arXiv:2304.02520v3 [physics.flu-dyn] 8 Aug 2023

具有可变速度和相对熵的动力学格式

Shashi ShekharRoy[a],1,*, S. V. Raghurama Rao[b],2

[a]*Research Scholar, Department of Aerospace Engineering, Indian Institute ofScience, Bangalore, India*[b]*Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Science, Bangalore, India*

摘要

本文提出一种新的动力学模型，其中，一维有界支撑的平衡分布在两个平均速度附近具有一定的速度范围。二维情况下，平衡分布函数在四个平均速度附近具有一定的速度范围，每个象限各有一个。在与之相应的有限体积格式中，利用平均速度在单元界面处满足 Rankine-Hugoniot 跃迁条件，以处理数值扩散，从而精确捕捉稳态间断。可变的速度范围用于在光滑区域提供额外扩散。此外，本文给出一种基于新颖动力学理论的相对熵表达式，并结合一项附加判据，用于识别膨胀波和光滑流动区域。针对所提出的动力学模型，本文制定了适当的流动相切条件和远场边界条件。通过求解若干一维和二维可压缩流基准测试算例，展示了所提出求解器的有效性。

关键词：玻尔兹曼格式、可变速度、R-H条件、相对熵

1. 引言

求解欧拉方程及其他非线性双曲问题的数值方法，是一个持续受到广泛关注的研究领域。在用于空间离散的多种方法中，迎风法已成为一种广受欢迎的稳定性处理技术。迎风格式使用沿着入射波方向偏置的模板

*通讯作者[1]电子邮箱地址：shashi@iisc.ac.in, shashisroy@gmail.com[2]电子邮箱地址：raghu@iisc.ac.in

。迎风格式可分为（精确和近似）黎曼求解器、通量矢量分裂方法、动理学／玻尔兹曼格式以及松弛格式。其中，近似黎曼求解器因数值扩散较低而颇受欢迎。然而，这些格式存在许多缺点，例如可能产生违反熵条件的解、出现木炭瘤现象、马赫杆弯折、因奇偶解耦而导致的不稳定性等。 [1]。这些格式的另一个不足之处是严重依赖底层特征结构。

基于动力学理论的格式为传统黎曼求解器提供了优雅的替代方案。动力学层面的控制方程是玻尔兹曼方程。通过对玻尔兹曼方程取适当的矩，可以得到宏观方程。动理学格式的一大优势是玻尔兹曼方程中的对流项具有线性，这使迎风处理更加简单。首个玻尔兹曼格式由 Chu [2], 提出，他使用有限差分法求解玻尔兹曼-BGK方程。Sanders 和 Prendergast [3] 提出了束格式，其中麦克斯韦平衡分布被一组加权狄拉克δ函数取代，这些函数称为束。Pullin [4] 提出了平衡通量法（EFM），该方法根据半麦克斯韦分布计算网格单元间界面处的通量。Reitz [5], 提出的动理学数值方法（KNM）基于涉及对流步骤和碰撞步骤的算子分裂：在玻尔兹曼方程的对流步骤中，采用适当的速度离散，追踪特征线的起点。Deshpande [6] 提出了一种类似的动理学格式，通过使用 Chapman-Enskog 分布函数提供反扩散修正，实现了二阶精度。Deshpande [7]和 Mandal 与 Deshpande [8] 提出了动理学通量矢量分裂（KFVS）格式，其迎风处理基于分子速度。KFVS 方法中分裂通量的最终表达式与平衡通量法中的相同，尽管两者采用的方法不同。Kaniel [9]和 Perthame [10] 提出了基于有界支撑平衡分布的动理学格式。Prendergast 和 Kun Xu [11] 采用玻尔兹曼-BGK方程的近似局部解，同时使用压力传感器检测激波，由此提出了非分裂动理学格式。Raghurama Rao 和 Deshpande [12] 提出了基于无规速度的迎风（PVU）方法，以流体速度（u）与无规速度（$c = v - u$）之和取代分子速度，从而形成一种基于对流-压力分裂的迎风方法。尽管文献中还存在其他动理学格式，但它们的一个共同缺点是

无法精确捕捉稳态间断，而一些流行的宏观迎风格式也存在这一问题。

另一个有趣的研究方向是引入基于离散速度的动理学格式。Natalini [13]以及 Aregba-Driollet 和 Natalini [14] 从带有 BGK模型的离散速度玻尔兹曼方程出发，发展了动理学格式。在这种离散速度表述中，平衡分布函数不是麦克斯韦分布，而是守恒变量向量和通量向量的简单线性组合。与基于连续速度的动理学格式相比，基于离散速度的格式有一个固有优势：取矩时，复杂积分可由求和代替。对于速度为 λ 和 $-\lambda$的一维两速度模型，离散速度模型等价于 Jin and Xin [15]提出的弛豫模型。Bouchut [16] 针对给定的双曲守恒律系统，引入了一族具有动理学熵的 BGK 模型。Shrinath 等人 [17] 提出了基于离散速度玻尔兹曼方程的动理学通量差分裂格式：利用两个离散速度满足 R-H条件，同时用第三个速度在光滑区域提供额外的扩散。为此，他们在分子速度框架中利用 Kullback-Leibler散度来区分不同区域。

在本研究中，我们基于可变速度和紧支撑分布函数，提出了一种新的动力学表述。每组可变速度都以一个平均速度为中心。在离散化过程中，平均速度用于满足 Rankine-Hugoniot 跃迁条件，从而精确捕捉网格对齐定常间断；而速度的可变范围则用于在光滑区域中增加额外的数值扩散。为此，我们提出了一种新颖的离散速度版本的相对熵。与先前的紧支撑分布函数相比，我们的表述的优势在于，该模型中的平均速度和速度范围都具有灵活性。此外，我们还为动力学模型制定了新的流动相切条件和远场边界条件，并将其用于数值模拟。

2. 气体动理学理论

气体动理论由玻尔兹曼方程支配，该方程为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = Q(f) \tag{1}$$

其中， $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 是速度分布函数，$\mathbf{v}$ 是分子速度，而 $Q(f)$ 是碰撞项。左侧表示f 因粒子分子运动而产生的变化率。右侧表示 f 因粒子之间的二体碰撞而产生的变化率。对流项是线性的；非线性存在于碰撞项中。碰撞项驱使分布函数 f 趋于平衡态，并在极限情况下趋于零。气体动理论给出的平衡分布是麦克斯韦-玻尔兹曼分布函数

$$f^{eq} = f_{Maxwell} = \frac{\rho}{I_0}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{N/2} exp\left(-\beta|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2\right) exp\left(-I/I_0\right) \tag{2}$$

其中，$\beta = \frac{1}{2RT}$，$\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ 是宏观速度，N 是平动自由度，I 是对应于非平动自由度的内能变量，$I_0 = {}^{2-N}_{(\gamma-1)\ 2(\gamma-1)}\, RT$ 和 $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$。粒子的质量、动量和总能量之和在碰撞过程中守恒。因此，$\overline{1、\mathbf{v}}$ 和 $I + \downarrow_{\mathbf{v}_2}^{|^2}$ 是碰撞不变量。将玻尔兹曼方程乘以矩向量 $\underline{\mathbf{\Psi}} = \left[1, v_1, .., v_N, I + \downarrow_{\frac{\mathbf{v}|^2}{2}}\right]^T$，并对 $\mathbf{v}$ 和 I积分，即取矩，可得到质量、动量和能量的宏观守恒定律。 $\underline{\quad}$

采用对碰撞项常用的简化后，BGK碰撞模型 [18],方程 ((1)) 变为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{1}{\epsilon}\left[f - f^{eq}\right] \tag{3}$$

其中，ϵ 为弛豫时间。然后，使用算子分裂将对流项和碰撞项分离，并进一步在碰撞步骤中使用向平衡态的瞬时弛豫（$\epsilon \to 0$，即 $f = f^{eq}$），我们可以将玻尔兹曼方程的矩写为

$$\int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{v} \int_{\mathbb{R}^+} dI\ \mathbf{\Psi}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (v_i f)}{\partial x_i} = 0, f = f^{eq}\right) \tag{4}$$

方程 (4) 中的这些矩为宏观层面的无黏欧拉方程提供了一种优雅的表示方式，其形式为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{5}$$

with

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix}\rho \\ \rho u_j \\ \rho E\end{bmatrix}, \mathbf{G}_i = \begin{bmatrix}\rho u_i \\ \rho u_i u_j + p\delta_{ij} \\ (\rho E + p)u_i\end{bmatrix}, E = e + \frac{u_i^2}{2} \tag{6}$$

这里，矩关系为

$$\int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{v} \int_{\mathbb{R}^+} dI \ \mathbf{\Psi} f = \int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{v} \int_{\mathbb{R}^+} dI \ \mathbf{\Psi} f^{eq} = \mathbf{U} \tag{7a}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_i d\mathbf{v} \int_{\mathbb{R}^+} dI \ \mathbf{\Psi} f^{eq} = \mathbf{G}_i \tag{7b}$$

将玻尔兹曼方程乘以 $\ln f$ 并取其矩，可得动力学熵不等式，即 H 定理

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H_{v,i}}{\partial x_i} \leq 0 \tag{8}$$

with

$$\int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{v} \int_{\mathbb{R}^+} dI \ f \ln f = H, \tag{9a}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_i d\mathbf{v} \int_{\mathbb{R}^+} dI \ f \ln f = H_{v,i}, \tag{9b}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{v} \int_{\mathbb{R}^+} dI \ Q(f) \ln f \leq 0 \tag{9c}$$

下一节中，我们将介绍一种新的、具有紧支撑的可变速度一维分布函数，其中心位于两个平均速度周围。

3. 一维平衡分布

本研究仅关注速度（v）空间中的建模。因此，我们首先通过对内能变量 I 积分，引入截断平衡分布函数 $\breve{f}^{eq}$，如下所示。

$$\breve{f}^{eq} = \int_0^\infty f^{eq} dI \tag{10}$$

于是，一维情况下的矩为

$$U_i = \int_{-\infty}^{\infty} dv \ \Psi_i \breve{f}^{eq} \text{ and } G_i = \int_{-\infty}^{\infty} dv \ v\Psi_i \breve{f}^{eq} \tag{11}$$

现在，定义

$$\hat{f}_i^{eq} = \Psi_i \breve{f}^{eq} \tag{12}$$

矩关系的形式为

$$U_i = \int_{-\infty}^{\infty} dv \ \hat{f}_i^{eq} = \langle \hat{f}_i^{eq} \rangle \text{ and } G_i = \int_{-\infty}^{\infty} dv \ v\hat{f}_i^{eq} = \langle v\hat{f}_i^{eq} \rangle \tag{13}$$

我们模型的基本策略是用一组矩形分布取代一维麦克斯韦分布 $\hat{f}_i^{eq}$，$Maxwellian$（在分子速度空间中由高斯曲线表示），并控制这些矩形分布的位置和宽度，使矩关系仍然成立。矩形分布满足紧支集分布的要求，从而简化了问题。对这些分布位置的控制，之后将有助于我们在离散化过程中满足朗金-雨贡纽条件。对这些分布宽度的控制，则有助于我们在需要的地方加入额外的数值扩散，例如在可能包含声速点、因而需要额外扩散以避免非物理解的膨胀波中。图 1 展示了一维情形下这组新的紧支撑分布。我们引入紧支撑的矩形分布——

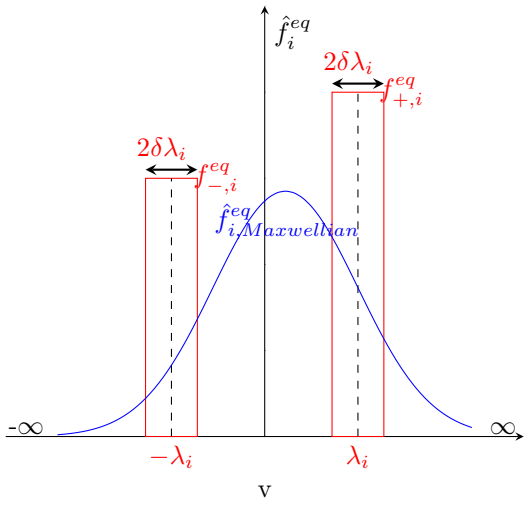

图 1：一维平衡分布：用具有紧支撑的可变速度分布函数替代麦克斯韦分布

为方便起见，在 $v = 0$ 两侧具有灵活速度的分布函数。在支撑趋于消失的极限下，这些新的分布函数退化为狄拉克δ分布，从而得到离散速度 λ_i 和 $-\lambda_i$。对于我们的模型，$\hat{f}_i^{eq}$（如图1所示）定义为

$$\hat{f}_i^{eq} = \left\{ \begin{array}{cc} f_{+,i}^{eq}, & \lambda_i - \delta\lambda_i \leq v \leq \lambda_i + \delta\lambda_i, \\ f_{-,i}^{eq}, & -\lambda_i - \delta\lambda_i \leq v \leq -\lambda_i + \delta\lambda_i, \\ 0, & \text{otherwise} \end{array} \right\} \tag{14}$$

因此，$\hat{} f_i^{eq}$除了在速度范围 $[-\lambda_i - \delta\lambda_i, -\lambda_i + \delta\lambda_i]$ 和 $[\lambda_i - \delta\lambda_i, \lambda_i + \delta\lambda_i]$内处处为零。图1对应于U的第一个分量。现在，让我们回顾一维中的矩关系。

$$U_i = \int_{-\infty}^{\infty} dv \ \hat{f}_i^{eq} = \left\langle \hat{f}_i^{eq} \right\rangle \tag{15a}$$

$$G_i = \int_{-\infty}^{\infty} v dv \ \hat{f}_i^{eq} = \left\langle v\hat{f}_i^{eq} \right\rangle \tag{15b}$$

这里， U_i 和 G_i 分别是 i^{th} 守恒变量和无黏通量项。将（14）代入矩关系（15），得到

$$2\delta\lambda_i f_{+,i}^{eq} + 2\delta\lambda_i f_{-,i}^{eq} \ = f_{1i}^{eq} + f_{2i}^{eq} = U_i \tag{16a}$$

$$\lambda_i \left(2\delta\lambda_i f_{+,i}^{eq} - 2\delta\lambda_i f_{-,i}^{eq} \right) = \lambda_i \left(f_{1i}^{eq} - f_{2i}^{eq} \right) = G_i \tag{16b}$$

其中，$f_{1i}^{eq} = 2\delta\lambda_i f_{+}^{eq}{}_{,i}$和 $f_{2i}^{eq} = 2\delta\lambda_i f_{-}^{eq}{}_{,i}$分别是相应矩形的面积。对上述方程求解 f_{1i}^{eq}和 f_{2i}^{eq}，得到

$$f_{1i}^{eq} = \frac{U_i}{2} + \frac{G_i}{2\lambda_i}, f_{2i}^{eq} = \frac{U_i}{2} - \frac{G_i}{2\lambda_i} \tag{17}$$

此外，计算 v^2 矩，得到

$$\left\langle v^2 \hat{f}_i^{eq} \right\rangle \quad = (\lambda_i^2 + \frac{(\delta\lambda_i)^2}{3}) 2(\delta\lambda_i)(f_{+,i}^{eq} + f_{-,i}^{eq}) \tag{18a}$$

$$= (\lambda_i^2 + \frac{(\delta\lambda_i)^2}{3})(f_{1i}^{eq} + f_{2i}^{eq}) \tag{18b}$$

$$= (\lambda_i^2 + \frac{(\delta\lambda_i)^2}{3}) U_i \ (\text{from (16a)}) \tag{18c}$$

$$= \widetilde{\lambda}_i^2 U_i \tag{18d}$$

我们注意到，随着 $\delta\lambda_i$ 变化，方程 (16) 中的零阶和一阶矩关系保持不变（就 f_{1i}^{eq} 和 f_{2i}^{eq} 而言）。然而，二阶矩（方程 (18)）会发生变化。因此，对于我们的模型，我们保留了所有三个矩。为了理解 v^2 矩和宽度 $\delta\lambda_i$ 的意义，我们对 f_i 进行 Chapman-Enskog 型分析以获得一阶近似（附录 A）。我们观察到 $\left\langle v^2 \hat{} f_i^{eq} \right\rangle$ 矩充当黏性项。因此，非零的 $\delta\lambda_i$ 会增加黏度。

3.1. 极限情况： $\delta\lambda_i \to 0$

在 $\delta\lambda_i \to 0$ 的极限情况下，平衡分布函数简化为离散速度 $\pm\lambda_i$ 处的狄拉克δ分布。也就是说，在此极限情况下，

$$\hat{f}_i^{eq} = f_{1i}^{eq}\delta(v-\lambda_i) + f_{2i}^{eq}\delta(v+\lambda_i) \tag{19}$$

$\left\langle \hat{f}_i^{eq} \right\rangle$ 和 $\left\langle v\hat{f}_i^{eq} \right\rangle$ 矩关系由此得出：

$$f_{1i}^{eq} = \frac{U_i}{2} + \frac{G_i}{2\lambda_i}, f_{2i}^{eq} = \frac{U_i}{2} - \frac{G_i}{2\lambda_i} \tag{20}$$

在这一极限情况下，$\left\langle v^2\hat{f}_i^{eq} \right\rangle$ 矩为

$$\left\langle v^2\hat{f}_i^{eq} \right\rangle = \lambda_i^2(f_{1i}^{eq} + f_{2i}^{eq}) = \lambda_i^2 U_i \tag{21}$$

4. 一维欧拉方程的动理学格式

为简化数值方法，我们定义一个等效的柔性速度玻尔兹曼方程，使得由式（15）和（18）给出的平衡态分布函数满足零阶、一阶和二阶矩关系。该方程为

$$\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\widetilde{\Lambda}_i\mathbf{f}_i)}{\partial x} = -\frac{1}{\epsilon}\left[\mathbf{f}_i - \widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq}\right] \tag{22}$$

这里，

$$\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} = \begin{bmatrix} \widetilde{f}_{1i}^{eq} \\ \widetilde{f}_{2i}^{eq} \end{bmatrix}, \widetilde{\Lambda}_i = \begin{bmatrix} \widetilde{\lambda}_i & 0 \\ 0 & -\widetilde{\lambda}_i \end{bmatrix}, \tag{23a}$$

$$\widetilde{f}_{1i}^{eq} = \frac{U_i}{2} + \frac{G_i}{2\widetilde{\lambda}_i},\ \widetilde{f}_{2i}^{eq} = \frac{U_i}{2} - \frac{G_i}{2\widetilde{\lambda}_i};\ \widetilde{\lambda}_i = \sqrt{\lambda_i^2 + \frac{(\delta\lambda_i)^2}{3}} \tag{23b}$$

现在，给定行向量 $\mathrm{P}_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq}$ 的不同矩为

$$\mathbf{P}_i\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} = \widetilde{f}_{1i}^{eq} + \widetilde{f}_{2i}^{eq} = U_i \tag{24a}$$

$$\mathbf{P}_i\widetilde{\Lambda}_i\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} = \widetilde{\lambda}_i\widetilde{f}_{1i}^{eq} - \widetilde{\lambda}_i\widetilde{f}_{2i}^{eq} = G_i \tag{24b}$$

$$\mathbf{P}_i\widetilde{\Lambda}_i^2\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} = \widetilde{\lambda}_i^2(\widetilde{f}_{1i}^{eq} + \widetilde{f}_{2i}^{eq}) = \widetilde{\lambda}_i^2 U_i = (\lambda_i^2 + \frac{(\delta\lambda_i)^2}{3})U_i \tag{24c}$$

因此，所有三个矩关系都得到满足。我们在有限体积框架中工作，并在j^{th}单元内求解玻尔兹曼方程（22）的守恒形式。为求解玻尔兹曼方程，我们采用算子分裂策略。在 n^{th} 时间步结束时，我们允许分布函数瞬时弛豫至平衡分布函数（弛豫步）。接下来，在对流步中，我们数值求解玻尔兹曼方程的对流部分，以获得$(n+1)^{th}$时间步的分布函数。因此，

弛豫步: 瞬时的，即 $\epsilon \to 0$。因此，

$$(\mathbf{f}_i)_j^n = (\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_j^n \tag{25}$$

对流步: 玻尔兹曼方程的对流部分是

$$\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{h}_i}{\partial x} = 0; \mathbf{h}_i = \widetilde{\Lambda}_i \widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} \tag{26}$$

将 j^{th} 单元的对流方程改写为积分形式，

$$\frac{d(\mathbf{f}_i)_j}{dt} = -(R_i)_j^n = -\frac{1}{\Delta x}\left[(\mathbf{h}_i)_{j+1/2}^n - (\mathbf{h}_i)_{j-1/2}^n\right] \tag{27}$$

数值通量使用 Courant 分裂如下进行分裂

$$\begin{aligned}
(\mathbf{h}_i)_{j+1/2} &= (\mathbf{h}_i^+)_L + (\mathbf{h}_i^-)_R \\
&= (\widetilde{\Lambda}_i^+ \widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_L + (\widetilde{\Lambda}_i^- \widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_R, \text{ where } \widetilde{\Lambda}_i^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\Lambda}_i \pm |\widetilde{\Lambda}_i|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{(\mathbf{h}_i)_L + (\mathbf{h}_i)_R\right\} - \frac{1}{2}\left\{(\Delta \mathbf{h}_i^+)_{j+1/2} - (\Delta \mathbf{h}_i^-)_{j+1/2}\right\}; \\
(\Delta \mathbf{h}_i^{\pm})_{j+1/2} &= \left[\widetilde{\Lambda}_i^{\pm}\left\{(\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_R - (\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_L\right\}\right]_{j+1/2}
\end{aligned} \tag{28}$$

为了达到一阶整体精度，在空间上，我们假设每个单元内的 $\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq}$ 采用分片常数近似。因此，$(\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_L = (\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_j$，$(\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_R = (\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_{j+1}$。时间导数采用欧拉法近似为 $\frac{d(\mathbf{f}_i)_j^n}{dt} = \frac{(\mathbf{f}_i)_j^{n+1} - (\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_j^n}{\Delta t}$。

为了得到该单元中守恒变量的宏观更新公式，我们将式 (27) 乘以 $\mathbf{P}_i$，并对其取矩。由此得到

$$\frac{d(U_i)_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}\left[(G_i)_{j+1/2}^n - (G_i)_{j-1/2}^n\right] \tag{29}$$

其中，界面处的宏观通量为

$$(G_i)_{j+1/2} = \mathbf{P}_i(\mathbf{h}_i)_{j+1/2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left\{(G_i)_L + (G_i)_R\right\} - \frac{(\widetilde{\lambda}_i)_{j+1/2}}{2}\left\{(U_i)_R - (U_i)_L\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(G_i)_L + (G_i)_R\right\} - \frac{1}{2}\left\{(\Delta G_i^+)_{j+1/2} - (\Delta G_i^-)_{j+1/2}\right\}; \\
&\quad (\Delta G_i^{\pm})_{j+1/2} = \left[\pm\frac{\widetilde{\lambda}_i}{2}\left\{(U_i)_R - (U_i)_L\right\}\right]_{j+1/2}
\end{aligned} \tag{30}
$$

4.1. 动力学模型的稳定性

我们考虑布舒准则 [16]，该准则用于保证动理学熵的存在。它要求平衡分布的导数的特征值，即 $\widetilde{\mathbf{f}}_1^{eq}(=\widetilde{f}_{1i}^{eq})$ 和 $\widetilde{\mathbf{f}}_2^{eq}(=\widetilde{f}_{2i}^{eq})$，均为实数且非负。这些导数为：

$$
\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_1^{eq}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\widetilde{\lambda}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\widetilde{\lambda}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\widetilde{\lambda}_3} \end{bmatrix}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \tag{31a}
$$

$$
\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_2^{eq}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\widetilde{\lambda}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\widetilde{\lambda}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\widetilde{\lambda}_3} \end{bmatrix}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \tag{31b}
$$

接下来，根据布舒准则

$$
\sigma\left(\frac{\partial \widetilde{\mathbf{f}}_{1,2}^{eq}}{\partial \mathbf{U}}\right) \subset [0, \infty) \tag{32}
$$

其中 σ 表示谱半径。对于我们的格式，取 $\lambda_i = \lambda$ 和 $\widetilde{\delta\lambda_i} = \delta\lambda$（因此 $\lambda_i = \lambda$，即数值扩散是一个标量）。于是，由（31）和（32）可得：

$$
\widetilde{\lambda} \geq max\left(|u-a|, |u|, |u+a|\right) \tag{33}
$$

4.2. 确定 $\widetilde{\lambda}$

我们取 $\lambda_i = \lambda$ 和 $\delta\lambda_i = \delta\lambda$（因此 $\lambda_i = \lambda$）。$\widetilde{\lambda}$ 的定义满足稳态间断处的朗金-雨贡纽跃迁条件。首先，我们定义单元界面处的以下速度：

$$
\lambda_s = min_i\left(\frac{|\Delta G_i|}{|\Delta U_i| + \epsilon_0}\right),\ \Delta = ()_R - ()_L \tag{34a}
$$

$$
\lambda_{min} = max\left\{min(|u-a|, |u|, |u+a|)_L, min(|u-a|, |u|, |u+a|)_R\right\} \tag{34b}
$$

然后，我们定义 λ 如下

$$\lambda = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{min},\ \text{if}\ \|\Delta \mathbf{U}\| \leq \epsilon_1\ \text{(uniform flow)} \\ \lambda_s,\ \text{if}\ \|\Delta \mathbf{U}\| > \epsilon_1, \|\Delta \mathbf{G}\| \leq \epsilon_2\ \text{(steady discontinuity)} \\ max(\lambda_{min}, \lambda_s),\ \text{otherwise} \end{array} \right\} \tag{35}$$

在此，我们使用 λ_{min} 为 λ 在除稳态间断外的所有地方提供下限。对于所有测试算例，我们取 $\epsilon_1 = 10^{-5}$、 $\epsilon_2 = 10^{-8}$ 和 $\epsilon_0 = 10^{-14}$ 。

4.3. 固定 $\delta\lambda$

λ 如上一小节所定义，仍是一个非常低的数值扩散系数，当存在膨胀声速点时，这可能导致违反熵条件的膨胀激波的形成。因此，我们通过在光滑区域（包括膨胀波）中设置非零的 $\delta\lambda$ 来增大扩散系数。在光滑区域中，我们根据方程(33)设置 $\delta\lambda$ ，如下所示。

$$\widetilde{\lambda}^2 = (\lambda^2 + \frac{(\delta\lambda)^2}{3}) \geq \left[max\left(|u-a|, |u|, |u+a|\right)\right]^2 \tag{36}$$

因此，

$$\delta\lambda = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3(\lambda_{max}^2 - \lambda^2)},\ \text{in smooth regions} \\ 0,\ \text{otherwise} \end{array} \right\} \tag{37a}$$

$$\lambda_{max} = max\left\{max(|u-a|, |u|, |u+a|)_L, max(|u-a|, |u|, |u+a|)_R\right\} \tag{37b}$$

因此，在光滑区域中，我们格式中的数值扩散变为Rusanov或局部Lax-Friedrich（LLF）格式的数值扩散。

4.4. 相对熵

现在，下一个问题是识别光滑流动区域，以区别于间断（高梯度区域）。为此，我们引入一种相对熵的新颖表述， d^2（首次发表于 [19]）。首先，我们引入一个动理学熵变量， ω 定义为

$$\omega = \frac{\partial \hat{H}}{\partial f^{eq}} \tag{38}$$

其中 H 为动理学熵。对于经典情形，它指的是不含矩的 (9)（ $H = f^{eq}\ln f^{eq}$）。现在我们将相对熵定义为动理学熵距离，即

$$d^2 = \langle \Delta\omega \cdot \Delta f^{eq} \rangle;\ \Delta = ()_R - ()_L \tag{39}$$

其中，$\langle\rangle$ 表示取矩。对于具有连续分子速度的经典情形，由（9）可得

$$\omega = 1 + \ln f^{eq} \tag{40}$$

因此，我们得到

$$d^2 = \langle \Delta \left(ln f^{eq} \right) \cdot \Delta f^{eq} \rangle = \left\langle ln \frac{f_R^{eq}}{f_L^{eq}} (f_R^{eq} - f_L^{eq}) \right\rangle \tag{41}$$

这就是 Kullback-Leibler散度 [20]。不过，由于我们的动力学模型更接近离散玻尔兹曼系统，我们采用 Bouchut 形式的动力学熵函数 [16], ，同时指出，Bouchut 稳定性判据在光滑区域内成立，从而确保动理学熵的存在。首先，我们将平衡分布函数改写为

$$\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{f}}_{1i}^{eq} \\ \widetilde{\mathbf{f}}_{2i}^{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_i}{2} + \frac{G_i}{2\widetilde{\lambda}} \\ \frac{U_i}{2} - \frac{G_i}{2\widetilde{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} U_i + \begin{bmatrix} \frac{1}{2\widetilde{\lambda}} \\ -\frac{1}{2\widetilde{\lambda}} \end{bmatrix} G_i \tag{42}$$

or,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{f}}^{eq} &= \begin{bmatrix} \widetilde{f}_{11}^{eq} \\ \widetilde{f}_{21}^{eq} \\ \widetilde{f}_{12}^{eq} \\ \widetilde{f}_{22}^{eq} \\ \widetilde{f}_{13}^{eq} \\ \widetilde{f}_{23}^{eq} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{U} + \frac{1}{2\widetilde{\lambda}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{G} \\ &= \boldsymbol{\alpha}_0 \mathbf{U} + \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{G} \end{aligned} \tag{43}$$

ˆ 接着，动理学熵 H 定义为

$$\hat{H} = \boldsymbol{\alpha}_0 \eta + \boldsymbol{\alpha}_1 \psi \tag{44}$$

其中，(η, ψ) 是宏观熵—熵通量对。对于欧拉方程，$\eta = \rho s$ 和 $\psi = \rho u s$，其中 $s = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} +$ 为常数。现在，

$$\left\langle \widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \right\rangle = \mathbf{P} \widetilde{\mathbf{f}}^{eq} = \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha}_0 = I, \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha}_1 = 0 \tag{45a}$$

$$\left\langle \widetilde{\Lambda} \widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \right\rangle = \mathbf{P} \widetilde{\Lambda} \widetilde{\mathbf{f}}^{eq} = \mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{P} \widetilde{\Lambda} \boldsymbol{\alpha}_0 = 0, \mathbf{P} \widetilde{\Lambda} \boldsymbol{\alpha}_1 = I \tag{45b}$$

因此，

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle = \mathbf{P} (\boldsymbol{\alpha}_0 \eta + \boldsymbol{\alpha}_1 \psi) = \eta \tag{46a}$$

$$\left\langle \widetilde{\Lambda}\hat{H} \right\rangle = \mathbf{P}\widetilde{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}_0\eta + \boldsymbol{\alpha}_1\psi) = \psi \tag{46b}$$

现在相对熵是

$$\begin{aligned}
d^2 \quad &= \langle \Delta\omega \cdot \Delta\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \rangle = \left\langle \Delta \left\{ \frac{\partial \hat{H}(\widetilde{\mathbf{f}}^{eq})}{\partial \widetilde{\mathbf{f}}^{eq}} \right\} \cdot \Delta\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \right\rangle \\
&= \left\langle \Delta \left\{ \boldsymbol{\alpha}_0 \frac{\partial \eta}{\partial \widetilde{\mathbf{f}}^{eq}} + \boldsymbol{\alpha}_1 \frac{\partial \psi}{\partial \widetilde{\mathbf{f}}^{eq}} \right\} \cdot \Delta\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \right\rangle \\
&= \left\langle \left\{ \boldsymbol{\alpha}_0 \Delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \widetilde{\mathbf{f}}^{eq}} \right) + \boldsymbol{\alpha}_1 \Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \widetilde{\mathbf{f}}^{eq}} \right) \right\} \cdot \Delta\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \right\rangle \text{ (since } \lambda, \delta\lambda = \text{f(L,R))} \\
&= \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}_0 \Delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \widetilde{\mathbf{f}}^{eq}} \right) \cdot \Delta\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} + \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}_1 \Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \widetilde{\mathbf{f}}^{eq}} \right) \cdot \Delta\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \\
&= \Delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \widetilde{\mathbf{f}}^{eq}} \right) \cdot \Delta\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \\
&= \Delta \begin{bmatrix}
\frac{\partial \eta}{\partial U_1}\frac{\partial U_1}{\partial \widetilde{f}_{11}^{eq}} + \frac{\partial \eta}{\partial U_2}\frac{\partial U_2}{\partial \widetilde{f}_{11}^{eq}} + \frac{\partial \eta}{\partial U_3}\frac{\partial U_3}{\partial \widetilde{f}_{11}^{eq}} \\
\frac{\partial \eta}{\partial U_1}\frac{\partial U_1}{\partial \widetilde{f}_{21}^{eq}} + \frac{\partial \eta}{\partial U_2}\frac{\partial U_2}{\partial \widetilde{f}_{21}^{eq}} + \frac{\partial \eta}{\partial U_3}\frac{\partial U_3}{\partial \widetilde{f}_{21}^{eq}} \\
\frac{\partial \eta}{\partial U_1}\frac{\partial U_1}{\partial \widetilde{f}_{12}^{eq}} + \frac{\partial \eta}{\partial U_2}\frac{\partial U_2}{\partial \widetilde{f}_{12}^{eq}} + \frac{\partial \eta}{\partial U_3}\frac{\partial U_3}{\partial \widetilde{f}_{12}^{eq}} \\
\frac{\partial \eta}{\partial U_1}\frac{\partial U_1}{\partial \widetilde{f}_{22}^{eq}} + \frac{\partial \eta}{\partial U_2}\frac{\partial U_2}{\partial \widetilde{f}_{22}^{eq}} + \frac{\partial \eta}{\partial U_3}\frac{\partial U_3}{\partial \widetilde{f}_{22}^{eq}} \\
\frac{\partial \eta}{\partial U_1}\frac{\partial U_1}{\partial \widetilde{f}_{13}^{eq}} + \frac{\partial \eta}{\partial U_2}\frac{\partial U_2}{\partial \widetilde{f}_{13}^{eq}} + \frac{\partial \eta}{\partial U_3}\frac{\partial U_3}{\partial \widetilde{f}_{13}^{eq}} \\
\frac{\partial \eta}{\partial U_1}\frac{\partial U_1}{\partial \widetilde{f}_{23}^{eq}} + \frac{\partial \eta}{\partial U_2}\frac{\partial U_2}{\partial \widetilde{f}_{23}^{eq}} + \frac{\partial \eta}{\partial U_3}\frac{\partial U_3}{\partial \widetilde{f}_{23}^{eq}}
\end{bmatrix} \cdot \Delta \begin{bmatrix}
\widetilde{f}_{11}^{eq} \\ \widetilde{f}_{21}^{eq} \\ \widetilde{f}_{12}^{eq} \\ \widetilde{f}_{22}^{eq} \\ \widetilde{f}_{13}^{eq} \\ \widetilde{f}_{23}^{eq}
\end{bmatrix} \qquad (47) \\
d^2 \quad &= \Delta \begin{bmatrix}
\frac{\partial \eta}{\partial U_1} \\ \frac{\partial \eta}{\partial U_1} \\ \frac{\partial \eta}{\partial U_2} \\ \frac{\partial \eta}{\partial U_2} \\ \frac{\partial \eta}{\partial U_3} \\ \frac{\partial \eta}{\partial U_3}
\end{bmatrix} \cdot \Delta \begin{bmatrix}
\widetilde{f}_{11}^{eq} \\ \widetilde{f}_{21}^{eq} \\ \widetilde{f}_{12}^{eq} \\ \widetilde{f}_{22}^{eq} \\ \widetilde{f}_{13}^{eq} \\ \widetilde{f}_{23}^{eq}
\end{bmatrix} \\
&= \Delta\frac{\partial \eta}{\partial U_1}\Delta(\widetilde{f}_{11}^{eq} + \widetilde{f}_{21}^{eq}) + \Delta\frac{\partial \eta}{\partial U_2}\Delta(\widetilde{f}_{12}^{eq} + \widetilde{f}_{22}^{eq}) + \Delta\frac{\partial \eta}{\partial U_3}\Delta(\widetilde{f}_{13}^{eq} + \widetilde{f}_{23}^{eq}) \\
&= \Delta\frac{\partial \eta}{\partial U_1}\Delta U_1 + \Delta\frac{\partial \eta}{\partial U_2}\Delta U_2 + \Delta\frac{\partial \eta}{\partial U_3}\Delta U_3 \\
d^2 \quad &= \left(\Delta\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{U}} \right)^T \cdot \Delta\mathbf{U} \qquad (48) \\
&= \Delta \left(\frac{\gamma - s}{\gamma - 1} - \frac{\rho u^2}{2p} \right) \Delta(\rho) + \Delta \left(\frac{\rho u}{p} \right) \Delta(\rho u) + \Delta \left(-\frac{\rho}{p} \right) \Delta(\rho E) \qquad (49)
\end{aligned}$$

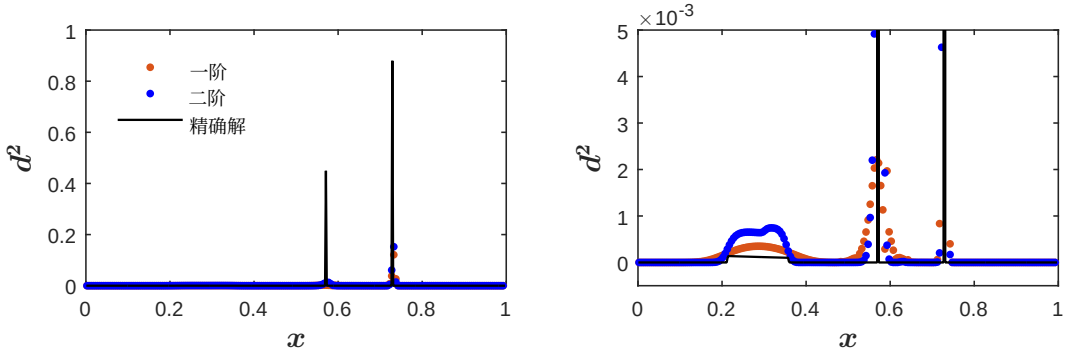

图2：a）Sod激波管问题在 t=0.2 时的相对熵 d^2 ； b）局部放大图

因此，在我们的表述中，界面处的相对熵是熵变量变化量与守恒变量变化量的标量积。这一表达式源自动力学理论的考量，恰好与 Zaide 和 Roe 定义的宏观熵距离一致 [21]。我们分析了 Sod激波管问题（Toro测试算例1）中相对熵的变化。对于这一非定常问题，考察 t= 0.2 时的解；该解包含膨胀波、接触间断和激波。数值解和精确解如图2所示。可以看到， d^2在膨胀波、接触间断和激波处均给出正信号（>0），但在膨胀波处其幅值小得多。由于膨胀波处熵没有变化，因此可以依据以下判据识别膨胀波。

$$\text{At expansions: } d^2 > 0, \Delta s = 0 \tag{50}$$

然而，对于数值解， $|\Delta s|$在膨胀波处并不完全为零。考虑到这一点，我们采用一个不那么严格的条件来识别光滑区域，如下所示：

$$\text{In smooth regions: } d^2 > 0 \text{ and } |\Delta s| \leq k(s_{max} - s_{min}) \tag{51}$$

其中 s_{max} 和 s_{min} 是给定时间层上计算域内的最大熵和最小熵。 k 是一个分数，取得尽可能小； k= 0.1已被证明对我们所有的一维和二维Euler测试算例都足够。现在，修改后的条件接受非常小的熵变化。因此，我们也为 d^2 引入相应的条件，基于其定义(49)中包含熵的项，并得出非零 Δs 会在相对熵 d^2中引入误差 $-\frac{\Delta s \Delta \rho}{\gamma - 1}$ 。考虑到这一点，我们的

引入局部拉克斯–弗里德里希斯型数值扩散的修改准则由下式给出

$$\text{In smooth regions: } d^2 > -\frac{\Delta s \Delta \rho}{\gamma - 1}, |\Delta s| \leq 0.1(s_{max} - s_{min}) \tag{52}$$

~最后，我们可以将数值扩散系数 λ 描述如下

$$\widetilde{\lambda} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\lambda^2 + \frac{(\delta\lambda)^2}{3}}, \text{ if criteria (52) is satisfied,} \\ \lambda, \text{ otherwise} \end{array} \right\} \tag{53}$$

5. 高阶精度

对于二阶精度，我们假设在每个单元中对$\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq}$采用分段线性近似，以计算$(\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_{L/R}$。然而，二阶精度格式不可能是单调的，因为它会产生振荡。因此，使用限制器函数来限制斜率，如下所示：

$$(\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_{j+\frac{1}{2},L} = (\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_j + \frac{1}{2}\phi(\Delta_j^+ \widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq}, \Delta_j^- \widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq}) \tag{54a}$$

$$(\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_{j-\frac{1}{2},R} = (\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_j - \frac{1}{2}\phi(\Delta_j^- \widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq}, \Delta_j^+ \widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq}) \tag{54b}$$

$$\Delta_j^+ \widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} = (\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_{j+1} - (\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_j, \Delta_j^- \widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} = (\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_j - (\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_{j-1} \tag{54c}$$

$$\phi(x, y) = \frac{x^2 y + x y^2}{x^2 + y^2} \text{ (VanAlbada limiter)} \tag{55}$$

因此，

$$\begin{aligned} (U_i)_{j+\frac{1}{2},L} &= (\widetilde{f}_{1i}^{eq})_{j+\frac{1}{2},L} + (\widetilde{f}_{2i}^{eq})_{j+\frac{1}{2},L} \\ &= (U_i)_j + \frac{1}{2}\phi(\Delta_j^+ \widetilde{f}_{1i}^{eq}, \Delta_j^- \widetilde{f}_{1i}^{eq}) + \frac{1}{2}\phi(\Delta_j^+ \widetilde{f}_{2i}^{eq}, \Delta_j^- \widetilde{f}_{2i}^{eq}) \end{aligned} \tag{56}$$

此时，我们进行一项近似。这一近似受到 Kumar & Dass ([22])工作的启发：他们在连续速度空间中，将两个变量的限制器函数的积分近似为这两个变量的积分的限制器函数。在我们的框架中，积分被求和所替代。因此，我们用以下表达式近似 (56)。

$$\begin{aligned} (U_i)_{j+\frac{1}{2},L} &= (U_i)_j + \frac{1}{2}\phi(\Delta_j^+ \widetilde{f}_{1i}^{eq} + \Delta_j^+ \widetilde{f}_{2i}^{eq}, \Delta_j^- \widetilde{f}_{1i}^{eq} + \Delta_j^- \widetilde{f}_{2i}^{eq}) \\ &= (U_i)_j + \frac{1}{2}\phi(\Delta_j^+ U_i, \Delta_j^- U_i) \end{aligned} \tag{57}$$

同样,

$$(U_i)_{j-\frac{1}{2},R} = (U_i)_j - \frac{1}{2}\phi(\Delta_j^- U_i, \Delta_j^+ U_i) \tag{58}$$

我们将（57）和（58）改写为

$$(U_i)_{j+\frac{1}{2},L} = (U_i)_j + \frac{1}{2}\phi(r_j)\left\{(U_i)_j - (U_i)_{j-1}\right\} \tag{59a}$$

$$(U_i)_{j-\frac{1}{2},R} = (U_i)_j - \frac{1}{2}\phi(\frac{1}{r_j})\left\{(U_i)_{j+1} - (U_i)_j\right\} \tag{59b}$$

$$\phi(r) = \frac{r^2+r}{r^2+1}, r_j = \frac{\Delta_j^+ U_i}{\Delta_j^- U_i} = \frac{(U_i)_{j+1} - (U_i)_j}{(U_i)_j - (U_i)_{j-1}} \tag{59c}$$

如果方程（59a）中限制器函数 ϕ 的自变量分母接近于零，为避免数值溢出，我们将 r_j 修改如下:

$$r_j = \frac{\Delta_j^+ U_i}{sign(\Delta_j^- U_i) * \epsilon_3}, \text{ if } |\Delta_j^- U_i| < \epsilon_3 \tag{60}$$

其中， $sign()$ 为标准符号函数。这里，我们取 $\epsilon_3 = 10^{-12}$。接下来，使用强稳定性保持 Runge-Kutta（SSPRK）方法 [23] 对时间导数进行离散。更新公式为:

$$(\mathbf{f}_i)_j^1 = (\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_j^n - \Delta t R((\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_j^n) \tag{61a}$$

$$(\mathbf{f}_i)_j^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{f}_i)_j^1 + \frac{3}{4}(\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_j^n - \frac{1}{4}\Delta t R((\mathbf{f}_i)_j^1) \tag{61b}$$

$$(\mathbf{f}_i)_j^{n+1} = \frac{2}{3}(\mathbf{f}_i)_j^2 + \frac{1}{3}(\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_j^n - \frac{2}{3}\Delta t R((\mathbf{f}_i)_j^2) \tag{61c}$$

这里，R 为残差（见（27））。随后，对（61）取矩即可得到宏观更新公式，其表达式为

$$(U_i)_j^1 = (U_i)_j^n - \Delta t R((U_i)_j^n) \tag{62a}$$

$$(U_i)_j^2 = \frac{1}{4}(U_i)_j^1 + \frac{3}{4}(U_i)_j^n - \frac{1}{4}\Delta t R((U_i)_j^1) \tag{62b}$$

$$(U_i)_j^{n+1} = \frac{2}{3}(U_i)_j^2 + \frac{1}{3}(U_i)_j^n - \frac{2}{3}\Delta t R((U_i)_j^2) \tag{62c}$$

6. 用于黏性流动的动理学格式

我们考虑 f 的一阶近似，即 $f = f^{CE}$，其中 f^{CE}是 Chapman-Enskog 分布函数。对于 f的一阶近似，变速度玻尔兹曼方程的矩给出了宏观纳维-斯托克斯方程，表示为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{G}_{vis,i}}{\partial x_i} \tag{63}$$

with

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_j \\ \rho E \end{bmatrix}, \mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_j + p\delta_{ij} \\ (\rho E + p)u_i \end{bmatrix}, \mathbf{G}_{vis,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{ij} \\ \tau_{ij} u_j - q_i \end{bmatrix} \tag{64}$$

and

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \; q_i = -K \frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{65}$$

这里，矩关系为

$$\int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{v} \int_{\mathbb{R}^+} dI \; \mathbf{\Psi} f^{CE} = \mathbf{U}, \int_{\mathbb{R}^N} v_i d\mathbf{v} \int_{\mathbb{R}^+} dI \; \mathbf{\Psi} f^{CE} = \mathbf{G}_i - \mathbf{G}_{vis,i} \tag{66}$$

在一维中，我们按照定义 ˆ f_i^{eq} 的相同方式定义 ˆf_i^{CE}，但需满足矩关系 (66)，即，

$$\left\langle \hat{f}_i^{CE} \right\rangle = f_{1i}^{CE} + f_{2i}^{CE} = U_i \tag{67a}$$

$$\left\langle v \hat{f}_i^{CE} \right\rangle = \lambda f_{1i}^{CE} - \lambda f_{2i}^{CE} = G_i - G_{vis,i} \tag{67b}$$

矩关系 (67) 给出

$$f_{1i}^{CE} = \frac{U_i}{2} + \frac{G_i - G_{vis,i}}{2\lambda} \tag{68a}$$

$$f_{2i}^{CE} = \frac{U_i}{2} - \frac{G_i - G_{vis,i}}{2\lambda} \tag{68b}$$

我们使用算子分裂策略求解柔性速度玻尔兹曼方程，唯一的区别在于，现在我们在碰撞步骤中将分布函数弛豫至 Chapman-Enskog 分布函数。动理学数值通量按照如下方式使用 Courant 分裂进行计算。

$$(\mathbf{h}_i)_{j+1/2} = (\mathbf{h}_i^+)_L + (\mathbf{h}_i^-)_R = (\Lambda^+ \mathbf{f}_i^{CE})_L + (\Lambda^- \mathbf{f}_i^{CE})_R \tag{69}$$

界面处的宏观通量随后被计算为

$$
\begin{aligned}
(G_i)_{j+1/2} = \quad & \mathbf{P}_i(\mathbf{h}_i)_{j+1/2} \\
= \quad & \frac{1}{2}\left\{(G_i)_L - (G_{vis,i})_L\right\} + \frac{1}{2}\left\{(G_i)_R - (G_{vis,i})_R\right\} \\
& -\frac{(\lambda)_{j+1/2}}{2}\left\{(U_i)_R - (U_i)_L\right\}
\end{aligned} \tag{70}
$$

7. 二维中的平衡分布

在二维情形下，我们定义平衡分布函数 $\hat{f}_i^{eq}$，使其在 $v_1 - v_2$ 平面上的四个象限中均取非零值，如图 3 所示。与一维情形一样，利用平均速度（λ_{1i}，λ_{2i}）基于 R-H条件提供主要数值扩散，而 $\delta\lambda_{1i}$ 和 $\delta\lambda_{2i}$ 则用于提供增强数值扩散，以避免熵违规。二维

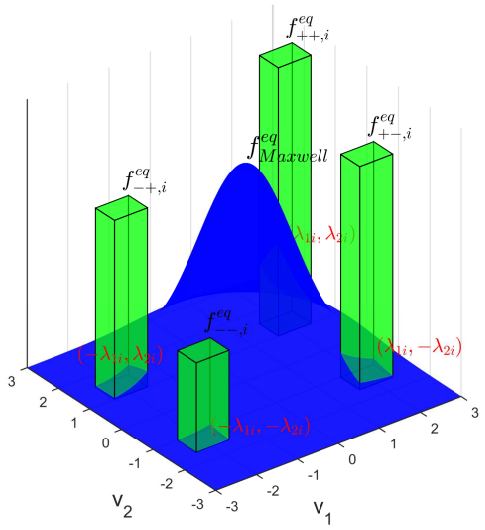

图 3：二维中的平衡分布；显示了无限域 $(-\infty, \infty)$ 在 v_1, v_2 中的放大部分。

分布函数表示为

$$\hat{f}_i^{eq} = \left\{ \begin{array}{cc} f_{++,i}^{eq}, & \begin{array}{c} \lambda_{1i} - \delta\lambda_{1i} \le v_1 \le \lambda_{1i} + \delta\lambda_{1i}, \\ \lambda_{2i} - \delta\lambda_{2i} \le v_2 \le \lambda_{2i} + \delta\lambda_{2i}, \end{array} \\ f_{-+,i}^{eq}, & \begin{array}{c} -\lambda_{1i} - \delta\lambda_{1i} \le v_1 \le -\lambda_{1i} + \delta\lambda_{1i}, \\ \lambda_{2i} - \delta\lambda_{2i} \le v_2 \le \lambda_{2i} + \delta\lambda_{2i}, \end{array} \\ f_{--,i}^{eq}, & \begin{array}{c} -\lambda_{1i} - \delta\lambda_{1i} \le v_1 \le -\lambda_{1i} + \delta\lambda_{1i}, \\ -\lambda_{2i} - \delta\lambda_{2i} \le v_2 \le -\lambda_{2i} + \delta\lambda_{2i}, \end{array} \\ f_{+-,i}^{eq}, & \begin{array}{c} \lambda_{1i} - \delta\lambda_{1i} \le v_1 \le \lambda_{1i} + \delta\lambda_{1i}, \\ -\lambda_{2i} - \delta\lambda_{2i} \le v_2 \le -\lambda_{2i} + \delta\lambda_{2i}, \end{array} \\ 0, & \text{otherwise} \end{array} \right\} \tag{71}$$

将上述表达式代入给出的矩关系中

$$U_i = \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \ \hat{f}_i^{eq} = \left\langle \hat{f}_i^{eq} \right\rangle \tag{72a}$$

$$G_{1i} = \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \ v_1 \hat{f}_i^{eq} = \left\langle v_1 \hat{f}_i^{eq} \right\rangle \tag{72b}$$

$$G_{2i} = \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \ v_2 \hat{f}_i^{eq} = \left\langle v_2 \hat{f}_i^{eq} \right\rangle \tag{72c}$$

可得

$$4\delta\lambda_{1i}\delta\lambda_{2i}(f_{++,i}^{eq} + f_{-+,i}^{eq} + f_{--,i}^{eq} + f_{+-,i}^{eq}) = U_i \tag{73a}$$

$$4\delta\lambda_{1i}\delta\lambda_{2i}(\lambda_{1i}f_{++,i}^{eq} - \lambda_{1i}f_{-+,i}^{eq} - \lambda_{1i}f_{--,i}^{eq} + \lambda_{1i}f_{+-,i}^{eq}) = G_{1i} \tag{73b}$$

$$4\delta\lambda_{1i}\delta\lambda_{2i}(\lambda_{2i}f_{++,i}^{eq} + \lambda_{2i}f_{-+,i}^{eq} - \lambda_{2i}f_{--,i}^{eq} - \lambda_{2i}f_{+-,i}^{eq}) = G_{2i} \tag{73c}$$

将 $4\delta\lambda_{1i}\delta\lambda_{2i}f_{++,\ i}^{eq} = f_{1i}^{eq}$、$4\delta\lambda_{1i}\delta\lambda_{2i}f_{-+,\ i}^{eq} = f_{2i}^{eq}$、$4\delta\lambda_{1i}\delta\lambda_{2i}f_{--,\ i}^{eq} = f_{3i}^{eq}$ $4\delta\lambda_{1i}\delta\lambda_{2i}f_{+-\ i}^{eq} = f_{4i}^{eq}$ 73 和，代入（）中，矩关系可改写为

$$f_{1i}^{eq} + f_{2i}^{eq} + f_{3i}^{eq} + f_{4i}^{eq} = U_i \tag{74a}$$

$$\lambda_{1i}(f_{1i}^{eq} - f_{2i}^{eq} - f_{3i}^{eq} + f_{4i}^{eq}) = G_{1i} \tag{74b}$$

$$\lambda_{2i}(f_{1i}^{eq} + f_{2i}^{eq} - f_{3i}^{eq} - f_{4i}^{eq}) = G_{2i} \tag{74c}$$

暂且假设 λ 和 $\delta\lambda$ 为已知量，则我们有四个未知量（$f_{1i}^{eq}, ..., f_{4i}^{eq}$），但只有三个方程。因此，我们在此作出假设：分布函数 f_{ji}^{eq} 是守恒变量向量和通量向量的线性组合，即 U_i、G_{1i} 和 G_{2i}。满足矩关系的一个解为

$$f_{1i}^{eq} = \frac{1}{4}\left[U_i + \frac{G_{1i}}{\lambda_{1i}} + \frac{G_{2i}}{\lambda_{2i}}\right] \tag{75a}$$

$$f_{2i}^{eq} = \frac{1}{4}\left[U_i - \frac{G_{1i}}{\lambda_{1i}} + \frac{G_{2i}}{\lambda_{2i}}\right] \tag{75b}$$

$$f_{3i}^{eq} = \frac{1}{4}\left[U_i - \frac{G_{1i}}{\lambda_{1i}} - \frac{G_{2i}}{\lambda_{2i}}\right] \tag{75c}$$

$$f_{4i}^{eq} = \frac{1}{4}\left[U_i + \frac{G_{1i}}{\lambda_{1i}} - \frac{G_{2i}}{\lambda_{2i}}\right] \tag{75d}$$

对于上述定义的平衡分布函数，计算得到的二阶矩为

$$\left\langle v_1^2 \hat{f}_i^{eq} \right\rangle = (\lambda_{1i}^2 + \frac{\delta\lambda_{1i}^2}{3})(f_{1i}^{eq} + f_{2i}^{eq} + f_{3i}^{eq} + f_{4i}^{eq}) = (\widetilde{\lambda}_{1i})^2 U_i \tag{76a}$$

$$\left\langle v_2^2 \hat{f}_i^{eq} \right\rangle = (\lambda_{2i}^2 + \frac{\delta\lambda_{2i}^2}{3})(f_{1i}^{eq} + f_{2i}^{eq} + f_{3i}^{eq} + f_{4i}^{eq}) = (\widetilde{\lambda}_{2i})^2 U_i \tag{76b}$$

$$\left\langle v_1 v_2 \hat{f}_i^{eq} \right\rangle = \lambda_{1i}\lambda_{2i}(f_{1i}^{eq} - f_{2i}^{eq} + f_{3i}^{eq} - f_{4i}^{eq}) = 0 \tag{76c}$$

8. 二维欧拉方程的动理学格式

现在，我们针对 i^{th} 分布函数构建一个二维柔性速度玻尔兹曼方程，使得平衡分布函数 $\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq}$ 满足由式（72）和（76）给出的零阶矩、一阶矩和二阶矩。该方程为

$$\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\widetilde{\Lambda}_{1i}\mathbf{f}_i)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\widetilde{\Lambda}_{2i}\mathbf{f}_i)}{\partial x_2} = -\frac{1}{\epsilon}\left[\mathbf{f}_i - \widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq}\right] \tag{77}$$

这里，

$$\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} = \begin{bmatrix} \widetilde{f}_{1i}^{eq} \\ \widetilde{f}_{2i}^{eq} \\ \widetilde{f}_{3i}^{eq} \\ \widetilde{f}_{4i}^{eq} \end{bmatrix}, \widetilde{\Lambda}_{1i} = \begin{bmatrix} \widetilde{\lambda}_{1i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\widetilde{\lambda}_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\widetilde{\lambda}_{1i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\lambda}_{1i} \end{bmatrix}, \widetilde{\Lambda}_{2i} = \begin{bmatrix} \widetilde{\lambda}_{2i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\lambda}_{2i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\widetilde{\lambda}_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\widetilde{\lambda}_{2i} \end{bmatrix} \tag{78}$$

and

$$\widetilde{f}_{1i}^{eq} = \frac{1}{4}\left[U_i + \frac{G_{1i}}{\widetilde{\lambda}_{1i}} + \frac{G_{2i}}{\widetilde{\lambda}_{2i}}\right] \tag{79a}$$

$$\widetilde{f}_{2i}^{eq} = \frac{1}{4}\left[U_i - \frac{G_{1i}}{\widetilde{\lambda}_{1i}} + \frac{G_{2i}}{\widetilde{\lambda}_{2i}}\right] \tag{79b}$$

$$\widetilde{f}_{3i}^{eq} = \frac{1}{4}\left[U_i - \frac{G_{1i}}{\widetilde{\lambda}_{1i}} - \frac{G_{2i}}{\widetilde{\lambda}_{2i}}\right] \tag{79c}$$

$$\widetilde{f}_{4i}^{eq} = \frac{1}{4}\left[U_i + \frac{G_{1i}}{\widetilde{\lambda}_{1i}} - \frac{G_{2i}}{\widetilde{\lambda}_{2i}}\right] \tag{79d}$$

定义 $\mathbf{P}_i = [1,1,1,1]$，我们有

$$\mathbf{P}_i\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} = U_i, \tag{80a}$$

$$\mathbf{P}_i\widetilde{\Lambda}_{1i}\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} = G_{1i}, \mathbf{P}_i\widetilde{\Lambda}_{2i}\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} = G_{2i} \tag{80b}$$

$$\mathbf{P}_i\widetilde{\Lambda}_{1i}^2\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} = \widetilde{\lambda}_{1i}^2 U_i, \mathbf{P}_i\widetilde{\Lambda}_{2i}^2\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} = \widetilde{\lambda}_{2i}^2 U_i, \mathbf{P}_i\widetilde{\Lambda}_{1i}\widetilde{\Lambda}_{2i}\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} = 0 \tag{80c}$$

因此，所有矩均得到满足。接下来，我们使用算子分裂求解玻尔兹曼方程（77）的 i^{th} 分量，从而对（j,k）th 单元得到弛豫步和对流步，如下所示：

弛豫步：　　瞬时完成，即 $\epsilon \to 0$。因此，

$$(\mathbf{f}_i)_{j,k}^n = (\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_{j,k}^n \tag{81}$$

对流步：　　玻尔兹曼方程的对流部分为

$$\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{h}_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{h}_{2i}}{\partial x_2} = 0; \mathbf{h}_{1/2i} = \widetilde{\Lambda}_{1/2i}\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} \tag{82}$$

将（j,k）th 单元的对流方程改写为积分形式，

$$A_{j,k}\frac{d\mathbf{f}_i}{dt} + \oint \mathbf{h}_n dl = 0; \mathbf{h}_{ni} = \widetilde{\Lambda}_{ni}\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq}, \widetilde{\Lambda}_{ni} = \widetilde{\Lambda}_{1i}n_1 + \widetilde{\Lambda}_{2i}n_2 \tag{83a}$$

$$\Rightarrow A_{j,k}\frac{d\mathbf{f}_i}{dt} + \sum_{s=1}^{4}(\mathbf{h}_{ni})_s l_s = 0 \text{ (mid-point quadrature,)}$$

$$\text{where, } (\mathbf{h}_{ni})_s = (\mathbf{h}_{ni}^+)_L + (\mathbf{h}_{ni}^-)_R = (\widetilde{\Lambda}_{ni}^+\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_L + (\widetilde{\Lambda}_{ni}^-\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_R \tag{83b}$$

在上述表达式中，我们假设采用了具有四边形有限体积的结构化网格（见图4）。将（$\mathbf{h}_{ni}$）$_s$ 乘以 $\mathbf{P}_i$ ，即可得到宏观法向通量（$\mathbf{G}_{ni}$）$_s$。

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}_{ni})_s &= \mathbf{P}_i(\mathbf{h}_{ni})_s = \mathbf{P}_i(\widetilde{\Lambda}_{ni}^+\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_L + \mathbf{P}_i(\widetilde{\Lambda}_{ni}^-\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq})_R \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(G_{ni})_L + (G_{ni})_R\right] - \tfrac{1}{2}\frac{|\widetilde{\lambda}_{1i}n_1+\widetilde{\lambda}_{2i}n_2|+|-\widetilde{\lambda}_{1i}n_1+\widetilde{\lambda}_{2i}n_2|}{2}\Delta U_i\end{aligned} \tag{84}$$

or

$$(\mathbf{G}_{ni})_s = \frac{1}{2}\left[(G_{ni})_L + (G_{ni})_R\right] - \frac{\widetilde{\lambda}_{ni}}{2}\Delta U_i \tag{85}$$

其中

$$\widetilde{\lambda}_{ni} = \frac{|\widetilde{\lambda}_{1i}n_1 + \widetilde{\lambda}_{2i}n_2| + |-\widetilde{\lambda}_{1i}n_1 + \widetilde{\lambda}_{2i}n_2|}{2} \tag{86}$$

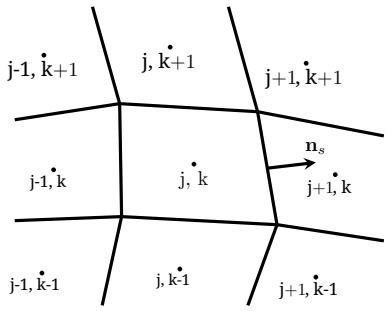

图 4：二维结构化网格的内部单元及其对应的单位法向量。

8.1. 确定 λ_n

我们取 $\lambda_{1i} = \lambda_1, \lambda_{2i} = \lambda_2, \delta\lambda_{1i} = \delta\lambda_1, \delta\lambda_{2i} = \delta\lambda_2$。因此，我们得到标量扩散为 $\widetilde{\lambda}_{ni} = \widetilde{\lambda}_n = \sqrt{\lambda_n^2 + (\delta\lambda)^2/3}$。在定义 λ_n 之前，我们先定义以下波速。

$$\lambda_s = min_i(\frac{|\Delta G_{n,i}|}{|\Delta U_i| + \epsilon_0}),\ \Delta = ()_R - ()_L \tag{87a}$$

$$\lambda_{min} = max\left\{min(|u_n - a|, |u_n|, |u_n + a|)_L, min(|u_n - a|, |u_n|, |u_n + a|)_R\right\} \tag{87b}$$

注意，表达式 (87a) 是基于在单元界面上施加 Rankine-Hugoniot 跃迁条件得到的。然后，我们定义 λ_n 如下

$$\lambda_n = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{min},\ \text{if}\ \|\Delta\mathbf{U}\| \le \epsilon_1\ (\text{uniform flow}) \\ \lambda_s,\ \text{if}\ \|\Delta\mathbf{U}\| > \epsilon_1, \|\Delta\mathbf{G}_n\| \le \epsilon_2\ (\text{steady discontinuity}) \\ max(\lambda_{min}, \lambda_s),\ \text{otherwise} \end{array} \right\} \tag{88}$$

这里，我们也对所有测试算例取 $\epsilon_1 = 10^{-5}$、$\epsilon_2 = 10^{-8}$ 和 $\epsilon_0 = 10^{-14}$。

8.2. 二维中的相对熵

遵循与一维相同的步骤，可推导出二维中的相对熵 d^2 （见附录B），并由下式给出

$$\begin{aligned} d^2 = &\quad \left(\Delta\frac{\partial\eta}{\partial\mathbf{U}}\right)^T \cdot \Delta\mathbf{U} \\ = &\quad \Delta\left(\frac{\gamma - s}{\gamma - 1} - \frac{\rho u_1^2}{2p} - \frac{\rho u_2^2}{2p}\right)\Delta(\rho) + \Delta\left(\frac{\rho u_1}{p}\right)\Delta(\rho u_1) + \end{aligned}$$

$$\Delta\left(\frac{\rho u_2}{p}\right)\Delta(\rho u_2)+\Delta\left(-\frac{\rho}{p}\right)\Delta(\rho E) \tag{89}$$

然后使用由(52)给出的基于相对熵的判据，在光滑流动区域中提供局部 Lax–Friedrichs 类型的数值扩散。

9. 基于离散动力学系统的边界条件

二维欧拉方程的边界条件并非易事，针对宏观层面的边界条件开发已开展了大量研究。关于基于分子速度和经典麦克斯韦分布的边界条件，我们分别参见 [8] 流动切向边界条件（基于镜面反射模型）和 [24] 远场动力学边界条件。本节采用基于离散动力学系统的类似策略，并以一种新颖的方式推导流动相切条件和远场边界条件。

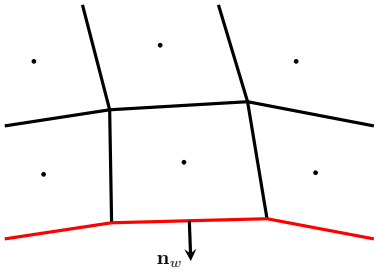

图 5：二维结构化网格中的边界单元及其对应的单位法向量。

在边界处，为简单起见，我们假设 $\delta\lambda \to 0$，即平衡分布函数简化为狄拉克 δ 分布函数。随后，我们基于动力学模型构造离散动力学流动切向边界条件（DK-FTBC）和离散动力学远场边界条件（DK-FBC）。首先，假设边界表面处的单位法向量 $\mathbf{n}(=n_1\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2)$ 指向外侧（见图 5）。现在，将离散速度平衡分布函数 $\hat{} f_i^{eq}$ 改写为速度的法向分量和切向分量，可得

$$\begin{aligned}\hat{f}_i^{eq} = \quad & f_{1i}^{eq}\delta\left(v_1-\lambda_{1i}\right)\delta\left(v_2-\lambda_{2i}\right)+f_{2i}^{eq}\delta\left(v_1+\lambda_{1i}\right)\delta\left(v_2-\lambda_{2i}\right)+\\ & f_{3i}^{eq}\delta\left(v_1+\lambda_{1i}\right)\delta\left(v_2+\lambda_{2i}\right)+f_{4i}^{eq}\delta(v_1-\lambda_{1i})\delta\left(v_2+\lambda_{2i}\right)\\ = \quad & f_{1i}^{eq}\delta\left(v_n-[\lambda_{1i}n_1+\lambda_{2i}n_2]\right)\delta\left(v_t-[-\lambda_{1i}n_2+\lambda_{2i}n_1]\right)+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&f_{2i}^{eq}\delta\left(v_n-\left[-\lambda_{1i}n_1+\lambda_{2i}n_2\right]\right)\delta\left(v_t-\left[\lambda_{1i}n_2+\lambda_{2i}n_1\right]\right)+\\
&f_{3i}^{eq}\delta\left(v_n-\left[-\lambda_{1i}n_1-\lambda_{2i}n_2\right]\right)\delta\left(v_t-\left[\lambda_{1i}n_2-\lambda_{2i}n_1\right]\right)+\\
&f_{4i}^{eq}\delta\left(v_n-\left[\lambda_{1i}n_1-\lambda_{2i}n_2\right]\right)\delta\left(v_t-\left[-\lambda_{1i}n_2-\lambda_{2i}n_1\right]\right)
\end{aligned}
\tag{90}
$$

其中，$v_n = v_1n_1 + v_2n_2$、$v_t = -v_1n_2 + v_2n_1$。对于我们的格式，表面 s 处的分裂法向通量由（离散）动力学速度的法向分量经过 Courant 分裂得到，可写为

$$
\mathbf{G}_{ns,i}^{+} = \int_0^{\infty} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \int_0^{\infty} dI\Psi_i f^{eq} = \int_0^{\infty} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \hat{f}_i^{eq} \tag{91a}
$$

$$
\mathbf{G}_{ns,i}^{-} = \int_{-\infty}^{0} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \int_0^{\infty} dI\Psi_i f^{eq} = \int_{-\infty}^{0} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \hat{f}_i^{eq} \tag{91b}
$$

分裂通量 $\mathsf{G}_{ns,i}^{+}$（其中 $v_n \geq 0$）对应出流信息，并取决于内部数据；而分裂通量 $\mathsf{G}_{ns,i}^{-}$（其中 $v_n \leq 0$）对应从边界进入计算域的信息。

离散动力学流动切向边界条件：这是无黏壁面边界条件，基于气体动理论的镜面反射模型。根据镜面反射模型，在无黏壁面处，粒子的法向速度反向，而切向速度保持不变。因此，我们取

$$
\mathbf{G}_{nw,i}^{+} = \int_0^{\infty} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \int_0^{\infty} dI\Psi_i f^{eq}(v_n, v_t) \tag{92a}
$$

$$
\mathbf{G}_{nw,i}^{-} = \int_{-\infty}^{0} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \int_0^{\infty} dI\Psi_i f^{eq}(-v_n, v_t) \tag{92b}
$$

现在，根据上述定义，分裂通量可以写为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}_{nw,1}^{+} = &\int_0^{\infty} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \int_0^{\infty} dI\ f^{eq}(v_n, v_t)\\
= &\int_0^{\infty} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t\ \hat{f}_1^{eq}(v_n, v_t)\\
= &\left(\lambda_{11}n_1+\lambda_{21}n_2\right)^{+} f_{11}^{eq} + \left(-\lambda_{11}n_1+\lambda_{21}n_2\right)^{+} f_{21}^{eq} +\\
&\left(-\lambda_{11}n_1-\lambda_{21}n_2\right)^{+} f_{31}^{eq} + \left(\lambda_{11}n_1-\lambda_{21}n_2\right)^{+} f_{41}^{eq}
\end{aligned}
\tag{93a}
$$

$$
\mathbf{G}_{nw,1}^{-} = \int_{-\infty}^{0} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \int_0^{\infty} dI\ f^{eq}(-v_n, v_t)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{0} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \ \hat{f}_1^{eq}(-v_n, v_t) \\
&= (-\lambda_{11}n_1 - \lambda_{21}n_2)^- f_{11}^{eq} + (\lambda_{11}n_1 - \lambda_{21}n_2)^- f_{21}^{eq} + \\
&\quad (\lambda_{11}n_1 + \lambda_{21}n_2)^- f_{31}^{eq} + (-\lambda_{11}n_1 + \lambda_{21}n_2)^- f_{41}^{eq} \\
&= -(\lambda_{11}n_1 + \lambda_{21}n_2)^+ f_{11}^{eq} - (-\lambda_{11}n_1 + \lambda_{21}n_2)^+ f_{21}^{eq} - \\
&\quad (-\lambda_{11}n_1 - \lambda_{21}n_2)^+ f_{31}^{eq} - (\lambda_{11}n_1 - \lambda_{21}n_2)^+ f_{41}^{eq} \qquad (93b)
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{G}_{nw,1} = \mathbf{G}_{nw,1}^{+} + \mathbf{G}_{nw,1}^{+} = 0 \qquad (93c)
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}_{nw,2}^{+} &= \int_{0}^{\infty} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \int_{0}^{\infty} dI \ v_1 f^{eq}(v_n, v_t) \\
&= \int_{0}^{\infty} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \int_{0}^{\infty} dI \ (v_n n_1 - v_t n_2) f^{eq}(v_n, v_t) \\
&= \int_{0}^{\infty} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \ \hat{f}_2^{eq}(v_n, v_t) \\
&= (\lambda_{12}n_1 + \lambda_{22}n_2)^+ f_{12}^{eq} + (-\lambda_{12}n_1 + \lambda_{22}n_2)^+ f_{22}^{eq} + \\
&\quad (-\lambda_{12}n_1 - \lambda_{22}n_2)^+ f_{32}^{eq} + (\lambda_{12}n_1 - \lambda_{22}n_2)^+ f_{42}^{eq} \qquad (94a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}_{nw,2}^{-} &= \int_{-\infty}^{0} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \int_{0}^{\infty} dI \ v_1 f^{eq}(-v_n, v_t) \\
&= \int_{-\infty}^{0} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \int_{0}^{\infty} dI \ (v_n n_1 - v_t n_2) f^{eq}(-v_n, v_t) \\
&= \int_{-\infty}^{0} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \int_{0}^{\infty} dI \ (-v_n n_1 - v_t n_2) f^{eq}(-v_n, v_t) + \\
&\quad \int_{-\infty}^{0} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \int_{0}^{\infty} dI \ (2v_n n_1) f^{eq}(-v_n, v_t) \\
&= \int_{-\infty}^{0} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \ \hat{f}_2^{eq}(-v_n, v_t) + \\
&\quad 2n_1 \int_{-\infty}^{0} v_n^2 dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \ f^{eq}(-v_n, v_t) \\
&= \{-(\lambda_{12}n_1 + \lambda_{22}n_2)\}^- f_{12}^{eq} + \{-(-\lambda_{12}n_1 + \lambda_{22}n_2)\}^- f_{22}^{eq} + \\
&\quad \{-(-\lambda_{12}n_1 - \lambda_{22}n_2)\}^- f_{32}^{eq} + \{-(\lambda_{12}n_1 - \lambda_{22}n_2)\}^- f_{42}^{eq} + \\
&\quad 2n_1 \int_{-\infty}^{0} v_n^2 dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t f^{eq}(-v_n, v_t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & -(\lambda_{12}n_1+\lambda_{22}n_2)^+ f_{12}^{eq} - (-\lambda_{12}n_1+\lambda_{22}n_2)^+ f_{22}^{eq} - \\
& (-\lambda_{12}n_1-\lambda_{22}n_2)^+ f_{32}^{eq} - (\lambda_{12}n_1-\lambda_{22}n_2)^+ f_{42}^{eq} + \\
& 2n_1 \int_{-\infty}^{0} v_n^2 dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t f^{eq}(-v_n, v_t) \qquad (94b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}_{nw,2} = \quad & \mathbf{G}_{nw,2}^{+} + \mathbf{G}_{nw,2}^{-} = 2n_1 \int_{-\infty}^{0} v_n^2 dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \; f^{eq}(-v_n, v_t) \\
= \quad & \frac{1}{2}[\{|\lambda_{12}n_1+\lambda_{22}n_2| + |\lambda_{12}n_1-\lambda_{22}n_2|\}\rho u_1 n_1^2 + \\
& \{|\lambda_{13}n_1+\lambda_{23}n_2| + |\lambda_{13}n_1-\lambda_{23}n_2|\}\rho u_2 n_1 n_2] + \\
& \left(\rho u_{nw}^2 + p\right) n_1 \\
= \quad & p n_1, \text{ for } \lambda_{1i} = \lambda_1, \lambda_{2i} = \lambda_2 \qquad (94c)
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}_{nw,3} = \quad & 2n_2 \int_{-\infty}^{0} v_n^2 dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \; f^{eq}(-v_n, v_t) \\
= \quad & \frac{1}{2}[\{|\lambda_{12}n_1+\lambda_{22}n_2| + |\lambda_{12}n_1-\lambda_{22}n_2|\}\rho u_1 n_1 n_2 + \\
& \{|\lambda_{13}n_1+\lambda_{23}n_2| + |\lambda_{13}n_1-\lambda_{23}n_2|\}\rho u_2 n_2^2] + \\
& \left(\rho u_{nw}^2 + p\right) n_2 \\
= \quad & p n_2, \text{ for } \lambda_{1i} = \lambda_1, \lambda_{2i} = \lambda_2 \qquad (94d)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}_{nw,4}^{+} = \quad & \int_0^{\infty} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \int_0^{\infty} dI \; \left[I + \frac{v_n^2+v_t^2}{2}\right] f^{eq}(v_n, v_t) \\
= \quad & \int_0^{\infty} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \; \hat{f}_4^{eq}(v_n, v_t) \\
= \quad & (\lambda_{14}n_1+\lambda_{24}n_2)^+ f_{14}^{eq} + (-\lambda_{14}n_1+\lambda_{24}n_2)^+ f_{24}^{eq} + \\
& (-\lambda_{14}n_1-\lambda_{24}n_2)^+ f_{34}^{eq} + (\lambda_{14}n_1-\lambda_{24}n_2)^+ f_{44}^{eq} \qquad (95a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}_{nw,4}^{-} = \quad & \int_{-\infty}^{0} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \int_0^{\infty} dI \; \left[I + \frac{v_n^2+v_t^2}{2}\right] f^{eq}(-v_n, v_t) \\
= \quad & \int_{-\infty}^{0} v_n dv_n \int_{-\infty}^{\infty} dv_t \; \hat{f}_4^{eq}(-v_n, v_t) \\
= \quad & -(\lambda_{14}n_1+\lambda_{24}n_2)^+ f_{14}^{eq} - (-\lambda_{14}n_1+\lambda_{24}n_2)^+ f_{24}^{eq} -
\end{aligned}
$$

$$(-\lambda_{14}n_1 - \lambda_{24}n_2)^+ f_{34}^{eq} - (\lambda_{14}n_1 - \lambda_{24}n_2)^+ f_{44}^{eq} \tag{95b}$$

$$\mathbf{G}_{nw,4} = \mathbf{G}_{nw,4}^{+} + \mathbf{G}_{nw,4}^{-} = 0 \tag{95c}$$

离散动力学远场边界条件：此边界条件适用于远场边界，即距离物体非常远的位置。远场边界处的正分裂通量取决于内部数据，而负分裂通量取决于边界数据。因此，

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{nf,i}^{+} = & \int_0^\infty v_n dv_n \int_{-\infty}^\infty dv_t \int_0^\infty dI \ \Psi_i (f^{eq})_{interior} \\ = & \int_0^\infty v_n dv_n \int_{-\infty}^\infty dv_t \ (\hat{f}_i^{eq})_{interior} \end{aligned} \tag{96a}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{nf,i}^{-} = & \int_{-\infty}^0 v_n dv_n \int_{-\infty}^\infty dv_t \int_0^\infty dI \ \Psi_i (f^{eq})_{boundary} \\ = & \int_{-\infty}^0 v_n dv_n \int_{-\infty}^\infty dv_t \ (\hat{f}_i^{eq})_{boundary} \end{aligned} \tag{96b}$$

$$\mathbf{G}_{nf,i} = \mathbf{G}_{nf,i}^{+} + \mathbf{G}_{nf,i}^{-} \tag{96c}$$

因此，远场边界界面处的宏观通量采用与内部界面处相同的格式计算，并使用相应的内部值和边界值。

10. 结果与讨论

10.1. 实验收敛阶

为确定所介绍格式的实验收敛阶，考虑一个已知精确解的一维欧拉测试。所取计算域为 $\mathbf{x}\in[0,2]$。初始条件为

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) = 1 + 0.2sin(\pi x) \tag{97a}$$

$$u(x,0) = 0.1, \ p(x,0) = 0.5 \tag{97b}$$

因此，速度和压力初始时为常数，而密度呈正弦变化。两端采用周期边界条件。对于这个问题， u和 p 保持不变，而密度的精确解为

$$\rho(x,t) = \rho_0(x - ut) = 1 + 0.2sin\left(\pi \left[x - 0.1t\right]\right) \tag{98}$$

Nx	Δx	L_1 误差	EOC	L_2 误差	EOC
40	0.05	0.0191413808		0.0154857921	
80	0.025	0.0085164603	1.168369	0.0069153845	1.163063
160	0.0125	0.0045451439	0.905928	0.0036194091	0.934055
320	0.00625	0.0022895408	0.989267	0.0018024477	1.005796
640	0.003125	0.0011552003	0.986915	0.0009209818	0.968713
1280	0.0015625	0.0005665738	1.027807	0.0004564290	1.012782
2560	0.00078125	0.0002874274	0.979066	0.0002298604	0.989632

表1：使用 L_1 和 L_2 误差范数的一阶精度

对该问题进行数值求解，并考察 t= 0.5 时的解。针对不同的网格尺寸计算数值解，即 $Nx(=\frac{2}{\Delta x})$=40、80、160，依此类推。接下来，按如下方式计算解的 L_1 和 L_2 误差。

$$\|\varepsilon_K\|_{L_1} = \Delta x \sum_{i=1}^{K} |\rho^i - \rho_e^i| \tag{99a}$$

$$\|\varepsilon_K\|_{L_2} = \sqrt{\Delta x \sum_{i=1}^{K} (\rho^i - \rho_e^i)^2} \tag{99b}$$

这里 K 是网格单元的数量， ρ^i 和 ρ_e^i 分别是 i^{th} 单元中的数值解和精确解。现在，对于一个 p^{th} 阶精度的格式，

$$\|\varepsilon_K\| = C\Delta x^p + O(\Delta x^{p+1}). \text{ Similarly,} \tag{100a}$$

$$\left\|\varepsilon_{K/2}\right\| = C(2\Delta x)^p + O(\Delta x)^{p+1}, \ (K \propto \frac{1}{\Delta x}) \tag{100b}$$

因此，

$$\frac{\left\|\varepsilon_{K/2}\right\|}{\|\varepsilon_K\|} = 2^p + O(\Delta x) \Rightarrow log_2\left(\frac{\left\|\varepsilon_{K/2}\right\|}{\|\varepsilon_K\|}\right) = p + O(\Delta x) \tag{101}$$

该格式的实验收敛阶随后给出为

$$\text{EOC} = log_2\left(\frac{\left\|\varepsilon_{K/2}\right\|}{\|\varepsilon_K\|}\right) \tag{102}$$

本文格式的 L_1 和 L_2 误差在表1中列出了一阶精度的结果。二阶结果分别列于表2（带限制器）和表3（不带限制器）中。图6展示了比较实验收敛阶与斜率1和2的双对数图。

Nx	Δx	L_1 误差	EOC	L_2 误差	EOC
40	0.05	0.0012055970		0.0013636619	
80	0.025	0.0003310609	1.864579	0.0004857523	1.489193
160	0.0125	0.0000765373	2.112862	0.0001403528	1.791163
320	0.00625	0.0000187416	2.029916	0.0000433965	1.693408
640	0.003125	0.0000045506	2.042103	0.0000135291	1.681510
1280	0.0015625	0.0000010846	2.068911	0.0000040809	1.729078
2560	0.00078125	0.0000002438	2.153041	0.000001174	1.797770

表2：使用 L_1 和 L_2 误差范数、采用 Van Albada限制器时的二阶精度实验收敛阶

Nx	Δx	L_1 误差	EOC	L_2 误差	EOC
40	0.05	0.0003656949		0.0002969886	
80	0.025	0.0000851224	2.103030	0.0000671913	2.144061
160	0.0125	0.0000207283	2.037941	0.0000163095	2.042564
320	0.00625	0.0000051489	2.009272	0.0000040460	2.011155
640	0.003125	0.0000012847	2.002791	0.0000010091	2.003356
1280	0.0015625	0.0000003207	2.002197	0.0000002519	2.002316
2560	0.00078125	0.0000000797	2.008218	0.0000000626	2.008252

表3：无限制器时使用 L_1 和 L_2 误差范数计算二阶精度的实验收敛阶

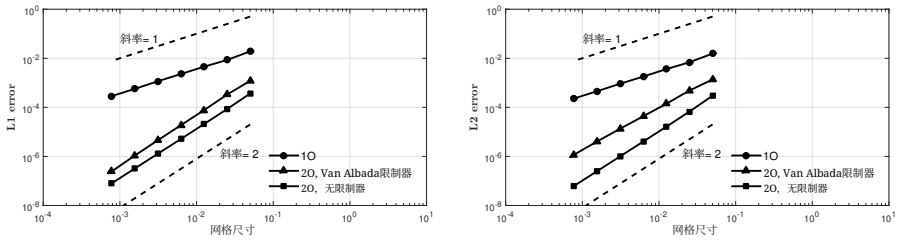

图6：(a) L_1 误差范数与网格尺寸的关系，(b) L_2 误差范数与网格尺寸的关系

x_0	ρ_L	u_L	p_L	ρ_R	u_R	p_R	t_{final}
0.5	1.4	0	1.0	1.0	0.0	1.0	2.0
0.5	1.0	1.0	$\frac{1}{\gamma M(=2)^2}$	$\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{p_R}{p_l}+1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}+\frac{p_R}{p_L}}$	$\sqrt{\frac{\gamma(2+(\gamma-1)M^2)p_R(}{2\gamma M^2+1-\gamma)\rho_R}}$	$p_L\frac{2\gamma M^2-(\gamma-1)}{\gamma+1}$	1.5
0.5	1.4	0.1	1.0	1.0	0.1	1.0	1.0
0.5	3.86	-0.81	10.33	1.0	-3.44	1.0	1.0
0.3	1.0	0.75	1.0	0.125	0.0	0.1	0.2
0.5	1.0	-2.0	0.4	1.0	2.0	0.4	0.15
0.5	1.0	0.0	1000.0	1.0	0.0	0.01	0.012
0.4	5.99924	19.5975	460.894	5.99242	-6.19633	46.0950	0.035
0.8	1.0	-19.59745	1000.0	1.0	-19.59745	0.01	0.012

表4：一维测试算例的初始条件

10.2. 一维欧拉测试

为测试本文格式的稳健性和精度，我们求解了大量一维欧拉测试算例。初始条件见表4。对于所有问题，计算域为 x$\in$ $[0,1]$，Nx$=$ 200，库朗数$=$ 0.8，两端均采用 Neumann边界条件。全局时间步长按如下方式计算： $\Delta t=$ 库朗数 $max_i \frac{\Delta x}{(|u|+a)_i}$。测试算例1的初始间断为静止接触间断。测试算例2的初始条件为静止激波，自由来流马赫数为$=$ 2。对于静止激波测试算例，利用气体动力学关系求得激波后条件。图7和图8的结果表明，这两个测试算例中的静止间断均按设计被精确捕捉。测试算例3（图9）由一个缓慢移动的接触间断构成。移动接触间断如预期那样发生扩散，结果较为准确。测试算例4由一个缓慢移动的激波构成。图10的结果表明，激波在几个网格单元内被捕捉到，激波后仅出现极轻微的振荡。测试算例5至9取自Toro（第6章，测试算例1至5 [25]）。测试算例5为Sod激波管问题；其解由一个向右传播的激波、一个向右传播的接触间断和一个向左传播的声速膨胀波组成。图11的结果表明，没有形成违反熵条件的膨胀激波。测试算例6（过热问题）由左右两个强对称膨胀波构成，中间有一个强度趋于零的接触间断。中心处的压力接近真空。因此，该问题适合用于评估格式在低密度流动中的性能。图12中该测试算例的结果表明，即使在低密度条件下，本文格式也不会失效。然而，中心处的内能有所增加，这种现象很常见于

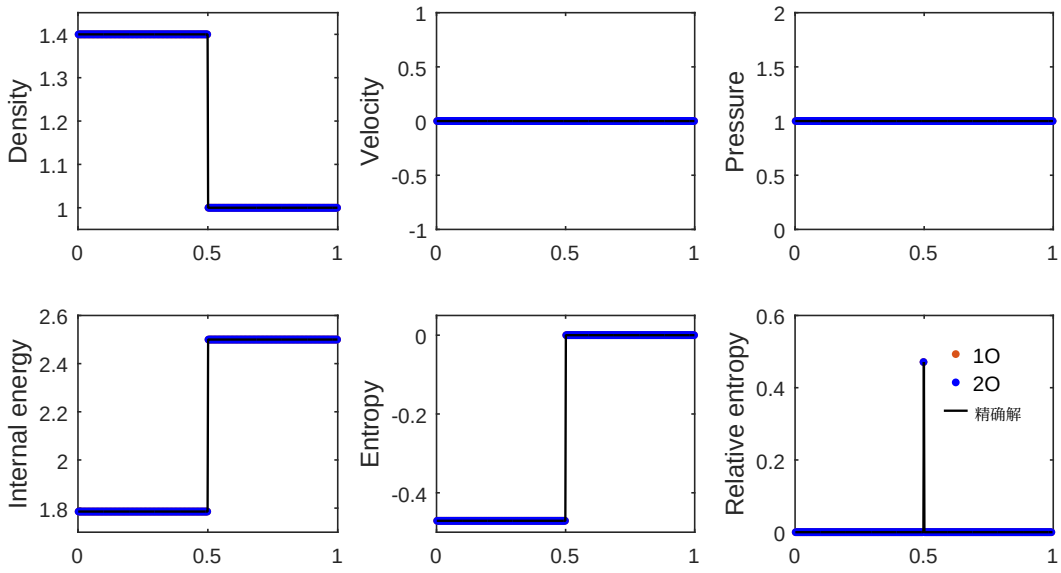

图7：测试算例1：稳态接触间断

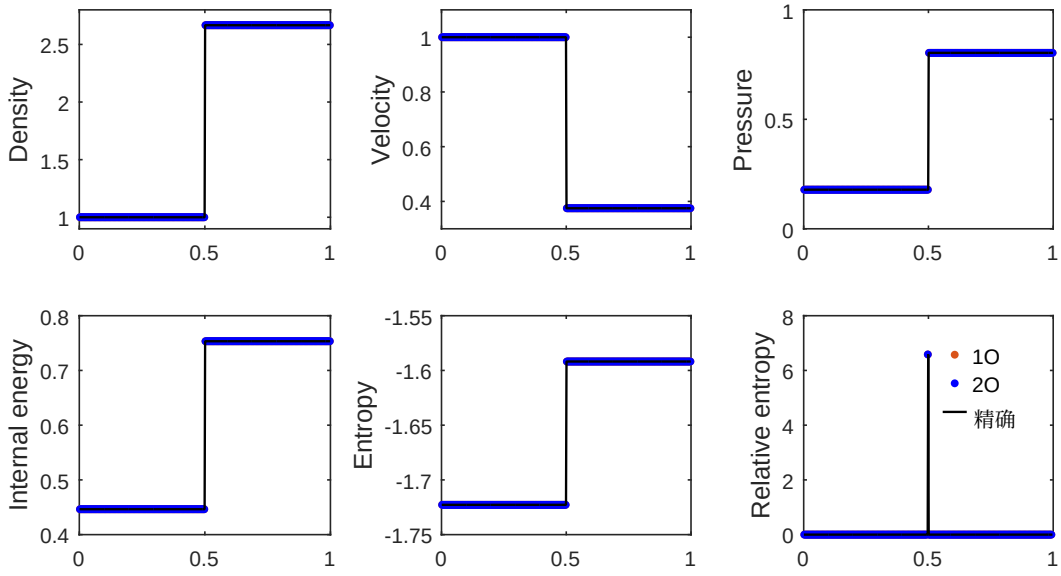

图 8：测试算例 2：稳态激波

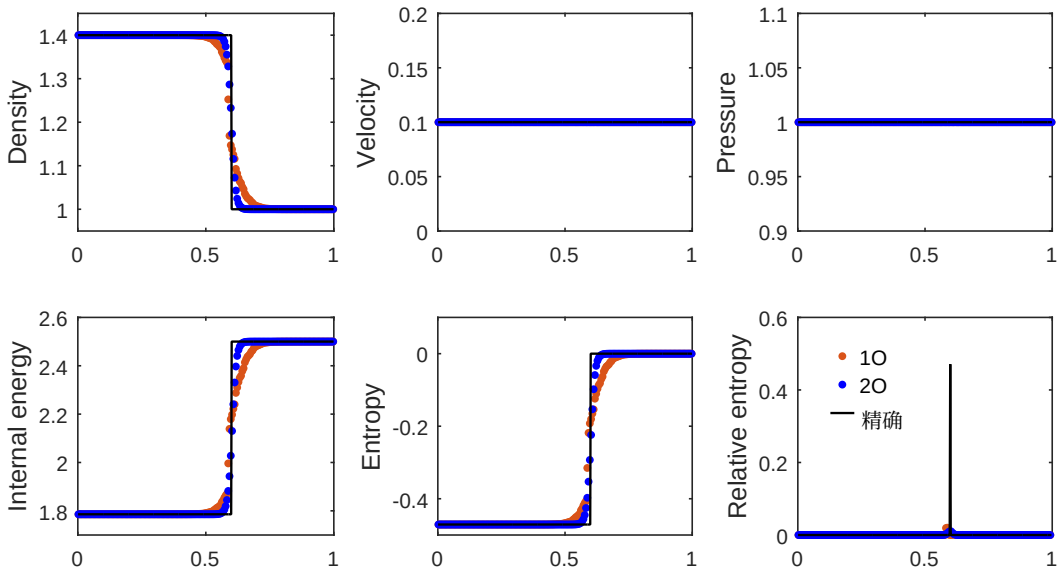

图 9：测试算例 3：缓慢移动的接触间断

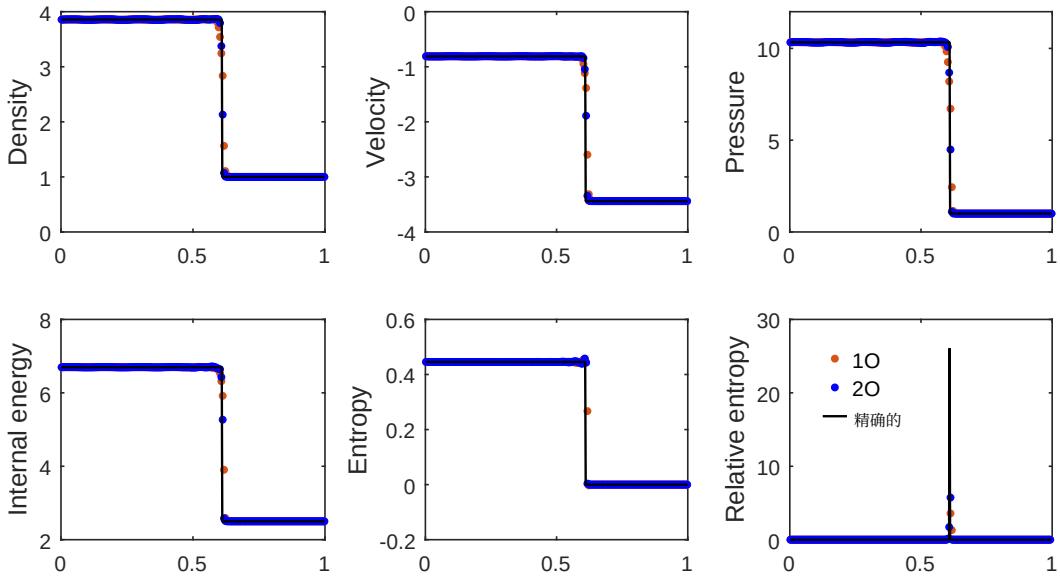

图 10：测试算例 4：缓慢移动的激波

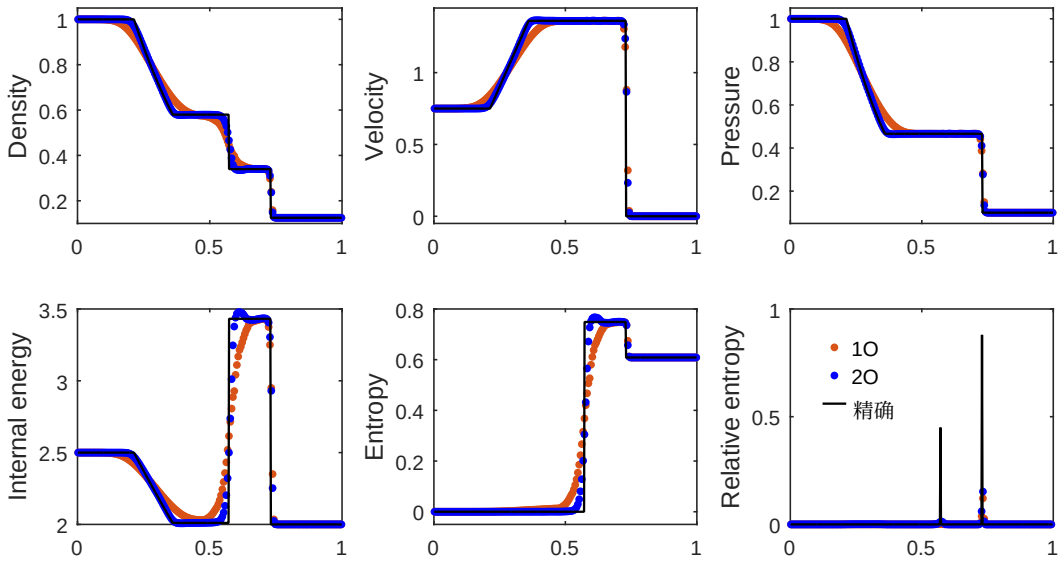

图 11: 测试算例 5: Sod激波管问题, t=0.2

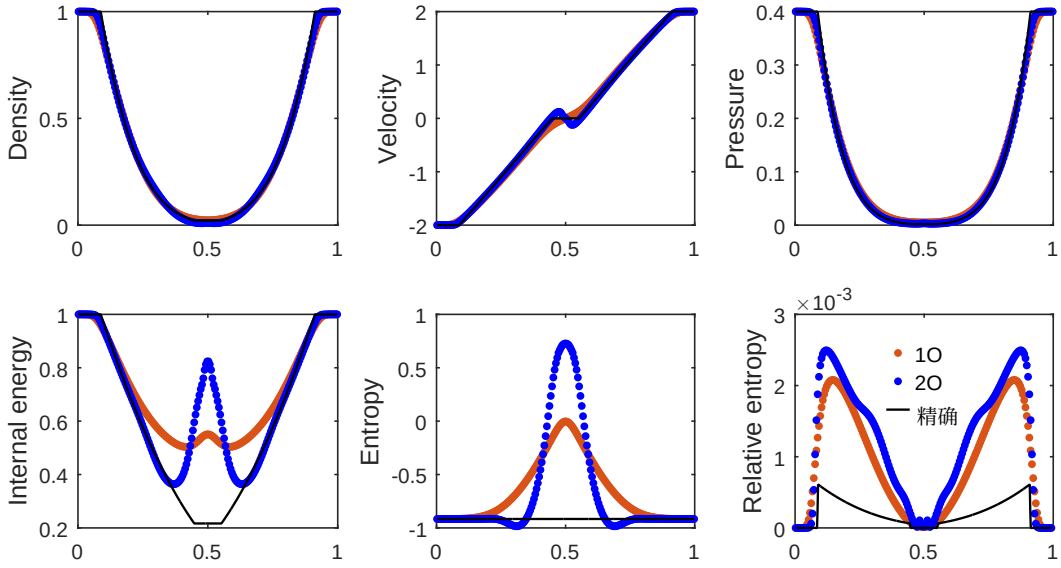

图 12：测试算例 6：过热问题

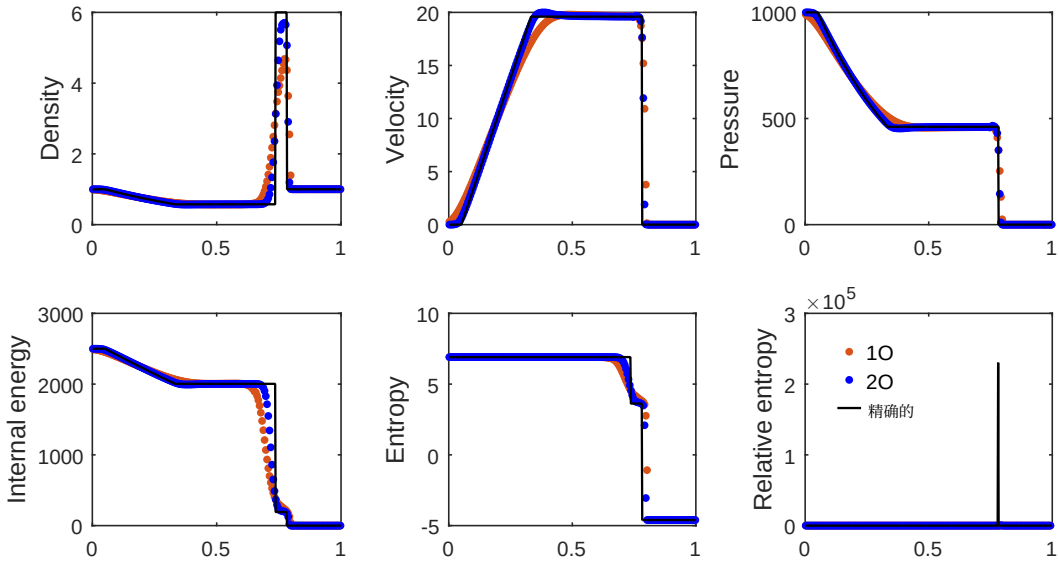

图13：测试用例7：Woodward和Colella问题的左半部分

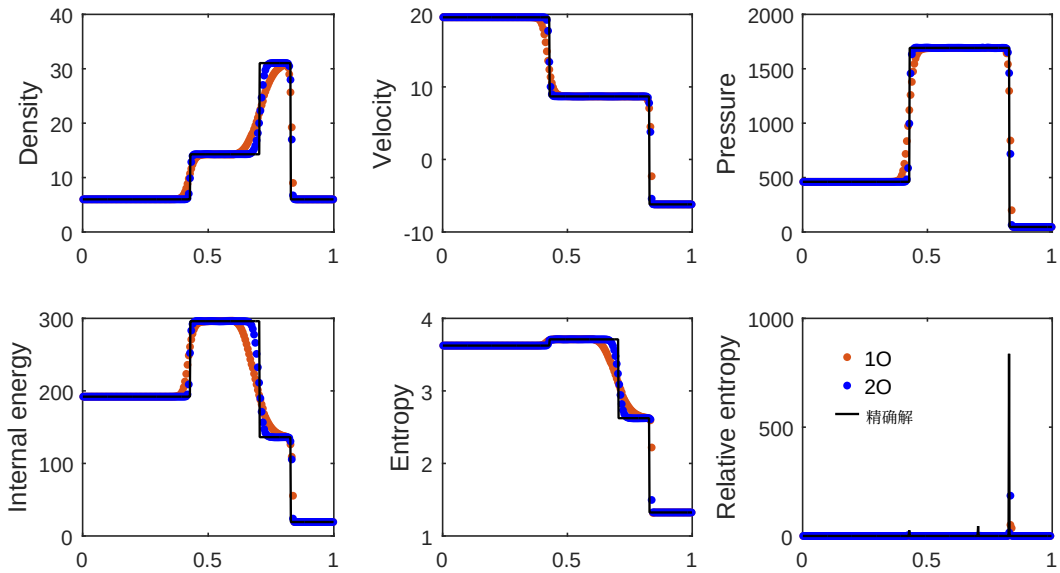

图14：测试用例8：强激波碰撞

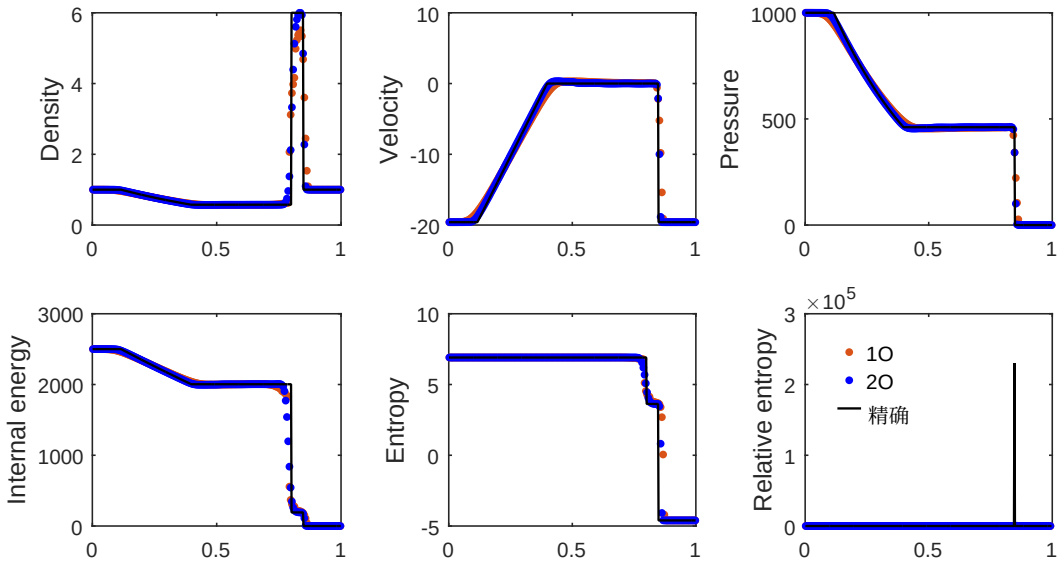

图15：测试算例 9

许多数值方法都会出现数值过热。测试算例7至9用于检验格式处理大梯度的稳健性。测试用例7是 Woodward 和 Colella 爆炸波问题的左半部分。其解由左侧的强激波、中间的接触间断以及右侧的膨胀扇组成。测试用例8涉及两个强激波的碰撞；其解由一个朝左的激波（缓慢向右传播）、一个向右传播的接触间断以及一个向右传播的激波组成。测试算例 9由左侧的稀疏波、向右传播的激波和静止的接触间断组成。这些测试算例的结果见图13至15。结果相当准确。

10.3. 二维欧拉测试

求解了一些标准二维无黏测试算例，以展示该格式的精度和鲁棒性。时间步计算为 $\Delta t = \text{CFL}\, min_{j,\,k} \dfrac{Area_j}{(|u_\xi|+a)\, l_\xi + (|u_\eta|+a)\, l_\eta}$，其中（$\eta$，$\xi$）为网格坐标方向。除非另有说明，所有测试算例均取 CFL$= 0.8$。对于稳态测试算例，随时间推进计算，直到密度残差达到最小值 10^{-10} 或时间步数达到 50000 为止，以先发生者为准。

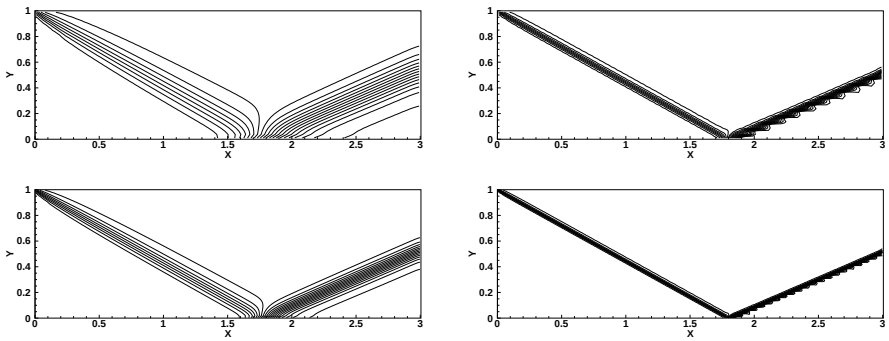

图16：斜激波反射，激波角 29°，来流马赫数 2.9 - 压力等值线 (0.7:0.1:2.9)，上边界) 120×40 网格的一阶和二阶精度结果，下）240×80 网格上的一阶和二阶精度结果

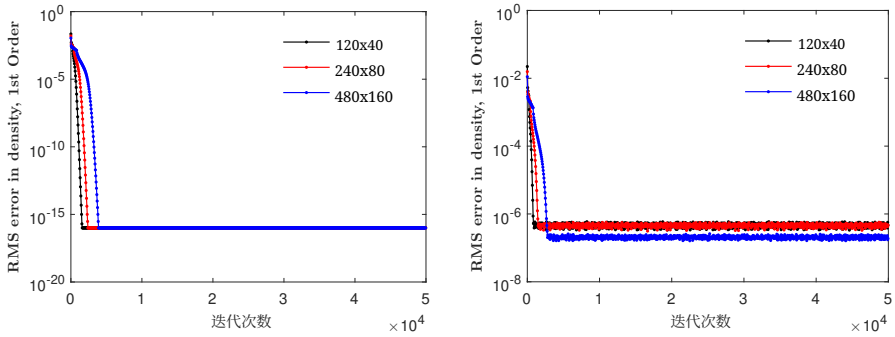

图17：斜激波反射测试算例：I 阶结果的密度均方根误差与迭代次数的关系，a) 在光滑流动区域使用判据（51），b) 在光滑流动区域使用判据（52）

10.3.1. Oblique shock reflection

此测试算例 [26] 包含一道斜激波，该激波撞击并反射于固体壁面。入射激波角为 29°，自由来流马赫数为 2.9。计算域为 $[0,3]\times[0,1]$，由笛卡尔单元构成。左边界采用自由来流条件；底部采用流动相切（壁面）条件。顶部采用根据可压缩流关系式得到的激波后条件，右边界采用超声速流出条件。采用自由来流初始条件。图 16 展示了一阶和二阶精度稳态解的压力等值线。与一阶精度结果相比，二阶精度结果的激波轮廓明显更尖锐。

图17展示了一阶结果中密度均方根误差随迭代次数的变化，网格尺寸各不相同。

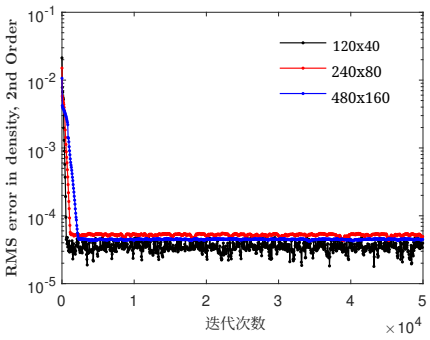

图18：斜激波反射测试算例：二阶结果的密度均方根误差与迭代次数的对比

图中给出了两幅图：一幅使用判据（51）识别光滑流动区域，另一幅则使用严格得多的判据（52）识别光滑流动区域。由于判据（51）在引入局部拉克斯–弗里德里希斯型数值扩散时限制较少，因此能带来更好的收敛性。然而，这会使格式的扩散性更强，因此我们在测试算例中采用（52）。图18展示了二阶结果中密度均方根误差随迭代次数的变化，网格尺寸各不相同。

10.3.2. 压缩斜坡上的超音速流动

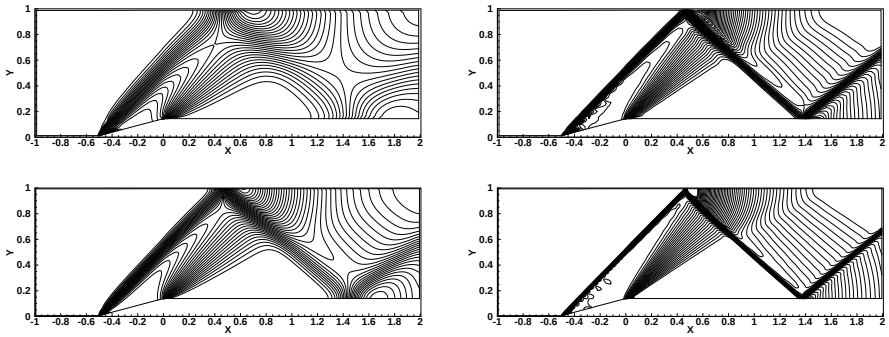

图19： 15° 斜坡上的马赫2流动，- 压力等值线（1.1:0.05:3.8），上边界）一阶和二阶精度结果在 120×40 网格上，底部）一阶和二阶精度结果在 240×80 网格上

该测试是在风洞 [27] 中，马赫2流动流经一个 15° 压缩斜坡。计算域的尺寸为 $[-1, 2] \times [0, 1]$,

底部设有一个从 $x = -0.5$ 到 $x = 0$的 15° 斜坡。左边界采用自由来流条件，上下壁面采用流动相切边界条件，右边界采用超声速流出条件。计算域内部均采用自由来流初始条件。稳态解包括从凹角（斜坡起点）发出的斜激波，以及从凸角（斜坡终点）发出的膨胀扇。斜激波撞击并在上下壁面反射，同时与扩展和反射的膨胀扇相互作用。如图19中的等值线所示，没有形成违反熵条件的膨胀激波。

10.3.3. 水平滑移流

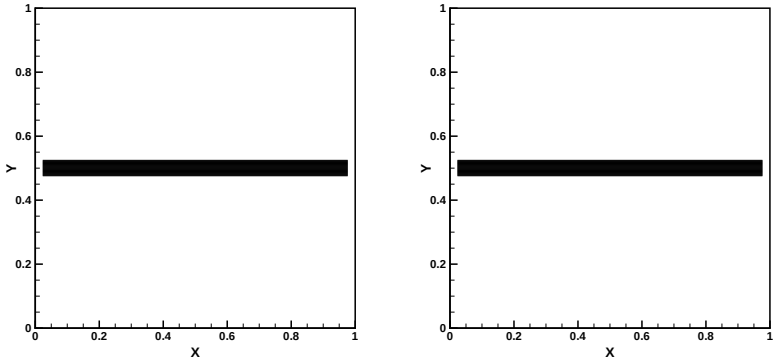

图 20：马赫3流动在马赫2流动上方滑移， u_1 等值线 (2:0.033:3)(a) 一阶，20×20 网格 (b) 二阶， 20×20 网格

在此测试算例中，马赫3流动在马赫2流动上方滑移 [28]。计算域为 $[0, 1] \times [01]$，由笛卡尔单元组成。流场初始化为水平马赫3流动（ $y \geq 0.5$ ）和马赫2流动（$y < 0.5$），两种流动的密度和压力保持相同。左边界采用超声速入流条件，右边界采用超声速流出条件。上边界和下边界采用Neumann边界条件。图 20 所示的稳态解表明，我们的格式能够精确捕捉网格对齐滑移流，且没有任何数值扩散。

10.3.4. 高超声速流绕半圆柱

该测试研究马赫6和马赫20流绕流半圆柱的情况。计算域为 r, $\theta \in [0.5, 2] \times [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$，网格沿

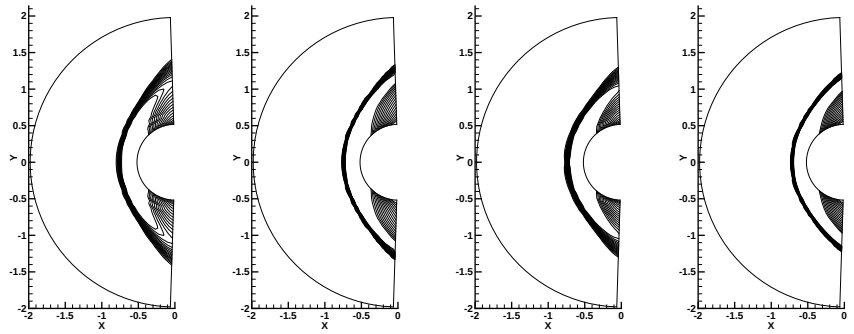

图21：绕半圆柱的高超声速流，密度等值线（2:0.2:5）在 50×40 网格上 (a) 马赫6流，一阶 (b) 马赫6流，二阶，(c) 马赫20流，一阶 (d) 马赫20流，二阶

r 和 θ 方向的间距保持恒定。所采用的边界条件为：在 $r = 2$ 和 $r = 0.5$ 边界处施加超声速流入和流动相切条件，在$\theta = \frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 边界处施加超声速流出条件。流场以自由来流条件初始化。此外，对于马赫20流测试算例，采用较低的库朗数0.5，以防止压力变为负值。稳态解显示，半圆柱前方形成一道与其分离的弓形激波。对于该测试算例，许多低耗散格式（如黎曼求解器）会引发木炭瘤现象，并因（数值）激波不稳定性 [1]导致求解失败。该测试算例的结果见图21。我们的解中未观察到马赫数驼峰激波。

10.3.5. 前向台阶上的超声速流

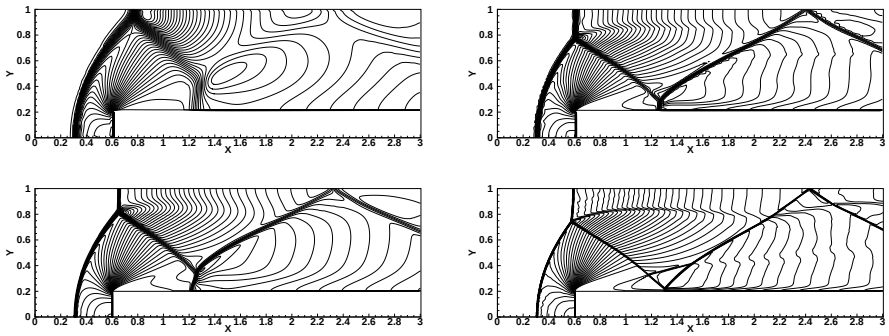

图22：风洞中前向台阶上的马赫3流动， $t = 4$，密度等值线（1:0.15:6.5）；上边界） 240×80 网格上的一阶和二阶精度结果，下边界） 960×320 网格上的一阶和二阶精度结果

在此测试算例中，马赫3流动从左侧进入带有台阶的风洞 [29]。风洞尺寸为 $[0,3]\times[0,1]$。台阶高0.2个单位，距左端0.6个单位。边界条件为：左边界为超声速流入，上下边界（包括台阶边界）满足流动相切条件，右边界为超声速流出。采用自由来流初始条件。在 $t=4$处形成λ形激波。三重点后方可见清晰的滑流，只有低耗散格式才能很好地捕捉到它。图22展示了此测试算例的一阶和二阶精度结果。

10.3.6. 奇偶解耦

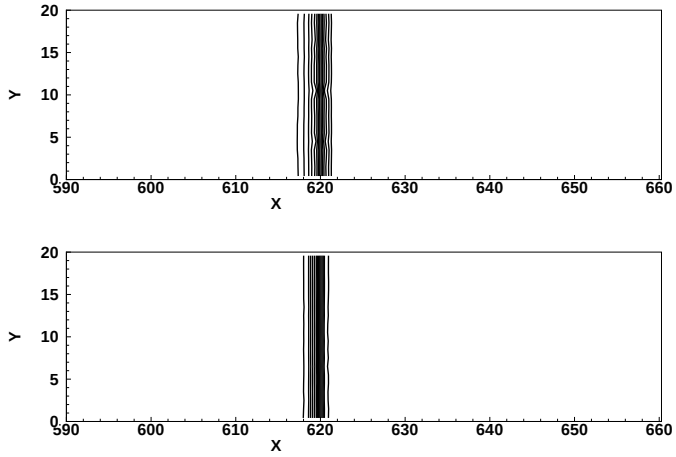

图23：马赫6激波穿过矩形管道时， $t=100$, 800×20 网格上的密度等值线；(a) 一阶和 (b) 二阶

此测试算例用于评估一种称为奇偶解耦的数值不稳定性形式下的格式。该测试算例包含一列由$M_s=6$ 传播通过矩形管道 [1]的平面激波。使用由800×200 个正方形网格单元组成的笛卡尔网格。网格的中心线受到扰动，形式如下：

$$(y_{i,j})_{mid}=\left\{\begin{array}{c}(y_{i,j})_{mid}+10^{-3},\ i\text{ is even}\\(y_{i,j})_{mid}-10^{-3},\ i\text{ is odd}\end{array}\right\}\tag{103}$$

低耗散格式和近似黎曼求解器会产生振荡，进而破坏数值解。然而，正如图 23 所示，我们的格式不会出现这种形式的不稳定性。

10.3.7. 双马赫反射

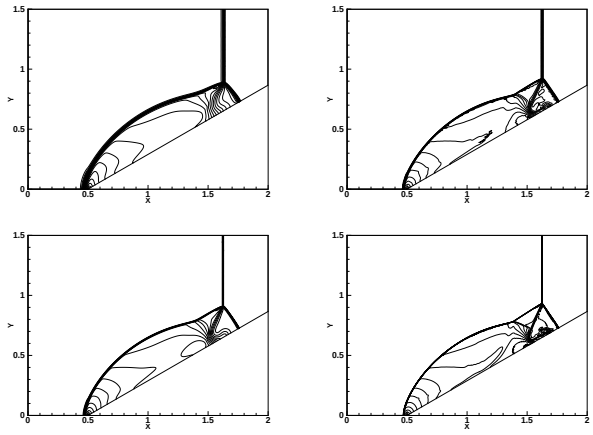

图 24：马赫数 5.5 的激波穿过 30° 楔形体时的双马赫反射，$t = 0.25$，密度等值线（1.5:0.5:19）；上） 400×400 网格上的一阶和二阶精度结果，下） 1200×1200 网格上的一阶和二阶精度结果

该测试算例包含一道平面马赫数 5.5 的激波，穿过一个 30° 楔形体[1]。计算域 $[0, 2] \times [0, 1.5]$ 底部有一个 30° 楔形体，其起始位置为 $x = 0.5$。初始条件是在$x = 0.25$处设置一道平面马赫数 5.5 的激波，其右侧为静止介质。上、下边界采用无黏壁面边界条件，左边界采用超声速入流条件，右边界采用常值外推。当平面马赫数 5.5 的激波撞击 30°斜坡时，会在表面发生马赫反射。波系构型由四个间断组成：初始激波、反射激波、一道马赫杆和一道滑流，它们都汇聚于同一个三重点。图 24 展示了该非定常问题在 $t = 0.25$ 时的数值解。一些低耗散格式会产生不符合物理规律的折 kink 的马赫杆。上图中没有出现这种折 kink 的马赫杆。

10.3.8. 激波绕射

在此测试算例中，马赫数 5.09 的平面激波绕过一个 90° 拐角[1]发生衍射。计算域为 $[0, 1] \times [0, 1]$，左下端设有一个宽 0.05、高 0.625 个单位的拐角。初始条件包括一道位于 $x = 0.05$ 、向右传播并朝静止介质移动的马赫数 5.09 平面激波。所用边界条件为：上边界和拐角处采用流动相切条件，右侧

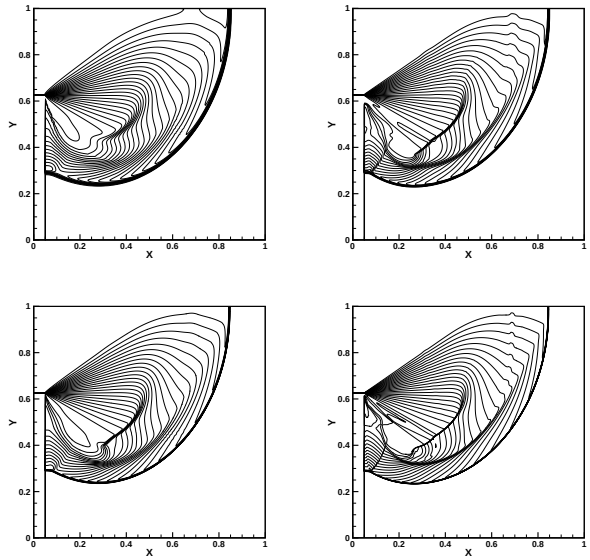

图 25：激波绕过 90° 角的衍射，$t = 0.1561$，密度等值线（0.5:0.25:6.75）；上：400×400 网格上的一阶和二阶精度结果；下：1200×1200 网格上的一阶和二阶精度结果

和底部边界采用常值外推，左侧边界采用超声速入流条件。图 25 显示了该非定常问题在$t = 0.1561$时的数值解。该解具有复杂的波系结构，包括入射平面激波、衍射激波、强膨胀扇和滑流。若不进行熵修正，若干低耗散格式会产生非物理的膨胀激波。我们的结果中没有膨胀激波，且所有流动特征都得到了良好捕捉。

10.3.9. NACA0012翼型测试算例

对对称NACA0012翼型 [30], [31]进行了若干基准测试算例。翼型周围采用尺寸为弦长25倍的O型结构网格。外边界采用第9节推导的离散动理学远场边界条件，翼型表面则采用离散动理学流动相切条件。在 η 方向（首尾网格相接处）施加周期条件。采用自由来流初始条件，并求解稳态解。针对以下超声速、跨声速和亚声速测试算例进行了数值测试：

1. $M_\infty = 1.2$, A.O.A. (Angle of attack) $= 0^\circ$

2. $M_\infty = 1.2$，迎角 $= 7°3.$
$M_\infty = 0.8$，迎角 $= 1.25°4.$
$M_\infty = 0.85$，迎角 $= 1°5.$
$M_\infty = 0.63$，迎角 $= 2°$

上述测试算例的结果见图 26–30。

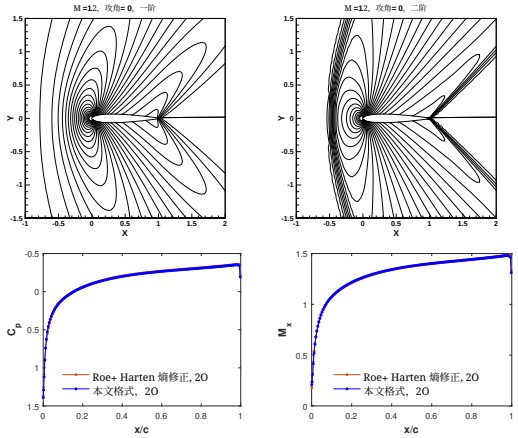

图 26：NACA0012，$M_\infty = 1.2$，攻角$= 0°$：上）在298×98 网格上的一阶和二阶精度结果；压力等值线（0.4:0.05:2.0），下）沿翼型表面的 c_p 和 M_x 随 x/c 变化曲线

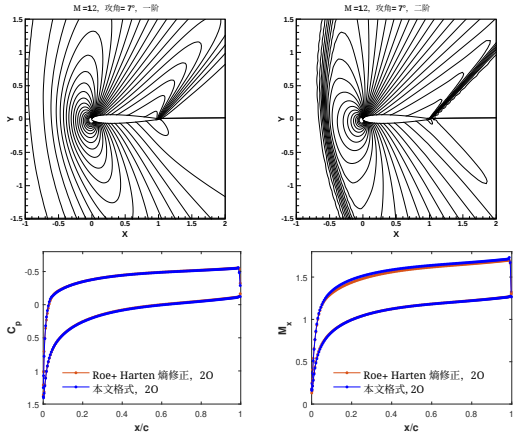

图 27：NACA0012, $M_\infty = 1.2$，攻角$= 7°$：上）在 298×98 网格上的一阶和二阶精度压力等值线 (0.4:0.05:2.0)，下）沿翼型表面的 c_p 和 M_x 与 x/c 的二阶精度图

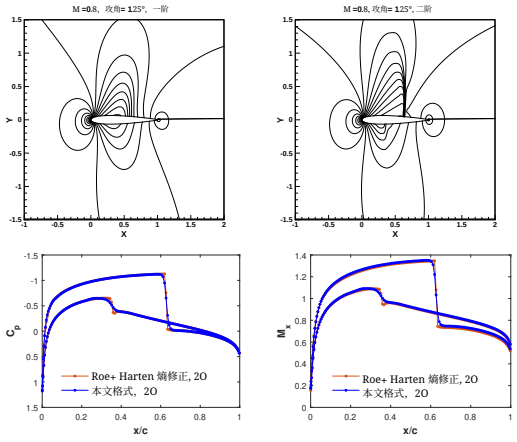

图 28：NACA0012, $M_\infty = 0.8$，攻角$= 1.25°$：上边界) 一阶和二阶精度压力等值线 (0.4:0.05:2.0) 在 298×98 网格上，下图) 二阶精度 c_p 和 M_x 沿翼型表面 vs x/c 的曲线

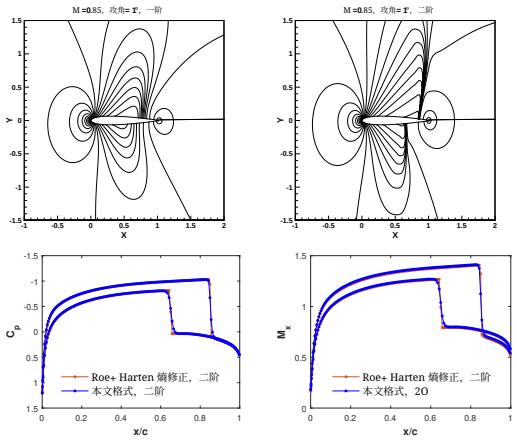

图 29：NACA0012, $M_\infty = 0.85$，A.O.A$= 1°$：上图）网格 298×98 上的一阶和二阶精度压力等值线（0.4:0.05:2.0），下图）沿翼型表面的 c_p 和 M_x 随 x/c 变化的二阶精度曲线。

图中展示了翼型周围一阶和二阶精度的压力等值线。此外，还绘出了在同一网格上，采用我们的格式以及带有 Harten 熵修正的 Roe 格式所得的二阶结果：沿翼型上、下表面的压力系数$c_p \left(= \frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2}\right)$和$M_x \left(= \frac{u_1}{a}\right)$随 x/c 的变化。

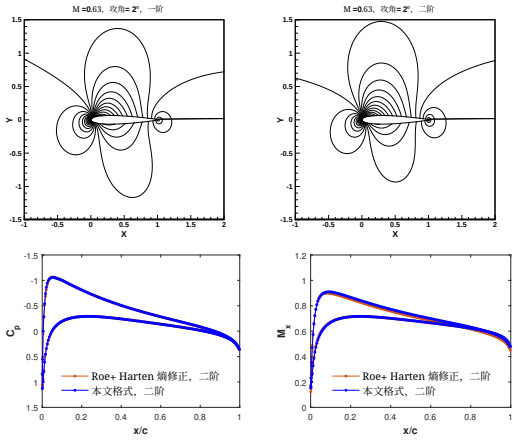

图 30：NACA0012，$M_\infty = 0.63$，迎角$= 2°$：上）网格 298×98 上的 I 阶和 II 阶精度压力等值线（0.7:0.02:1.4）；下）沿翼型表面的 c_p 和 M_x 相对于 x/c 的 II 阶精度曲线

10.4. 二维黏性测试

这些测试算例用于检验该格式求解黏性流动方程和解析黏性流动特征的能力。界面处的黏性项采用辅助体积法计算。对于无黏通量，我们不使用熵修正来提供额外的数值扩散，因为研究已证明物理黏性项足以满足要求。

10.4.1. 激波边界层相互作用

在此测试算例中，自由来流马赫数为$M_\infty = 2.15$ 、激波角为 $30.8°$ 的斜激波在底部冲击一块平板，板上层流边界层正在发展 [32]。激波冲击边界层会导致流动局部分离，随后重新附着于表面。反射波由汇聚成激波的压缩波、膨胀扇以及随后再次出现的压缩波组成。本测试采用的计算域为 $[-0.2, 1.8] \times [0, 1]$。左边界的 $y \leq 0.765$处施加自由来流条件，而左端的 $y > 0.765$ 处及上边界则施加激波后条件。底部的 $x \leq -0.2$处施加流动对称条件，而 $x > 0.2$处施加无滑移条件。右边界施加超声速流出条件。给定自由来流雷诺数 Re$= 10^5$和普朗特数 Pr$= 0.72$。计算域离散为140×120 个网格单元，沿 $x-$ 方向采用恒定网格尺寸，而沿 $y-$

方向的网格按几何级数拉伸，网格尺寸每次规则递增 4.5%。

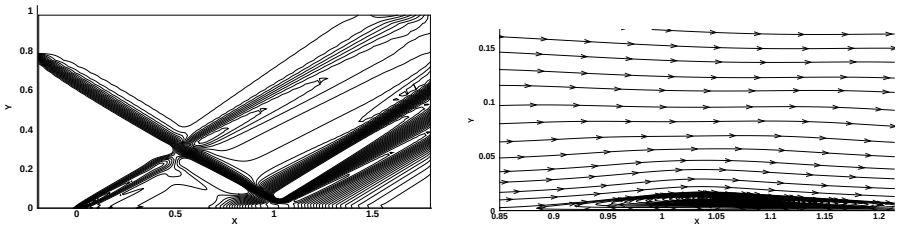

图31：测试算例：激波-边界层相互作用 (140 × 120)，a) 二阶精度压力等值线，b) 显示回流区的流线

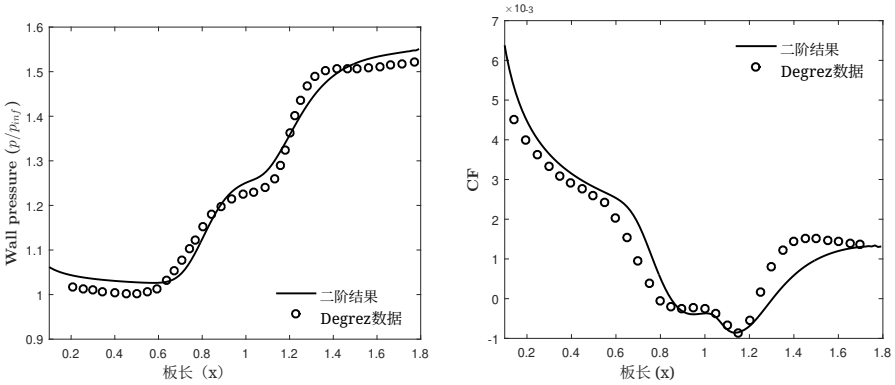

图32：测试算例：激波-边界层相互作用（140×120），a）平板沿程壁面压力，b）壁面摩擦系数

二阶精度结果的压力等值线见图31。如图所示，反射压缩波、膨胀波以及分离流区内的回流等流动特征均得到了准确捕捉。平板沿程的壁面压力 $\frac{p_w}{p_\infty}$ 和壁面摩擦系数c_f 绘于图32。我们的结果与Degrez的数据 [32]吻合良好。

10.4.2. 凸起上的超声速流动

此测试算例包含通道内绕圆形凸起流动的马赫数 1.4 流动 [33]。计算域为 $[-1,2]\times[0,1]$，底部从 $x=0$ 到 $x=1$处设有一个高度为 4% 的圆柱形凸起。规定自由来流马赫数为 $M_\infty=1.4$，雷诺数为 $Re=8000$，普朗特数为 $Pr=0.72$。

左边界采用超声速入流条件。上边界采用流动相切条件。底部从 $x = -1$ 到 $x = 0$处采用对称条件，而在 $x > 0$处采用无滑移边界条件。右边界采用超声速流出条件。计算域划分为 240×80 个网格单元，沿$x-$ 方向网格尺寸保持恒定，而沿 $y-$ 方向网格按几何级数拉伸，网格尺寸增加 4.5%。二阶格式的 u_1 等值线

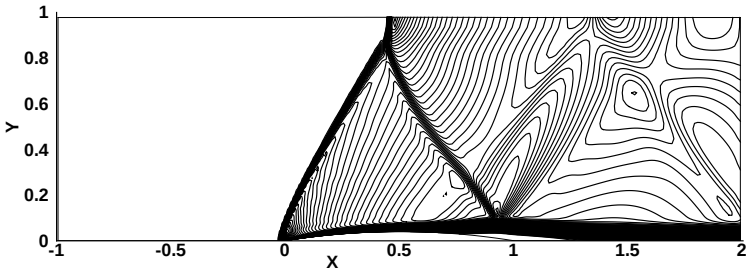

图 33：测试算例：凸起上的超声速流动（240×80），二阶结果 u_1 等值线

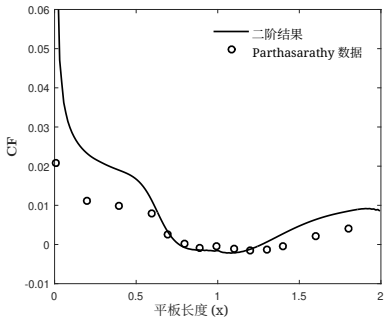

图 34：测试算例：凸起上的超声速流动（240×80），沿壁面的壁面摩擦系数

如图 33 所示。凸起前缘处形成一道斜激波，随后该激波从上边界反射。反射激波接着与凸起末端的分离流相互作用，并从该处反射。沿平板长度方向绘制壁面摩擦系数 c_f，并与 [33] 的数据进行比较（见图 34）。

11. 结论

本文提出了一种新的动理学格式，其中采用一组具有紧支撑的平衡分布函数。分布函数具有灵活的平均速度和速度范围。利用平均速度满足间断处的 Rankine-Hugoniot 跃迁条件，从而精确捕捉网格对齐的定常间断。可变的速度范围用于在膨胀波和光滑流动区域提供额外扩散，以防止形成违反熵条件的解。本文在离散速度框架下提出了一种新颖的相对熵表述。利用该相对熵和一项附加判据识别膨胀波及光滑流动区域。本文针对所述动力学模型制定了流动相切条件和远场边界条件，并在适用时加以使用。通过求解各种基准一维和二维无黏测试以及二维黏性测试，对所提出的格式进行了广泛验证。

CRediT 作者声明

Shashi Shekhar Roy：方法学、概念构思、调查研究、软件、验证、正式分析、撰写——初稿。

S. V. Raghurama Rao：概念构思、调查研究、正式分析、监督、资源、撰写——审阅与编辑

利益冲突声明

作者声明，他们没有任何可能影响本文所述工作的财务利益或与其他个人或组织的关系。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

致谢

本研究未获得公共部门、商业部门或非营利部门提供的任何专项资助。

附录 A. 一维 Chapman-Enskog 型展开

我们考虑一维 Boltzmann-BGK方程。对于f的零阶近似，即将$\mathrm{f} = \mathrm{f}^{eq}$ 代入玻尔兹曼方程并求其矩（这将得到宏观无黏 Euler 方程），需要以下矩关系。

$$\langle \mathbf{f}^{eq} \rangle = \mathbf{U} \tag{A.1a}$$

$$\langle v\mathbf{f}^{eq} \rangle = \mathbf{G} \tag{A.1b}$$

其中，U 和 G 分别为守恒变量向量和无黏通量向量。对于一阶近似，我们取 $\mathrm{f} = \mathrm{f}^{eq} + \epsilon \mathrm{f}^{\epsilon}$。对 f 取矩，得到

$$\langle \mathbf{f} \rangle = \langle \mathbf{f}^{eq} + \epsilon \mathbf{f}^{\epsilon} \rangle = \mathbf{U} \Rightarrow \langle \mathbf{f}^{\epsilon} \rangle = 0 \tag{A.2}$$

进一步，令

$$\langle v\mathbf{f} \rangle = \langle v(\mathbf{f}^{eq} + \epsilon \mathbf{f}^{\epsilon}) \rangle = \mathbf{W} \Rightarrow \langle v\mathbf{f}^{\epsilon} \rangle = \frac{\mathbf{W} - \mathbf{G}}{\epsilon} \tag{A.3}$$

现在，将 $\mathrm{f} = \mathrm{f}^{eq} + \epsilon \mathrm{f}^{\epsilon}$ 代入玻尔兹曼方程并取矩，得到

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0 \tag{A.4}$$

进一步，将 $\mathrm{f} = \mathrm{f}^{eq} + \epsilon \mathrm{f}^{\epsilon}$ 代入乘以 v 后的玻尔兹曼方程并取矩，得到

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \langle v^2 \mathbf{f} \rangle = \frac{\mathbf{G} - \mathbf{W}}{\epsilon} \tag{A.5}$$

or

$$\mathbf{W} = \mathbf{G} + O(\epsilon) \tag{A.6}$$

取 $\frac{\partial}{\partial t}$ (A.6),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + O(\epsilon) \\ &= -\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} + O(\epsilon) = -\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} + O(\epsilon) \\ &= -\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \right)^2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + O(\epsilon) \end{aligned} \tag{A.7}$$

Now,

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &= \mathbf{G} - \epsilon\left[\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left\langle v^2\mathbf{f}\right\rangle\right] \\ &= \mathbf{G} - \epsilon\left[-\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}}\right)^2\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left\langle v^2\mathbf{f}^{eq}\right\rangle\right] + O(\epsilon^2) \\ &= \mathbf{G} - \epsilon\left[\left\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{U}}\left\langle v^2\mathbf{f}^{eq}\right\rangle - \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}}\right)^2\right\}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right] + O(\epsilon^2) \qquad \text{(A.8)}\end{aligned}$$

最后，将 (A.8) 代入 (A.4)，得到

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} = \epsilon\frac{\partial}{\partial x}\left[\left\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{U}}\left\langle v^2\mathbf{f}^{eq}\right\rangle - \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}}\right)^2\right\}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right] + O(\epsilon^2) \qquad \text{(A.9)}$$

右端项起到黏性项的作用。因此，$\left\langle v^2\mathbf{f}^{eq}\right\rangle$ 矩在一阶近似下增加了黏度。对于我们的动力学模型，计算二阶矩并代入 (A.9)，得到

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} = \epsilon\frac{\partial}{\partial x}\left[\left\{\lambda^2 + \frac{\delta\lambda^2}{3} - \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}}\right)^2\right\}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right] + O(\epsilon^2) \qquad \text{(A.10)}$$

因此，$\delta\lambda$ 为系统增加了扩散。我们还注意到，在极限 $\delta\lambda \to 0$ 下，上述系统简化为 Jin and Xin 的弛豫模型 [15]。

附录B. 二维中的相对熵

我们的二维柔性速度玻尔兹曼方程（77）的平衡分布函数为

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{f}}_i^{eq} &= \begin{bmatrix}\widetilde{f}_{1i}^{eq}\\ \widetilde{f}_{2i}^{eq}\\ \widetilde{f}_{3i}^{eq}\\ \widetilde{f}_{4i}^{eq}\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}U_i + \frac{G_{1i}}{\widetilde{\lambda}_1} + \frac{G_{2i}}{\widetilde{\lambda}_2}\\ U_i - \frac{G_{1i}}{\widetilde{\lambda}_1} + \frac{G_{2i}}{\widetilde{\lambda}_2}\\ U_i - \frac{G_{1i}}{\widetilde{\lambda}_1} - \frac{G_{2i}}{\widetilde{\lambda}_2}\\ U_i + \frac{G_{1i}}{\widetilde{\lambda}_1} - \frac{G_{2i}}{\widetilde{\lambda}_2}\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}U_i + \frac{1}{4\widetilde{\lambda}_1}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}G_{1i} + \frac{1}{4\widetilde{\lambda}_2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}G_{2i} \\ &= \mathbf{B}_0U_i + \mathbf{B}_1G_{1i} + \mathbf{B}_2G_{2i} \qquad \text{(B.1)}\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} &= \begin{bmatrix}\mathbf{B}_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{B}_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{B}_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_0\end{bmatrix}\mathbf{U} + \begin{bmatrix}\mathbf{B}_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{B}_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{B}_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_1\end{bmatrix}\mathbf{G}_1 + \begin{bmatrix}\mathbf{B}_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{B}_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{B}_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_2\end{bmatrix}\mathbf{G}_2 \\ &= \boldsymbol{\alpha}_0\mathbf{U} + \boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{G}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{G}_2 \end{aligned} \tag{B.2}$$

ˆ这里， $\boldsymbol{\alpha}_0$、 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 16x4 矩阵。动理学熵 H 则为

$$\hat{H} = \boldsymbol{\alpha}_0\eta + \boldsymbol{\alpha}_1\psi_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\psi_2 \tag{B.3}$$

其中 η、 ψ_1 和 ψ_2 是沿 $x-$和 $y-$ 方向的宏观熵和熵通量。对于欧拉方程, $\eta = \rho s$、 $\psi_1 = \rho u_1 s$ 和 $\psi_2 = \rho u_2 s$。现在,

$$\left\langle \widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \right\rangle = \mathbf{P}\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} = \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}_0 = I, \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}_1 = 0, \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}_2 = 0 \tag{B.4a}$$

$$\left\langle \widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \right\rangle = \mathbf{P}\widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} = \mathbf{G}_1 \Rightarrow \mathbf{P}\widetilde{\Lambda}_1\boldsymbol{\alpha}_0 = 0, \mathbf{P}\widetilde{\Lambda}_1\boldsymbol{\alpha}_1 = I, \mathbf{P}\widetilde{\Lambda}_1\boldsymbol{\alpha}_2 = 0 \tag{B.4b}$$

$$\left\langle \widetilde{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \right\rangle = \mathbf{P}\widetilde{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} = \mathbf{G}_2 \Rightarrow \mathbf{P}\widetilde{\Lambda}_2\boldsymbol{\alpha}_0 = 0, \mathbf{P}\widetilde{\Lambda}_2\boldsymbol{\alpha}_1 = 0, \mathbf{P}\widetilde{\Lambda}_2\boldsymbol{\alpha}_2 = I \tag{B.4c}$$

因此,

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle = \mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}_0\eta + \boldsymbol{\alpha}_1\psi_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\psi_2) = \eta \tag{B.5a}$$

$$\left\langle \widetilde{\Lambda}_1\hat{H} \right\rangle = \mathbf{P}\widetilde{\Lambda}_1(\boldsymbol{\alpha}_0\eta + \boldsymbol{\alpha}_1\psi_1 + +\boldsymbol{\alpha}_2\psi_2) = \psi_1 \tag{B.5b}$$

$$\left\langle \widetilde{\Lambda}_2\hat{H} \right\rangle = \mathbf{P}\widetilde{\Lambda}_2(\boldsymbol{\alpha}_0\eta + \boldsymbol{\alpha}_1\psi_1 + +\boldsymbol{\alpha}_2\psi_2) = \psi_2 \tag{B.5c}$$

现在，相对熵为

$$\begin{aligned} d^2 &= \langle \Delta\omega \cdot \Delta\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \rangle = \left\langle \Delta\left\{ \frac{\partial \hat{H}(\widetilde{\mathbf{f}}^{eq})}{\partial \widetilde{\mathbf{f}}^{eq}} \right\} \cdot \Delta\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \right\rangle \\ &= \left\langle \Delta\left\{ \boldsymbol{\alpha}_0\frac{\partial\eta}{\partial\widetilde{\mathbf{f}}^{eq}} + \boldsymbol{\alpha}_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\widetilde{\mathbf{f}}^{eq}} + \boldsymbol{\alpha}_2\frac{\partial\psi_2}{\partial\widetilde{\mathbf{f}}^{eq}} \right\} \cdot \Delta\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \right\rangle \\ &= \left\langle \left\{ \boldsymbol{\alpha}_0\Delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial\widetilde{\mathbf{f}}^{eq}}\right) + \boldsymbol{\alpha}_1\Delta\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\widetilde{\mathbf{f}}^{eq}}\right) + \boldsymbol{\alpha}_2\Delta\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\widetilde{\mathbf{f}}^{eq}}\right) \right\} \cdot \Delta\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \right\rangle \\ &= \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}_0\Delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial\widetilde{\mathbf{f}}^{eq}}\right) \cdot \Delta\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} + \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}_1\Delta\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\widetilde{\mathbf{f}}^{eq}}\right) \cdot \Delta\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} + \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}_2\Delta\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\widetilde{\mathbf{f}}^{eq}}\right) \cdot \Delta\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \\ &= \Delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial\widetilde{\mathbf{f}}^{eq}}\right) \cdot \Delta\widetilde{\mathbf{f}}^{eq} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\Delta\frac{\partial\eta}{\partial\mathbf{U}}\right)^T \cdot \Delta\mathbf{U} \text{ (on simplifying)} \\
&= \Delta\left(\frac{\gamma-s}{\gamma-1} - \frac{\rho u_1^2}{2p} - \frac{\rho u_2^2}{2p}\right)\Delta(\rho) + \Delta\left(\frac{\rho u_1}{p}\right)\Delta(\rho u_1) + \\
&\quad \Delta\left(\frac{\rho u_2}{p}\right)\Delta(\rho u_2) + \Delta(-\frac{\rho}{p})\Delta(\rho E) \qquad \text{(B.6)}
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] J. J. Quirk, 《对黎曼求解器之争的贡献》, International Journal of Numerical Methods in Fluids 18 (1994年) 555–574。[2] C. Chu, 《激波形成的动理学理论描述》, Physics of Fluids 8 (1) (1965年) 12–22。[3] R. Sanders, K. H. Prendergast, 《3千秒差距旋臂与星系核爆发事件可能存在的关联》, The Astrophysical Journal 188 (1974年) 489–500。[4] D. Pullin, 《可压缩无黏理想气体流的直接模拟方法》, Journal of Computational Physics 34 (2) (1980年) 231–244。[5] R. D. Reitz, 《使用玻尔兹曼方程进行一维可压缩气体动力学计算》, Journal of Computational Physics 42 (1) (1981年) 108–123。[6] S. M. Deshpande, 《一种二阶精度动理学理论方法，用于无黏可压缩流》, 技术报告 NASA TP 2613 (1986年)。[7] S. M. Deshpande, 《基于动理学理论的无黏可压缩流新型迎风格式》, 载于：美国航空航天学会 24th 航空航天科学会议，第 AIAA-86-0275 号，1986年。[8] J. C. Mandal, S. M. Deshpande, 《欧拉方程的动理学通量矢量分裂》, Computers & Fluids 23 (2) (1994年) 447–478。[9] S. Kaniel, 《可压缩流方程的动力学模型》, Indiana University Mathematics Journal 37 (3) (1988年) 537–563。[10] B. Perthame, 《气体动力学的玻尔兹曼型格式及其熵性质》, SIAM Journal on Numerical Analysis 27 (6) (1990年) 1405–1421。

[11] K. H. Prendergast、K. Xu, 《气体动理学理论中的数值流体力学》, Journal of Computational Physics 109 (1)（1993年）53–66。[12] S. V. Raghurama Rao、S. M. Deshpande, 《用于无黏可压缩流的基于无规速度的迎风方法》, 计算流体力学杂志 3（1995年）415–432。[13] R. Natalini, 《多维标量守恒律熵解的离散动理学近似》, Journal of differential equations 148 (2)（1998年）292–317。[14] D. Aregba-Driollet、R. Natalini, 《多维守恒律系统的离散动理学格式》, SIAM Journal on Numerical Analysis 37 (6)（2000年）1973–2004。[15] S. Jin、Z. Xin, 《任意空间维数下守恒律系统的松弛格式》, 纯粹与应用数学通讯 48 (3)（1995年）235–276。[16] F. Bouchut, 《为给定守恒律系统构造具有一族动理学熵的BGK模型》, 统计物理学杂志 95 (1)（1999年）113–170。[17] K. Shrinath、N. Maruthi、S. V. Raghurama Rao、V. Vasudev Rao, 《一种用于可压缩流的动理学通量差分裂方法》, Computers & Fluids 250（2023年）105702。[18] P. L. Bhatnagar、E. P. Gross、M. Krook, 《一种气体碰撞过程模型：I. 带电和中性单组分系统中的小振幅过程》, 《物理评论》94 (3)（1954年）511–525。[19] S. S. Roy、S. V. Raghurama Rao, 《一种具有紧支撑速度的熵动理学格式》, 载于：第十八届双曲问题国际会议：理论、数值与应用，M´álaga，西班牙，2022年6月20日至24日，Springer，2022年。[20] S. Kullback、R. Leibler, 《关于信息与充分性》, 《数理统计年刊》22（1951年）79–86。[21] D. Zaide、P. Roe, 《基于熵的网格加密，II：一种新的网格移动方法》, 载于：第19届美国航空航天学会计算流体力学会议，编号AIAA-2009-3791，2009年。

[22] R. Kumar、A. K. Dass，《一种基于通量限制方法的新型气体动力学欧拉方程动理学格式》，《International Journal for Numerical Methods in Fluids》90 (1)（2019年）22–56。[23] S. Gottlieb、C.-W. Shu、E. Tadmor，《强稳定性保持高阶时间离散化方法》，《SIAM Review》43 (1)（2001年）89–112。[24] V. Ramesh，《最小二乘无网格动理学迎风方法》，博士论文，印度科学研究所，班加罗尔，印度（2001年）。[25] E. F. Toro，《流体动力学的黎曼求解器与数值方法：实用导论》，Springer Science & Business Media，2013年。[26] H. Yee、R. Warming、A. Harten，《一种用于弱解无黏气体动力学问题的高分辨率数值技术》，载于：第八届流体动力学数值方法国际会议论文集，德国亚琛莱茵-威斯特法伦工业大学，1982年6月28日至7月2日，Springer，1982年，第546–552页。¨。[27] D. W. Levy、K. G. Powell、B. van Leer，《旋转黎曼求解器在二维欧拉方程中的应用》，Journal of Computational Physics 106 (2)（1993年）201–214。[28] M. Manna，《一种三维高分辨率迎风有限体积欧拉求解器》，技术报告，冯·卡门流体动力学研究所技术说明180（1992年4月）。[29] P. Woodward、P. Colella，《具有强激波的二维流体流动数值模拟》，Journal of computational physics 54 (1)（1984年）115–173。[30] D. J. Jones，《无黏流场方法测试算例》，1985年，第“参考测试算例及贡献者”章，AGARD咨询报告第AGARD-AR-211号。[31] A. Dervieux、B. van Leer、J. Periaux、A. Rizzi，《可压缩欧拉流的数值模拟：GAMM研讨会》，《Notes on Numerical Fluid Mechanics》，Vieweg Verlag，1989年，（GAMM可压缩欧拉流数值模拟研讨会论文集，会议于1986年6月10日至13日在INRIA罗康库尔举行）。

[32] G. Degrez、C. Boccadoro、J. F. Wendt，《斜激波与层流边界层相互作用的再研究：实验与数值研究》，《流体力学杂志》177（1987年）247–263。[33] V. Parthasarathy、Y. Kallinderis，使用自适应棱柱网格的方向性黏性多重网格，《AIAA杂志》33（1）（1995年）69–78。