arXiv:2304.02529v1 [math.DS] 5 Apr 2023

非一致扩张斜积的平衡态

GREGORY HEMENWAY

Abstract. 我们研究非一致扩张斜积的平衡态，并说明如何利用一族纤维逐点转移算子来定义斜积各纤维上的条件测度。我们证明，平衡态在斜积底空间上的推前本身也是一个平衡态，其对应的霍尔德势函数由这些纤维逐点转移算子定义。

1. Introduction and Main Results

设 X 和 Y 为紧致连通的黎曼流形。设 F 为定义在 $X \times Y$上的斜积；也就是说，存在连续映射 $f\colon X \to X$和 $\{g_x\colon Y \to Y |\ x \in X\}$，使得

$$F(x, y) = (f(x), g_x(y)).$$

在1999年 的论文中，Denker 和 Gordin 表明，若一个纤维化系统（斜积属于这类系统）沿纤维一致扩张且拓扑上恰当，那么对于给定的霍尔德势函数 φ: $X \times Y \to \mathbb{R}$，在 $X \times Y$ 上存在唯一的平衡态，其条件测度满足纤维 Gibbs 性质，且其在 X 上的横截测度是某个定义在 X上的霍尔德势函数对应的 Gibbs 测度。本文将把这一结果推广到允许沿纤维非一致扩张的系统（见下文定理 A）。为陈述主定理，我们先回顾一些已有结果和记号。Castro 和 Varandas [2] 证明，对于某类非一致扩张系统及霍尔德连续势函数，鲁埃尔算子的特征数据

$$\mathcal{L}_\varphi \psi(x, y) = \sum_{(\bar{x},\bar{y}) \in F^{-1}(x,y)} e^{\varphi(\bar{x},\bar{y})} \psi(\bar{x}, \bar{y}).$$

作用于 H¨older 势函数空间上，可用来构造 $X \times Y$ 上的唯一平衡态 μ。

我们将 X称为基底，将 $\{Y_x = \{x\} \times Y\}_{x \in X}$称为乘积的纤维，因为

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y.$$

日期：2023年4月6日。作者部分得到 NSF DMS-1554794 和 DMS-2154378 的资助。

注意，每个纤维 Y_x 都可以与 Y等同。我们会在需要时作出必要的区分。在第 2.5 节中，我们将介绍纤维逐点转移算子$\mathcal{L}_x$: $C(Y_x) \to C(Y_{fx})$，其定义满足对于任意 $\psi \in C(Y_x)$，

$$\mathcal{L}_x\psi(fx,y) = \sum_{\bar{y}\in g_x^{-1}y} e^{\varphi(x,\bar{y})}\psi(x,\bar{y}).$$

我们将证明， μ 到 X 的推前是下列势函数的一个平衡态:

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \log \frac{\langle \mathcal{L}_x^{n+1}\mathbb{1}, \sigma\rangle}{\langle \mathcal{L}_{fx}^{n}\mathbb{1}, \sigma\rangle} \tag{1}$$

对于任意定义在 Y上的概率测度 σ 。注意，这是 Pollicott 和 Kempton [8] 以及后来 Piraino [7]研究的同一个势函数。

我们的主要结果如下。

定理 A. 设 X 和 Y 是紧致连通黎曼流形，且$(X \times Y, F)$ 是一个 ***Lipschitz*** 斜积，其底映射一致扩张，纤维映射非一致扩张，并满足下文第 ***2.3*** 节中的假设$(\mathrm{A1})$ 和 $(\mathrm{A2})$ 。设 φ 是 $X \times Y$ 上的 ***H¨older*** 连续势函数，满足第 ***2.4*** 节中的条件(P)，且 μ 是其对应的平衡态。则以下结论成立。

(1) 方程(1) 中的势函数 Φ 存在且与 σ无关，是 ***H¨older*** 连续的，并满足 $P(\varphi) = P(\Phi)$。***(2)*** $\hat{\mu} = \mu \circ \pi_X^{-1}$ 是 Φ 的唯一平衡态。***(3)*** 存在唯一的测度族 $\{\nu_x : x \in X\}$，使得 $\nu_x(Y_x) = 1$ 并且

$$\mathcal{L}_x^*\nu_{fx} = e^{\Phi(x)}\nu_x.$$

(4) $x \mapsto \nu_x$ 是弱*-连续的。***(5)*** 设$\hat{h}$和$\hat{\nu}$为 $\mathcal{L}_\Phi$的特征数据，即 $\mathcal{L}_\Phi^*\hat{\nu} = e^{P(\Phi)}\hat{\nu}$， $\mathcal{L}_\Phi\hat{h} = e^{P(\Phi)}\hat{h}$，且$\int \hat{h} d\hat{\nu} = 1$。那么，测度 $\mu_x = \overline{h_{(x,\cdot)}\hat{h}(\cdot)\nu_x}$是 Y_x上的概率测度，使得

$$\mu = \int_X \mu_x \, d\hat{\mu}(x).$$

在第 2 节中，我们回顾斜积、非一致扩张映射和纤维逐点转移算子的相关背景。例 2.1 表明，底空间上的倍增映射与纤维中参数在 x 上连续变化的 Mannevile-Pomeau 映射满足条件 (A1) 和 (A2)。几乎为常数的势函数满足 (P)，因此定理 A 适用于一大类系统中的一个开集的势函数。在第 3 节中，我们利用 Hilbert 度量和锥上的压缩映射证明定理 A 的第 (1) 部分，方法类似于 Piraino [7]。由于纤维映射 $\{g_x\}$ 仅是非一致扩张的，因此还需要新的论证。我们还证明 (3)（见定理 3.6）。在第 4 节中，我们通过证明 (2)、(4)（见引理 4.3）和 (5)，完成定理 A 的证明。

致谢。我要感谢我的导师 Vaughn Climenhaga 博士，在撰写本文期间与我进行了许多富有启发性的讨论。

2. Non-uniformly Expanding Skew Products

设 X 和 Y 是紧致连通的黎曼流形，并用 d 表示 $X \times Y$ 上的 L_1 距离。用 π_X 和 π_Y 分别表示从 $X \times Y$ 到 X 和 Y 的自然投影映射。

2.1. 斜积的动力学。为了理解 $X \times Y$ 上 F 的动力学，对任意 $n \geq 0$ 和 $x \in X$，定义

$$g_x^n := g_{f^{n-1}x} \circ \cdots \circ g_x \colon Y_x \to Y_{f^n x}.$$

那么，对任意 $(x, y) \in X \times Y$，都可以通过以下序列来考察该系统的行为

$$F^n(x, y) = (f^n(x), g_x^n(y)).$$

对每个 $n \geq 0$，定义 n^{th}-Bowen 度量如下

$$d_n((x, y), (x', y')) = \max_{0 \leq i \leq n} \{d(F^i(x, y), F^i(x', y'))\}.$$

此外，将以 $(x,\ y)$ 为中心、半径为 $\delta > 0$ 的 n^{th}-Bowen 球记作

$$B_n((x, y), \delta) = \{(x', y') \colon d_n((x, y), (x', y')) < \delta\}.$$

2.2. 底空间中的一致扩张。若存在 $C,\ \delta_f > 0$ 和 $\gamma > 1$，使得映射 $f\colon X \to X$ 满足下述条件，则称其为一致扩张：

$$d(f^n(x, y), f^n(x', y')) \geq C\gamma^n d((x, y), (x', y'))$$

每当 $d_n((x,\ y),\ (x',\ y')) \leq \delta_f$ 时。通过采用适配度量，可以不失一般性地假设 $C = 1$。这就将局部扩张性化为

$$d(f(x, y), f(x', y')) \geq \gamma d((x, y), (x', y'))$$

每当 $d((x,\ y),\ (x',\ y')) \leq \delta_f$ 时。

2.3. 沿纤维的非一致扩张。我们假设 F 是一个局部同胚，且映射 $f\colon X \to X$ 是一致扩张的。下面一段将说明我们对 $X \times Y$ 上沿纤维非一致扩张所作的假设。条件（A1）表明，F 在某个区域 $\mathcal{A}$ 外一致扩张，并且在 $\mathcal{A}$ 中收缩程度不会过强。因此，若 $\mathcal{A}$ 为空，则问题便归结为一致扩张的情形。条件（A2）确保每个点在扩张区域中至少有一个原像。

假设存在一个连续函数 $(x, y) \mapsto L(x, y)$，使得对于每个 $(x, y) \in X \times Y$，都存在 (x, y) 的一个邻域 $U_{x,y}$，使得 $F|_{U_{x,y}}$ 可逆，并且

$$d(F^{-1}(u_x, u_y), F^{-1}(v_x, v_y)) \leq L(x, y)d((u_x, u_y), (v_x, v_y))$$

对所有的 $(u_x, u_y), (v_x, v_y) \in F(U_{x,y})$，由于 F 是从紧致连通流形到其自身的局部同胚，因此 F 是一个覆盖映射。对于 f，同理有：$_X \to X$ 所以 $\hat{}d := |f^{-1}x|$ 在 x 中是常数。因此，如果 $d := \deg(F)$，那么 $d := |g_x^{-1}(y)|$ 是常数，

ˆ 对所有 $x \in X$ 和 $y \in \bar{Y}_x$ 以及 $d = dd$都成立。此外，我们假设存在常数 $\gamma > 1$ 和 $L \geq 1$，以及一个开区域 $\mathcal{A} \subset X \times Y$，使得

(A1) $L(x, y) \leq L$对每个 $x \in \mathcal{A}$和 $L(x, y) < \gamma^{-1}$对所有 $x \notin \mathcal{A}$都成立，并且 L足够接近 1，使得下面的方程 (4) 成立。(A2) 存在 $X \times Y$的一个有限开集覆盖 $\mathcal{U}$，使得 F是单射，并且 $\mathcal{A}$ 可由 $\mathcal{U}$中的 $q < d$ 个元素覆盖。此外，我们假设 $\mathcal{U}$ 中的元素足够小，能够分离 $X \times Y$上的曲线，具体而言，若 c是 $X \times Y$上的一条距离最短测地线，则 $\mathcal{U}$ 中的每个元素至多与 $F^{-1}(c)$中的一条曲线相交。

注意，(A2) 是 Castro 和 Varandas [2] 的 H2 条件的加强版。

例 *2.1*。S^1 上的 *Manneville–Pomeau* 映射 $y \mapsto y + y^{p+1}$ 模 Z $(p > 0)$ 是一个展现非一致扩张的系统的经典例子。定义映射F: $X \times Y \to X \times Y$，令基映射 f 为 S^1 上的倍增映射，并在纤维上取 *Manneville–Pomeau* 映射 $g_x(y) = y + y^{p(x)+1}$ 模 Z，其中 $p(x) > 0$随基点连续变化。这些映射各有两个分支，因此 $d = 2$。注意，对所有 $y \neq 0$， $g'_x(y) > g'_x(0) = 1$ 。令 $\mathcal{A}$ 为 $S^1 \times \{0\} \subset T^2$ 周围的任意小邻域。那么在 $\mathcal{A}^c$ 上，乘积映射是一致扩张的。因此 $q = 1$。于是，$F(x, y) = (f(x), g_x(y))$ 满足条件 *(A1)* 和 *(A2)*，所以定理 *A* 对这个例子成立。

引理 2.2. 若 F满足 (A1) 和 (A2)，那么对于任意 $x, x' \in X$和 $y, y' \in Y$，我们可以将 $g_x^{-1}(y) = \{y_1, \ldots, y_d\}$与 $g_{x'}^{-1}(y') = \{y'_1, \ldots, y'_d\}$ 的原像配对，其中对于任意 $k = 1, 2, \ldots, q$,

$$d((x, y_k), (x, y'_k)) \leq L_x d((fx, y), (fx', y'))$$

而对于任意 $k = q + 1, \ldots, d$,

$$d((x, y_k), (x', y'_k)) \leq \gamma_x^{-1} d((fx, y), (fx', y')).$$

证明。 设 (x, y),$(x', y') \in X \times Y$，并设 c为连接这两点的距离最短测地线。令 $g_x^{-1}(y) = \{y_1, \ldots, y_d\}$。由于 F是覆盖映射，我们可以将 c唯一地提升为曲线 $c_1, \ldots, c_d$，使得每个 c_k 都始于 y_i，且对所有 k， $F(c_k) = c$。然后令 y'_k 为 c_k 的另一个端点，得到一组原像 $g_{x'}^{-1}(y') = \{y'_1, \ldots, y'_d\}$。如 (A2) 所示，用单射域覆盖每个 c_k。那么这些球中至多有 q 个与 $\mathcal{A}$ 相交，且每个球至多与曲线 c_k之一相交。因此，与 $\mathcal{A}$相交的曲线 c_k 至多有 q 条。不失一般性，我们可以假设这些是最前面的 q 个原像。应用 (A1) 即得所需结果。□

2.4. **平衡态的存在性与唯一性**。我们称 φ: $X \times Y \to \mathbb{R}$是 α-*Hölder* 连续的，对于 $\alpha > 0$，**如果**

$$|\varphi|_\alpha := \sup_{(x,y) \neq (x', y')} \frac{|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')|}{d((x, y), (x', y'))^\alpha} < \infty.$$

我们用 $C^\alpha = C^\alpha(X \times Y)$ 表示定义在 $X \times Y$ 上的 α-Hölder 连续函数构成的巴拿赫空间。n^{th} Birkhoff 和定义为 $S_n\varphi(x,\ y) = \sum_{k=0}^{n} \varphi \circ F^k(x,\ y)$。

我们用 $\mathcal{M}(X \times Y)$ 表示 $X \times Y$ 上的博雷尔概率测度空间，用 $\mathcal{M}(X \times Y,\ F)$ 表示其中 F-不变的概率测度。给定一个连续映射 $F\colon X \times Y \to X \times Y$ 和一个势函数 $\varphi\colon X \times Y \to \mathbb{R}$，变分原理断言

$$P(\varphi) = \sup\left\{h_\nu(F) + \int \varphi \, d\nu \colon \nu \in \mathcal{M}(X \times Y, F)\right\} \tag{2}$$

其中，$P(\varphi)$ 表示 F 关于 φ 的拓扑压力，$h_\mu(F)$ 表示 F 的度量熵。对于 F，关于 φ 的平衡态是指在方程 (2) 右侧达到上确界的不变测度。对于一致扩张映射，每个平衡态 μ 都满足吉布斯性质：对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $C > 0$，使得

$$C^{-1} \le \frac{\mu\big(B_n((x,y),\varepsilon)\big)}{e^{-nP(\varphi)+S_n\varphi(x,y)}} \le C$$

对任意 $(x,\ y) \in X \times Y$ 和 $n \in \mathbb{N}$。

在本文中，我们考虑满足以下条件的 H¨older 势函数 $\varphi \in C^\alpha$

$$\sup\varphi - \inf\varphi < \varepsilon_\varphi \text{ and } |e^\varphi|_\alpha < \varepsilon_\varphi e^{\inf\varphi} \tag{P}$$

对于满足下面方程 (3) 和 (5) 的某个 $\varepsilon_\varphi > 0$（见第 3 节）。几乎为常数的势函数满足条件 (P)。因此，定理 A 对最大熵测度成立。我们假设 L 足够接近 1，并且 $0 < \varepsilon_\varphi < \log\ d - \log q$，使得

$$e^{\varepsilon_\varphi} \cdot \left(\frac{(d-q)\gamma^{-\alpha} + qL^\alpha}{d}\right) < 1. \tag{3}$$

选择满足 $\dfrac{de^{\varepsilon}e^{\varepsilon_\varphi}}{q} < 1$ 的 $\varepsilon > 0$。令 $\iota = \iota(\varepsilon, d, q) \in (0,1)$ 由下面的引理 3.11 给出。

假设 L 足够接近 1，从而存在满足以下条件的 $c > 0$

$$0 < \gamma^{-(1-\iota)}L^\iota < e^{-2c} < 1. \tag{4}$$

在这些假设下，已知在 $X \times Y$ 上，对于 φ 存在唯一的平衡态 μ。

引理 2.3。如果 F 在拓扑上是精确的，并且满足(A1)、(A2)，且 φ 满足上确界 φ − 下确界 φ < 对数 d − 对数 q，则存在一个扩张共形测度，使得 $\mathcal{L}_\varphi^*\nu = \lambda\nu$ 且 $supp(\nu) = X \times Y$，其中 $\mathcal{L}_\varphi$ 的谱半径为 $\lambda := r(\mathcal{L}_\varphi) \ge de^{\inf\varphi}$。此外，$\nu$ 是一个非间隙 *Gibbs* 测度，并且相对于 F 的雅可比为 $J_\nu F = \lambda e^{-\varphi}$。

证明。参见 Varandas 和 Viana [9] 中的定理 4.1。 □

我们不会使用非稀疏性或 $J_\nu F$。更多详情请参见 [9].

定理 2.4. 设 $F\colon X \times Y \to X \times Y$ 是一个局部同胚，具有利普希茨连续逆映射，且 $\varphi\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ 是一个满足(A1)、(A2)和(P)的赫尔德连续势函数。那么，*Ruelle-Perron-Frobenius* 算子在赫尔德连续可观测函数空间上具有谱隙性质；相对于 φ， F 存在唯一的平衡态 μ，且密度 $d\mu/d\nu$ 是赫尔德连续的。

证明。 参见 Castro 和 Varandas 的定理 A [2]。 □

记 $\hat{}\mu = \mu \circ \pi_X^{-1}$ 为平衡态 μ 在基底X上的推前。在本文中，我们将称此测度为该斜积的横截测度。

2.5. **斜积的纤维逐点转移算子**。 按照文献中的惯例，我们将利用鲁埃尔算子研究 $(X \times Y, F)$ 上的平衡态。定义作用于 $C(X \times Y)$ 的转移算子 $\mathcal{L}_\varphi$，将 $\psi \in C(X \times Y)$ 映射为

$$\mathcal{L}_\varphi \psi(x,y) = \sum_{(\overline{x},\overline{y}) \in F^{-1}(x,y)} e^{\varphi(\overline{x},\overline{y})} \psi(\overline{x},\overline{y}).$$

注意，在 F 的斜积表示下，我们可以写成

$$\sum_{(\overline{x},\overline{y}) \in F^{-1}(x,y)} e^{\varphi(\overline{x},\overline{y})} \psi(\overline{x},\overline{y}) = \sum_{\overline{x} \in f^{-1}x} \sum_{\overline{y} \in g_{\overline{x}}^{-1} y} e^{\varphi(\overline{x},\overline{y})} \psi(\overline{x},\overline{y}).$$

这就得到作用于 $X \times Y$ 的纤维上的纤维传递算子。我们将φ 分解，得到纤维逐点势函数族 $\{\varphi_x(\cdot) = \varphi(x,\cdot)\}_{x \in X}$。 对于每个 $x \in X$，定义 $\mathcal{L}_x\colon C(Y_x) \to C(Y_{fx})$ 为

$$\mathcal{L}_x \psi_x(y) = \sum_{\overline{y} \in g_x^{-1} y} e^{\varphi_x(\overline{y})} \psi_x(\overline{y})$$

对任意 $\psi \in C(X \times Y)$。我们通过令下式成立来迭代转移算子

$$\mathcal{L}_x^n = \mathcal{L}_{f^{n-1}x} \circ \cdots \circ \mathcal{L}_x \colon C(Y_x) \to C(Y_{f^n x}).$$

对于上述每个纤维算子，我们还定义其对偶算子 $\mathcal{L}_x^*$ ：将概率测度 $\eta \in \mathcal{M}(Y_{fx})$ 映射为测度 $\mathcal{L}_x^* \eta \in \mathcal{M}(Y_x)$，使得对任意$\psi \in C(X \times Y)$，

$$\int \psi \, d(\mathcal{L}_x^* \eta) = \int \mathcal{L}_x \psi \, d\eta.$$

3. A Potential for the Transverse Measure

Piraino [7] 证明，对于有限型子移位，$\hat{}\mu = \mu \circ \pi_X^{-1}$ 是以下势函数的一个平衡态

$$\Phi(x) = \lim_{n \to \infty} \log \frac{\langle \mathcal{L}_x^{n+1} \mathbb{1}, \sigma \rangle}{\langle \mathcal{L}_{fx}^n \mathbb{1}, \sigma \rangle}$$

其中， σ 是支撑在 Y上的任意概率测度。我们将在定理 3.5 中证明，在我们的设定下该势函数存在。此外，我们将在定理 3.14 中证明Φ 是 H¨older 连续的。

3.1. **比尔霍夫压缩定理**。 不难验证，鲁埃尔算子保持 H¨older 连续势函数 $C^\alpha = C^\alpha(X \times Y)$ $0 < \alpha < 1$所构成的巴拿赫空间。若子集 $\Lambda \subset C^\alpha$ 满足 $a\Lambda = \Lambda$ 对所有 $a > 0$都成立，则称其为一个锥 。若锥 Λ 满足 $\psi + \zeta \in \Lambda$ 对所有 $\psi,\ \zeta \in \Lambda$ 都成立，则称其为凸的 。若 $\Lambda \cup \{0\}$ 关于 H¨older 范数闭合 ，则称 Λ 为闭锥。我们假设所考虑的锥都是闭的、凸的，并且满足 $\Lambda \cap (-\Lambda) = \emptyset$。对于任意概率测度 η 和 H¨older 势函数ψ，令 $\langle \psi, \eta \rangle = \int \psi d\eta$。给定一个闭锥 $\Lambda \subset C^\alpha$，我们可以定义其对偶锥$\Lambda^* = \{\eta \in (C^\alpha)^*$: $\langle \psi, \eta \rangle \geq 0$ 对所有 $\psi \in \Lambda\}$ 都成立。关于锥的更多内容，请参见[6]中的第 4 节，或参见 [7] 的附录。

定义一个偏序关系 $\preceq$于 C^α 上：当且仅当对任意 $\phi,\ \psi \in C^\alpha$， $\phi \preceq \psi$成立时，称 $\psi - \phi \in \Lambda \cup \{0\}$。令

$$A = A(\phi, \psi) = \sup\{t > 0 \colon t\phi \preceq \psi\} \text{ and } B = B(\phi, \psi) = \inf\{t > 0 \colon \psi \preceq t\phi\}.$$

相对于闭锥 Λ 的希尔伯特射影度量 定义为

$$\Theta(\phi, \psi) = \log \frac{B}{A}.$$

以下引理在计算希尔伯特度量下的距离时很有用。证明见 [6]第 4 节。

引理 3.1. 设 Λ 是一个闭锥， Λ^* 是其对偶。对于任意 $\phi, \psi \in \Lambda$,

$$\Theta(\phi, \psi) = \log \left(\sup \left\{ \frac{\langle \phi, \sigma \rangle \langle \psi, \eta \rangle}{\langle \psi, \sigma \rangle \langle \phi, \eta \rangle} \colon \sigma, \eta \in \Lambda^* \ \textit{and} \ \langle \psi, \sigma \rangle \langle \phi, \eta \rangle \neq 0 \right\} \right).$$

定理 A 的证明的主要思路是找到一个锥，使纤维传递算子在其上是压缩映射。为此，我们需要比尔霍夫压缩定理:

定理 3.2 (Birkhoff [1])。 设 Λ_1, Λ_2 是闭锥，且 $\mathcal{L}$: $\Lambda_1 \to \Lambda_2$ 是一个线性映射，满足 $\mathcal{L}\Lambda_1 \subset \Lambda_2$。那么对于所有 $\phi, \psi \in \Lambda_1$

$$\Theta_{\Lambda_2}(\mathcal{L}\phi, \mathcal{L}\psi) \leq \tanh\left(\frac{\operatorname{diam}_{\Lambda_2}(\mathcal{L}\Lambda_1)}{4}\right) \Theta_{\Lambda_1}(\phi, \psi)$$

其中 $\operatorname{diam}_{\Lambda_2}(\mathcal{L}\Lambda_1) = \sup\{\Theta_{\Lambda_2}(\mathcal{L}\phi,\ \mathcal{L}\psi) \colon \phi,\ \psi \in \Lambda_1\}$ 且 $\tanh \infty = 1$。

3.2. **存在性：** Φ。 我们将使用如下形式的锥

$$\Lambda_K = \Lambda_K^\alpha = \{\psi \in C^\alpha(X \times Y) \colon \psi > 0 \text{ and } |\psi|_\alpha \leq K \inf \psi\} \cup \{0\}.$$

可以证明， Λ_K 是 C^α中的一个闭锥。对于这些锥，我们可以用另一种方式计算希尔伯特度量中的距离。

引理 3.3. 对于任意 $\phi, \psi \in \Lambda_K$,

$$A(\phi,\psi) = \inf_{z_1,z_2,z_3 \in X\times Y} \frac{Kd(z_1,z_2)^\alpha \psi(z_3) - (\psi(z_1)-\psi(z_2))}{Kd(z_1,z_2)^\alpha \phi(z_3) - (\phi(z_1)-\phi(z_2))}$$

and

$$B(\phi,\psi) = \sup_{z_1,z_2,z_3 \in X\times Y} \frac{Kd(z_1,z_2)^\alpha \psi(z_3) - (\psi(z_1)-\psi(z_2))}{Kd(z_1,z_2)^\alpha \phi(z_3) - (\phi(z_1)-\phi(z_2))}.$$

证明。 参见 Castro 和 Varandas [2] 中的引理 4.2。 □

记

$$\Lambda_K^x = \{\psi \in C^\alpha(X\times Y)\colon \psi_x(\cdot) > 0 \text{ and } |\psi|_\alpha \le K \inf \psi\} \cup \{0\}$$

Λ_K 在 Y_x 上的截面。

Let

$$s := e^{\varepsilon_\varphi} \cdot \left(\frac{(d-q)\gamma^{-\alpha} + qL^\alpha}{d} \right) < 1$$

如方程 (3) 所示。我们假设 $\varepsilon_\varphi > 0$ 足够小，使得

$$\zeta := s + 2s\varepsilon_\varphi \operatorname{diam}(Y)^\alpha < 1. \tag{5}$$

于是，基于与 [2] 中的定理 4.1 和命题 4.3 类似的论证，我们得到以下引理。

引理 3.4. 取 (5) 中的 ζ，对所有充分大的 K，均有 $\mathcal{L}_x(\Lambda_K^x) \subset \Lambda_{\zeta K}^{fx}$，对所有 $x \in X$ 均成立。此外，存在常数 $M = M(K) > 0$，使得对所有 $x \in X$，相对于 Λ_K^{fx} 上的希尔伯特射影度量，有 $\operatorname{diam}(\mathcal{L}_x\Lambda_K^x) \le M < \infty$。

证明. 固定 $x \in X$ 和 $K > 0$。分别记 y 和 y' 在 Y_x 中由引理 2.2 给出的原像为 $\{y_k\}$ 和 $\{y_k'\}$。现在固定 $\psi \in \Lambda_K$。由于 $\inf \mathcal{L}_x\psi \ge de^{\inf\varphi} \inf \psi$ 且

$$\mathcal{L}_x\psi(fx,y) - \mathcal{L}_x\psi(fx,y') = \sum_{k=1}^d \Big(e^{\varphi(x,y_k)}(\psi(x,y_k)-\psi(x,y_k')) + (e^{\varphi(x,y_k)} - e^{\varphi(x,y_k')})\psi(x,y_k') \Big),$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{|\mathcal{L}_x\psi(fx,y) - \mathcal{L}_x\psi(fx,y')|}{\inf \mathcal{L}_x\psi} &\le d^{-1} \sum_{k=1}^d e^{\varphi(x,y_k)-\inf\varphi} \big|\psi(x,y_k) - \psi(x,y_k')\big| (\inf\psi)^{-1} \\ &\quad + d^{-1} \sum_{k=1}^d (\sup\psi/\inf\psi) e^{-\inf\varphi} \big| e^{\varphi(x,y_k)} - e^{\varphi(x,y_k')} \big| =: I_1 + I_2\end{aligned}$$

注意，$\big|\psi(x,y_k) - \psi(x,y_k')\big| \le |\psi|_\alpha d(y_k,y_k')^\alpha \le K$ 下确界 $\psi d(y_k,y_k')^\alpha$。由引理 2.2，$d(y_k,y_k') \le Ld(y,y')$ 对任意 $1 \le k \le q$ 成立，且 $d(y_k,y_k') \le \gamma^{-1}d(y,y')$ 对 $q < k \le d$

SO

$$\begin{aligned} I_1 &\le d^{-1}\sum_{k=1}^{d} e^{\varphi(x,y_k)-\inf\varphi} K d(y_k,y_k')^\alpha \\ &\le d^{-1}e^{\varepsilon_\varphi} K \sum_{k=1}^{d} d(y_k,y_k')^\alpha \\ &\le K e^{\varepsilon_\varphi} d^{-1}(L^\alpha q + (d-q)\gamma^{-\alpha}) d(y,y')^\alpha \\ &\le sK d(y,y')^\alpha \end{aligned}$$

其中第二个不等式由 (P) 得出。

为估计 I_2，注意到 $\left|e^{\varphi(x,y_k)} - e^{\varphi(x,y_k')}\right| \le |e^{\varphi_x}|_\alpha d(x,y_k),(x,y_k'))^\alpha$ an d

$$\sup\psi \le \inf\psi + |\psi|_\alpha \operatorname{diam}(Y)^\alpha \le (1 + K\operatorname{diam}(Y)^\alpha)\inf\psi$$

这意味着

$$\sup\psi/\inf\psi \le 1 + K\operatorname{diam}(Y)^\alpha \le 2K\operatorname{diam}(Y)^\alpha$$

只要 K 足够大，则 (P) 意味着

$$\begin{aligned} I_2 &\le 2K\operatorname{diam}(Y)^\alpha e^{-\inf\varphi} d^{-1}\sum_{k=1}^{d} |e^{\varphi_x}|_\alpha d(x,y_k),(x,y_k'))^\alpha \\ &\le 2K\operatorname{diam}(Y)^\alpha \varepsilon_\varphi d^{-1}\sum_{k=1}^{d}(L^\alpha q + (d-q)\gamma^{-\alpha}) d(y,y')^\alpha \\ &\le 2K\operatorname{diam}(Y)^\alpha s\varepsilon_\varphi d(y,y')^\alpha \\ &\le 2s\varepsilon_\varphi \operatorname{diam}(Y)^\alpha K d(y,y')^\alpha \end{aligned}$$

因此，若令 $\zeta := s + 2s\varepsilon_\varphi$diam$(Y)^\alpha$，则有

$$|\mathcal{L}_x\psi|_\alpha \le (s + 2s\varepsilon_\varphi \operatorname{diam}(Y)^\alpha) K \inf\mathcal{L}_x\psi \le \zeta K \inf\mathcal{L}_x\psi$$

因此 $\mathcal{L}_x\psi \in \Lambda_{\zeta K}^{fx}$。

注意，$\sup\mathcal{L}_x\psi \le (1+\zeta K(\text{diam } Y)^\alpha)\inf\mathcal{L}_x\psi$。令 y_1, y_2, $y_3 \in Y$。那么由于 $|\mathcal{L}_x\psi|_\alpha \le \zeta K \inf\mathcal{L}_x\psi$，我们有

$$\frac{Kd(y_1,y_2)^\alpha\mathcal{L}_x\psi(y_3) - (\mathcal{L}_x\psi(y_1) - \mathcal{L}_x\psi(y_2))}{Kd(y_1,y_2)^\alpha\mathcal{L}_x\phi(y_3) - (\mathcal{L}_x\phi(y_1) - \mathcal{L}_x\phi(y_2))} \le \frac{(K\sup\mathcal{L}_x\psi + \zeta K\inf\mathcal{L}_x\psi)d(y_1,y_2)^\alpha}{(K\inf\mathcal{L}_x\phi - \zeta K\inf\mathcal{L}_x\phi)d(y_1,y_2)^\alpha}.$$

因此， $B(\mathcal{L}_x\psi,\ \mathcal{L}_x\phi) \overset{K}{\leq}$ ~~上确界 $\mathcal{L}_x\psi+\zeta K$~~ $\mathcal{L}_x\psi$ 下确界 下确界 $\mathcal{L}_x\phi-\zeta K$ 下确界 $\mathcal{L}_x\phi$。类似的计算给出了 $A(\mathcal{L}_x\psi,\ \mathcal{L}_x\phi)$ 的下界。因此，根据引理 3.3，我们有

$$\begin{aligned}\Theta(\mathcal{L}_x\psi, \mathcal{L}_x\phi) &\leq \log\left(\frac{K\sup\mathcal{L}_x\phi + \zeta K\inf\mathcal{L}_x\phi}{K\inf\mathcal{L}_x\phi - \zeta K\inf\mathcal{L}_x\phi}\cdot\frac{K\sup\mathcal{L}_x\psi + \zeta K\inf\mathcal{L}_x\psi}{K\inf\mathcal{L}_x\psi - \zeta K\inf\mathcal{L}_x\psi}\right)\\ &\leq \log\left(\frac{K(1+\zeta K\operatorname{diam}(Y)^\alpha)(1+\zeta)\inf\mathcal{L}_x\phi}{K(1-\zeta)\inf\mathcal{L}_x\phi}\right)\\ &\qquad + \log\left(\frac{K(1+\zeta K\operatorname{diam}(Y)^\alpha)(1+\zeta)\inf\mathcal{L}_x\psi}{K(1-\zeta)\inf\mathcal{L}_x\psi}\right)\\ &\leq 2\log\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) + 2\log(1+\zeta K\operatorname{diam}(Y)^\alpha) < \infty\end{aligned}$$

这证明了 M 的存在性。 □

定理 3.5。令 $\Phi_n^\sigma(x)$ = 对数 $\frac{\langle\mathcal{L}_x^{n+1}\mathbb{1},\sigma\rangle}{\langle\mathcal{L}_{f^nx}^n\mathbb{1},\sigma\rangle}$. 存在 $0<\tau<1$ 和 $C_1>0$，使得对于所有 $k\in\mathbb{N}$ $n,m\geq k$，$x\in X$，以及任意定义在 Y_{f^nx} 上的概率测度 σ_n 和定义在 Y_{f^mx} 上的概率测度 σ_m，我们有

$$\left|\Phi_n^{\sigma_n}(x) - \Phi_m^{\sigma_m}(x)\right| \leq C_1\ \tau^k.$$

因此， $\Phi(x) = \lim_{n\to\infty}\Phi_n^{\sigma_n}(x)$ 存在，并且 $\left|\Phi_n^{\sigma_n}(x) - \Phi(x)\right| \leq C_1\tau^n$。

证明。固定 $x\in X$。假设 $n,m\geq k\geq 1$。那么

$$\begin{aligned}\left|\Phi_n^{\sigma_n}(x) - \Phi_m^{\sigma_m}(x)\right| &= \left|\log\frac{\langle\mathcal{L}_x^{n+1}\mathbb{1},\sigma_n\rangle}{\langle\mathcal{L}_{fx}^n\mathbb{1},\sigma_n\rangle} - \log\frac{\langle\mathcal{L}_x^{m+1}\mathbb{1},\sigma_m\rangle}{\langle\mathcal{L}_{fx}^m\mathbb{1},\sigma_m\rangle}\right|\\ &= \left|\log\frac{\langle\mathcal{L}_{fx}^{k-1}(\mathcal{L}_x\mathbb{1}),\sigma_{fx,n}\rangle\langle\mathcal{L}_{fx}^{k-1}\mathbb{1},\sigma_{fx,m}\rangle}{\langle\mathcal{L}_{fx}^{k-1}\mathbb{1},\sigma_{fx,n}\rangle\langle\mathcal{L}_{fx}^{k-1}(\mathcal{L}_x\mathbb{1}),\sigma_{fx,m}\rangle}\right|\end{aligned}$$

其中 $\sigma_{fx,n} = (\mathcal{L}_{f^{k+1}x})^*\cdots(\mathcal{L}_{f^nx})^*\sigma_n$。由引理 3.1 可知，

$$\left|\Phi_n^{\sigma_n}(x) - \Phi_m^{\sigma_m}(x)\right| \leq \Theta(\mathcal{L}_{fx}^{k-1}(\mathcal{L}_x\mathbb{1}), \mathcal{L}_{fx}^{k-1}\mathbb{1}).$$

显然，$\mathbb{1}\in\Lambda_K^x$ 对任意 $K>0$。然后 $\mathcal{L}_x\mathbb{1}\in\Lambda_{\zeta K}^{fx}$ 由引理 3.4。固定 K 足够大且M 如引理 3.4 中所述。令 $\tau = \tanh(M/4)$。由定理 3.2，我们有

$$\Theta(\mathcal{L}_{fx}^{k-1}(\mathcal{L}_x\mathbb{1}), \mathcal{L}_{fx}^{k-1}\mathbb{1}) \leq \tau^{k-1}\Theta((\mathcal{L}_x\mathbb{1}),\mathbb{1}) \leq \tau^{k-1}M.$$

设 $C_1 = M/\tau$。因此，序列 $\{\Phi_n\}_{n\geq 0}$ 是柯西序列，且极限在每个$x\in X$处存在。□

这证明了 Φ 的存在性。

3.3. 纤维测度。 要全面理解 $(X \times Y,\ F)$ 上的平衡态 μ，我们需要了解它如何赋予纤维 $\{Y_x\}_{x\in X}$ 权重。首先需要以下改编自[3], 的非定常 Ruelle-Perron-Frobenius 定理。为完整起见，我们在此给出其证明（可参见 Hafouta [5]，其中在基底可逆的情形下证明了类似结果）。

定理 3.6。 设 $F\colon X\times Y\to X\times Y$ 满足 (A1) 和 (A2)。对于任意满足 (P) 的 ***H¨older*** $\varphi\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ 及其关联的纤维传递算子族 $\{\mathcal{L}_x\}_{x\in X}$，存在唯一的概率测度族 $\nu_x\in\mathcal{M}(Y_x)$，使得对所有 $x\in X$, $\mathcal{L}_x^*\nu_{fx}=\lambda_x\nu_x$，其中 $\lambda_x=\nu_{fx}(\mathcal{L}_x\mathbb{1})=e^{\Phi(x)}$.

定理 3.6 是以下两个命题的推论。

命题 3.7。 给定任意 $x\in X$, $n\in\mathbb{N}$ 和 $\sigma_n\in\mathcal{M}(Y_{f^n x})$，定义 $\nu_{x,n}\in\mathcal{M}(Y_x)$ 为 $\nu_{x,n}=(\mathcal{L}_x^n)^*\sigma_n)()^*\sigma_n\rangle$。那么存在 $C_1>0$，使得对于所有 $k\in\mathbb{N}$、m、$n\ge k$、$\psi\in\Lambda_K$，$\langle\mathbb{1},\ \mathcal{L}_x^n$ 都有与定理 *3.5* 中相同的 $\tau\in(0$、$1)$

$$\Big|\int\psi d\nu_{x,n}-\int\psi d\nu_{x,m}\Big|\le C_1\|\psi\|\tau^k.$$

特别地，$\langle\psi,\nu_x\rangle:=\lim_{n\to\infty}\langle\psi,\nu_{x,n}\rangle$ 存在，并定义了一个概率测度 ν_x 在 Y_x 上，且

$$\Big|\int\psi d\nu_{x,n}-\int\psi d\nu_x\Big|\le C_1\|\psi\|\tau^n.$$

证明。注意，$\langle\psi,\nu_{x,n}\rangle=\dfrac{\langle\psi,(\quad\mathcal{L}_x^n{}^*\sigma_n\rangle)()}{\langle\mathbb{1},\ \mathcal{L}_x^n{}^*\sigma_n\rangle}$。令 $b_k=\inf_y\dfrac{\mathcal{L}_x^k\psi}{(y)\,\mathcal{L}_x^k\mathbb{1}(y)}$，并令 $c_k=\sup_y\dfrac{\mathcal{L}_x^k\psi}{(y)\,\mathcal{L}_x^k\mathbb{1}(y)}$。注意，$\mathcal{L}_x^k\psi\le c_k\mathcal{L}_x^k\mathbb{1}$。因此

$$\langle\psi,\nu_{x,n}\rangle=\frac{\langle\psi,(\mathcal{L}_x^n)^*\sigma_n\rangle}{\langle\mathbb{1},(\mathcal{L}_x^n)^*\sigma_n\rangle}=\frac{\langle\mathcal{L}_x^k\psi,(\mathcal{L}_x^{n-k})^*\sigma_n\rangle}{\langle\mathcal{L}_x^k\mathbb{1},(\mathcal{L}_x^{n-k})^*\sigma_n\rangle}\le\frac{c_k\langle\mathcal{L}_x^k\mathbb{1},(\mathcal{L}_x^{n-k})^*\sigma_n\rangle}{\langle\mathcal{L}_x^k\mathbb{1},(\mathcal{L}_x^{n-k})^*\sigma_n\rangle}=c_k.$$

类似的计算表明，$b_k\le\langle\psi,\nu_{x,n}\rangle$。于是，对所有$n\ge k$，都有 $b_k\le\langle\psi,\nu_{x,n}\rangle\le c_k$。因此，对所有 n，$m\ge k$，都有 $|\langle\psi,\nu_{x,n}\rangle-\langle\psi,\nu_{x,m}\rangle|\le c_k-b_k$。引理 3.4 意味着 $\Theta(\mathcal{L}_x^k\psi,\ \mathcal{L}_x^k\mathbb{1})\le\operatorname{diam}(\mathcal{L}_x\Lambda_K)\tau^{k-1}\le M\tau^{k-1}$。因此 $1\le\dfrac{c_k}{b_k}\le e^{M\tau^{k-1}}$。因此，$b_k\le c_k\le b_k e^{M\tau^{k-1}}$ 这意味着 $c_k-b_k\le b_k(e^{M\tau^{k-1}}-1)$。此外，对于所有 $y\in Y$，我们有

$$\mathcal{L}_x^k\psi(y)=\sum_{\overline{y}\in g_x^{-k}(y)}e^{S_k\varphi(x,\overline{y})}\psi(x,\overline{y})\le\sum_{\overline{y}\in g_x^{-k}(y)}e^{S_k\varphi(x,\overline{y})}\|\psi\|=\|\psi\|\mathcal{L}_x^k\mathbb{1}(y).$$

所以 $b_k\le\|\psi\|$。因此，

$$|\langle\psi,\nu_{x,n}\rangle-\langle\psi,\nu_{x,m}\rangle|\le c_k-b_k\le\|\psi\|(e^{M\tau^{k-1}}-1).$$

因此，$\{\nu_{x,n}\}$ 是一个柯西序列。于是存在常数 $C_1>0$，并且

$$|\langle\psi,\nu_{x,n}\rangle-\langle\psi,\nu_x\rangle|\le C_1\|\psi\|\tau^n$$

对所有 $n\ge0$。 □

Pro位置 3.8。设 $\{\nu_x\}$ 如命题 *3.7* 中所述。则 $\mathcal{L}_x^*\nu_{fx} = e^{\Phi(x)}\nu_x$。

证明。对于所有 $\psi \in C(Y_x)$，我们有

$$\begin{aligned}\int \psi d(\mathcal{L}_x^*\nu_{fx}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\langle \mathcal{L}_x\psi, (\mathcal{L}_{fx}^n)^*\sigma_{n+1}\rangle}{\langle \mathbb{1}, (\mathcal{L}_{fx}^n)^*\sigma_{n+1}\rangle} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\langle \mathcal{L}_x^{n+1}\mathbb{1}, \sigma_{n+1}\rangle}{\langle \mathcal{L}_{fx}^n\mathbb{1}, \sigma_{n+1}\rangle} \cdot \frac{\langle \mathcal{L}_x^{n+1}\psi, \sigma_{n+1}\rangle}{\langle \mathcal{L}_x^{n+1}\mathbb{1}, \sigma_{n+1}\rangle} = e^{\Phi(x)}. \qquad \square\end{aligned}$$

注意到

$$\nu_{fx}(\mathcal{L}_x\mathbb{1}) = \mathcal{L}_x^*\nu_{fx}(\mathbb{1}) = e^{\Phi(x)}\nu_x(\mathbb{1}) = e^{\Phi(x)}.$$

这就完成了定理 3.7 的证明。

3.4. **的正则性**。现在我们将证明 Φ 是 H¨older 连续的。引理 3.4 的一个直接推论是下面这个引理，我们将用它来证明 Φ 的 H¨older 连续性。为方便起见，我们记

$$\lambda_x^n = \lambda_x\lambda_{fx}\cdots\lambda_{f^{n-1}x} = e^{S_n\Phi(x)}.$$

引理 3.9。设 M 如引理 *3.4* 中所述。则对于所有$n \in \mathbb{N}$ 以及 $(x, y) \in X \times Y$，有 $e^{-M}\lambda_x^n \le \mathcal{L}_x^n\mathbb{1}(y) \le e^M\lambda_x^n$。

证明。令 $\varphi_x = \varphi_x - \log \lambda_x$ 并记作 $\mathcal{L}_x^n\mathbb{1} = \sum_{y\in g_x^n(y)} e^{S_n\varphi_x(y)}$。定理 3.7 给出 $(\mathcal{L}_x)^*\nu_{fx} = \nu_x$，对所有 $x \in X$ 都成立。归纳地，我们得到 $(\mathcal{L}_x^n)^*\nu_{f^nx} = \nu_x$。于是，对任意$k, \ell$

$$\int \overline{\mathcal{L}}_x^k\mathbb{1}d\nu_{f^kx} = \int \mathbb{1}d(\overline{\mathcal{L}}_x^k)^*\nu_{f^kx} = \nu_x(Y_x) = 1 = \int \mathbb{1}d\nu_{f^kx}.$$

令 Λ^+ 为 $X \times Y$ 上严格正连续函数锥。由于 $\Lambda_K \subset\Lambda^+$，这两个锥的射影度量满足 $\Theta^+(\phi, \psi) \le \Theta(\phi, \psi)$。记 $\psi_k = \overline{\mathcal{L}}_x^k\mathbb{1}$。于是 $\inf \psi_k \le \mathbb{1} \le \sup \psi_k$，因此 $1 \le \sup\frac{\psi_k}{\psi_k} \le e^M{}_{\inf}$。我们知道 $\Theta^+(\psi_k, \mathbb{1}) \le M$。这意味着对于所有 $k \in \mathbb{N}$，都有 $e^{-M} \le \psi_k \le e^M$。因此，

$$e^{-M}\lambda_x^n \le \mathcal{L}_x^n\mathbb{1}(y) \le e^M\lambda_x^n. \qquad \square$$

设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $x, x' \in X$，以及 $y \in Y_x$。设 $\mathcal{W}_n = \{1, \ldots, d\}^n$。根据引理 2.2，我们可以写成

$$g_{f^{n-1}x}^{-1}(y) = \{y_1, \ldots, y_d\} \quad \text{and} \quad g_{f^{n-1}x'}^{-1}(y) = \{y_1', \ldots, y_d'\}$$

使得

$$d((f^{n-1}x, y_k), (f^{n-1}x', y_k')) \le L_k d_X(f^nx, f^nx')$$

其中，$L_k = L$ 若 $1 \le k \le q$，且 $L_k = \gamma^{-1}$ 若 $q < k \le d$。如此继续下去，我们得到

$$g_x^{-n}(y) = \{y_w \in Y_x : w \in \mathcal{W}_n\} \quad \text{and} \quad g_{x'}^{-n}(y) = \{y_w' \in Y_{x_w'} : w \in \mathcal{W}_n\}$$

使得对所有 $0 \le k \le n$

$$d(F^k(x, y_w), F^k(x', y_w')) \le L_{w_{k+1}}\cdots L_{w_n} d_X(f^nx, f^nx').$$

设 $m \le \mathbb{N}$ 且 $0 < \iota < 1$。从 $(f^n x,\ y)$ 和 $(f^n x',\ y)$ 出发、长度为 n 且标记为 $w \in \mathcal{W}_n$ 的一对逆分支称为 良好，如果对于所有满足$jm \le n$的 $j \in \mathbb{N}$，我们都有

$$\#\{n - jm < i \le n \colon w_i \le q\} \le \iota jm.$$

这意味着长度为 n 的轨道段的最后 jm 次迭代将最多 ιjm 次处于收缩区域。我们将把对应于良好轨道的字的集合记为

$$\mathcal{W}_n^{\mathcal{G}} = \mathcal{W}_n^{\mathcal{G}}(m) = \{w \in \mathcal{W}_n \colon \forall\ j \le n/m, \#\{n - jm < i \le n \colon w_i \le q\} \le \iota jm\}$$

以及对应于坏轨道的字的集合记为

$$\mathcal{W}_n^{\mathcal{B}} = \mathcal{W}_n^{\mathcal{B}}(m) = \{w \in \mathcal{W}_n \colon \exists\, j \le n/m \text{ such that } \#\{n - jm < i \le n \colon w_i \le q\} \ge \iota jm\}.$$

引理 3.10. 存在一个 $Q > 0$ 使得对所有 $m \in \mathbb{N}$，如果(x, y) 和(x', y') 是由 $\mathcal{W}_n^{\mathcal{G}}$中的一个字编码的原像，则

$$d(F^k(x, \overline{y}), F^k(x', \overline{y}')) \le Q^m e^{-2c(n-k)} d(f^n x, f^n x')$$

对所有 $0 \le k < n$。

证明. 固定 $m \in \mathbb{N}$。将 $n - k = jm + i$ 记为 $0 \le i < m$。由于我们的原像分支被假定为良好的，我们得到

$$\begin{aligned} d(F^k(x, \overline{y}), F^k(x', \overline{y}')) &\le L_{w_{k+1}} \cdots L_{w_n} d(F^{k+i}(x, \overline{y}), F^{k+i}(x', \overline{y}')) \\ &\le L_{w_{k+1}} \cdots L_{w_{k+i}} (L^{\iota jm} \gamma^{-(1-\iota)jm}) d(f^n x, f^n x') \end{aligned}$$

回忆式 (4)，我们可以选择 $c > 0$ 使得 $0 < \gamma^{-(1-\iota)} L^{\iota} < e^{-2c} < 1$。因此，

$$\begin{aligned} d(F^k(x, \overline{y}), F^k(x', \overline{y}')) &\le L^m e^{-2cjm} d(f^n x, f^n x') \\ &\le (L e^{2c})^m e^{-2c(n-k)} d(f^n x, f^n x'). \end{aligned}$$

□

由于假设 $\varepsilon_\varphi < \log d - \log q$，因此 $\frac{q e^{\varepsilon_\varphi}}{d} < 1$。固定 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\theta := \frac{q e^{\varepsilon} e^{\varepsilon_\varphi}}{d} < 1. \tag{6}$$

Varandas 和 Viana 提出的以下引理为我们提供了一种方法，用于统计编码给定长度坏轨道的字数。令 $I(\iota,\ n) = \{w \in \mathcal{W}_n \colon \#\{1 \le k \le n \colon\ w_i \le q\} \ge \iota n\}$。

引理 3.11。 给定 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\iota_0 \in (0,\ 1)$ 使得

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \#I(\iota, n) < \log q + \varepsilon$$

对所有 $\iota \in (\iota_0,\ 1)$均成立。因此，存在一个 $C > 0$，使得 $\#I(\iota,\ n) \le C q^n e^{\varepsilon n}$ 对所有 n均成立。

证明。 参见 Varandas 和 Viana 的引理 3.1 [9]。 □

在下文中，采用如下记法会更方便： a： $\mathcal{W}_n \to Y$ 使得 $a(w) = y_w$，以及 a'： $\mathcal{W}_n \to Y$使得 $a'(w) = y'_{w^\circ}$ 引理 2.2 给出了双射 b_j： $\mathcal{W}_{jm} \to g^{-jm}_{f^{n-jm}x}(y)$，使得 $b_j(v) = g^{n-jm}_x(a(uv))$；以及 c_v： $\mathcal{W}_{n-jm} \to g_x^{-(n-jm)}(b_j(v))$，使得 $c_v(u) = a(uv)$，还有与它们相应的映射 b'_j 和 c'_v。

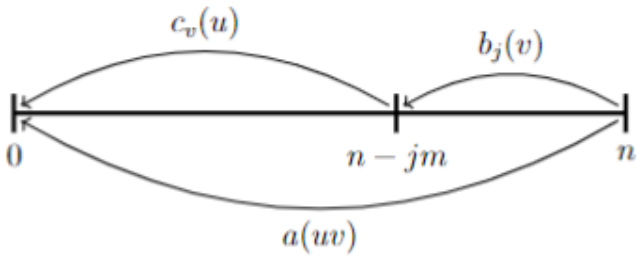

FIGURE 1. 长度相应的字上的映射 a、 b_j 和 c_v 。

引理 3.12。 设 θ 如上文(6) 所示。存在 $C_2 > 0$ 使得

$$\sum_{w\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{B}}(m)} e^{S_n\varphi_x(a(w))} \le C_2\theta^m \sum_{w\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{G}}(m)} e^{S_n\varphi_x(a(w))}$$

对于所有 $m \in \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{N}$， x、 $x' \in X$ 和 $y \in Y$。

证明。 设 $x \in X$ 和 $y \in Y$。对于任意 $w \in \mathcal{W}_n^{\mathcal{B}}$，存在 $1 \le j \le n/m$ 使得$w = uv$, 其中某些 $u \in \mathcal{W}_{n-jm}$ 和 $v \in I$ 满足 (ι, jm)。因此，

$$\begin{aligned}\sum_{w\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{B}}} e^{S_n\varphi_x(a(w))} &= \sum_{j=1}^{\lfloor n/m\rfloor} \sum_{v\in I(\iota,jm)} e^{S_{jm}\varphi_{f^{n-jm}x}(b_j(v))} \sum_{u\in\mathcal{W}_{n-jm}} e^{S_{n-jm}\varphi_x(c_v(u))} \\ &\le \sum_{j=1}^{\lfloor n/m\rfloor} \sum_{v\in I(\iota,jm)} e^{S_{jm}\varphi_{f^{n-jm}x}(b_j(v))} e^M \lambda_x^{n-jm}\end{aligned}$$

由引理 3.9。注意，对于任意 $j \le {}^{n}_{m}$, –

$$\begin{aligned}\sum_{w\in\mathcal{W}_n} e^{S_n\varphi_x(a(w))} &= \sum_{v\in\mathcal{W}_{jm}} e^{S_{jm}\varphi_{f^{n-jm}x}(b_j(v))} \sum_{u\in\mathcal{W}_{n-jm}} e^{S_{n-jm}\varphi_x(c_v(u))} \\ &\ge e^{-M}\lambda_x^{n-jm} \sum_{v\in\mathcal{W}_{jm}} e^{S_{jm}\varphi_{f^{n-jm}x}(b_j(v))}.\end{aligned}$$

引理 3.11 意味着，对于所有 $n \geq 0$，$\#I(\iota, n) \leq Cq^n e^{\varepsilon n}$。然后，由于 $\#\mathcal{W}_n$ 是有限的e,

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{w\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{B}}} e^{S_n\varphi_x(a(w))}}{\sum_{w\in\mathcal{W}_n} e^{S_n\varphi_x(a(w))}} &\leq \sum_{j=1}^{\lfloor n/m\rfloor} \frac{e^M \lambda_x^{n-jm}}{\sum_{w\in\mathcal{W}_n} e^{S_n\varphi_x(a(w))}} \sum_{v\in I(\iota,jm)} e^{S_{jm}\varphi_{f^{n-jm}x}(b_j(v))} \\
&\leq e^{2M} \sum_{j=1}^{\lfloor n/m\rfloor} \frac{\lambda_x^{n-jm} \sum_{v\in I(\iota,jm)} e^{S_{jm}\varphi_{f^{n-jm}x}(b_j(v))}}{\lambda_x^{n-jm} \sum_{v\in\mathcal{W}_{jm}} e^{S_{jm}\varphi_{f^{n-jm}x}(b_j(v))}} \\
&\leq e^{2M} \sum_{j=1}^{\lfloor n/m\rfloor} \frac{\#I(\iota,jm)}{\#\mathcal{W}_{jm}} e^{jm(\sup\varphi - \inf\varphi)} \\
&\leq e^{2M} \sum_{j=1}^{\lfloor n/m\rfloor} \frac{Cq^{jm}e^{jm\varepsilon}}{d^{jm}} e^{jm\varepsilon_\varphi}
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由引理 3.11 和 (P) 得出。令 $\theta = \dfrac{qe^{\varepsilon}e^{\varepsilon_\varphi}}{d} < 1$。那么

$$\frac{\sum_{w\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{B}}} e^{S_n\varphi_x(a(w))}}{\sum_{w\in\mathcal{W}_n} e^{S_n\varphi_x(a(w))}} \leq e^{2M} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{qe^{\varepsilon}e^{\varepsilon_\varphi}}{d}\right)^{jm} = e^{2M}\left(\frac{\theta^m}{1-\theta^m}\right).$$

But

$$\sum_{w\in\mathcal{W}_n} e^{S_n\varphi_x(a(w))} = \sum_{w\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{B}}} e^{S_n\varphi_x(a(w))} + \sum_{w\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{G}}} e^{S_n\varphi_x(a(w))}.$$

选择 m 使得 $1-\theta^m \geq \frac{1}{2}$。那么

$$\sum_{w\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{B}}} e^{S_n\varphi_x(a(w))} \leq 2e^{2M}C\theta^m \left(\sum_{w\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{B}}} e^{S_n\varphi_x(a(w))} + \sum_{w\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{G}}} e^{S_n\varphi_x(a(w))}\right).$$

因此，如果我们增大 m，使得 $2e^{2M}C\theta^m < \frac{1}{2}$，那么

$$\sum_{w\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{B}}} e^{S_n\varphi_x(a(w))} \leq 4e^{2M}C\theta^m \sum_{w\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{G}}} e^{S_n\varphi_x(a(w))}.$$

这就得到了所需的结果。

□

现在我们将上述结果应用于 m 的不同取值，以证明 H¨lder 连续性。首先，给出 Φ_n 的一个界。

引理 3.13。存在 $C_3 > 0$ 和 $\beta > 0$，使得

$$\left|\Phi_n(x) - \Phi_n(x')\right| \leq C_3 d(f^n x, f^n x')^{\alpha\beta}$$

对所有 x、$x' \in X$ 和 $n \in \mathbb{N}$。

证明。 首先注意到，沿着良轨道对，由引理 3.10 我们有

$$\begin{aligned}\left|S_n\varphi(x,\overline{y}) - S_n\varphi(x',\overline{y}')\right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi|_\alpha d(F^k(x,\overline{y}), F^k(x',\overline{y}'))^\alpha \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi|_\alpha Q^{\alpha m} e^{-2c\alpha(n-k)} d(f^n x, f^n x')^\alpha \\ &\leq Q^{\alpha m} d(f^n x, f^n x')^\alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi|_\alpha e^{-2c\alpha(n-k)}.\end{aligned}$$

设 $V = \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi|_\alpha e^{-2c\alpha(n-k)}$。则

$$\left|S_n\varphi(x,\overline{y}) - S_n\varphi(x',\overline{y}')\right| \leq V Q^{\alpha m} d(f^n x, f^n x')^\alpha. \tag{7}$$

为方便起见，我们将 $\Sigma_{\mathcal{G}} = \sum_{w\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{G}}} e^{S_n\varphi_x(a(w))}$ 以及 $\Sigma_{\mathcal{B}} = \sum_{w\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{B}}} e^{S_n\varphi_x(a(w))}$ 分别记作与 $\Sigma'_{\mathcal{G}}$ 和 $\Sigma'_{\mathcal{B}}$，表示与 $a'(w)$ 相关的原像之和。由引理 3.12，我们得到

$$\frac{\mathcal{L}_x^n \mathbb{1}(f^n x, y)}{\mathcal{L}_x^n \mathbb{1}(f^n x', y)} = \frac{\Sigma_{\mathcal{G}} + \Sigma_{\mathcal{B}}}{\Sigma'_{\mathcal{G}} + \Sigma'_{\mathcal{B}}} \leq \frac{\Sigma_{\mathcal{G}}(1 + C_2\theta^m)}{\Sigma'_{\mathcal{G}}(1 - C_2\theta^m)} \leq \frac{\Sigma_{\mathcal{G}}}{\Sigma'_{\mathcal{G}}} \cdot e^{C\theta^m} \tag{8}$$

注意，由（7）

$$\frac{\Sigma_{\mathcal{G}}}{\Sigma'_{\mathcal{G}}} = \frac{\sum_{w\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{G}}} e^{S_n\varphi_x(a(w))}}{\sum_{w'\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{G}}} e^{S_n\varphi_{x'}(a'(w))}} \leq \frac{\sum_{w'\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{G}}} e^{VQ^{\alpha m} d(f^n x, f^n x')^\alpha} e^{S_n\varphi_{x'}(a'(w))}}{\sum_{w'\in\mathcal{W}_n^{\mathcal{G}}} e^{S_n\varphi_{x'}(a'(w))}} \leq e^{VQ^{\alpha m} d(f^n x, f^n x')^\alpha}.$$

L设 Φ_n 如定理 3.5 中所述，表示 Y, $\delta_y (y \in Y)$ 上的狄拉克测度。则

$$\begin{aligned}\left|\Phi_n(x) - \Phi_n(x')\right| &= \left|\log\left(\frac{\mathcal{L}_x^{n+1}\mathbb{1}(f^n x, y)}{\mathcal{L}_{x'}^{n+1}\mathbb{1}(f^n x', y)} \cdot \frac{\mathcal{L}_{fx}^{n}\mathbb{1}(f^n x, y)}{\mathcal{L}_{fx'}^{n}\mathbb{1}(f^n x', y)}\right)\right| \\ &\leq 2\log\left(\frac{\Sigma_{\mathcal{G}}}{\Sigma'_{\mathcal{G}}} \cdot e^{C\theta^m}\right) \\ &\leq 2VQ^{\alpha m} d(f^n x, f^n x')^\alpha + 2C\theta^m\end{aligned}$$

其中第二个不等式由（8）得出。

令 $\rho_1 = \frac{\theta}{Q^\alpha}$，并注意到 $\rho_1 < 1$。则存在一个 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$\rho_1^{k+1} \leq d(f^n x, f^n x')^\alpha \leq \rho_1^k. \tag{9}$$

现在令 $m = k$。令 $\beta = \frac{\log\theta}{\log\rho_1}$，并注意到

$$\theta^m = e^{m\log\theta} = e^{\beta m \log\rho_1} = \rho_1^{\beta m} \leq \rho_1^{-\beta} d(f^n x, f^n x')^{\alpha\beta}.$$

因此，$Q^{\alpha m} d(f^n x,\ f^n x')^\alpha \leq \theta^m \leq \rho_1^{-\beta} d(f^n x,\ f^n x')^{\alpha\beta}$。于是，令 $C_3 = 2(V + C)\rho_1^{-\beta}$，得到

$$\left|\Phi_n(x) - \Phi_n(x')\right| \leq C_3 d(f^n x, f^n x')^{\alpha\beta}. \qquad \square$$

定理 3.14。 在定理 *3.5* 中构造的势函数 Φ 是 *H¨older* 连续的。

证明。令 $C = \max\{C_1, C_3\}$。对于任意 $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\left|\Phi(x) - \Phi(x')\right| &\leq \left|\Phi(x) - \Phi_n(x)\right| + \left|\Phi_n(x) - \Phi_n(x')\right| + \left|\Phi_n(x') - \Phi(x')\right| \\ &\leq 2C\tau^n + Cd(f^n x, f^n x')^{\alpha\beta} \\ &\leq 2C\tau^n + C\Gamma^{\alpha\beta n} d(x, x')^{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

其中，第二个不等式由定理 3.5 和引理 3.13 得出，且 Γ 是 f的继承利普希茨常数。

与引理 3.13 证明中的论证类似，我们需要调整 H¨older 指数来建立我们的界。令 $\rho_2 = \frac{\tau}{\Gamma^{\alpha\beta}}$。那么存在一个 k，使得$\rho_2^{k+1} \leq d(x, x')^{\alpha\beta} \leq \rho_2^k$。令 $n = k$且 $\eta = \frac{\log \tau}{\log \rho_2}$。于是

$$\tau^n = e^{n \log \tau} = e^{\eta n \log \rho_2} = \rho_2^{\eta n} \leq \rho_2^{-\eta} d(x, x')^{\alpha\beta\eta}.$$

因此 $\Gamma^{\alpha\beta} d(x, x')^{\alpha\beta} \leq \tau^n \leq \rho_2^{-\eta} d(x, x')^{\alpha\beta\eta}$。所以,

$$\left|\Phi(x) - \Phi(x')\right| \leq 2C\rho_2^{-\eta} d(x, x')^{\alpha\beta\eta}. \qquad \square$$

4. Conditional Measures of Equilibrium States

令 $\mathcal{L}_\Phi$: $C(X) \to C(X)$ 定义为

$$\mathcal{L}_\Phi \xi(x) = \sum_{\bar{x} \in f^{-1}x} e^{\Phi(\bar{x})}\, \xi(\bar{x})$$

对于任意 $\xi \in C(X)$。由于 f 在 X上是一致扩张的，定理 3.14 表明存在唯一的平衡态，可通过 $\mathcal{L}_\Phi$得到。详情见 [10] 。

定理 4.1. 对于任意 *H¨older* Φ: $X \to \mathbb{R}$，有如下结论:

(1) 存在一个实数 $\lambda > 0$ 和 $\hat{\nu} \in \mathcal{M}(X)$，使得 $\mathcal{L}_\Phi^* \hat{\nu} = \lambda \hat{\nu}$。*(2)* 存在唯一的 $\hat{h} \in C(X)$，使得 $\mathcal{L}_\Phi \hat{h} = \hat{\lambda} \hat{h}$ 且 $\int_X \hat{h}(x) d\hat{\nu}(x) = 1$。*(3)* Φ 的唯一平衡态是 $\bar{\mu} = h\hat{\nu}$。

我们将证明 $\bar{\mu} = \hat{\mu} = \mu \circ \pi_X^{-1}$，并构造测度族 $\{\mu_x\}_{x \in X}$。为此，我们先证明以下引理。

引理 4.2. 对任意 $\psi \in C(X \times Y)$，映射 $x \mapsto \mathcal{L}_\varphi^x \psi_x$ 关于通常拓扑是连续的。

证明。设 $\psi \in C(X \times Y)$、$x, x' \in X$ 和 $y \in Y$。那么

$$\left|\mathcal{L}_x \psi_x(y) - \mathcal{L}_{x'} \psi_{x'}(y)\right| \leq \sum_{\overline{y} \in g_x^{-1} y} \left(e^{\varphi(x,\overline{y})} \left|\psi(x,\overline{y}) - \psi(x',\overline{y}')\right| + \|\psi\|_\infty \left| e^{\varphi(x,\overline{y})} - e^{\varphi(x',\overline{y}')} \right| \right).$$

固定 $\epsilon > 0$。设 $M_1 = \sup_{y \in Y}\{\mathcal{L}_x \psi(y)\}$。由引理 2.2，我们可以选择足够小的 $\delta > 0$，使得如果 $d_1(x, x') < \delta$，则对所有 $y \in g_x^{-1} y$，

$$\left|\psi(x,\overline{y}) - \psi(x',\overline{y}')\right| < \frac{\epsilon}{2M_1} \quad \text{and} \quad \left| e^{\varphi(x,\overline{y})} - e^{\varphi(x',\overline{y}')} \right| < \frac{\epsilon}{2d\|\psi\|_\infty}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{L}_x\psi_x(y)-\mathcal{L}_{x'}\psi_{x'}(y)\right| &\leq \frac{\epsilon}{2M_1}\sum_{\overline{y}\in g_x^{-1}y} e^{\varphi(x,\overline{y})}+\|\psi\|_\infty \sum_{\overline{y}\in g_x^{-1}y}\frac{\epsilon}{2d\|\psi\|_\infty}\\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.\end{aligned}$$

□

注记 1. 这个证明可以推广到转移算子的所有迭代。

引理 4.3. 对于每个连续的 $\psi\colon X\times Y\to\mathbb{R}$，映射 $x\mapsto \nu_x(\psi_x)$ 关于通常拓扑是连续的。

证明. 固定 $y\in Y$，并令 $\nu_{x,n}=\frac{\langle \mathcal{L}_x^n\,{}^*\delta_y\rangle}{\langle \mathbb{1},\ \mathcal{L}_x^n(\,)^*\delta_y\rangle}$ 如命题 3.7 中所述。因此，如该处所示，$\nu_{x,n}\xrightarrow{\text{wk}^*}\nu_x$。对于任意 $x,x'\in X$，

$$\begin{aligned}\left|\int\psi d\nu_x-\int\psi d\nu_{x'}\right| &\leq \left|\int\psi d\nu_x-\int\psi d\nu_{x,n}\right|+\left|\int\psi d\nu_{x,n}-\int\psi d\nu_{x',n}\right|\\ &\quad+\left|\int\psi d\nu_{x',n}-\int\psi d\nu_{x'}\right|\\ &\leq 2C_1\|\psi\|\tau^n+\left|\int\psi d\nu_{x,n}-\int\psi d\nu_{x',n}\right|\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由命题 3.7 得出。注意，

$$\int\psi d\nu_{x,n}=\frac{\langle\psi,(\mathcal{L}_x^n)^*\delta_y\rangle}{\langle\mathbb{1},(\mathcal{L}_x^n)^*\delta_y\rangle}=\frac{\mathcal{L}_x^n\psi(y)}{\mathcal{L}_x^n\mathbb{1}(y)}$$

由引理 4.2 可知，它关于 x 连续。给定 $\epsilon>0$，取充分大的 n，使得$2C_1\|\psi\|\tau^n<\epsilon/2$并且 $\delta>0$满足：$d(x,x')<\delta$ 蕴含$|\int\psi d\nu_{x,n}-\int\psi d\nu_{x',n}|<\epsilon/2$。然后

$$\left|\int\psi d\nu_x-\int\psi d\nu_{x'}\right|\leq 2C_1\|\psi\|\tau^n+\left|\int\psi d\nu_{x,n}-\int\psi d\nu_{x',n}\right|<\epsilon.$$

□

这证明了 $x\mapsto\nu_x(\psi_x)$的连续性。

定义 $I\colon\ C(X\times Y)\to C(X)$，使得$(I\psi)(x)=\int_{Y_x}\psi(x,\ y)d\nu_x(x)$。注意，对于任意 $\eta\in\mathcal{M}(X)$，我们有

$$\langle\psi,I^*\eta\rangle=\int_X(I\psi)(x)d\eta(x)=\int_X\int_Y\psi(x,y)d\nu_x(y)d\eta(x).$$

因此$\langle I\psi,\ \eta\rangle=\langle\psi,I^*\eta\rangle$其中$I^*\colon\ \mathcal{M}(X)\to\mathcal{M}(X\times Y)$由$I^*\eta=\int_X\nu_x d\eta$(x定义).

定理4.4。算子 I和 I^*满足 $I\circ\mathcal{L}_\varphi=\mathcal{L}_\Phi\circ I$和 $I^*\circ\mathcal{L}_\Phi^*=\mathcal{L}_\varphi\circ I^*$。也就是说，它们使下面各自的图表交换：

$$\begin{array}{ccc} C(X\times Y) & \xrightarrow{\mathcal{L}_\varphi} & C(X\times Y) \\ \downarrow I & & \downarrow I \\ C(X) & \xrightarrow{\mathcal{L}_\Phi} & C(X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(X\times Y) & \xleftarrow{\mathcal{L}_\varphi^*} & \mathcal{M}(X\times Y) \\ I^*\uparrow & & I^*\uparrow \\ \mathcal{M}(X) & \xleftarrow{\mathcal{L}_\Phi^*} & \mathcal{M}(X) \end{array}$$

证明。给定 $\psi \in C(X\times Y)$，我们有

$$\begin{aligned} I\circ\mathcal{L}_\varphi\psi(x,y) &= \int_{X\times Y} \mathcal{L}_\varphi\psi(x,y)\ d\nu_x(y) \\ &= \int_{X\times Y} \sum_{\overline{x}\in f^{-1}x}\sum_{\overline{y}\in g_{\overline{x}}^{-1}y} e^{\varphi(\overline{x},\overline{y})}\psi(\overline{x},\overline{y})d\nu_x(y) \\ &= \int_{X\times Y} \sum_{\overline{x}\in f^{-1}x} (\mathcal{L}_{\overline{x}}\psi)(x,y)d\nu_x(y) \\ &= \sum_{\overline{x}\in f^{-1}x} \langle \mathcal{L}_{\overline{x}}\psi, \nu_x\rangle \\ &= \sum_{\overline{x}\in f^{-1}x} \langle \psi, (\mathcal{L}_{\overline{x}})^*\nu_x\rangle \\ &= \sum_{\overline{x}\in f^{-1}x} e^{\Phi(\overline{x})}\langle\psi,\nu_{\overline{x}}\rangle = \sum_{\overline{x}\in f^{-1}x} e^{\Phi(\overline{x})}(I\psi)(\overline{x}) \\ &= (\mathcal{L}_\Phi\circ I)\psi(x) \end{aligned}$$

对偶性给出 $I^*\circ\mathcal{L}_\Phi^* = \mathcal{L}_\varphi^*\circ I^*$。 □

ˆ ˆ**推论 4.5**。 $P(\Phi) = P(\varphi)$。此外， ν、ˆν和 h、 h满足 $\nu = I^*\hat{}\nu$和 $h = Ih$。

ˆ证明。注意到 ν， ˆν， h， h 分别作为其对应转移算子的特征数据而被唯一确定。此外，根据定理4.4,

$$\mathcal{L}_\Phi(Ih) = I\mathcal{L}_\varphi h = Ie^{P(\varphi)}h = e^{P(\varphi)}(Ih)$$

and

$$\mathcal{L}_\Phi^*(I^*\hat{\nu}) = I^*\mathcal{L}_\Phi^*\hat{\nu} = I^*e^{P(\Phi)}\hat{\nu} = e^{P(\Phi)}(I\hat{\nu}).$$

因此， I ˆ$h = h$和 $I^*\hat{}\nu = \nu$。由于特征值相等，我们得到 $P(\varphi) = P(\Phi)$。 □

因此，对于任意 $\psi \in C(X\times Y)$，我们有

$$\begin{aligned}\int \psi \, d\mu &= \int \psi h \, d\nu \\ &= \int_X \int_Y (\psi \cdot h)(x,y) \;\; d\nu_x(y) d\hat{\nu}(x) \\ &= \int_X \int_Y \psi(x,y) \cdot \frac{h(x,y)}{\hat{h}(x)} \;\; d\nu_x(y) \hat{h} d\hat{\nu}(x) \\ &= \int_X \int_{Y_x} \psi(x,y) \;\; d\mu_x(y) d\bar{\mu}(x)\end{aligned}$$

其中 μ_x 由 $\frac{d\mu_x}{d\nu_x} = {}^{h}{}_{(x,y)\text{—}\hat{h}(x)}$ 定义。注意，根据推论 4.5

$$\mu_x(Y_x) = \int_{Y_x} \frac{h(x,y)}{\hat{h}(x)} d\nu_x(y) = \frac{(Ih)(x)}{\hat{h}(x)} = \frac{\hat{h}(x)}{\hat{h}(x)} = 1.$$

因此， $\bar{\mu} = \hat{}\mu$ 和 $\{\mu_x\}_{x \in X}$ 是 μ的唯一条件测度族。

References

[1] Birkhoff, G. 延茨施定理的推广。美国数学会会刊 85（1957年），219–227。
[2] Castro, A., and Varandas, P.非一致扩张映射的平衡态：相关衰减与强稳定性。《亨利·庞加莱研究所分析年刊》非线性系列，第30卷第2期（2013年），225–249。[3] Climenhaga, V., and Hemenway, G. 非定常 Ruelle-Perron-Frobenius 定理。研究进行中。[4] Denker, M., and Gordin, M. 纤维系统的 Gibbs 测度。数学进展，第148卷第2期（1999年），161–192，ISSN 0001–8708。[5] Hafouta, Y. 若干时变扩张动力系统的极限定理。非线性 33，12（2020年10月），6421–6460。[6] Naud, F. Birkhoff 锥、符号动力系统与转移算子谱。离散与连续动力系统 11，2和3（2004年），581–598。[7] Piraino, M. Gibbs 测度的单点因子。非线性 33，2（2019年12月），742–761。[8] Pollicott, M., and Kempton, T. 全移位的 Gibbs 测度因子。载于《隐马尔可夫过程的熵及其与动力系统的联系》385（2011年），246–257。[9] Varandas, P., and Viana, M. 非一致扩张映射平衡态的存在性、唯一性与稳定性。[10] Walters, P. 若干距离扩张映射的不变测度与平衡态。美国数学会会刊 236（1978年），121–153。

Dept. of Mathematics, University of Houston, Houston, TX 77204电子邮件地址: ghemenwa@cougarnet.uh.edu