arXiv:2304.02526v2 [math.CO] 6 Nov 2023

Cay($\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}$)的平均命中时间

YUUHO TANAKA

Abstract. Y. Doi 等人给出了 Cay($\mathbb{Z}_N, \{\pm 1, \pm 2\}$) 上简单随机游走平均命中时间（简称 HT）的精确公式。 [《离散应用数学》313 (2022) 18-28]。Y. Doi 等人使用初等方法，给出了 Cay($\mathbb{Z}_N$, $\{\pm 1, \pm 2\}$) 上简单随机游走命中时间的简洁公式。本文也采用 Y. Doi 等人使用的初等方法， [3], 给出了 Cay($\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}$) 上简单随机游走命中时间的简洁公式。

关键词：简单随机游走、命中时间、凯莱图、雅各布斯塔尔数

1. Introduction

图 G 上的简单随机游走是一种离散随机模型：位于顶点 $u \in V(G)$ 的随机游走者在下一步以概率 $^1 \deg_G(u)$ 移动到与顶点 u 相邻的顶点 v，其中 $\deg_G(u)$ 表示图 G 中顶点 u 的度数。从图 G 中顶点 p 出发的随机游走者首次到达图 G 中顶点 q 所需的步数，称为图 G 上简单随机游走从 p 到 q 的命中时间。图 G 上从 p 到 q 的平均命中时间（简称 HT）记作 $h(G; p, q)$，表示图 G 上简单随机游走从 p 到 q 的命中时间的期望值。注意， $h(G; p, p) = 0$。一般而言，无法得到从一个顶点到任意其他顶点的平均命中时间的精确公式。对于某些对称性很高的特殊图类，则可能得到这类精确公式。

设 G 是一个有限群， $S \subseteq G$ 是其子集。相应的 Cayley 图 Cay(G, S) 的顶点集等于 G。当且仅当存在 $s \in S$ 使得 $g = sh$ 时，两个顶点 g、$h \in G$ 之间存在一条从 g 指向 h 的有向边。在 N. Chair [2], 中，作者通过根据 Cay($\mathbb{Z}_N, \{\pm 1, \pm 2\}$) 的拉普拉斯矩阵的特征值和特征向量计算有效电阻的 Wu 公式 [4] 的精确值，给出了一个取决于 N 奇偶性的表达式。在 Y. Doi 等人 [3], 中，他们用初等方法给出了一个比 Chair 公式 G 简单得多的1

公式。该公式不取决于 N 的奇偶性。

定理 1.1（Y. Doi 等， 2022 [3]）。设 F_i 为第 i 个斐波那契数。Cay($\mathbb{Z}_N, \{\pm 1, \pm 2\}$) 上简单随机游走的命中时间的精确公式（$N \geq 5$）为:

$$h(\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{\pm 1, \pm 2\}); 0, l) = \frac{2}{5}\left(l\,(N-l) + 2N\frac{F_l F_{N-l}}{F_N}\right).$$

其证明相当简短，且完全采用组合方法。此外，证明不需要任何谱图论方面的论证。

本文采用 Y. Doi 等人也使用的初等方法 [3], ，给出 Cay($\mathbb{Z}_N$, $\{+1, +2\}$) 上简单随机游走命中时间的简洁公式。本文结构如下：第 2 节中，我们确定图 Cay($\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}$) 的记号，并介绍雅各布斯塔尔数列的一些性质。第 3 节中，我们给出 H_N 的逆矩阵各项。因此，通过计算，我们得到 Cay($\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}$) 上命中时间的精确公式。该等式与 N 的奇偶性无关。

2. Preliminary

由递推关系 $J_0 =$0, $J_1 = 1$, $J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$ ($n =$ 0, 1, 2, . . .)定义的数列 J_n 称为雅各布斯塔尔数列。下面列出一些著名的雅各布斯塔尔数公式，这些公式将在本文中反复使用。关于这些公式的证明，请参阅有关雅各布斯塔尔数的相关文献（例如[1]）。

$$J_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) \tag{2.1}$$

$$J_{n+1} + J_n = 2^n \tag{2.2}$$

$$J_{n+1} - 2J_n = (-1)^n \tag{2.3}$$

$$J_m(J_{n+1} + 2J_{n-1}) + J_n(J_{m+1} + 2J_{m-1}) = 2J_{m+n} \tag{2.4}$$

引理 2.1。

$$J_{n-1} = J_j J_{n-j} + 2J_{j-1}J_{n-j-1} \tag{2.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} 2^j J_{n-j} = \frac{2}{3}(nJ_{n-1} + (n-1)J_n). \tag{2.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} J_j = \frac{1}{3}(nJ_{n-1} - (n-2)J_n) \tag{2.7}$$

证明。（2.5）

$$\begin{aligned} J_{n-1} &= \frac{1}{2}(J_{n-j}(J_j + 2J_{j-2}) + J_{j-1}(J_{n-j+1} + 2J_{n-j-1})) \quad \text{by (2.4)} \\ &= \frac{1}{2}(J_{n-j}(2J_j - J_{j-1}) + J_{j-1}(J_{n-j} + 4J_{n-j-1})) \\ &= J_j J_{n-j} + 2J_{j-1}J_{n-j-1}. \end{aligned}$$

(2.6)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} 2^j J_{n-j} &= \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} 2^j(2^{n-j} - (-1)^{n-j}) \quad \text{by (2.1)} \\ &= \frac{1}{3}(2^n \sum_{j=1}^{n} 1 + 2(-1)^n \sum_{j=1}^{n}(-2)^{j-1}) \\ &= \frac{1}{3}(2^n n + 2(-1)^n \frac{1-(-2)^n}{3}) \\ &= \frac{1}{3}(2n(J_{n-1} + J_n) - \frac{2}{3}(2^n - (-1)^n)) \quad \text{by (2.2)} \\ &= \frac{1}{3}(2n(J_{n-1} + J_n) - 2J_n) \quad \text{by (2.1)} \\ &= \frac{2}{3}(nJ_{n-1} + (n-1)J_n). \end{aligned}$$

(2.7)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j} J_j &= \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}(2^j - (-1)^j) \quad \text{by (2.1)} \\ &= -\frac{1}{3}(2(-1)^n \sum_{j=1}^{n}(-2)^{j-1} - (-1)^n \sum_{j=1}^{n} 1) \\ &= -\frac{1}{3}(2(-1)^n \frac{1-(-2)^n}{3} - (-1)^n n) \\ &= -\frac{1}{3}(-\frac{2}{3}(2^n - (-1)^n) + n(J_n - J_{n-1})) \quad \text{by (2.3)} \\ &= -\frac{1}{3}(-2J_n + n(J_n - J_{n-1})) \quad \text{by (2.1)} \\ &= \frac{1}{3}(nJ_{n-1} - (n-2)J_n). \end{aligned}$$

□

3. Proof of main theorem

图 $\mathsf{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\})$ 的拉普拉斯矩阵是一个矩阵 L，其元素 $L(i, j)$ 定义如下

$$L(i,j) = \begin{cases} \deg_{\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N,\{+1,+2\})}(i) & \text{if } i = j, \\ -1 & \text{if } i \neq j \text{ and there is an arc from } i \text{ to } j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 L' 为将 L 删除最后一行和一列-$\vec{\mathsf{umn}}$ 后得到的矩阵。令 h 为列向量，其第 i 个元素为 $h(\mathsf{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}); 0, i)$，并令 $\vec{1}$ 为维数适当且所有元素均为 1 的列向量。在图 $\mathsf{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\})$ 上进行随机游走时，随机游走者以概率 1 2 移动到与其所在顶点相邻的任意一个顶点。因此，我们有 $\forall l \in \mathbb{Z}_N \setminus \{0\}$,$h(\mathsf{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}); 0, l) = \frac{1}{2}((1 + h(\mathsf{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}); 1, l) + (1 + h(\mathsf{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}); 2, l)))$，从而 $\forall l \in \mathbb{Z}_N \setminus \{0\}, 2h(\mathsf{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}); 0, l) - h(\mathsf{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}); 0, l-1) - h(\mathsf{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}); 0, l-2) = 2$。因此，我们有 ${}^tL'\vec{h} = 2\vec{1}$。注意，对于所有 $k, l \in \mathbb{Z}_N$，$h(\mathsf{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}); 0, l) = h(\mathsf{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}); k, k+l) = h(\mathsf{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}); k + N - l, k)$。令 $L'(i, j)$ 表示 L' 的第 (i, j) 个元素。令 H_N 为一个 $(N - 1) \times (N - 1)$ 阶矩阵，其第 (i, j) 个元素为 ${}^tL'(i, j)$。于是我们有 $H_N\vec{h} = 2\vec{1}$。对于我们的问题，只需求解这个矩阵方程即可。

于是我们得到如下结果：

定理 3.1。H_N^{-1} 的各项如下：

$$H_N^{-1}(i,j) = \begin{cases} \frac{J_i J_{N-i-1}}{J_N} & (j = i+1) \\ \frac{J_{i-j+1}(J_{N-i+j-2} + J_{N-i+j-1}) - (-1)^{i+j} J_{j-1} J_{N-i-1}}{J_N} & (j < i+1,\ (i,j) \neq (N-1,1)) \\ \frac{J_i J_{N-j}(J_{j-i-1} + J_{j-i})}{J_N} & (j > i+1) \\ \frac{J_{N-1}}{J_N} & ((i,j) = (N-1,1)) \end{cases}$$

证明。设 S_N 表示如下矩阵。

$$S_N(i,j) = \begin{cases} \frac{J_i J_{N-i-1}}{J_N} & (j = i+1) \\ \frac{J_{i-j+1}(J_{N-i+j-2} + J_{N-i+j-1}) - (-1)^{i+j} J_{j-1} J_{N-i-1}}{J_N} & (j < i+1,\ (i,j) \neq (N-1,1)) \\ \frac{J_i J_{N-j}(J_{j-i-1} + J_{j-i})}{J_N} & (j > i+1) \\ \frac{J_{N-1}}{J_N} & ((i,j) = (N-1,1)) \end{cases}$$

我们将证明 $H_N S_N$ 等于单位矩阵。通过简单的矩阵计算，可以如下计算出 $H_N S_N$ 的各个元素。

当 $(i, j) = (1, 1)$ 时，我们有

$$\begin{aligned} H_N S_N(i,j) &= \frac{1}{J_N}(2J_1(J_{N-2} + J_{N-1}) - 2J_0 J_{N-2} - J_{N-1}) \\ &= \frac{1}{J_N}(2(J_{N-2} + J_{N-1}) - J_{N-1}) \\ &= \frac{1}{J_N}(2J_{N-2} + J_{N-1}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

在 $(i, j) = (1, 2)$ 的情况下，我们有

$$\begin{aligned} H_N S_N(i,j) &= \frac{1}{J_N}(2J_1 J_{N-2} - J_{N-2}(J_1 + J_2) + (-1)^{N+1} J_1 J_0) \\ &= \frac{1}{J_N}(2J_{N-2} - 2J_{N-2}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

在 $i = 1,\ j \notin \{1, 2\}$ 的情况下，我们有

$$\begin{aligned} H_N S_N(i,j) &= \frac{1}{J_N}(2J_1 J_{N-j}(J_{j-2} + J_{j-1}) - J_{N-j}(J_{j-1} + J_j) + (-1)^{N+j-1} J_{j-1} J_0) \\ &= \frac{1}{J_N}(2J_{N-j}(J_{j-2} + J_{j-1}) - J_{N-j}(J_{j-1} + J_j)) \\ &= \frac{J_{N-j}}{J_N}(2J_{j-2} + J_{j-1} - J_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

当 $(i, j) = (2, 1)$ 时，我们有

$$\begin{aligned} H_N S_N(i,j) &= \frac{1}{J_N}(-J_1(J_{N-2} + J_{N-1}) + J_0 J_{N-2} + 2J_2(J_{N-3} + J_{N-2}) + 2J_0 J_{N-3}) \\ &= \frac{1}{J_N}(-J_{N-2} - J_{N-1} + 2(J_{N-3} + J_{N-2})) \\ &= \frac{1}{J_N}(2J_{N-3} + J_{N-2} - J_{N-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

当 $(i,j) = (2,2)$ 时，我们有

$$\begin{aligned} H_N S_N(i,j) &= \frac{1}{J_N}(-J_1 J_{N-2} + 2J_1(J_{N-2} + J_{N-1}) - 2J_1 J_{N-3}) \\ &= \frac{1}{J_N}(-J_{N-2} + 2(J_{N-2} + J_{N-1}) - 2J_{N-3}) \\ &= \frac{1}{J_N}(-2J_{N-3} + J_{N-2} + 2J_{N-1}) \\ &= \frac{1}{J_N}(2J_{N-2} + J_{N-1}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

在 $(i,j) = (2,3)$ 的情况下，我们有

$$\begin{aligned} H_N S_N(i,j) &= \frac{1}{J_N}(-J_1 J_{N-3}(J_1 + J_2) + 2J_2 J_{N-3}) \\ &= \frac{1}{J_N}(-2J_{N-3} + 2J_{N-3}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

在 $i = 2,\ j \notin \{1,2,3\}$ 的情况下，我们有

$$\begin{aligned} H_N S_N(i,j) &= \frac{1}{J_N}(-J_1 J_{N-j}(J_{j-2} + J_{j-1}) + 2J_2 J_{N-j}(J_{j-3} + J_{j-2})) \\ &= \frac{1}{J_N}(-J_{N-j}(J_{j-2} + J_{j-1}) + 2J_{N-j}(J_{j-3} + J_{j-2})) \\ &= \frac{J_{N-j}}{J_N}(-J_{j-1} + J_{j-2} + 2J_{j-3}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

在 $i > j+1, i \notin \{1,2\}, (i,j) \neq (N-1,1)$ 的情况下，我们有

$$\begin{aligned} H_N S_N(i,j) &= \frac{1}{J_N}(-J_{i-j-1}(J_{N-i+j} + J_{N-i+j+1}) + (-1)^{i+j-4} J_{j-1} J_{N-i+1} \\ &\quad - J_{i-j}(J_{N-i+j-1} + J_{N-i+j}) + (-1)^{i+j-3} J_{j-1} J_{N-i} \\ &\quad + 2J_{i-j+1}(J_{N-i+j-2} + J_{N-i+j-1}) - 2(-1)^{i+j-2} J_{j-1} J_{N-i-1}) \\ &= \frac{1}{J_N}(-2J_{i-j-1}(J_{N-i+j-1} + J_{N-i+j}) - J_{i-j}(J_{N-i+j-1} + J_{N-i+j}) \\ &\quad + J_{i-j+1}(J_{N-i+j-1} + J_{N-i+j}) \\ &\quad - (-1)^{i+j} J_{j-1}(2J_{N-i-1} + J_{N-i} - J_{N-i+1})) \\ &= \frac{1}{J_N}(-(2J_{i-j-1} + J_{i-j} - J_{i-j+1})(J_{N-i+j-1} + J_{N-i+j})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

在 $i = j + 1, i \notin \{1, 2\}$ 的情况下，我们有

$$\begin{aligned}
H_N S_N(i,j) &= \frac{1}{J_N}(-J_{i-2}J_{N-i+1} - J_{i-j}(J_{N-i+j-1} + J_{N-i+j}) + (-1)^{i+j-1}J_{j-1}J_{N-i} \\
&\quad + 2J_{i-j+1}(J_{N-i+j-2} + J_{N-i+j-1}) - 2(-1)^{i+j}J_{j-1}J_{N-i-1}) \\
&= \frac{1}{J_N}(-J_{j-1}J_{N-j} - J_1(J_{N-2} + J_{N-1}) + J_{j-1}J_{N-j-1} \\
&\quad + 2J_2(J_{N-3} + J_{N-2}) + 2J_{j-1}J_{N-j-2}) \\
&= \frac{1}{J_N}(-J_{j-1}J_{N-j} - (J_{N-2} + J_{N-1}) + J_{j-1}J_{N-j-1} \\
&\quad + 2(J_{N-3} + J_{N-2}) + 2J_{j-1}J_{N-j-2}) \\
&= \frac{1}{J_N}(J_{j-1}(2J_{N-j-2} + J_{N-j-1} - J_{N-j}) + (2J_{N-3} + J_{N-2} - J_{N-1})) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

当 $i = j$、$i \notin \{1, 2\}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
H_N S_N(i,j) &= \frac{1}{J_N}(-J_{i-2}J_{N-j}(J_{j-i+1} + J_{j-i+2}) - J_{i-1}J_{N-i} \\
&\quad + 2J_{i-j+1}(J_{N-i+j-2} + J_{N-i+j-1}) - 2(-1)^{i+j}J_{j-1}J_{N-i-1}) \\
&= \frac{1}{J_N}(-J_{j-2}J_{N-j}(J_1 + J_2) - J_{j-1}J_{N-j} \\
&\quad + 2J_1(J_{N-2} + J_{N-1}) - 2J_{j-1}J_{N-j-1}) \\
&= \frac{1}{J_N}(-2J_{j-2}J_{N-j} - J_{j-1}J_{N-j} + 2(J_{N-2} + J_{N-1}) \\
&\quad - 2J_{j-1}J_{N-j-1}) \\
&= \frac{1}{J_N}(-(2J_{j-2} + J_{j-1})J_{N-j} + (J_{N-1} + J_N) - 2J_{j-1}J_{N-j-1}) \\
&= \frac{1}{J_N}(-J_jJ_{N-j} - 2J_{j-1}J_{N-j-1} + J_{N-1} + J_N) \\
&= \frac{1}{J_N}(-J_{N-1} + J_{N-1} + J_N) \qquad \text{by (2.5)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

当 $i = j-1$、$i \notin \{1,2\}$ 时，我们有

$$\begin{aligned} H_N S_N(i,j) &= \frac{1}{J_N}(-J_{i-2}J_{N-j}(J_{j-i+1}+J_{j-i+2}) - J_{i-1}J_{N-j}(J_{j-i}+J_{j-i+1}) \\ &\quad + 2J_iJ_{N-i-1}) \\ &= \frac{1}{J_N}(-J_{j-3}J_{N-j}(J_2+J_3) - J_{j-2}J_{N-j}(J_1+J_2) + 2J_{j-1}J_{N-j}) \\ &= \frac{1}{J_N}(-4J_{j-3}J_{N-j} - 2J_{j-2}J_{N-j} + 2J_{j-1}J_{N-j}) \\ &= \frac{2J_{N-j}}{J_N}(-2J_{j-3} - J_{j-2} + J_{j-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

当 $i < j-1, i \notin \{1,2\}$ 时，我们有

$$\begin{aligned} H_N S_N(i,j) &= \frac{1}{J_N}(-J_{i-2}J_{N-j}(J_{j-i+1}+J_{j-i+2}) - J_{i-1}J_{N-j}(J_{j-i}+J_{j-i+1}) \\ &\quad + 2J_iJ_{N-j}(J_{j-i-1}+J_{j-i})) \\ &= \frac{J_{N-j}}{J_N}(-2J_{i-2}(J_{j-i}+J_{j-i+1}) - J_{i-1}(J_{j-i}+J_{j-i+1}) \\ &\quad + J_i(J_{j-i}+J_{j-i+1})) \\ &= \frac{J_{N-j}}{J_N}(-2J_{i-2} - J_{i-1} + J_i)(J_{j-i-1}+J_{j-i}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

当 $(i,j) = (N-1, 1)$ 时，我们有

$$\begin{aligned} H_N S_N(i,j) &= \frac{1}{J_N}(-J_{N-3}(J_2+J_3) + (-1)^{N-2}J_0J_2 - J_{N-2}(J_1+J_2) \\ &\quad + (-1)^{N-1}J_0J_1 + 2J_{N-1}) \\ &= \frac{1}{J_N}(-4J_{N-3} - 2J_{N-2} + 2J_{N-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此，我们有 $S_N = H_N^{-1}$。 □

结合定理 3.1 和矩阵方程

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} h(\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1,+2\}); 0, 1) \\ h(\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1,+2\}); 0, 2) \\ \vdots \\ h(\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1,+2\}); 0, N-2) \\ h(\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1,+2\}); 0, N-1) \end{bmatrix} = 2H_N^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

我们得到如下结果。

定理 3.2。对于 $1 \le l \le N-1$, Cay($\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}$) 上简单随机游走的命中时间精确公式为:

$$h(\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}); 0, l) = \frac{1}{3J_N}(2J_{l-1}(3lJ_{N-l-1} + 2lJ_{N-l}) + J_l((N+l+3)J_{N-l-1} + (N+3l+1)J_{N-l})).$$

证明。对于 $1 \le l \le N-2$,

$$\begin{aligned}
&h(\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}); 0, l) \\
&= 2\sum_{j=1}^{N-1} H_N^{-1}(l, j) \\
&= \frac{2}{J_N}(\sum_{j=1}^{l}(J_{l-j+1}(J_{N-l+j-2} + J_{N-l+j-1}) - (-1)^{l+j}J_{j-1}J_{N-l-1}) \\
&+ J_l J_{N-l-1} + \sum_{j=l+2}^{N-1} J_l J_{N-j}(J_{j-l-1} + J_{j-l})) \\
&= \frac{2}{J_N}(\sum_{j=1}^{l} 2^{N-l+j-2}J_{l-j+1} - (-1)^l J_{N-l-1}\sum_{j=1}^{l}(-1)^j J_{j-1} \\
&+ J_l J_{N-l-1} + J_l \sum_{j=l+2}^{N-1} 2^{j-l-1}J_{N-j}) && \text{by (2.2)} \\
&= \frac{2}{J_N}(2^{N-l-2}\sum_{j=1}^{l+1} 2^j J_{l-j+1} + J_{N-l-1}\sum_{j=1}^{l}(-1)^{l+j}J_j \\
&+ J_l \sum_{j=1}^{N-l-1} 2^j J_{N-l-j-1}) \\
&= \frac{2}{3J_N}(2^{N-l-1}((l+1)J_l + lJ_{l+1}) + J_{N-l-1}(lJ_{l-1} - (l-2)J_l) \\
&+ J_l((N-l-1)J_{N-l-2} + (N-l-2)J_{N-l-1})) && \text{by (2.6),(2.7)} \\
&= \frac{2}{3J_N}(2(J_{N-l-2} + J_{N-l-1})((2l+1)J_l + 2lJ_{l-1}) \\
&+ J_{N-l-1}(lJ_{l-1} - (l-2)J_l) + J_l((N-l-1)J_{N-l-2} \\
&+ (N-l-2)J_{N-l-1})) && \text{by (2.2)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3J_N}(J_{l-1}(4lJ_{N-l-2} + 5lJ_{N-l-1}) \\
&+ J_l((N+3l+1)J_{N-l-2} + (N+2l+2)J_{N-l-1})) \\
&= \frac{1}{3J_N}(2J_{l-1}(3lJ_{N-l-1} + 2lJ_{N-l}) \\
&+ J_l((N+l+3)J_{N-l-1} + (N+3l+1)J_{N-l})).
\end{aligned}
$$

在 $l = N-1$ 的情况下，我们有

$$
\begin{aligned}
&h(\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\}); 0, N-1) \\
&= 2\sum_{j=1}^{N-1} H_N^{-1}(N-1, j) \\
&= \frac{2}{J_N}(J_{N-1} + \sum_{j=2}^{N-1} J_{N-j}(J_{j-1} + J_j)) \\
&= \frac{2}{J_N}(J_{N-1} + \sum_{j=2}^{N-1} 2^{j-1} J_{N-j}) && \text{by (2.2)} \\
&= \frac{1}{J_N}\sum_{j=1}^{N} 2^j J_{N-j} \\
&= \frac{2}{3J_N}(NJ_{N-1} + (N-1)J_N) && \text{by (2.6)} \\
&= \frac{2}{3J_N}(2(N-1)J_{N-2} + (2N-1)J_{N-1}) \\
&= \frac{1}{3J_N}(4(N-1)J_{N-2}J_1 + 2(2N-1)J_{N-1}J_1) \\
&= \frac{1}{3J_N}(2J_{N-2}(3(N-1)J_0 + 2(N-1)J_1) \\
&+ J_{N-1}((2N+2)J_0 + (4N-2)J_1)) \\
&= \frac{1}{3J_N}(2J_{N-2}(3(N-1)J_0 + 2(N-1)J_1) \\
&+ J_{N-1}((N+(N-1)+3)J_0 + (N+3(N-1)+1)J_1)).
\end{aligned}
$$

□

Acknowledgements

作者感谢 Tsuyoshi Miezaki 和 Hiroshi Suzuki 就本研究展开的有益讨论并提出的意见。

本研究得到日本学术振兴会特别研究员资助金（23KJ2020）以及早稻田大学理工学术院研究所青年科学家（Early Bird）资助金的支持。

References

[1] A. F. Horadam.：雅各布斯塔尔表示数，《斐波那契季刊》，34.1（1996）68-74。[2] N. Chair.：具有四个最近邻的 N-循环图的有效电阻，《统计物理学杂志》，154（2014）1177-1190。[3] Y. Doi、N. Konno、T. Nakamigawa、T. Sakuma、E. Segawa、H. Shinohara、S. Tamura、Y. Tanaka 和 K. Toyota.：循环图平方的平均命中时间，《离散应用数学》，313（2022）18-28。[4] F. Y. Wu.：电阻网络理论：两点电阻，《物理学杂志A：数学与一般》，37(26)（2004）6653-6673。

Graduate School of Science and Engineering, Waseda University, Tokyo, 169-8555, Japan电子邮件地址：tanaka yuuho dc@akane.waseda.jp