$\mathbb{Q}(\sqrt{p})$”这一要求等价于条件“X 存在一个乘子为 d 、且被 Rosati 对合固定的霍奇相似 ψ ”。事实上，若 ψ 是这样的霍奇相似，则 $\mathbb{Q}(\psi)$ 是 X的自同态域的一个全实子域。利用全实域没有非平凡等距这一事实，可知 ψ^2/d 是恒等映射，即 $\mathbb{Q}(\psi)$ 等于 $\simeq \mathbb{Q}(\sqrt{d})$。

在本节余下部分，我们将构造满足定理 2.1 假设的 K3 曲面族。为此，我们使用以下结果，该结果改编自 [9, 第 3], 节；我们在此给出详细证明，以供后续使用。

命题 2.3. 设 $d \in \mathbb{Z}$ 是一个非平方正整数，且 (Λ, q) 是符号差为 $(2, \Lambda - 2)$、维数为 $\dim \Lambda > 4$ 的有理二次空间。设 ψ 是 Λ 的一个乘子为 d 、且由 Rosati 对合固定的相似。则 Λ 是偶数维的，并且 Λ 上使 ψ 定义霍奇相似的 K3 型霍奇结构的轨迹，要么为空，要么维数为 $(\dim \Lambda)/2 - 2$。

证明。第一条陈述可直接由以下事实得到：如果 d 不是平方，则奇维二次空间不允许乘子为 d 的任何相似。

设 Λ 为偶维。正如注 2.2 中所见，对于 Λ 上满足 ψ 为霍奇态射的每个霍奇结构，$\mathbb{Q}(\psi) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 是 Λ 的自同态域的一个全实子域。

注意，Λ 可视为一个 $\mathbb{Q}(\psi)$-向量空间，也就是说 $\Lambda \simeq \mathbb{Q}(\psi)^{(\dim \Lambda)/2}$。对于 ψ 的作用，$\mathbb{Q}(\psi) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}_{\sqrt{d}} \oplus \mathbb{R}_{-\sqrt{d}}$ 分解为特征子空间的直和，进而诱导出一个分解

$$\Lambda_{\mathbb{R}} \simeq \Lambda_{\sqrt{d}} \oplus \Lambda_{-\sqrt{d}},$$

其中 $\Lambda_{\sqrt{d}} \coloneqq \{v \in \Lambda_{\mathbb{R}} \mid \psi v = \sqrt{d}v\}$，$\Lambda_{-\sqrt{d}}$也类似。注意，$\Lambda_{\sqrt{d}}$ 和 $\Lambda_{-\sqrt{d}}$ 的维数均为 $(\dim \Lambda)/2$。由 ψ 在 Rosati 对合下不变可知，该分解关于 $\Lambda_{\mathbb{R}}$上的二次型 q 是正交的。

回顾一下，在 Λ 上给出一个 K3 型霍奇结构，等价于在周期域中给出一个元素 ω

$$\Omega_{\Lambda} \coloneqq \{\omega \in \mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}}) \mid q(\omega) = 0, q(\omega, \overline{\omega}) > 0\}.$$

注意，ψ 定义霍奇结构态射，当且仅当 ω 是一个特征向量。因此，由于 $\Lambda_{\mathbb{R}} \simeq \Lambda_{\sqrt{d}} \oplus \Lambda_{-\sqrt{d}}$ 关于 q 正交，且 $(\Lambda^{2,\,0} \oplus \Lambda^{0,\,2}) \cap \Lambda_{\mathbb{R}}$ 必须正定，所以存在一种霍奇结构使得 ψ 是霍奇态射，当且仅当 $\Lambda_{-\sqrt{d}}$负定且 $\Lambda_{\sqrt{d}}$的符号差为 $(2, (\dim \Lambda)/2 - 2)$，反之亦然。假设$\psi$ 满足这一假设。那么，通过改变 ψ的符号，我们可以假设 $\Lambda_{\sqrt{d}}$ 的符号差为 $(2, (\dim \Lambda)/2 - 2)$。由此可知，$\psi$ 定义霍奇自同构，当且仅当该霍奇结构对应于以下元素

$$\{\omega \in \mathbb{P}\left((\Lambda_{\sqrt{d}})_{\mathbb{C}}\right) \mid q(\omega) = 0, q(\omega, \overline{\omega}) > 0\}.$$

因此，使 ψ 定义霍奇态射的 Λ 上霍奇结构所构成的轨迹，其维数等于 $\dim \Lambda_{\sqrt{d}} - 2 = (\dim \Lambda)/2 - 2$。□

注 2.4. 设 ψ 是命题 2.3 中乘子为 d 的相似。由命题 2.3 的证明可知，使 ψ 成为霍奇相似的 Λ 上 K3 型霍奇结构所构成的轨迹非空（因而维数为 $(\dim \Lambda)/2 - 2$），当且仅当 $\Lambda_{\sqrt{d}}$ 或 $\Lambda_{-\sqrt{d}}$ 是负定的。

我们利用命题 2.3 证明，满足定理 2.1 假设的 K3 曲面族，对于 $p = 2$ 至多是四维的，对于 $p = 3$ 至多是二维的。此外，我们给出具有这些最大维数的此类曲面族实例。正如我们将看到的，对于更大的 p，没有 K3 曲面满足定理 2.1 的假设。

我们从 $p = 2$ 的情形开始。按照 [10], ，我们称 K3 曲面上的辛对合为 Nikulin 对合。根据 [10, 命题 2.2，2.3], 一个 K3 曲面 X 存在 Nikulin 对合，当且仅当格 $E_8(-2)$ 本原嵌入到 X 的 N´eron–Severi 群中。注意，除去 K3 格的自同构的影响，$E_8(-2)$ 到 K3 格中的本原嵌入唯一。因此，由 [10, 第 1.3] 节可推得 $(E_8(-2))^{\perp} \simeq U^3 \oplus E_8(-2)$。由此，我们得到以下关于 X 的超越格的判别准则：

命题 2.5。K3 曲面 X 与一个存在 Nikulin 对合的 K3 曲面霍奇等距，当且仅当 $T(X) \subseteq U_{\mathbb{Q}}^3 \oplus E_8(-2)_{\mathbb{Q}}$.[1]

证明。我们先证明“仅当”部分。设 X 是一个 K3 曲面，使得对于某个带有 Nikulin 对合的 K3 曲面 X'， $T(X)$ 与 $T(X')$ 霍奇等距。根据 [10, 命题 2.2，2.3], 格 $E_8(-2)$ 本原嵌入于 $\mathrm{NS}(X')$ 中。因此，$\mathrm{NS}(X')^\perp \hookrightarrow E_8(-2)^\perp \simeq U^3 \oplus E_8(-2)$。在 $\mathbb{Q}$ 上，我们得出

$$T(X) \simeq T(X') \hookrightarrow U_{\mathbb{Q}}^3 \oplus E_8(-2)_{\mathbb{Q}}.$$

对于“若”部分，假设存在二次空间的嵌入

$$T(X) \hookrightarrow U_{\mathbb{Q}}^3 \oplus E_8(-2)_{\mathbb{Q}}.$$

记 $H^2(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{tr}}$ 为 X 的第二整系数上同调的超越部分。清除分母后，我们得到一个正整数 $\lambda \in \mathbb{Z}$，使得上述嵌入限制为格的嵌入

$$j\colon \lambda H^2(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{tr}} \hookrightarrow U^3 \oplus E_8(-2).$$

固定一个本原嵌入 $\iota\colon U^3 \oplus E_8(-2) \hookrightarrow H^2(X,\mathbb{Z})$，使得

$$\iota(U^3 \oplus E_8(-2))^\perp \simeq E_8(-2).$$

令 T' 为格 $(\iota \circ j)(H^2(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{tr}}) \subseteq H^2(X,\mathbb{Z})$ 的饱和。对于任意满足 X' $H^2(X',\mathbb{Z})_{\mathrm{tr}} \simeq T'$ 的 K3 曲面，我们得到一个嵌入

$$E_8(-2) \simeq (U^3 \oplus E_8(-2))^\perp \hookrightarrow (T')^\perp \simeq \mathrm{NS}(X').$$

由于 $E_8(-2)$ 是一个正交补，这个嵌入是本原的。因此，根据 [10, 命题 2.2, 2.3]，X' 具有一个 Nikulin 对合。注意， $T(X)$ 与 $T'_{\mathbb{Q}}$ 是等距的二次空间。因此，由周期映射的满射性可知，我们可以找到一个 K3 曲面 X'，使得 $H^2(X',\mathbb{Z})_{\mathrm{tr}} \simeq T'$，且 $T(X')$ 与 $T(X)$ 霍奇等距。由于 K3 曲面 X' 与 X 霍奇等距，并且具有所要求的 Nikulin 对合，故证明完毕。□

特别地，我们可以推得，与带有 Nikulin 对合的 K3 曲面霍奇等距的 K3 曲面的超越格至多为 13 维。随后，命题 2.3 表明，在 $p = 2$ 的情形下，满足定理 2.1 假设的 K3 曲面族至多为四维。为证明存在这样一个四维 K3 曲面族，我们考察 $U_{\mathbb{Q}}^3 \oplus E_8(-2)_{\mathbb{Q}}$ 的一个特定二次子空间，并证明它具有乘子为 2 的相似。

命题 2.6. 在 $\Lambda := U_{\mathbb{Q}}^2 \oplus E_8(-2)_{\mathbb{Q}}$ 上，存在一组 K3 型霍奇结构，其允许一个乘子为 2 且被 Rosati 对合固定的霍奇相似；这一结构的轨迹非空，并且含有一个四维分支。

[1]感谢 G. Mezzedimi 对这一论证的帮助。

证明。由于 $\dim \Lambda = 12$，命题 2.3 表明，在 Λ 上，允许一个乘子为 2 且被 Rosati 对合固定的霍奇相似的 K3 型霍奇结构的轨迹，若非空，则含有一个四维分支。根据注记 2.4，我们只需构造一个乘子为 2 且被 Rosati 对合固定的 Λ 的相似 ψ，使得 $\Lambda_{\sqrt{2}}$ 的符号差为 (2, 4)。

由于二次空间 $E_8(-2)_{\mathbb{Q}}$ 与 $\langle -2\rangle^8$ 等距，我们可以写成 $\Lambda = Q_1 \oplus Q_2 \oplus Q_3 \oplus Q_4 \oplus Q_5$，其中

$$Q_1 = Q_2 \coloneqq \langle 1\rangle \oplus \langle -1\rangle, \quad Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 \coloneqq \langle -2\rangle \oplus \langle -2\rangle.$$

与 [9, Exmp. 3.4], 中一样，我们只需寻找保持上述分解的相似变换 ψ。也就是说，我们寻找满足以下条件的矩阵 $M_i \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$：${}^tM_iQ_i = Q_iM_i$，且当 $i = 1$ 为 1，...，6 时，$M_i^2 = 2\,\mathrm{Id}$。于是，根据第一个条件，$\psi \coloneqq M_1 \oplus \ldots \oplus M_6$ 将在 Rosati 对合下保持不变，并且是乘子为 2 的相似变换。直接计算可知，下列矩阵满足上述所有条件

$$M_1 = M_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

且 $\Lambda_{\sqrt{2}}$ 的符号差为 (2, 4)。因此，ψ 满足所需性质。 □

例 2.7. 根据 [10, Sec.1 4], ，具有截面和二阶挠截面的椭圆 K3 曲面族，给出了一个十维 K3 曲面族的例子，其具有 Nikulin 对合，且一般超越格为 $\Lambda = U_{\mathbb{Q}}^2 \oplus \langle -2\rangle^8$。由命题 2.6，存在一个四维椭圆 K3 曲面族，其具有二阶挠截面，且自同态域包含 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$。

注 2.8. 可以构造 $U_{\mathbb{Q}}^3 \oplus E_8(-2)_{\mathbb{Q}}^2$ 的其他二次子空间，它们具有乘子为 2、且由 Rosati 对合固定的相似。例如，若 $d > 1$ 是一个无平方因子整数，且 2 是模 d 的二次剩余，则空间 $U_{\mathbb{Q}}^2 \oplus \langle -2\rangle^7 \oplus \langle -2d\rangle$ 具有乘子为 2 的相似，且与 $U_{\mathbb{Q}}^2 \oplus E_8(-2)_{\mathbb{Q}}$ 不等距。这为 $p = 2$ 提供了满足定理 2.1 假设的其他四维 K3 曲面族。

总而言之，我们的讨论表明，定理 2.1 在 Nikulin 对合的情形下给出如下结果：

2.9 定理。对于自同态域包含 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$、且与具有 Nikulin 对合的 K3 曲面霍奇等距的四维 K3 曲面族中的每一个 K3 曲面，自同态 $\sqrt{2}$ 是代数的。特别地，对一般的此类 K3 曲面，其平方满足霍奇猜想。

注 2.10. 唯一一种无法仅凭 2.9 定理证明题述 K3 曲面 X 的平方的霍奇猜想的情形是：X 的自同态域 E 是次数为四的全实域，且 $T(X)$ 是十二维的。这是由一个众所周知的事实得出的：若自同态域 E 是全实域，则 $T(X)$ 作为 E-向量空间的维数至少为三。回想一下，若 E 是 CM 域，则利用 E 由霍奇等距生成这一事实，X^2 的霍奇猜想可由 [3] 和 [12] 得出。与命题

2.3 类似，可以看出，2.9 定理中具有次数为四的全实自同态域的 K3 曲面族是一维的。

现在讨论 $p = 3$ 的情形。设 X 是具有三阶辛自同构的 K3 曲面， Y 是该商的极小解消。如上所述，我们有一个乘子为 3 的代数相似 $T(Y) \to T(X)$，且 $T(Y)$ 与 $T(X)(\frac{1}{3})$ 霍奇等距。根据 [7, 定理 4.1], ，K3 曲面 X 存在三阶辛自同构，当且仅当 $K_{12}(-2)$ 原始嵌入于 NS(X) 中，其中 $K_{12}(-2)$ 表示双线性形式乘以 -2 后的 Coxeter–Todd 格。按照与命题 2.5 类似的证明，我们可以将其改写为关于超越格的表述如下：

命题2.11. K3 曲面 X 与存在三阶辛自同构的 K3 曲面霍奇等距，当且仅当 $T(X) \subseteq U_{\mathbb{Q}}^3 \oplus (A_2)_{\mathbb{Q}}^2$。□

命题 2.3 表明，具有 $T(X) \subseteq U_{\mathbb{Q}}^3 \oplus (A_2)_{\mathbb{Q}}^2$、且其自同态域包含 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 的 K3 曲面族 X 至多是二维的。与 Nikulin 对合的情形一样，我们考虑 $U_{\mathbb{Q}}^3 \oplus (A_2)_{\mathbb{Q}}^2$ 的一个特定二次子空间，并证明它存在一个乘子为 3 的相似：

命题 2.12. $\Gamma := U_{\mathbb{Q}}^2 \oplus (A_2)_{\mathbb{Q}}^2$ 上的 K3 型霍奇结构所在的轨迹中，存在由 Rosati 对合固定的乘子为 3 的霍奇相似；该轨迹非空，且有一个二维分支。

证明. 与命题 2.6 的证明一样，我们将构造一个显式的 Γ 上的相似 ψ，其乘子为 3，且由 Rosati 对合固定，并使 $\Gamma_{\sqrt{3}}$ 的符号差为 (2, 2)。于是，由命题 2.3 和注 2.4， Γ 上使 ψ 成为霍奇态射的霍奇结构所在的轨迹有一个二维分支。

将二次空间 $(A_2)_{\mathbb{Q}}$ 对角化后，我们看到存在一个等距映射

$$\Gamma \simeq Q_1 \oplus Q_2 \oplus Q_3 \oplus Q_4,$$

满足 $Q_1 = Q_2 = \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle$ and $Q_3 = Q_4 = \langle -2 \rangle \oplus \langle -3/2 \rangle$。现在我们给出矩阵$M_1, M_2, M_3, M_4 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$，使得 ${}^t M_i Q_i = Q_i M_i$ and $M_i^2 = 3\mathrm{Id}$。可以验证，令

$$M_1 = M_2 := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ and } M_3 = M_4 := \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

映射 $\psi := M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4$ 定义了一个乘子为 3 的 Γ 的相似，并满足所有要求。□

例 2.13. 根据 [7, 命题 4.2], ，具有截面和一个三阶挠截面的椭圆 K3 曲面族，给出了一个六维 K3 曲面族的例子；该曲面族具有一个阶为 3 的辛自同构，且其一般超越格与 $\Gamma = U_{\mathbb{Q}}^2 \oplus (A_2)_{\mathbb{Q}}^2$ 等距。根据命题 2.12，存在一个二维 K3 曲面子族，其自同态域包含 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$。

注 2.14. 与 Nikulin 对合的情形一样，可以构造其他八维二次子空间 $U_{\mathbb{Q}}^3 \oplus (A_2)_{\mathbb{Q}}^2$，使其具有乘子为 3 的相似，如命题 2.12 的 Γ 所示。

我们的讨论表明，定理 2.1 在 $p = 3$ 的情形下给出如下结论：

定理 2.15. 对于每个属于二维 K3 曲面族的 K3 曲面，若其自同态域包含 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$，且与一个具有 3 阶辛自同构的 K3 曲面霍奇等距，则自同态 $\sqrt{3}$ 是代数的。特别地，每个这样的 K3 曲面的平方都满足霍奇猜想。

注 2.16. 请注意，在这种情况下，定理 2.15 证明了这些族中每个 K3 曲面的平方都满足霍奇猜想。这是因为这些 K3 曲面的超越格至多为八维。因此，通过类似于注 2.10 的论证，我们看到这类 K3 曲面的自同态域要么是 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$，要么是一个 CM 域。后一种情况下，K3 曲面的平方满足霍奇猜想，这是因为 CM 域由霍奇等距生成。

对于阶大于 3 的辛自同构，这一过程不会产生任何 K3 曲面。事实上，具有 5 阶或 7 阶辛自同构的 K3 曲面的自同态总是 $\mathbb{Q}$ 或一个复乘域。这可由 [7, 命题 1.1] 推得：具有 5 阶辛自同构的 K3 曲面的超越格维数至多为五，而具有 7 阶辛自同构的 K3 曲面的超越格维数至多为三。如备注 2.10 所示，在这两种情况下，这些 K3 曲面的自同态域不可能是不同于 $\mathbb{Q}$ 的全实域。

3. Kuga–Satake varieties and Hodge similarities

根据 Kuga 和 Satake 的构造 [14], , 给定一个 K3 型极化霍奇结构（V， q），就存在一个阿贝尔簇 KS(V)，称为（V， q）的 Kuga–Satake 簇，并带有一个霍奇结构嵌入 κ: $V \hookrightarrow H^1(\mathrm{KS}(V)\ \mathbb{Q})^{\otimes 2}$. 。关于这一构造，读者可参阅 [11, 第 4], [8], 章和 [21]。本节将证明 Kuga–Satake 构造关于霍奇相似的函子性：

命题 3.1. 设 ψ: $(V, q) \to (V', q')$ 是 K3 型极化霍奇结构之间的霍奇相似。则存在阿贝尔簇的一个同源 ψ_{KS}: KS(V) $\to$ KS(V')，使下图交换

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & V' \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathrm{KS}(V), \mathbb{Q})^{\otimes 2} & \xrightarrow{(\psi_{\mathrm{KS}})_*^{\otimes 2}} & H^1(\mathrm{KS}(V'), \mathbb{Q})^{\otimes 2} \end{array},$$

其中，竖直箭头是 (V, q) 和 (V', q') 的 Kuga–Satake 对应。

在本节余下部分，我们证明命题 3.1。

设 (V,q) 和 (V',q') 是 K3 型极化霍奇结构，并设 $\psi\colon (V,q)\to(V',q')$ 是乘子为 λ_ψ 的霍奇相似。下一个引理表明，ψ 在偶克利福德代数 $\mathrm{Cl}^+(V)$ 和 $\mathrm{Cl}^+(V')$ 之间诱导出一个同构。回忆一下，$\mathrm{Cl}^+(V)$ 定义为 $\bigotimes^* V/I_V$ 的偶次数部分，其中 I_V 是由形如 $v\otimes v-q(v)$ 的元素生成的双边理想，$v\in V$。

引理3.2。分次环的同构

$$\psi_\otimes\colon \bigotimes^{\mathrm{ev}} V\to\bigotimes^{\mathrm{ev}} V',\quad v_1\otimes\cdots\otimes v_{2m}\mapsto(1/\lambda_\psi)^m\psi v_1\otimes\cdots\otimes\psi v_{2m}$$

诱导出一个同构 $\psi_{\mathrm{Cl}}\colon \mathrm{Cl}^+(V)\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Cl}^+(V')$.

证明。根据定义，很容易看出映射 $\psi_\otimes$ 是分次环的同构。给定 $v\in V$，我们有如下

$$\begin{aligned}\psi_\otimes(v\otimes v-q(v))&=(1/\lambda_\psi)(\psi v\otimes\psi v)-q(v)=(1/\lambda_\psi)(\psi v\otimes\psi v-\lambda_\psi q(v))\\&=(1/\lambda_\psi)(\psi v\otimes\psi v-q'(\psi v)),\end{aligned}$$

其中在最后一步，我们用到了 ψ 是乘子为 λ_ψ的相似。这个等式表明，$\psi_\otimes(v\otimes v-q(v))$ 属于由 $w\otimes w-q'(w)$ 生成的 $\bigotimes^{\mathrm{ev}} V'$ 的理想，其中 $w\in V'$。因此，同构 $\psi_\otimes$ 下降为同构 $\psi_{\mathrm{Cl}}\colon \mathrm{Cl}^+(V)\to\mathrm{Cl}^+(V')$。□

在构造与 K3 型极化霍奇结构相关的 Kuga–Satake 簇时，$\mathrm{Cl}^+(V)_{\mathbb{R}}$ 上的复霍奇结构由左乘 $J:=e_1\cdot e_2$ 给出，其中 $\{e_1,e_2\}$ 是 $V_{\mathbb{R}}\cap(V^{2,0}\oplus V^{0,2})$ 的一组正交基，满足 $q(e_1)=q(e_2)=-1$。容易验证，这个复结构不依赖于基的选择。

引理 3.3. 映射 $\psi_{\mathrm{Cl},\mathbb{R}}\colon \mathrm{Cl}^+(V)_{\mathbb{R}}\to\mathrm{Cl}^+(V')_{\mathbb{R}}$ 与 $\mathrm{Cl}^+(V)_{\mathbb{R}}$ 和 $\mathrm{Cl}^+(V')_{\mathbb{R}}$ 上的自然复结构相容。

证明。设 $\{e_1,e_2\}$ 是 $V_{\mathbb{R}}\cap(V^{2,0}\oplus V^{0,2})$ 的一组正交基，满足 $q(e_i)=-1$，并定义 e

$$e_i':=\psi_{\mathbb{R}}e_i/\sqrt{\lambda_\psi}\in V'_{\mathbb{R}}\cap(V'^{2,0}\oplus V'^{0,2}),\quad\text{for } i=1,2.$$

由于 ψ 是乘子为 λ_ψ 的霍奇相似，可知 $\{e_1',e_2'\}$ 是 $V'_{\mathbb{R}}\cap(V'^{2,0}\oplus V'^{0,2})$ 的一组正交基，且满足 $q'(e_i')=-1$。$\mathrm{Cl}^+(V)_{\mathbb{R}}$ 上的复结构（相应地，$\mathrm{Cl}^+(V')_{\mathbb{R}}$ 上的复结构）由 $J:=e_1\cdot e_2$ 的左乘（相应地，由 $J':=e_1'\cdot e_2'$）诱导。因此，等式

$$\psi_{\mathrm{Cl},\mathbb{R}}(J\cdot x)=J'\cdot\psi_{\mathrm{Cl},\mathbb{R}}(x)\quad\forall x\in\mathrm{Cl}^+(V)$$

证明 $\psi_{\mathrm{Cl},\mathbb{R}}$ 是复向量空间之间的态射。□

(V,q) 的 Kuga–Satake 簇定义为复环面 $\mathrm{KS}(V)$ 的（同源类）：$=\mathrm{Cl}^+(V)_{\mathbb{R}}/\mathrm{Cl}^+(V)$，其中 $\mathrm{Cl}^+(V)_{\mathbb{R}}$ 赋予了我们上文回顾过的复结构。由引理 3.3 可知，$\psi_{\mathrm{Cl}}\colon \mathrm{Cl}^+(V)\to\mathrm{Cl}^+(V')$ 诱导出复环面的同源。

$$\psi_{\mathrm{KS}}\colon \mathrm{KS}(V)\to\mathrm{KS}(V').$$

回顾一下，K3 型极化霍奇结构的 Kuga–Satake 簇是阿贝尔簇：设 $(f_1, f_2) \in V \times V$ 是 V 中一对正交元素，且它们的平方为正，并考虑配对

$$Q\colon \mathrm{Cl}^+(V) \times \mathrm{Cl}^+(V) \to \mathbb{Q}, \quad (v, w) \to \mathrm{tr}(f_1 \cdot f_2 \cdot v^* \cdot w),$$

其中，$\mathrm{tr}(x)$表示由 $x \in$ 左乘$^+(V)$中的元素$^+(V)$所定义的自同态的迹，而 v^* 表示 v 在 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_{2m} \mapsto v_{2m} \otimes \cdots \otimes v_1$ 作用于 $\bigotimes^{\mathrm{ev}} V$所诱导的$^+(V)$上的对合下的像。于是， Q 在符号意义下为权一霍奇结构$^+(V)$定义了一个极化。注意，数对（$\psi f_1/\lambda_\psi$， ψf_2） $\in V' \times V'$ 满足相同的假设。因此，它在$^+(V')$上定义了一个极化 Q' 。

引理 3.4. 同构 ψ_{Cl}：$^+(V) \to {}^+(V')$与上述极化Q 和 Q' 相容。因此， ψ_{KS}：$\mathrm{KS}(V) \to \mathrm{KS}(V')$ 是阿贝尔簇之间的同源。

证明。为了证明该引理，我们需要证明

$$Q(v, w) = Q'(\psi_{\mathrm{Cl}} v, \psi_{\mathrm{Cl}} w),$$

对于所有 $v, w \in \mathrm{Cl}^+(V)$ 都成立。根据 Q 和 Q'的定义，这等价于证明

$$\mathrm{tr}(f_1 \cdot f_2 \cdot v^* \cdot w) = \mathrm{tr}(\psi f_1/\lambda_\psi \cdot \psi f_2 \cdot (\psi_{\mathrm{Cl}} v)^* \cdot \psi_{\mathrm{Cl}} w).$$

注意，根据 ψ_{Cl}的定义，以下结论成立

$$\psi f_1/\lambda_\psi \cdot \psi f_2 \cdot (\psi_{\mathrm{Cl}} v)^* \cdot \psi_{\mathrm{Cl}} w = \psi_{\mathrm{Cl}}(f_1 \cdot f_2 \cdot v^* \cdot w).$$

接下来需要证明，对于每个 $x \in \mathrm{Cl}^+(V)$， x 在 $\mathrm{Cl}^+(V)$ 上的左乘与 $\psi_{\mathrm{Cl}} x$ 在 $\mathrm{Cl}^+(V')$ 上的左乘具有相同的迹。验证如下：设 $\{b_i\}_i$ 是 $\mathrm{Cl}^+(V)$ 的一组基，其对偶基为 $\{b^i\}_i$。根据定义，有

$$\mathrm{tr}(x) = \Sigma_i b^i (x \cdot b_i)$$

将 $\{\psi_{\mathrm{Cl}} b_i\}_i$视为 $\mathrm{Cl}^+(V')$ 的一组基。其对偶基为 $\{\psi_{\mathrm{Cl}}^\vee b^i\}_i$，其中 $\psi_{\mathrm{Cl}}^\vee$ 是 ψ_{Cl}的对偶作用。 $\psi_{\mathrm{Cl}} x$ 的左乘的迹于是为

$$\mathrm{tr}(\psi_{\mathrm{Cl}} x) = \Sigma_i (\psi_{\mathrm{Cl}}^\vee b^i)(\psi_{\mathrm{Cl}} x \cdot \psi_{\mathrm{Cl}} b_i) = \Sigma_i b^i (x \cdot b_i) = \mathrm{tr}(x).$$

证明完毕。 □

命题 3.1 的证明所需的最后一个要素，是 Kuga–Satake 构造给出的同构ψ_{Cl} 与嵌入 φ_V的相容性： $V \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{Cl}^+(V))$。回顾一下， φ_V 定义如下：设 $v_0 \in V$ 为一个满足 $q(v_0) \neq 0$的元素，则 $\varphi_V(v) := f_v \in \mathrm{End}(\mathrm{Cl}^+(V))$，其中 $f_v(w) := v \cdot w \cdot v_0$。类似地，设 $\varphi_{V'}$： $V' \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{Cl}^+(V'))$为与元素 $\psi(v_0)/\lambda_\psi \in V'$相对应的嵌入。

引理 3.5. 沿用前面的记号，下图是交换图

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & V' \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_V} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{V'}} \\ \mathrm{End}(\mathrm{Cl}^+(V)) & \xrightarrow{\mathrm{End}(\psi_{\mathrm{Cl}})} & \mathrm{End}(\mathrm{Cl}^+(V')) \end{array},$$

其中 $\mathrm{End}(\psi_{\mathrm{Cl}})$ 是映射 $f \mapsto \psi_{\mathrm{Cl}} \circ f \circ \psi^{-1}$ Cl 。

证明。根据定义， φ_V 与 $\mathrm{End}(\psi_{\mathrm{Cl}})$ 的复合是映射

$$V \to \mathrm{End}(\mathrm{Cl}^+(V')), \quad v \mapsto (w' \mapsto \psi(v) \cdot w' \cdot \psi(v_0)/\lambda_\psi).$$

这表明上述正方形是交换的。事实上， $\varphi_{V'}$ 是映射

$$V' \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{Cl}^+(V')), \quad v' \mapsto (w' \mapsto v' \cdot w' \cdot \psi(v_0)/\lambda_\psi). \qquad \square$$

命题 3.1 的证明。引理 3.4 表明存在阿贝尔簇的同源ψ_{KS}: $\mathrm{KS}(V) \to \mathrm{KS}(V')$，使得 $(\psi_{\mathrm{KS}})_* = \psi_{\mathrm{Cl}}$： $\mathrm{Cl}^+(V) \to \mathrm{Cl}^+(V')$。回顾 Kuga–Satake 嵌入是复合

$$V \xhookrightarrow{\varphi_V} \mathrm{End}(\mathrm{Cl}^+(V)) \simeq \mathrm{Cl}^+(V) \otimes \mathrm{Cl}^+(V),$$

其中同构由 $\mathrm{Cl}^+(V)$ 上的极化 Q 给出，它诱导 $\mathrm{Cl}^+(V)$ 与 $\mathrm{Cl}^+(V)^*$ 之间的同构。注意，定理中正方形的交换性由引理 4.4 中正方形的交换性得出，这是由于 ψ_{Cl} 与极化 Q 和 Q' 的相容性。□

3.1. de Rham–Betti相似。在 [13, Thm. 9.5], 中，作者利用 Kuga–Satake 对应是动机的这一事实，证明了定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上的两个超凯勒流形的第二 de Rham–Betti上同调群之间的 de Rham–Betti等距在 André 的意义下是动机的。我们在此指出，两个二次空间之间的相似诱导相应偶克利福德代数之间的同构这一观察表明， [13] 中的结果可推广到 de Rham–Betti相似。

让我们简要回顾 [13] 中介绍的 de Rham–Betti 态射和动机循环的概念。为简化叙述，我们不深入讨论 Tannakian 形式主义的细节。

定义 3.6. 设 X 是定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上的光滑射影簇，并设 $\mathbb{Q}(k) := (2\pi i)^k\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$。 X 的 de Rham–Betti 上同调群是由以下三元组构成的

$$H^n_{\mathrm{dRB}}(X, \mathbb{Q}(k)) := (H^n_{\mathrm{dR}}(X/\overline{\mathbb{Q}}), H^n_{\mathrm{B}}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(k)), c_X),$$

其中

$$c_X : H^n_{\mathrm{dR}}(X/\overline{\mathbb{Q}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} H^n_{\mathrm{B}}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(k)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

是 Grothendieck周期比较同构。给定另一个定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上的光滑射影代 X' 数簇， $H^n_{\mathrm{dRB}}(X, \mathbb{Q}(k))$ 与 $H^n_{\mathrm{dRB}}(X', \mathbb{Q}(k))$ 之间的 de Rham–Betti 态射由一对态射构成

$$f_{\mathrm{dR}} : H^n_{\mathrm{dR}}, (X/\overline{\mathbb{Q}}) \to H^n_{\mathrm{dR}}(X'/\overline{\mathbb{Q}}) \quad \text{and} \quad f_B : H^n_{\mathrm{B}}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(k)) \to H^n_{\mathrm{B}}(X'_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(k)),$$

其中 f_{dR} 是 $\overline{\mathbb{Q}}$-线性的， f_B 是 $\mathbb{Q}$-线性的，并且它们的 $\mathbb{C}$-线性扩张与 c_X 和 $c_{X'}$ 相容。

定义 3.7. 设 X 是定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$上的光滑射影簇。在 X 上的动机循环是 $H^{2r}_{\mathrm{B}}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(r))$ 中形如 $p_{X,*}(\alpha \cup *_L \beta)$ 的元素，其中 α和 β是某个定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$上的光滑射影簇 Y在 $X \times_{\overline{\mathbb{Q}}} Y$上的代数循环， $*_L$ 是 Lefschetz同构的逆，而 $p_{X,*}$ 是第一投影。注意，给定 $H^{2k}_{\mathrm{B}}(X, \mathbb{Q}(k))$ 中的一个动机循环 α_{B} ,

存在一个德拉姆上同调类 α_{dR}，属于 $H^{2k}_{\mathrm{dR}}(X/\overline{\mathbb{Q}})$，使得 $c_X(\alpha_{\mathrm{dR}}) = \alpha_{\mathrm{B}}$。特别地，我们看到，$X \times_{\overline{\mathbb{Q}}} Y$ 上的动机循环会在 X 和 Y的德拉姆–贝蒂上同调之间诱导一个 de Rham–Betti态射。若两个定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上的光滑射影簇 X 和 Y 的上同调群之间的 de Rham–Betti态射由 $X \times_{\overline{\mathbb{Q}}} Y$上的动机循环诱导，则称该态射是动机的。关于这一主题的完整介绍，请参阅 [2]。

按照 [13], , 定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上的代数簇称为定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上的超克雷帕流形，若其基变换至 $\mathbb{C}$ 后是第二贝蒂数至少为三的超克雷帕流形。最后这一假设是必要的，以确保 Kuga–Satake 对应是有动机的，正如 Andr´e [1] 所证明的那样。以下命题推广了 [13, Thm. 9.5] 的结果。

命题 3.8. 设 X 和 X' 是定义在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上的超克雷帕流形。那么，任意德拉姆–贝蒂相似 $H^2_{\mathrm{dRB}}(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} H^2_{\mathrm{dRB}}(X',\mathbb{Q})$ 都是有动机的。

证明。这个定理的证明与参考文献中的证明完全相同，唯一增加之处在于，相似（而不仅仅是等距）会在偶克利福德代数之间诱导同构。这里我们仅给出证明梗概。

设 $H^2_{\mathrm{dRB}}(X,\overline{\mathbb{Q}})$ 为 X 的第二个 $\overline{\mathbb{Q}}$-德拉姆–贝蒂上同调群。也就是说

$$H^2_{\mathrm{dRB}}(X,\overline{\mathbb{Q}}) \coloneqq (H^2_{\mathrm{dR}}(X/\overline{\mathbb{Q}}), H^2_{\mathrm{B}}(X_{\mathbb{C}},\overline{\mathbb{Q}}), c_X).$$

类似地定义 $H^2_{\mathrm{dRB}}(X',\overline{\mathbb{Q}})$。由 [13, 引理 6.2, 6.17], , 要证明该定理，只需证明 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上的同一结论。也就是说，$H^2_{\mathrm{dRB}}(X,\overline{\mathbb{Q}})$ 与 $H^2_{\mathrm{dRB}}(X',\overline{\mathbb{Q}})$ 之间的每个 $\overline{\mathbb{Q}}$-德拉姆–贝蒂相似，都是 $X \times_{\overline{\mathbb{Q}}} X'$ 上动机循环的 $\overline{\mathbb{Q}}$- 线性组合。

设 $T^2_{\mathrm{dRB}}(X,\overline{\mathbb{Q}})$ 为 $H^2_{\mathrm{dRB}}(X,\overline{\mathbb{Q}})$ 中由除子类张成的子空间的正交补，并类似地定义 $T^2_{\mathrm{dRB}}(X',\overline{\mathbb{Q}})$。如参考文献中所示，要证明该结论，只需证明 $T^2_{\mathrm{dRB}}(X,\overline{\mathbb{Q}})$ 与$T^2_{\mathrm{dRB}}(X',\overline{\mathbb{Q}})$ 之间的每个德拉姆–贝蒂相似都是 $\overline{\mathbb{Q}}$-动机的。

考虑 $\overline{\mathbb{Q}}$-线性范畴 $\mathscr{C}_{\overline{\mathbb{Q}}-\mathrm{dRB}}$，其对象是三元组 $(M_{\mathrm{dR}}, M_{\mathrm{B}}, c_M)$，其中 M_{dR}和 M_{B} 是有限维的 $\overline{\mathbb{Q}}$-向量空间，并且

$$c_M \colon M_{\mathrm{dR}} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C} \to M_{\mathrm{B}} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}$$

是一个 $\mathbb{C}$-线性同构。如 [13, 第 4.3], 节所示，$\mathscr{C}_{\overline{\mathbb{Q}}-\mathrm{dRB}}$ 是一个中性丹纳基安范畴。记其丹纳基安基本群为 $G_{\overline{\mathbb{Q}}-\mathrm{dRB}}$。注意，$T^2_{\mathrm{dRB}}(X,\overline{\mathbb{Q}})$ 和$T^2_{\mathrm{dRB}}(X',\overline{\mathbb{Q}})$ 是 $\mathscr{C}_{\overline{\mathbb{Q}}-\mathrm{dRB}}$中的对象。

记 $V \coloneqq T^2_{\mathrm{B}}(X,\mathbb{Q}(1))$ 和 $V' \coloneqq T^2{}_{\mathrm{B}}(X',\mathbb{Q}(1))$ 分别为 X和 X'的超越Betti上同调。给定一个 $\overline{\mathbb{Q}}$-德拉姆–贝蒂相似 $\psi_{\mathrm{dRB}} \colon T^2_{\mathrm{dRB}}(X,\overline{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\simeq} T^2_{\mathrm{dRB}}(X',\overline{\mathbb{Q}})$，它诱导出一个相似

$$\psi \colon V \otimes \overline{\mathbb{Q}} \to V' \otimes \overline{\mathbb{Q}}.$$

由于 ψ_{dRB} 是 $\mathscr{C}_{\overline{\mathbb{Q}}-\mathrm{dRB}}$中的态射，态射 ψ 是 $G_{\overline{\mathbb{Q}}-\mathrm{dRB}}$-不变的，由Tannakian形式主义。采用与引理3.2中相同的定义，我们看到 ψ 诱导了一个 $G_{\overline{\mathbb{Q}}-\mathrm{dRB}}$-不变的代数同构

$$\psi_{\mathrm{Cl}} \colon \mathrm{Cl}^+(V \otimes \overline{\mathbb{Q}}) \to \mathrm{Cl}^+(V' \otimes \overline{\mathbb{Q}}).$$

与参考文献中一样，接下来证明这诱导出一个 $G_{\overline{\mathbb{Q}}-\mathrm{dRB}}$-不变的代数同构 $J\colon \mathrm{End}(\mathrm{Cl}(V)\otimes\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathrm{End}(\mathrm{Cl}(V')\otimes\overline{\mathbb{Q}})$。接下来证明 J 是 $\overline{\mathbb{Q}}$-动机的。这又利用 Kuga–Satake 对应是$\overline{\mathbb{Q}}$-动机的这一事实，推出 ψ 是 $\overline{\mathbb{Q}}$-动机的；这一点已在 [13, 命题 8.5] 中证明。证明至此完成。□

4. Hodge similarities and algebraic classes

我们现在回到定义在 $\mathbb{C}$ 上的超凯勒流形的情形，并研究当霍奇结构 (V,q) 为几何的时，Kuga–Satake构造相对于霍奇相似的函子性所带来的后果。换句话说，我们假设存在一个超凯勒流形 X，使得 $V=T(X)$ 或 $V=H^2(X,\mathbb{Q})$，且 q 是符号改变后的 Beauville–Bogomolov 二次型。

注记 4.1. 在第 3 节中，我们研究了 K3 型极化霍奇结构的 Kuga–Satake构造。同一构造也适用于超凯勒流形 X 的第二上同调群，即使它并未被 Beauville–Bogomolov 二次型极化。事实上，利用直和分解 $H^2(X,\mathbb{Q})\simeq T(X)\oplus \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{Q}}$，可以看出 $H^2(X,\mathbb{Q})$ 的偶克利福德代数是 $T(X)$ 的偶克利福德代数的幂。因此，Kuga–Satake 簇 $\mathrm{KS}(H^2(X,\mathbb{Q}))$ 是一个同源于 $\mathrm{KS}(T(X))$ 的幂的阿贝尔簇。

令 $\mathrm{KS}(X)$ 为 $H^2(X,\mathbb{Q})$ 的 Kuga–Satake 簇。Kuga–Satake 对应给出一个霍奇结构嵌入：

$$\kappa_X\colon H^2(X,\mathbb{Q})\hookrightarrow H^1(\mathrm{KS}(X),\mathbb{Q})^{\otimes 2}\subseteq H^2(\mathrm{KS}(X)^2,\mathbb{Q}).$$

霍奇猜想预言 κ_X 是代数的：

猜想4.2（Kuga–Satake 霍奇猜想）。设 X 是一个超K¨ahler 流形，那么，Kuga–Satake 对应 κ_X 是代数的。

注4.3。注意，Kuga–Satake 对应取决于第 3 节中所述的三个元素 $v_0,f_1,f_2\in T(X)$ 的选择。选择不同的 $\widetilde{v}_0\in T(X)$ 会通过 $\mathrm{Cl}^+(H^2(X,\mathbb{Q}))$ 的自同构改变嵌入，该自同构将 w 变为 $\frac{w\cdot v_0\cdot\widetilde{v}_0}{q\ v_0}$ ；而选择不同的一对 $f_1,f_2\in T(X)$，则对应于改变复环面 $\mathrm{KS}(X)$ 上的极化。然而，这两种操作都不会影响 κ_X 的代数性。因此，猜想4.2 不依赖于定义 κ_X 时所作的选择。

令 $2n:=$ 维 X 且 $N:=$ 维 $\mathrm{KS}(X)$。κ_X 的 $\kappa_X^\vee$ 的转置是满射

$$\kappa_X^\vee\colon H^{4N-2}(\mathrm{KS}(X)^2,\mathbb{Q})\twoheadrightarrow H^{4n-2}(X,\mathbb{Q}).$$

注意，由于 κ_X 和 $\kappa_X^\vee$ 互为转置，κ_X 是代数的当且仅当 $\kappa_X^\vee$ 是代数的。令 $h_X\in H^2(X,\mathbb{Q})$为 X 上一个丰沛除子的上同调类。根据强 Lefschetz 定理，与 h_X^{2n-1} 作杯积诱导出一个霍奇结构同构

$$h_X^{2n-1}\cup\bullet\colon H^2(X,\mathbb{Q})\to H^{4n-2}(X,\mathbb{Q})(2n-2),$$

其中，$(2n-2)$ 表示按 $\mathbb{Q}(2n-2)$ 进行的 Tate 扭曲。令

$$\delta_X:=(h_X^{2n-1}\cup\bullet)^{-1}\colon H^{4n-2}(X,\mathbb{Q})(2n-2)\to H^2(X,\mathbb{Q})$$

为逆映射。由于 $h_X^{2n-1}\cup\bullet$ 是霍奇结构同构， δ_X 也是霍奇结构同构。请注意，一般而言，我们并不知道 δ_X 是否为代数的。通过调整 [22, 引理 3.4], 的证明，我们证明 κ_X 和 $\kappa_X^\vee$ 满足以下条件：

引理 4.4. 设 X 是一个维数为 $2n$ 的超克ähler流形，并设 $h_{\mathrm{KS}}\in H^2(\mathrm{KS}(X),\mathbb{Q})$ 是 $\mathrm{KS}(X)$ 上一个丰沛除子的类。记 φ 为复合映射在 $T(X)$ 上的限制

$$\delta_X\circ\kappa_X^\vee\circ(h_{\mathrm{KS}}^{2N-2}\cup\bullet)\circ\kappa_X\colon H^2(X,\mathbb{Q})\to H^2(X,\mathbb{Q}).$$

那么， φ 是恒等映射 $\mathrm{Id}^{T(X)}\colon T(X)\to T(X)$ 的一个非零有理倍数。

证明. 首先证明 φ 是一个霍奇自同构。注意，按构造， φ 是一个霍奇结构态射。因此，它是 $T(X)$ 的自同态域中的一个元素。由于 $T(X)$ 是一个不可约霍奇结构，每个非平凡自同态都是自同构。特别地，我们只需证明 φ 非零。由于 $\delta_X\colon H^{4n-2}(X,\mathbb{Q})(2n-2)\to H^2(X,\mathbb{Q})$ 是一个霍奇结构同构，只需证明映射

$$\left(\kappa_X^\vee\circ(h_{\mathrm{KS}}^{2N-2}\cup\bullet)\circ\kappa_X\right)\Big|_{T(X)}\colon T(X)\to H^{4n-2}(X,\mathbb{Q})$$

非零。设 $\omega\in H^{2,0}(X)$ 为辛形式的类。由于 κ_X 和 $\kappa_X^\vee$ 关于霍奇–黎曼配对是伴随的，我们有以下等式

$$\langle\omega,\kappa_X^\vee\circ(h_{\mathrm{KS}}^{2N-2}\cup\bullet)\circ\kappa_X(\overline{\omega})\rangle_X=\langle\kappa_X(\omega),(h_{\mathrm{KS}}^{2N-2}\cup\bullet)\circ\kappa_X(\overline{\omega})\rangle_{\mathrm{KS}(X)}.$$

由霍奇–黎曼关系，右边非零，因为由 κ_X 的单射性， $0\neq\kappa_X(\omega)\in H^{2,0}(\mathrm{KS}(X))$。特别地，我们得出 $\kappa_X^\vee\circ(h^{2N-2}{}_{\mathrm{KS}}\cup\bullet)\circ\kappa_X(\overline{\omega})\neq 0$。这意味着 $\kappa_X^\vee\circ(h^{2N-2}{}_{\mathrm{KS}}\cup\bullet)\circ\kappa_X$ 限制于 $T(X)$ 非零，并证明了引理的第一个陈述。

为证明 φ 是恒等映射的有理倍数，我们首先假设 X 是穆福德–泰特一般的。在此情形下，$\mathrm{End}^{\mathrm{Hdg}}(T(X))=\mathbb{Q}$。因此，该陈述是显然的，因为每个霍奇自同构都是恒等映射的有理倍数。对于特殊情形，只需注意到可以在极化超凯勒流形的模空间中将配对 (X,h_X) 形变到配对 $(X',h_{X'})$，其中 X' 是穆福德–泰特一般的。然后，由于 φ 定义中涉及的所有映射都在族中形变，$(X',h_{X'})$ 的陈述立即蕴含 (X,h_X) 的陈述。□

现在，我们终于具备了证明本节主定理所需的一切工具：

定理 4.5. 设 X' 和 X 是满足 Kuga–Satake 霍奇猜想的两个超K ¨ahler 流形。那么，对于每个霍奇相似 $\psi\colon T(X')\to T(X)$，其复合映射

$$T(X')\xrightarrow{\psi}T(X)\xrightarrow{h_X^{2n-2}\cup\bullet}H^{4n-2}(X,\mathbb{Q})$$

是代数的，其中 $2n\coloneqq\dim X$。

证明。根据命题 3.1 中 Kuga–Satake 对应的函子性，相似映射 $\psi\colon T(X')\to T(X)$ 诱导出一个同源 $\psi_{\mathrm{KS}}\colon\mathrm{KS}(X')\to\mathrm{KS}(X)$，使得所诱导的同构

$$(\psi_{\mathrm{KS}})_*^{\otimes 2}\colon H^1(\mathrm{KS}(X'),\mathbb{Q})^{\otimes 2}\to H^1(\mathrm{KS}(X),\mathbb{Q})^{\otimes 2}$$

使下图交换:

$$
\begin{array}{ccc}
T(X') & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & T(X) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \kappa_{X'}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \kappa_X} \\
H^1(\mathrm{KS}(X'),\mathbb{Q})^{\otimes 2} & \xrightarrow{(\psi_{\mathrm{KS}})_*^{\otimes 2}} & H^1(\mathrm{KS}(X),\mathbb{Q})^{\otimes 2}
\end{array}
\tag{1}
$$

其中 $\kappa_{X'}$（分别地， κ_X）是 T（X'）的 Kuga–Satake 对应（分别地， T（X）的 Kuga–Satake 对应）。由引理 4.4，自同构 φ of T（X）使下图交换

$$
\begin{array}{ccc}
T(X) & \xrightarrow{(h_X^{2n-2}\cup\bullet)\circ\varphi} & H^{4n-2}(X,\mathbb{Q}) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \kappa_X} & & {\scriptstyle \kappa_X^\vee}\big\uparrow \\
H^2(\mathrm{KS}(X)^2,\mathbb{Q}) & \xrightarrow{h_{\mathrm{KS}}^{2N-2}\cup\bullet} & H^{2N-2}(\mathrm{KS}(X)^2,\mathbb{Q})
\end{array}
\tag{2}
$$

T方块 (1) 和 (2) 的交换性意味着下列等式成立 s

$$(h_X^{2n-2}\cup\bullet)\circ\varphi\circ\psi = \kappa_X^\vee\circ(h_{\mathrm{KS}}^{N-2}\cup\bullet)\circ(\psi_{\mathrm{KS}})_*^{\otimes 2}\circ\kappa_{X'}.$$

注意，等式右侧是代数的：$(\psi_{\mathrm{KS}})_*^{\otimes 2}$由阿贝尔簇之间的一个同源诱导，且根据假设， $\kappa_X^\vee$ 和 $\kappa_{X'}$ 是代数的。因此我们得到复合

$$(h_X^{2n-2}\cup\bullet)\circ\varphi\circ\psi\colon T(X')\to H^{4n-2}(X,\mathbb{Q})$$

也是代数的。也就是说，存在一个循环 $\Gamma\in \mathrm{CH}^*(X'\times X)$，它诱导态射

$$[\Gamma]_* = (h_X^{2n-2}\cup\bullet)\circ\varphi\circ\psi\colon T(X')\to H^{4n-2}(X,\mathbb{Q}).$$

由引理 4.4，自同构 φ is 等于 $\lambda\mathrm{Id}^{T(X)}$，其中某个 $\lambda\in\mathbb{Q}$非零。因此，类 $\Gamma/\lambda\in \mathrm{CH}^*(X'\times X)$ 诱导态射

$$T(X')\xrightarrow{\psi}T(X)\xrightarrow{h_X^{2n-2}\cup\bullet}H^{4n-2}(X,\mathbb{Q}).$$

证明至此结束。 □

这表明，若 Kuga–Satake 对应是代数的，那么将任意霍奇相似与 Lefschetz同构复合后，该相似便是代数的。对于 X，二次 Lefschetz 标准猜想预言 $h_X^{2n-2}\cup\bullet$：$H^2(X,\mathbb{Q})\to H^{4n-2}(X,\mathbb{Q})$ 的逆是代数的。若 X 满足这一猜想，则由定理 4.5 可得:

推论 4.6. 设 X 与 X' 是满足 Kuga–Satake 霍奇猜想的超凯勒流形。此外，假设 X 满足二次 Lefschetz 标准猜想。那么，任意霍奇相似 ψ: $T(X')\to T(X)$ 都是代数的。□

5. 应用

本节回顾 Kuga–Satake 霍奇猜想已获证明的主要情形，以及已知二次 Lefschetz 标准猜想成立的情形。由此，我们介绍定理 4.5 和推论 4.6 的应用示例。

如引言所述，超越格之间的霍奇相似在两种情形下自然出现：一是作为次数为二的全实自同态域中的元素；二是作为霍奇同构 $T(Y) \to T(X)$，其中 X 和 Y 是超Kähler 流形，且对于某个 $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$， $T(Y)$ 与 $T(X)(\lambda)$ 霍奇等距。

让我们从广义库默尔型超k¨ahler流形的情况开始。对于这些簇，Kuga–Satake 霍奇猜想已在 [23]中得到证明，而二次Lefschetz标准猜想已在 [6]中得到证明。因此，我们得到了满足推论4.6假设的簇的主要例子族，并得出结论：两个广义库默尔型超k¨ahler流形的超越格之间的每一个霍奇相似都是代数的。注意，广义库默尔型超k¨ahler流形的超越格维数至多为六维。因此，其自同态域要么是CM域，要么是次数为一或二的全实域。在所有情况下，我们看到它总是由霍奇相似生成的。因此我们得出以下结论：

定理5.1. 设 X 和 X' 是广义库默尔型超k¨ahler流形，使得$T(X)$和 $T(X')$是霍奇相似的。那么，$T(X')$和 $T(X)$之间的每一个霍奇态射都是代数的。

注记 5.2。取定理 5.1 中的 $X = X'$，可知 $E := \mathrm{End}^{\mathrm{Hdg}}(T(X))$ 中的每个霍奇态射都是代数的。注意，定理 5.1 还涵盖了这样的情形： X 和 X' 是广义库默尔型超凯勒流形，具有霍奇相似的超越格，但维数不同。简要回顾一下其原因：回想一下，维数为 $2n$ 的广义库默尔型超凯勒流形 X 的第二上同调群满足

$$(H^2(X,\mathbb{Q}), q_X) \simeq U_{\mathbb{Q}}^{\oplus 3} \oplus \mathbb{Q}\delta_n,$$

其中 $(\delta_n)^2 = -2(n+1)$。设 k 为正整数。利用 $U_{\mathbb{Q}}$ 与 $U_{\mathbb{Q}}(k)$ 等距这一事实，可知存在一个等距

$$U_{\mathbb{Q}}^{\oplus 3} \oplus \mathbb{Q}\delta_{n'} \to (U_{\mathbb{Q}}^{\oplus 3} \oplus \mathbb{Q}\delta_n)(k),$$

对于 $n' := k(n+1) - 1$。换言之，存在一个相似

$$\psi \colon U_{\mathbb{Q}}^{\oplus 3} \oplus \mathbb{Q}\delta_{n'} \to U_{\mathbb{Q}}^{\oplus 3} \oplus \mathbb{Q}\delta_n.$$

设 $[\sigma'] \in \mathbb{P}((U_{\mathbb{Q}}^{\oplus 3} \oplus \mathbb{Q}\delta_{n'}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$ 是一个满足 $(\sigma')^2 = 0$ 和 $(\sigma', \overline{\sigma'}) > 0$ 的类。那么， $[\sigma']$ 在二次空间 $U_{\mathbb{Q}}^{\oplus 3} \oplus \mathbb{Q}\delta_{n'}$ 上确定一个霍奇结构。类似地，类 $[\psi(\sigma')]$ 满足与 σ' 相同的假设，因此它在 $U_{\mathbb{Q}}^{\oplus 3} \oplus \mathbb{Q}\delta_n$ 上定义一个霍奇结构。由周期映射的满射性，我们得到一个超凯勒流形 X'，其库默尔型为 $\mathrm{Kum}^{n'}$，辛形式由 σ' 给出；还得到一个超凯勒流形 X，其库默尔型为 Kum^{n}，辛形式由 $\psi(\sigma)$ 给出。根据构造，态射 ψ 在 $T(X')$ 与 $T(X)$ 之间定义了一个霍奇相似。因此， X和 X'满足定理 5.1 的假设，由此可得，任意霍奇态射 $T(X') \to T(X)$ 都是代数的。

我们简要讨论一下我们的结果在 K3 曲面情形中的应用。在这种情形下，Lefschetz 标准猜想显然成立。因此，应用推论 4.6，可得：

定理 5.3. 设 S 和 S' 是满足 Kuga–Satake 霍奇猜想的 K3 曲面。那么， $T(S)$ 与 $T(S')$ 之间的每个霍奇相似都是代数的。□

对于 K3 曲面，Kuga–Satake 霍奇猜想通常尚未得到证明。然而，作者在[5], 中证明了该猜想适用于（可数多个）四维 K3 曲面族，这些曲面的超越格与 $T(K)(2)$ 同构，其中 K 是一个维数为六的广义库默尔型超凯勒流形。根据 [9, 第 3], 节，这些四维 K3 曲面族中存在一维子族，其全实自同态域的次数为二。由于次数为二的全实域由霍奇相似生成，定理 5.3 证明了这些 K3 曲面平方的霍奇猜想。正如引言中所述，通过扩展 [19]中引入的技巧， [20] 已证明这些特定 K3 曲面的所有幂的霍奇猜想。不过，我们在此给出的这些 K3 曲面平方的证明更为直接，因为它不涉及对 Kuga–Satake 簇的霍奇猜想进行研究。

最后，我们来讨论 $\mathrm{K3}^{[n]}$ 型超¨凯勒流形的情形。正如引言中所述，根据 [4]，这些流形满足 Lefschetz 标准猜想。因此，应用推论 4.6，可得以下结论：

定理 5.4. 设 X 和 X' 是分别属于 $\mathrm{K3}^{[n]}$ 型和 $\mathrm{K3}^{[n']}$ 型的超 ¨凯勒流形，并且 Kuga–Satake 霍奇猜想对它们成立。那么， $T(X')$ 与 $T(X)$ 之间的每个霍奇相似都是代数的。□

对于 $\mathrm{K3}^{[n]}$ 型超¨凯勒流形，Kuga–Satake 霍奇猜想尚未得到证明。在六维情形下，对于这类超¨凯勒流形的族，该猜想可由 [5] 中的构造推出；这些流形是广义库默尔型六维超¨凯勒流形被辛群 $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$ 作用后的商的解消。由此，我们得到四维族 $\mathrm{K3}^{[3]}$ 型超¨凯勒流形，它们满足定理 5.4 的假设。

注 5.5. 请注意，定理 4.5 和推论 4.6 表明，只要对 X 和 X' 的 Kuga–Satake 对应是代数的，且超越格 Hodge 相似，就能在 $X' \times X$ 上得到代数类。即使 X 和 X' 的变形类型不同，且 X 和 X' 的维数不同，这一结论仍然成立。

References

[1] Yves Andr´e. 关于超凯勒簇的沙法列维奇猜想和泰特猜想。 *Math. Ann.*，305:205–248，1996。[2] Yves Andr´e. *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)， Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*第17卷。法国数学会，巴黎，2004。[3] Nikolay Buskin. 两个K3曲面之间的每一个有理Hodge等距都是代数的。 *J. reine angew. Math.*，2019(755):127–150，2019。[4] François Charles和Eyal Markman. 与K3曲面希尔伯特概形变形等价的全纯辛簇的标准猜想。 *Compos. Math.*，149(3):481–494，2013。[5]Salvatore Floccari. 广义库默尔型的六维簇与K3曲面。*arXiv preprint arXiv:2210.02948v2*，2022。

[6] Josiah Foster. 某些次数下广义Kummer变形类型不可约全纯辛流形的Lefschetz标准猜想。 *arXiv preprint arXiv:2303.14327*，2023。[7] Alice Garbagnati和Alessandra Sarti. K3曲面上素数阶的辛自同构。 *J. Algebra*，318(1):323–350，2007。[8] Bert van Geemen. Kuga–Satake簇与霍奇猜想。载于 *The arithmetic and geometry ofalgebraic cycles*，第51–82页。Springer，2000。[9] Bert van Geemen. K3曲面上的实乘法与Kuga Satake簇。 *Mich. Math. J.*，56(2):375–399，2008。[10] Bert van Geemen和Alessandra Sarti. K3曲面上的Nikulin对合。 *Math. Z.*，255(4):731–753，2007。[11] Daniel Huybrechts. *Lectures on K3 surfaces*，第158卷。剑桥大学出版社，2016。[12] Daniel Huybrechts. 等源K3曲面的动机。 *Comment. Math. Helvetici*，94(3):445–458，2019。[13]Tobias Kreutz、Mingmin Shen和Charles Vial. 围绕de Rham–Betti猜想。https://www.math.uni-bielefeld.de/~vial/dRBclasses.pdf，2023。[14] Michio Kuga和Ichirô Satake. 附着于极化K3曲面的阿贝尔簇。 *Math. Ann.*，169(1):239–242，1967。[15] Eyal Markman. 广义Kummer簇的单值化及其中间雅可比簇上的代数循环。 *J. Eur. Math. Soc.*，2022。[16] Eyal Markman. K型超凯勒簇的有理Hodge等距是代数的。 *arXivpreprint arXiv:2204.00516*，2022。[17] Viacheslav V. Nikulin. 凯勒K3曲面的有限自同构群。 *Trudy Moskov. Mat.Obshch.*，38:75–137，1979。[18] Kieran O'Grady. 与Kummer型超凯勒流形相关的紧环面。 *Int. Math. Res. Not.*，2021(16):12356–12419，2021。[19] Ulrich Schlickewei. 某些K3曲面自乘积的霍奇猜想。 *J. Algebra*，324(3):507–529，2010。[20] Mauro Varesco. Picard数为16的K3曲面幂次的霍奇猜想。 *arXiv preprintarXiv:2203.09778*，2022。[21] Mauro Varesco和Claire Voisin. 广义Kummer型超凯勒流形与Kuga–Satake对应。 *Milan J. Math.*，第433–444页，2022。[22] Claire Voisin. Catanese曲面和Barlow曲面的Bloch猜想。 *J. Differ. Geom.*，97(1):149–175，2014。[23] Claire Voisin. O'Grady和Markman论文的脚注。 *Math. Z.*，300(4):3405–3416，2022。

Mathematisches Institut, Universität Bonn, Endenicher Allee 60, 53115 Bonn, Germany
Email address: varesco@math.uni-bonn.de