arXiv:2304.02533v1 [math.DG] 5 Apr 2023

统一弦理论中的几何流 [1]

Duong H. Phong

摘要

本文综述了受弦理论启发的新型几何流。其研究背景涵盖复几何、几乎复几何和辛几何。从偏微分方程的角度看，其中许多流可视为里奇流与凯勒-里奇流之间的中间流，尽管它们往往还与其他场的流耦合。本文特别综述了作者与 Tristan Collins、Teng Fei、Bin Guo、Sebastien Picard 和 Xiangwen Zhang 的合作成果。

1 引言

自然界已知的四种基本力分别由爱因斯坦方程或杨-米尔斯方程描述；这两类方程都对几何学和偏微分方程理论的发展产生了深远影响。然而，理论物理学的宏大理想是建立一套统一描述所有相互作用的理论。自 20 世纪 90 年代中期以来，弦理论与 11维超引力统一为 M理论，而 M理论至今仍是唯一可行的候选理论。M理论想必由某种方程支配，这些方程将以适当的方式统一爱因斯坦方程与杨-米尔斯方程，并且必将对数学产生重大影响。问题在于，人们对 M理论仍远未充分理解，甚至时至今日，也只能通过它的各种极限间接认识它。

作为第一步，我们仍可以考虑 M理论各个极限理论的方程；实际上，也可以考虑它们的低能极限，即 $10d$ 或 $11d$ 点粒子理论。历史上，这项工作确实是首先开展的：1985年，Candelas, Horowitz, Strominger, and Witten [10] 确认，Calabi-Yau 三维流形可作为杂化弦紧化到四维时空时超对称紧化的真空态。当时，Calabi-Yau 三维流形看起来如此僵硬，以至于人们无法寻找杂化弦或其他弦理论的其他解。但此后的情况已发生很大变化，尤其是随着对偶性和非微扰效应的出现，理解这些其他真空态已势在必行。如今已有有力证据表明，这些理论各自导向一种新的特殊几何概念，并由新的偏微分方程所支配；这些方程本身也颇具研究价值。因此，上述 Calabi-Yau 三维流形应被解释为相对于

[1]发表于《微分几何综述》第27卷（2022年），《里奇流四十年》，由 H.D. Cao、R. Hamilton 和 S.T. Yau 编。本研究部分由美国国家科学基金会通过资助项目 DMS-18-55947 和 DMS-22-03273 提供支持。

Chern 酉联络的{v4}(3)整体性的体现，但这或许只是众多尚待发现的特殊几何之一。

值得注意的是，几何流最终成为研究这些新方程最有效的方法。一个早期例子是 Bryant 的 G_2 流 [7, 8], ，它可以视为奇数维版本的 K¨ahler-Ricci 流。更一般地，M理论极限理论的方程都涉及一个上同调约束。¯在缺少 $\partial\partial$-引理的情况下，实现约束最有效的方法是从满足该约束的初始数据出发，并让数据通过保持约束的几何流演化。

本文将综述近期在统一弦理论中出现的几何流，重点关注偏微分方程方面。这些流的原始表述形式差异很大：有些是定义在三维复流形上的 (2, 2)-形式之流（§2 和 §4），有些是定义在辛六维流形上的实三形式之流（§3），还有些是 $11d$ 超引力的抛物型约化（§5），或旋量之流（§6）。不过，它们都会诱导黎曼结构 g_{jk} 的流，我们可以据此尝试比较它们。通常，这些流的形式如下

$$\partial_t g_{jk} = -2e^u R_{jk} + \cdots \tag{1.1}$$

并且涉及与其他场的流的耦合。这里 $\cdots$ 表示一些低阶项，它们也可能涉及重参数化和/或规范变换。在二阶的重参数化不变流中，里奇张量的出现并不令人意外。因此，这种流的独特特征更多体现在低阶项和/或度量 g_{jk} 所耦合的附加场中。还应牢记，尽管从上述度量 g_{jk}的流中未必能看出上同调约束及任何潜在的特殊几何，但它们确实存在，而且十分重要，尽管其约束通常远弱于K¨ahler几何。从这个意义上说，统一弦理论的几何流可视为里奇流与K¨ahler-里奇流之间的中间形态。

统一弦理论中的几何流直到几年前才开始得到系统研究，目前人们对它们的了解仍然很少。虽然我们可以借鉴多年来研究经典流（如里奇流 [63, 64] 和杨–米尔斯流 [113, 26], ）所积累的许多强大技术和深刻见解，但这些较新的流总会带来各自的新难题。它们很可能需要新的方法，而这些方法本身也完全可能对偏微分方程理论具有重要价值。因此，还有许多问题有待理解和发现，整个领域应当非常适合开展研究。基于这一点，我们努力在本综述中尽可能以数学上自足的方式介绍这些新流，使读者能够在愿意时将其作为纯粹的偏微分方程问题来研究。这些方程背后的物理学背景尤为丰富而复杂，我们只能列出一些相关文献供读者参考，而相关文献浩如烟海。

2 IIB 型流

我们先作一些一般性说明，这些说明不仅适用于本节，也适用于其他各节。弦理论和M理论 [2, 69, 116, 109] 研究的是扩展对象，但就本文目的而言，我们只考虑它们化约为点粒子理论的极限，其维数分别为10和11。这些极限理论属于超引力理论，因为它们包含引力且具有超对称性；也就是说，它们具有一种交换张量场（“玻色子”）与旋量场（“费米子”）的对称性。引力由度量描述，它是一个对称的二阶张量；其超对称伴场则由一种称为引力微子场的场描述，该场是取值于旋量丛的1-形式。我们关注这些理论的超对称真空，即场满足场方程且引力微子场在超对称变换下保持不变的时空。后一要求归结为：存在一个旋量场，它在某个可能具有非零通量的联络下协变常数（更多细节见§7）。这是使弦理论和M理论区别于早期规范理论与引力理论的关键新要求之一。

除 $11d$超引力外，本综述所讨论的所有方程都可以追溯到协变常数旋量存在这一要求。特别是，这意味着整体性约化。出于唯象学上的考虑，理想情况下应将时空紧化为 $M^{3,\,1}\times X$，其中 $M^{3,\,1}$是闵可夫斯基时空或最大对称的四维时空，而 X 是一个维数为 6 或 7 的内空间，具体取决于我们紧化的是弦理论还是 11维超引力。紧化时保留超对称性也很重要。因此，我们的讨论既适用于原始时空，也更常适用于内空间 X。

文献中已对弦理论的方程进行了广泛研究 [54,107, 52, 51, 53, 62, 14, 61], ，尤其是从约化整体性和 G-结构的角度。在六维内空间 X的情形下，我们讨论的是SU(3) 结构；对于通量可能具有的形式，已有详尽分类 [43, 16], ，这已成为对可能的超对称真空进行分类的有力工具。

我们的目标是找出能够体现各类弦理论典型特征的方程。为此，我们借鉴了 Tseng 和 Yau [110, 111, 112], 提出的一些代表性模型。对于 IIB 型弦（紧化到一个六维内空间 X），其设定如下。

设 X 为一个紧致的 3 维复流形，配备一个处处不消失的全纯 (3,0)-形式 Ω。带有 O5/D5膜源项的 IIB 型弦超对称紧化，可由满足以下方程组的 Hermitian 度量 ω 描述

$$d\omega^2 = 0, \qquad i\partial\bar{\partial}(|\Omega|_\omega^{-2}\omega) = \rho_B \tag{2.1}$$

其中 $|\Omega|_\omega$ 定义为 $i\Omega\wedge\bar{\Omega}=|\Omega|^2_\omega\omega^3$，而 ρ_B 是若干全纯 2-循环线性组合的庞加莱对偶。

我们注意到，方程 $d\omega^2=0$ 与 K¨ahler 条件有些相似，但弱得多。满足这一条件的度量在数学文献¯中有时称为“平衡” [84]。特别是，目前尚无已知的类似 $\partial\partial$ 引理，能够有效地参数化所有满足 ω^2 闭合的形式 ω。由于缺乏这样的参数化方法，我们尝试通过引入以下 (2,2) 形式的流来实现平衡条件

$$\partial_t(\omega^2)=i\partial\bar{\partial}(|\Omega|_\omega^{-2}\omega)-\rho_B \tag{2.2}$$

其初始数据 ω_0 满足 $d\omega_0^2=0$。关键在于，该流的右端是闭形式，因此形式 ω^2 的闭合性在所有时间内都得以保持；而且形式上，如果该流对所有时间都存在并收敛，那么它的平稳点便给出完整 IIB 型系统的解。

文献 [88]证明，该方程的首项满足 Hamilton 条件，从而保证光滑数据下该流的短时存在性。我们还注意到，以这种形式，IIB 型流可以直接推广到任意维数为 m的紧致复流形，

$$\partial_t(\omega^{m-1})=i\partial\bar{\partial}(|\Omega|_\omega^x\omega^{m-2})-\rho_B \tag{2.3}$$

这本身可能也值得关注。这里，ρ_B 现在是若干全纯 $m-1$-维圈的线性组合的庞加莱对偶。将这一 IIB 型流改写为关于 (1, 1)-形式 [89] 的流也并不困难。

2.1 $\rho_B=0$ 的情形

现在我们描述上述流在无源项 ρ_B =0 情形下的一些精确结果。在这种情况下，即使复维数 m 是一般的，也存在一种显著的变量变换，可以将 IIB 型流对形式 Ω 的依赖完全消除，使其仅保留在初始数据 [32] 中。具体而言，令

$$\eta=|\Omega|_\omega\omega \tag{2.4}$$

随后，文献 [32] 证明，IIB 型流可以用 η 表示为

$$i^{-1}\partial_t\eta_{\bar{k}j}=\frac{1}{m-1}(-R_{\bar{k}j}+\frac{1}{2}T_{j\bar{m}p}\bar{T}_{\bar{k}}^{\bar{m}p}) \tag{2.5}$$

其中 $R_{|bar kj}$ 是 Ricci-Chen 张量；对于满足共形平衡条件 $d(|\Omega|_\eta\eta^{m-1})=0$的初始数据 η_0，上述右端实际上与 [102], 中作为自然推广所引入的流族中的一种特定流相一致，该推广是

厄米几何中的 K¨ahler-Ricci 流。值得注意的是，这是 Ustinovskyi [114] 所确定的特定流，它保持切丛的 Griffiths 正性和 Nakano 正性。不过，我们注意到，在我们的语境中，初始数据满足共形平衡条件至关重要。 [34]中建立了以下 Shi 型估计：

定理 1 [34] 假设 IIB 型流存在于时间区间 $[0,T)$ 上，并且

$$K_1^{-1}\omega(0) \leq \omega(t) \leq K_1\omega_0, \qquad |d\log|\Omega|| \leq K_2 \tag{2.6}$$

那么存在常数 C 和 $0<\alpha<1$，它们依赖于 K_1、K_2、Ψ 以及初始数据，但不依赖于 T，使得

$$\|g\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(X\times[0,T))} \leq C \tag{2.7}$$

特别地，流随后可延拓通过 T。

传统上，Monge-Amp`ere 方程和 K¨ahler-Ricci 流的 C^3 估计依赖于一个复版本的恒等式，该恒等式可追溯至 Calabi。这里没有可用的 K¨ahler 度量势函数，但我们可以改用 [93], 的方法，对联络 ∇hh^{-1}给出估计，其中 h 是参考度量与演化度量之间的相对端同态。上述定理在 IIB 型流奇点形成问题中的应用见 [76]。

IIB 型流应当能够有力地探测底层复流形 X的几何性质。作为初步检验，我们可以证明，它确实能够以新的估计给出 Yau 基本定理 [117]的一种新证明。该定理论述了满足 $c_1(X)=0$的 K¨ahler 流形上存在 Ricci 平坦 K¨ahler 度量。因此，设 $\hat{\chi}$ 是 X 上的 K¨ahler 度量，并将满足 $|\Omega|_{\omega(0)}\omega(0)^{n-1}=\hat{\chi}^{n-1}$ 的度量 $\omega(0)$ 作为 IIB 型流的初始数据。于是可以直接证明 [91] ，IIB 型流对所有时间 $t>0$都存在；并且当 $t\to\infty$时，解 $\omega(t)$ 平滑收敛至一个 K¨ahler 、 Ricci 平坦的度量 ω_∞。

该情形的关键在于，由 χ 定义的 (1, 1)-形式

$$|\Omega|_{\omega(t)}\omega(t)^{n-1} = \chi(t)^{n-1} \tag{2.8}$$

¯在流演化过程中将保持 K¨ahler 性质。若令 $\chi(t)=\hat{\chi}+i\partial\bar{\partial}\varphi(t)$，则可以将 IIB 型流改写为 φ 中的抛物型 Monge-Amp`ere 流，

$$\partial_t\varphi = e^{-f}\frac{(\hat{\chi}+i\partial\bar{\partial}\varphi)^n}{\hat{\chi}^n}, \quad \varphi(x,0)=0 \tag{2.9}$$

对于适当的 g ¯给定函数 f，并满足多重次调和性条件 $\hat{\chi}+i\partial\bar{\partial}\varphi>0$.

请注意，与 K¨ahler-Ricci 流或逆 Monge-Amp`ere 流不同， [17, 12], 这个流关于 $D^2\varphi$ 并非凹函数。因此，我们需要一种获取 $C^2$ 估计的新方法。事实证明，一种新的测试函数不同于 Yau 和 Aubin 在 Monge-Amp`ere 方程的 C^2 估计中使用的经典测试函数，

$$G(z,t) = \log \mathrm{Tr}\, h - A(\varphi - \frac{1}{[\hat{\chi}^n]}\int_X \varphi\hat{\chi}^n) + B[\frac{(\hat{\chi}+i\partial\bar{\partial}\varphi)^n}{\hat{\chi}^n}]^2$$

这是必需的。新增项是 Monge-Amp`ère 行列式的平方。事实证明，它对于其他非线性抛物流中的 C^2 估计也很有用[95, 100], ，并且证实，为统一弦理论的流所开发的工具对其他偏微分方程也同样有意义。

不难看出，无源 IIB 型流的唯一驻点是 Ricci 平坦 K¨ähler 度量。因此，该流有助于确定共形平衡流形 X 是否实际上是 K¨ähler 流形。为此，Bedulli 和 Vezzoni [5] 提出的以下稳定性定理尤为值得关注:

定理 **2** [5] 若 $(X, \Omega\ \chi)$ 是一个 K¨ähler 流形，且其上有一个 χ K¨ähler Ricci 平坦度量，那么对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得若初始数据 ω_0 满足

$$||\Omega|_{\omega_0}\omega_0^{n-1} - \chi^{n-1}| < \delta \tag{2.10}$$

那么 IIB 型流对所有时间都存在， $||\Omega|_{\omega(t)}\omega(t)^{n-1} - \chi^{n-1}| < \epsilon$，且 $|\Omega|_\omega\omega^{n-1}$ 收敛到 ω_∞^{n-1}，其上带有 ω_∞ 一个 astheno-Kähler 度量。若 ω_0 是共形平衡的，那么ω_∞ 是 K¨ähler Ricci 平坦的。

请注意，这个稳定性定理尤其允许考虑比共形 K¨ähler 更一般的初始数据。其证明基于作者们的一般方法 [3, 4]，该方法利用 Hamilton-Nash-Moser 隐函数定理证明流的稳定性。

2.2 带源项 ρ_B的情形

我们简要讨论源项 ρ_B不为零的情形。如果源项 ρ_B 是一个光滑闭的 (2, 2)-形式，那么该流的短时存在性可由与无源项情形相同的论证得到，定理 1 仍然适用。

更有趣的情形是源项存在奇点。总的来说，与光滑情形相比，带奇点情形下几何流和典范度量的理论发展要欠缺得多。例如，直到最近，人们才在格劳尔特意义下的正规 K¨ähler 空间上确立了厄米-爱因斯坦度量的存在性，而这需要新的分析工具 [13]。对于 IIB 型流，在存在奇异 ρ_B的情形下，几乎一无所知。如果给定 ρ_B ，我们可以天真地尝试考虑

以 ρ_B的正则化为源项的 IIB 型流，并确定去除正则化所产生的影响。但是，如果 ρ_B 具有狄拉克型奇点，我们可以期待，当流不存在光滑临界点时，这些狄拉克型奇点会由流的演化动态地产生。正如我们在下文讨论以源项ρ_A 为源的 IIA 型流时将会看到的，似乎没有其他可行的方式让这样的源项 ρ_A 得以发展。

3 IIA 型流

同样，我们聚焦于 Tseng 和 Yau [110, 111, 112]提出的一种代表性情形：带有膜源项的 IIA型弦超对称紧致化。

设 X 是一个实 6 维紧致辛流形，即它存在一个闭的非退化 2-形式 ω （但它可能不存在相容的复结构，因此不一定是凯勒形式）。给定一个实 3-形式 φ，设 J_φ 是 Hitchin [68]约 20 年前为 φ 定义的几乎复结构。那么，IIA 型方程是关于实正本原 3-形式 φ的以下方程组：

$$dd^\Lambda(|\varphi|^2 \star \varphi) = \rho_A, \quad d\varphi = 0. \tag{3.1}$$

这里， φ 为正意味着二次型 $g_\varphi(X, X) = \omega(X, J_\varphi X)$ 是一个度量； ρ_A是特殊拉格朗日子流形线性组合的庞加莱对偶； $d^\Lambda = d\Lambda - \Lambda d$ 是 d的辛伴随算子； $\star$ 是度量 g_φ的霍奇星算子。

与 IIB 型流一样，一个看似无害但实际上相当难以实现的条件是 $d\varphi = 0$。而且，正如前面 IIB 型流的情形，这表明可以将上述 IIA 型系统的解视为以下流的平稳点

$$\partial_t\varphi = dd^\Lambda(|\varphi|^2 \star \varphi) - \rho_A, \tag{3.2}$$

其初始值为 φ_0 ，且是闭的、本原的。由于右端是闭的、本原的，形式上，初始条件的闭性和本原性将得以保持，而该流的平稳点自动就是 IIA 型系统的解。

3.1 IIA 型几何

Hitchin 从任意六维流形 M 上的任意非退化三形式 φ 构造几乎复结构 J_φ ，这一构造是逐点进行的，且纯粹是代数性的。上述 IIA 型弦的设定还要求满足若干特定的附加性质：形式 φ 必须是闭的，流形 M 还配备了辛结构，因此要求 φ 是本原的便有了意义。这些特定要求实际上导出了一种非常丰富的几何结构，称为 IIA 型几何，其主要特征如下。

令 $\Omega_\varphi = \varphi + iJ_\varphi\varphi$。于是有

$$\mathcal{D}^{0,1}\Omega_\varphi = 0 \tag{3.3}$$

因此，相对于几乎复结构J_φ，Ω_φ 形式上是一个全纯形式。接下来，Nijenhuis张量只有 6 个独立分量，从这个意义上说，该几乎复结构距离可积并不遥远。但 IIA 型几何最重要的性质是：相对于一种特定的˜联络，即相对于几乎复结构 J_φ 和度量投影得到的 Levi-Civita 联络 $\mathcal{D}$ ，它们具有 $SU(3)$整体性。

$$\tilde{g}_\varphi = |\varphi|^2 g_\varphi. \tag{3.4}$$

更具体地说，回顾一下，给定一个几乎复结构 J 和 Nijenhuis张量N后，任何满足相容条件 $g(JU, JV) = g(U, V)$的度量 $g(X, Y)$，都会确定一个 2-形式 $\omega(U, V) = g(U, JV)$，以及一族保持 J和 $g(X, Y)$的酉联络 $\mathcal{D}^t$，称为 Gauduchon 联络族 [50], ，其显式表达式为

$$\mathcal{D}^t_i X^m = \nabla_i X^m + g^{mk}(-N_{ijk} - V_{ijk} + tU_{ijk})X^j \tag{3.5}$$

其中， ∇ 是度量 $g(X, Y)$的 Levi-Civita 联络，而张量 U_{ijk}和 V_{ijk}定义为

$$U^m{}_{bc} = \frac{1}{4}((d^c\omega)^m{}_{bc} + (d^c\omega)^m{}_{jk}J^j{}_bJ^k{}_c), \quad V^m{}_{bc} = \frac{1}{4}((d^c\omega)^m{}_{bc} - (d^c\omega)^m{}_{jk}J^j{}_bJ^k{}_c). \tag{3.6}$$

这里， $d^c\omega = -Jd\omega$，并且在分量中由（$d^c\omega$）$_{abc} = -J^k{}_cJ^j{}_bJ^i{}_a$（$\partial_i\omega_{jk} + \partial_j\omega_{ki} + \partial_i\omega_{jk}$）明确给出。注意，所有三个张量 N、U、V的后两个指标均为反对称。当 $d\omega = 0$时，Gauduchon 线退化为单一联络。但一般而言，有几个值得注意的联络： $t = 1$ 对应于 Chern 联络，$t = -1$ 是 Bismut 联络，其特征是它的挠率是一个三形式。并且 $t = 0$ 定义了所谓的投影 Levi-Civita 联络。

现在我们回到对辛 6 维流形 M上的 IIA 型几何的讨论。其最基本的性质由下述定理 [35]给出：

定理 **3** [35] 设（J_φ、 φ、 ω）为一个 IIA 型几何，并设 $\tilde{g}_\varphi$为由（3.4）定义的缩放后度量。设 $\tilde{\omega} = |\varphi|^2\omega$ 为相应缩放后的 2-形式。那么我们有

$$\mathcal{D}^0(\frac{\Omega_\varphi}{|\Omega_\varphi|}) = 0 \tag{3.7}$$

其中， $\mathcal{D}^0$ 是度量 $\tilde{g}_\varphi$ 关于几乎复结构 J_φ 的投影 Levi-Civita 联络。因此，IIA 型几何具有 SU(3)和乐，但这是相对于联络 $\mathcal{D}^0$ 而言的。

我们注意到，原始辛形式 ω 是闭的，因此相对于度量 g_φ 的 Gauduchon 直线归结为单个联络。然而，由于重新缩放，形式 $\tilde{\omega}$ 不是闭的，因此相对于度量 $\tilde{g}_\varphi$，确实存在一整条酉联络的直线。上述定理指出，投影的 Levi-Civita 联络是 IIA 型几何的自然联络。

3.2 $\rho_A = 0$的情形

无源项的情形在几何上已经十分有趣，也带来了许多新的分析挑战。首先，我们必须证明该流的短时存在性：

定理 **4** [35] 对于任意闭、正且本原的初始数据 φ，满足 $\rho_A = 0$ 的 IIA 型流至少在短时间内始终存在。闭性和本原性在流动过程中得以保持。

这里的新难点在于，为了通过向量场 V 重新参数化，以消除 IIA 型流弱抛物性固有的退化，辛形式 ω也会随时间演化。因此，我们得到一个仅保持弱抛物型的耦合流（φ，ω）。解决办法是引入如下正则化耦合流（φ，ω），

$$\partial_t\varphi = d\Lambda d(|\varphi|^2 J\varphi) - BdJd(|\varphi|^2\Lambda J\varphi) + d(\iota_V\varphi), \quad \partial_t\omega = d(\iota_V\omega) \tag{3.8}$$

其中 B是一个固定的正常数。应用 Hamilton 的 Nash–Moser 方法，可以证明该流具有短时存在性。此外，还可以证明 φ的本原性在流动过程中得以保持。但对于本原数据，系数为 B的正则化项会消失，因此重新参数化后的正则化流的解满足原始的 IIA 型流方程。

要进一步分析 IIA 型流，需要求出相应的度量流：

定理 **5** [35] 假设 φ 沿 IIA 型流演化。由 IIA 型流诱导的度量流有两种表达方式。

(a) 令 $\check{}g_\varphi = |\varphi|^{-2}g_\varphi$ 且 $u =$ 对数 $|\varphi|^2$。那么

$$\begin{aligned}\partial_t(\check{g}_\varphi)_{ij} &= e^{\frac{3}{2}u}\{-2\check{R}_{ij} + \frac{3}{2}u_iu_j - u_{Ji}u_{Jj} + 4u^k(N_{ikj}+N_{jki}) - 4N^{kp}{}_iN_{pkj} \\ &\quad + \frac{1}{2}(|du|^2_{\check{g}} + |N|^2_{\check{g}})\check{g}_{ij}\}\end{aligned} \tag{3.9}$$

注意到，g_φ 的体积已知，且等于 $\omega^3/3!$，因此 u 由 $\check{}g_\varphi$确定，上述流是自洽的。

(b) 另一种方法是考虑有序对 (g_φ, u) 的流。如果 φ 按 IIA 型流演化，那么该有序对按以下方式演化：

$$\begin{aligned}\partial_t g &= e^u[-2R_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j u - 4(N^2_-)_{ij} + u_i u_j - u_a u_b J^a{}_i J^b{}_j + 4u_p(N_i{}^p{}_j + N_j{}^p{}_i)] \\ \partial_t u &= e^u\Delta u + e^u(2|\nabla u|^2 + |N|^2) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Type IIA 型流的一个重要特点，使其区别于许多已知的几乎复结构流（例如 [78], ），是 Type IIA 型流中 Nijenhuis张量的范数本身满足一个行为良好的流，

$$\begin{aligned}(\partial_t - e^u\nabla)|N|^2 &= e^u[-2|\nabla N|^2 + (\nabla^2 u)\star N^2 + Rm\star N^2 \\ &\quad + N\star\nabla N\star(N + \nabla u) + |N|^4 + N^2\star\nabla u + N^2\star(\nabla u)^2]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

由此，我们可以建立 Shi 型估计，表明 Type IIA 型流的奇点只能追溯到有限个几何量的发散：

定理 **6** [35] 假设 Type IIA 型流存在于某个时间区间 $[0, T)$ 上，且

$$|\log\varphi| + |Rm| \le A \tag{3.12}$$

对某个常数 A成立。那么对于任意 α，我们有

$$|\nabla^\alpha\varphi| \le C(A, \alpha, T, \varphi(0)) \tag{3.13}$$

特别地，若 $[0, T)$ 是存在的最大时间，则必有

$$\lim_{t\to T}\sup_X(|\log\varphi| + |Rm|) = \infty \tag{3.14}$$

这些估计所导出的奇点模型将在 [77] 中讨论。Type IIA 型流的驻点对应于可积复结构，而由此得到的度量是 Ricci 平坦的 K¨ahler 度量。正如 [34], 中所示，Type IIA 型流在以下意义下是动力学稳定的：

定理 **7** [34] 设 $(\bar\varphi, \bar\omega)$ 是紧致定向六维流形 M 上的 Ricci平坦Type IIA结构。则存在 $\varepsilon_0 > 0$ ，具有以下性质。对于任意满足下列条件的 Type IIA结构 (φ_0, ω_0)，

$$|\omega_0 - \bar\omega|_{W^{10,2}} + |\varphi_0 - \bar\varphi|_{W^{10,2}} < \varepsilon_0, \tag{3.15}$$

初值为（φ_0, ω_0）的 IIA 型流对所有时间均存在，并在 C^∞ 中收敛到 Ricci平坦Type IIA结构（φ_∞, ω_0）。

由此立即可得，若紧辛 $6d$ 流形（$M,\bar{\omega}$）具有相容的可积复结构，那么任何足够接近的辛形式也将具有相容的可积复结构。

更一般地，从具体例子中可以看出，IIA 型流将演化趋向于在某种适当意义下最优的几乎复结构。首先，我们考察 de Bartholomeis 和 Tomassini[24]构造的幂零流形上的 IIA 型流。其基本结构是一个幂零李群，而关于 φ的自然试探形式保持不变，并将 IIA 型流化约为一个可显式求解的常微分方程组。由此我们发现了一些例子：流对所有时间都存在，但极限 $\lim_{t\to\infty}J_t$ 不存在，不过

$$\lim_{t\to\infty}|N|^2=0. \tag{3.16}$$

接下来，Tomassini 和 Vezzoni [108]引入的可解流形上的辛半平坦结构提供了另一个有启发性的例子。关于 φ的一些自然试探形式再次在 IIA 型流下保持不变，从而将其化约为一个可精确求解的常微分方程组。于是我们发现了以下有趣现象：

- 对于任意初始数据， φ 的流在有限时间内产生奇点。然而， J_φ 和g_φ 的极限仍然存在。

- 对于某些初始数据， φ 是自膨胀解，而 J 是平稳的，实际上是Blair-Ianus [6]和 Le-Wang [78]的能量泛函的临界点。
- 对于其他初始数据，当 t 接近最大存在时间 T时，极限$\lim_{t\to T}J$ 存在，并且是调和近复结构，特别是 $|N|^2$的极小化子。另见 [99]。

3.3 带源项 ρ_A的情形

我们之前在IIB型流的背景下提到过，与光滑数据的理论相比，带奇异数据的几何流理论发展相对不足。对于IIA型流，情况更糟，因为源项 ρ_A 需要满足依赖于形式 φ的条件，即它是特殊拉格朗日子流形线性组合的庞加莱对偶。拉格朗日子流形的概念仅依赖于给定的辛结构，但特殊拉格朗日子流形 [65] 的概念依赖于度量，而度量是g_φ ，因此依赖于 φ。

因此，如果我们通过流方法研究含膜的 IIA 型方程，就必须让 ρ 和三形式 φ 都随时间演化。这本身就会是一个颇具挑战性且有趣的问题。另一种可能是，当 ρ_A 具有狄拉克型奇点时，我们可以期待出现这样一种情形：在无源项的流不存在任何光滑平稳点时， ρ_A 会作为奇点动态地产生。从这个角度看，这个问题让人联想到自由边界问题。如果能成功地将自由边界问题理论中的方法用于弦理论中的偏微分方程（PDE），无疑将为这两种理论带来令人振奋的发展。

3.4 辛几何中的相关流

对于几何分析中大多数弱抛物型但非严格抛物型的几何流，例如里奇流、杨–米尔斯流、旋量流、IIA 型流等，我们仍然能够证明任意初始数据下的短时存在性。不过，也有一些流即使在这一点上也颇具挑战。以下是几个值得注意的例子。

3.4.1 Hitchin 泛函及其相应的梯度流

在任意紧致六维流形 M 上，Hitchin 引入了定义在三形式上的泛函

$$H(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M \varphi \wedge (J_\varphi \varphi)$$

并证明了 $\delta H = 0$ 等价于 $d(J_\varphi \varphi) = 0$，也等价于 J_φ 可积。若 M 配备了辛形式，且 φ 是本原的，则可得到一个相容度量，并可考虑 $H(\varphi)$ 的梯度流。事实证明，该流由下式给出

$$\partial_t \varphi = dd^\dagger \varphi$$

请回忆，七维流形上的 Bryant 拉普拉斯流恰由该公式给出，因此 Hitchin 梯度流可视为七维流形上 Bryant 拉普拉斯流的六维流形版本。值得注意的是，Hitchin 梯度流反过来也可表述为 IIA 型流的一种极限形式

$$\partial_t \varphi = d\Lambda d(\star\varphi)$$

3.4.2 对偶 Ricci 流

这一流由 T. Fei 和作者 [33], 作为复流形上里奇流的辛对偶提出。它是六维辛流形 M 上正且本原的三形式所构成的流，经过推导可得其形式为

$$\partial_t \varphi = d\Lambda d(\log|\varphi| \star \varphi)$$

这与 Hitchin 梯度流相似，但这次插入了一个对数 $|\varphi|$ 。

3.4.3 正则化的梯度 Hitchin 流

另一方面，不难看出，对于任意 $\epsilon > 0$，由下式定义的修正的 IIA 型流

$$\partial_t \varphi = d\Lambda d(|\varphi|^\epsilon \star \varphi)$$

确实具有短时存在性，而且人们很容易设想，可以从这些流的可能经过重整化的解 φ_ϵ 中提取出一个有限正则化极限，作为梯度 Hitchin 流或对偶里奇流的解。

从分析角度看，这种情形与 Uhlenbeck-Yau 证明 [113] Donaldson-Uhlenbeck-Yau 定理的过程有些相似。该定理说明，厄米-爱因斯坦度量的存在性与 Mumford 稳定性等价。他们证明，对于较小的 $\epsilon > 0$，正则化方程

$$\Lambda F_\epsilon - \mu I = -\epsilon \log h_\epsilon$$

总是存在解。这里，H_ϵ 是全纯向量丛$E \to (X, g_{\bar{k}j})$上的未知度量，$F = -\bar{\partial}(H_\epsilon^{-1}\partial H_\epsilon)$，而$h = H_0^{-1}H_\epsilon$是相应的端同态，其中 H_0 是一个固定的参考度量。问题在于，当$\epsilon \to 0$ 时，h_ϵ 是否一致有界；若是如此，便可令 ϵ 趋于 0，从而得到 Hermitian-Einstein 方程的一个解

$$\Lambda F - \mu I = 0$$

否则，可从任意满足 Tr$h_\epsilon \to \infty$ 的子序列 h_ϵ 构造一个违反 Mumford 稳定性条件的不稳定化层。

由此看来，给定的初始条件可能必须满足某种稳定性条件，流才至少具有短时存在性；而底流形可能必须满足某种稳定性条件，才能保证任意初始数据下的短时存在性。当然，目前这些考虑还相当初步，尚无其他有力证据支持这一设想。尽管如此，上述流在几何上颇具吸引力，而且这种设想似乎完全是全新的。因此，这一方法的不确定性或许完全值得承担，因为它可能带来丰厚的回报。

4 杂化弦的流

Candelas, Horowitz, Strominger, and Witten [10] 将 Calabi-Yau 三维流形确定为杂化弦的超对称真空后不久，Hull [70] 和 Strominger [103] 分别提出了一种更一般但仍然超对称的解，它允许度量具有挠率，只要仍能实现关键的反常抵消。他们的方程可描述如下。

4.1 Hull-Strominger 系统

设 M 是一个紧致复三维流形，配备一个处处不为零的全纯 (3,0)-形式 Ω，并设 $E \to M$ 是一个全纯向量丛，满足 $c_1(E) = 0$。那么，Hull-Strominger 系统是关于 $T^{1,0}(M)$ 上的厄米度量$\omega = ig_{\bar{k}j}dz^j \wedge d\bar{z}^k$以及 E上的厄米度量 $H_{\bar{\alpha}\beta}$的一组方程，

$$i\partial\bar{\partial}\omega - \frac{\alpha'}{4}\mathrm{Tr}(Rm \wedge Rm - F \wedge F) = 0, \quad d(\|\Omega\|_\omega \omega^2) = 0 \tag{4.1}$$

$$F^{2,0} = F^{0,2} = 0, \quad g^{j\bar{k}}F_{\bar{k}j} = 0. \tag{4.2}$$

这里， Rm和 F分别是 ω和 H的曲率，视为取值于 $End(T^{1,0}(M))$ 和 $End(E)$ 的 2-形式。上面第一行中的第二个方程最初写作关于度量 ω的挠率方程。Li 和 Yau [80], 提出将其改写为 $d(|\Omega|_\omega \omega^2) = 0$ ，这是一个重要洞见，揭示了它的上同调意义。如前所述，在数学文献中，满足 $d\omega^{m-1} = 0$ 的 m维流形上的度量 ω 称为平衡度量；我们将度量 ω 称为共形平衡度量，如果它经过共形变换后为平衡度量。需要指出的是，与其他弦理论相比，杂化弦方程的一个显著特点是其中包含规范场 F ，并且要求满足 Green-Schwarz 异常抵消条件，如上述系统第一行所示。当 $\alpha' = 0$时，该方程化为无源项的 IIB 型方程。

Calabi-Yau 流形可视为 Hull-Strominger 系统的特殊解，其中 $E = T^{1,0}(M)$, $\omega = H$K¨ahler，且 $Ric(\omega) = 0$。 [103]，给出了具有奇点的解，但 Fu 和 Yau [44, 45] 找到了第一批光滑、非微扰、非 K¨ahler 解，这些解由 $K2$ 曲面上的托里克纤维化给出；他们也揭示了 Hull-Strominger 系统深层的几何结构。此后又发现了许多其他解 [40, 46, 21]。更一般地，Yau 提出应将 Hull-Strominger 系统视为定义带有 $c_1(M) = 0$ 的非 K¨ahler 复流形的典范度量，而最近刚刚完成了将这些系统用于 Reid 的幻想的初步工作 [20, 18]。

4.2 异常流

与此前处理 IIA 型弦和 IIB 型弦方程的情形一样，一般而言，求解 Hull-Strominger 系统的一大难点在于实现共形平衡条件约束。 [88, 89], 中倡导了采用保持这一约束的流这一相同策略，并引入了如下的对偶流（ω， $H_{\bar{\alpha}\beta}$），

$$\partial_t(|\Omega|_\omega \omega^2) = i\partial\bar{\partial}\omega - \frac{\alpha'}{4}\mathrm{Tr}(Rm \wedge Rm - F \wedge F), \quad H^{-1}\partial_t H = \frac{\omega^2 \wedge F}{\omega^3} \tag{8}$$

初始数据 (ω_0, H_0) 满足共形平衡条件 $d(|\Omega|_{\omega_0}\omega_0^2) = 0$。该流被称为异常流，因为它的平稳点满足 Green-Schwarz 反常抵消方程。对于固定的 ω， H 中的流是众所周知的 Donaldson 热流，因此异常流的新意在于关于 ω的流，以及它与 Donaldson 热流的耦合。利用 Hamilton 的 Nash-Moser 方法，可以建立异常流的短时存在性；该方法适用于弱抛物型系统 [63]。利用异常流，我们可以重新获得 Fu 和 Yau [44, 45]发现的 Hull-Strominger 系统解。种种迹象表明，它将成为未来的有力工具；其在幺模群和幂零流形上的行为分别已在[92] 和 [98]中得到研究。

4.3 Hull-Strominger-Ivanov 系统

起初，人们认为 Hull 和 Strominger 提出的方程组会自动蕴含运动方程，但 Ivanov 等人 [71, 38, 39] 随后证明并非如此。实际上，要使场方程成立，反常抵消方程中的曲率 Rm 必须是切丛 M上的 SU(3)全纯瞬子 ∇的曲率 R_∇。它不必是由 ω定义的 Chern 酉联络的曲率。我们将经过 Ivanov 等人建议的修正后的 Hull-Strominger 系统称为 Hull-Strominger-Ivanov 系统，简称 HSI 系统。Garcia-Fernandez 和 Molina [49], 提出了该系统的一种表述，这种表述可能有助于建立解的存在性和稳定性条件； [48]中还引入了一个 Futaki 不变量。 [47]中提出了一种基于广义几何的表述。

从解析角度来看，HSI 系统似乎也比原始的 Hull-Strominger 系统简单得多。事实上，一旦固定了 SU(3) 瞬子的全纯结构，其曲率 R_∇ 便可视为已知，因此反常抵消方程中不再含有 ω 的黎曼曲率 Rm 的二次项。将先前为 Hull-Strominger 系统引入的几何流直接推广到 HSI 系统并不困难，由此得到的流甚至更加简单。

5 源自11维超引力的流 y

如上所述，人们认为弦理论本身可以统一到 M理论之中。M理论至今尚未完全构建，主要通过其各种极限 [2, 69, 109, 116] 来理解。其中一个极限是11维超引力 [23], ，其张量场实际上非常简单：由一个洛伦兹度量 G_{MN} 和一个闭 4-形式 $F = dA$ 组成；将所有旋量场设为0后，其作用量为

$$I(G_{MN}, F) = \int d^{11}x\sqrt{-G}(R - \frac{1}{2}|F|^2) - \frac{1}{6}\int A \wedge F \wedge F$$

场方程由作用泛函的临界点给出，并可明确写为

$$d \star F = \frac{1}{2}F \wedge F, \qquad R_{MN} = \frac{1}{12}F_{MPQR}F_N{}^{PQR}.$$

超对称解是指存在一个非零旋量 ξ 满足

$$D_M\xi \equiv \nabla_M\xi - \frac{1}{288}F_{ABCD}(\Gamma^{ABCD}{}_M + 8\,\Gamma^{ABC}\delta^D{}_M)\xi = 0, \tag{5.1}$$

即相对于联络 D_M 协变常数的旋量；该联络是通过通量 F 扭曲 Levi-Civita 联络而得到的。

5.1 早期解

采用安萨茨 $M^{11} = M^4 \times M^7$ 得到了一些早期解，其中 M^4 是一个洛伦兹四维流形， M^7 是一个黎曼流形，其度量分别为 g_4 和 g_7。令 $F = cVol_4$，其中 Vol_4 是 M^4 上的体积形式，则场方程化简为

$$(Ric_4)_{ij} = -\frac{c^2}{3}(g_4)_{ij}, \qquad (Ric_7)_{ij} = \frac{c^2}{6}(g_7)_{ij}$$

也就是说， M^4和 M^7是爱因斯坦流形，其标量曲率分别为负和正。这些就是 Freund-Rubin 解 [42], ，其中包括 $AdS^4 \times S^7$。采用其他关于 F的安萨茨也能找到更复杂的解，例如，对于合适的 ψ，取 $F = cVol_4 + \psi$ 可得到近似 G_2 流形（例如参见 [29, 25, 96, 97] 及其他许多文献）。

对我们而言，通过令 $M^{11} = M^3 \times M^8$得到的解尤其值得关注，并且

$$g_{11} = e^{2A}g_3 + g_8, \qquad F = Vol_3 \wedge df$$

其中， g_3是 M^3上的洛伦兹度量， g_8是 M^8上的黎曼度量，而（A， f）是 M_8上的光滑函数。Duff-Stelle [27, 28] 的这一现已广为人知的解，是通过假设 g_3平坦、 g_8共形平坦、 A和 f具有径向依赖性，并要求超对称性而得到的。在 [30], 中，给出了数据（g_3， g_8， A， f）何时产生超对称解的判定：

定理 8 [30] 数据 (g_3, g_8, A, f) 是 11 维超引力方程的一个超对称解，当且仅当

(a) g_3 是平坦的；(b) $\bar{g}_8 := e^A g_8$ 是一个 Ricci 平坦度量，并且相对于 Levi-Civita 联络存在协变常数旋量；(c) e^{-3A} 是 (M_8, g_8) 上关于度量 $\bar{g}_8$ 的调和函数；(d) $df = \pm d(e^{3A})$。

结合 S.Y. Cheng 和 P. Li [15] 关于格林函数下界的经典结果，以及 Szekelyhidi [104], 、Conlon-Rochon [22], 和 Li [81], 构造的新完备 K¨ahler-Ricci 平坦度量（定义在 $\mathbb{C}^4$ 上），我们由此得到完备的超对称多膜解，其中包括许多此前在物理学文献中尚未发现的解。

如果我们允许 $11d$超引力存在非超对称解，那么解的数量会多得多。例如， [30] 表明，Duff-Stelle 解自然可以嵌入一个五维解族中，而它是其中唯一的超对称解。

5.2 $11d$超引力的抛物型降维

最终，11维超引力的更一般解必须通过求解偏微分方程来找到。作为起点，我们将考虑以下对 (G_{MN}, F) 的流，

$$\begin{aligned} \partial_t F &= -\Box_G F - \frac{\sigma}{2} d\star(F\wedge F) \\ \partial_t G_{MN} &= -2R_{MN} + F^2_{MN} - \frac{1}{3}|F|^2 G_{MN} \end{aligned} \tag{5.2}$$

其中 $\Box_G$是相对于 G_{MN}的4-形式上的霍奇-拉普拉斯算子，$F^2_{MN} = \frac{1}{3!}F_{MABC}F_N{}^{ABC}$，并且我们引入了一个参数 $\sigma = \pm 1$，取决于度量 G_{MN} 分别是洛伦兹还是欧几里得。显然，$11d$ 超引力场方程的解必须是该流的驻点。反之，若 M^{11} 是欧几里得、紧致的，且$H^3(M^{11}, \mathbb{R}) = 0$，则该流的驻点可立即看出满足场方程。更一般地，若假定 M^{11}没有既闭又余闭的非平凡三形式，则此结论仍然成立。

我们将考虑上述系统可约化为抛物型系统的两种情形。第一种直接情形，是通过考虑具有欧几里得度规号差的流形 M^{11} 以及 $\sigma = -1$而产生的。尽管11维超引力要求洛伦兹度规号差，但可以预期这一黎曼版本会具有数学上的兴趣，正如欧几里得杨-米尔斯理论的情形一样。在此情形下，[31]中建立了如下定理：

定理 9 [31] 考虑一对 (G_{MN}, F) 的流 (5.2)，其中 G_{MN} 是欧几里得度量，F 是 $11d$ 黎曼流形 M^{11} 上的闭 4-形式，且 $\sigma = -1$。则有
(a) 只要流存在，F 形式就保持闭；(b) 流至少存在于时间区间 $[0, T_0)$，其中 $T_0 > 0$；(c) 若 $T < \infty$ 是该流的最大存在时间，则

$$\limsup_{t\to T^-} \sup_{M^{11}} (|Rm| + |F|) = \infty. \tag{5.3}$$

接下来，我们考虑 M^{11} 洛伦兹度规号差的情形。在这种情况下，流 (5.2) 将是双曲型的。不过，我们将确定该流的降维情形，其中洛伦兹分量是静态的，且该流约化为抛物流。因此，我们考虑如下形式的时空和场构型 $M^{11} = M^{1,\,p} \times M^{10-p}$，

$$G = e^{2A} g_{1,p} + g, \quad F = dVol_g \wedge \beta + \Psi \tag{5.4}$$

其中，β和 Ψ 现在分别是 M^{10-p} 上的一个 $(3-p)$-形式和一个 4-形式，且假定二者均为闭形式。度量 $g_{1,\,p}$ 是 $M^{1,\,p}$ 上的洛伦兹爱因斯坦度规，

$$Ric(g_{1,p}) = \lambda g_{1,p}, \tag{5.5}$$

A 是 M^{10-p} 上的一个标量函数，而度量 $g = g_{ij}$ 是 M^{10-p} 上的黎曼度量。维数 p 可以取 0 到 10 之间的任意值，且 $\beta = 0$ 当 $p \geq 4$ 时。

对于静态的 $g_{1,p}$， M^{11} 的几何由四元组 (g_{ij}, A, β, Ψ) 刻画。我们将考虑此类四元组的以下流：

$$\begin{aligned}
\partial_t g_{ij} &= -2R_{ij} + 2(p+1)(\nabla_i \nabla_j A + \nabla_i A \nabla_j A) \\
&\quad -e^{2(p+1)A}\beta_{ij}^2 + \Psi_{ij}^2 - \frac{1}{3}(|\Psi|^2 - e^{-2(p+1)A}|\beta|^2) g_{ij} \\
\partial_t A &= \Delta A + \frac{1}{4}(p+1)|\nabla A|^2 - \frac{1}{3}e^{-2(p+1)A}|\beta|^2 - \frac{1}{6}|\Psi|^2 - \lambda e^{-2A} \\
\partial_t \beta &= -\Box\beta + (-1)^{p+1}(p+1) d\star(dA \wedge \star\beta) - (-1)^p \frac{p+1}{2} e^{(p+1)A} dA \wedge \star(\Psi \wedge \Psi) \\
&= -(-1)^p \frac{1}{2} e^{(p+1)A} d\star(\Psi \wedge \Psi) \\
\partial_t \Psi &= -\Box\Psi + (-1)^p (p+1) d\star(dA \wedge \Psi) - (p+1) e^{-(p+1)A} dA \wedge \star(\beta \wedge \Psi) \\
&\quad e^{-(p+1)A} d\star(\beta \wedge \Psi)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

其中，范数、霍奇星算子和协变导数均是相对于 M^{10-p} 上的度量 g_{ij} 定义的。以下定理在 [31] 中得到了证明：

定理 10 [31] 设 M^{11} 是一个洛伦兹 11 维流形，配备度量 G_{MN} 和闭 4-形式 F，后者由黎曼流形 M^{10-p} 上的四元组 (g_{ij}, A, β, Ψ) 按表达式 (5.4) 给出。

(a) 若四元组按上述流 (5.6) 演化，则 M^{11} 上的对 (G_{MN}, F) 在 $\sigma = 1$ 下按原始流 (5.2) 演化。

(b) 形式 β、Ψ 和 F 在流的演化过程中保持闭合，且上述安萨茨得以保留；

(c) 流至少在某个时间区间 $[0, T_0)$ 内存在，且满足 $T_0 > 0$。若 $T < \infty$ 是该流存在的最大时间，则

$$\limsup_{t \to T^-} \sup_{M^{10-p}} (|Rm| + |A| + |\beta| + |\Psi|) = \infty \tag{5.7}$$

类似的约化应当也适用于五维超引力。根据构造，这些流的驻点将满足超引力场方程。鉴于上述目标是寻找同时满足超对称性和场方程的空间，考察这些流在至少已知允许非零旋量的空间上的行为是很自然的。对于下节 §6 所述的（g_{ab}, ψ, H, φ）的旋量流，预计有助于其研究的 G 结构的相同约化，也应有助于上文所述（g_{ij}, A, β, Ψ）的抛物型约化流。在假定存在非零旋量场的条件下，对这两类流进行比较应当很有启发性。

6 旋量场的流

乍看之下或许并不明显，但迄今我们写出的统一弦理论的所有方程，除了 $11d$ 超引力的方程外，都源于对（局部）超对称性的要求。局部超对称性可视为重参数化不变性的一种类似形式，其变换由旋量场而非向量场生成。时空必须在此类变换下保持不变，这归结为要求生成旋量场是一个非零场，并且相对于某个适当的联络（可能带有通量）协变常数。因此，迄今我们写出的所有方程，除了 $11d$ 超引力的方程外，其共同的内在脉络都是存在这样一个协变常数旋量场；而方程本身则反映了该旋量场的存在对理论中的张量（“玻色”）场所产生的影响，同时并不直接涉及旋量（“费米”）场本身。

这表明，研究统一弦理论方程的一种替代性且互补的方法，是考察在何种条件下此类协变常数旋量场能够存在，因为它们是超对称性所必需的。这种方法，尤其是以几何流为基础时，或许具有自身的优势：我们已经看到，在 $11d$超引力的情形下，这是一种自然的方法。但或许更重要的是，统一弦理论的一个基本方面是它们彼此通过对偶性相关联；除§3中的特殊情形外，我们尚未对此进行探讨。这种对偶性绝非平凡，而且在各自采用不同表述的理论中通常难以发现。可以期待，若将研究范围限制在超对称理论空间内，尤其是限制在容许协变常数旋量的理论的模空间内，这项工作会更容易。这样的模空间及其Kuranishi变形理论，尤其是在存在通量时，其本身很可能具有相当重要的几何学意义。

我们注意到，在数学中，协变常数旋量的存在众所周知是约化整体性和特殊几何的特征（例如参见 Berger[9], Lichnerowicz [81], Joyce [73] 等人的工作）。Ammann、Weiss 和 Witt [1], 开创了运用几何流的方法，其基础是能量泛函 $I(g_{ij},\psi) = \|\nabla\psi\|^2_{L^2}$的梯度流，稍后我们将对此作进一步介绍。统一弦理论的物理学为这类问题注入了新的关注点，而其中关键的额外复杂因素是通量可能存在。

6.1 旋量、联络与超对称性

我们首先回顾旋量场的基本设定。设 M 是一个维数为 n 的紧致自旋流形， $S \to M$ 是 M 上的旋量丛。我们始终在旋量丛 S 的局部平凡化下工作，这些局部平凡化投影到正交标架丛的局部平凡化上，后者由局部坐标系中的一个标架 $\{e_a\} = \{e_a{}^j\}$ 给出

系 $\{x^j\}$， $1 \le j \le n$。因此，旋量空间在每一点都是一个向量空间 V，旋量场也就是取值于 V 的局部函数 ψ。向量空间 V 的一个定义性性质是它带有克利福德代数的一个表示，即由狄拉克矩阵 $\{\gamma^a\}$ 生成的代数。我们采用以下狄拉克矩阵约定，

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\,\delta^{ab}. \tag{6.1}$$

V 的自同态的一组基由反对称化乘积给出

$$\gamma^{b_1\cdots b_p} = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma}(-1)^{|\sigma|}\gamma^{\sigma_1}\cdots\gamma^{\sigma_p} \tag{6.2}$$

其中， $\sigma:\ (1,\cdots,p) \to (\sigma_1,\cdots,\sigma_p)$ 遍历 $(1,\cdots,p)$ 的所有排列，而 $|\sigma|$ 是其符号。旋量丛 S 具有自然联络 ∇，即自旋联络，由下式给出

$$\nabla_j\psi = \partial_j\psi - \frac{1}{4}\omega_{jab}\gamma^{ab}\psi \tag{6.3}$$

其中， ω_{jab} 是 Levi-Civita 联络。

M理论所有极限的一个关键特征是，它们会自动包含一种超引力理论，也就是说，这种理论兼具引力与超对称性。特别是，它们的谱包含度量 g_{ij}的超对称伙伴，即一个取值于旋量的形式 $\chi_i = \{\chi_i{}^\alpha\} \in T_*(M) \otimes S$，称为引力微子场。如上所述，超对称变换的生成元是旋量场 ψ；类似于微分同胚的生成元（即向量场 V^j）通过 $\delta g_{ij} = \nabla_i V_j + \nabla_j V_i$作用于度量，超对称变换则作用于引力微子：

$$\delta\chi_i = \nabla_i\psi + \cdots. \tag{6.4}$$

这里右边是 ψ 上的联络，正如微分同胚中的右边是 V^j 上的联络一样，而省略号 $\cdots$ 表示该联络还包含理论中其他场的贡献。我们将统称这些贡献为“通量项”。由于 V 的自同态由克利福德代数生成，因此通量项必定是狄拉克矩阵 γ^a 的多项式，其系数取决于理论中的其他场，

$$\sum_p \sum_{b_1,\cdots,b_p} H^{(p)}_{Mb_1\cdots b_p}\gamma^{b_1\cdots b_p}\psi \tag{6.5}$$

对于 M 理论，特别重要的情形是场 $H^{(p)}_{MN_1\cdots N_p}$为一个（$p+1$）形式。三形式的情形对应于 I 型、II 型和杂化弦方程中的挠率 H ； 4-形式的情形则产生 11维超引力中的场 F_4 ，这两种情形前文均已讨论。

因此，对于我们所考虑的超引力理论及其研究目的，通量项可以取一种非常具体的形式。固定一个正整数 p，并令 H 为一个p形式。那么，我们所考虑的旋量上的协变导数具有如下形式

$$\nabla_a^H \psi = \nabla_a \psi + (\lambda|H)_a \tag{6.6}$$

其中，对每个向量 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,$，我们定义

$$(\lambda|H)_a \psi = \lambda_1 H_{ab_1\cdots b_{k-1}} \gamma^{b_1\cdots b_p}\psi + \lambda_2 H_{b_1\cdots b_k}\gamma^{ab_1\cdots b_k}\psi, \tag{6.7}$$

它是一个取值于旋量端同态空间 $End(S)$ 的 1-形式。注意，$(\lambda|H)_a$ 中的两项取决于 p的奇偶性，或者都是厄米的，或者都是反厄米的，但不会兼具两者。

于是我们定义 $\nabla_a^H \psi = \nabla_a \psi + (\lambda|H)_a \psi$，并特别关注紧致自旋流形 M 何时存在处处不为零的旋量场 ψ，使得 $\nabla^H \psi = 0$。如前所述，在假设 H 为 0 的特殊情形下，可以考虑泛函的梯度流

$$I(g_{ij}, \psi) = \int_X |\nabla \psi|^2 \sqrt{g} dx \tag{6.8}$$

该流受约束条件 $|\psi|^2 = 1$ 限制。Ammann、Weiss 和 Witt[1], 引入了这一流，并证明了其短时存在性。随后，He 和 Wang [69]建立了该流的 Shi 型估计。然而，非零通量 H 的可能性带来了相当多的新困难，尤其是因为带通量的联络通常不是酉的，而且显然没有一种对 ψ 的归一化方式能够阻止它趋于 0。

在 [19], T. Collins 和作者提出通过引入一个动态归一化条件来解决这一问题

$$e^{-2\varphi}|\psi|^2 = 1 \tag{6.9}$$

并考虑四元组（g_{ij}, ψ, H, φ）的流。尽管这些论证在一定程度上具有普适性，但确实取决于自旋流形 M的维数 n 与通量 H的秩 p 之间的关系。下文假设 $3p = n + 1$，这对应于 $5d$和 $11d$ 超引力的情形。在此假设下，我们考虑四元组（g_{ij}, ψ, H, φ）的以下流，

$$\begin{aligned}
\partial_t g_{ab} &= \frac{1}{4} e^{-2\varphi} \mathrm{Re}\, Q^H_{\{ab\}} + \frac{1}{2}\langle \nabla^H_{\{a}\psi, \nabla^H_{b\}}\psi\rangle - \frac{1}{4} g_{ab}|\nabla^H \psi|^2) \\
\partial_t H &= -(d^\dagger dH + d(d^\dagger H - c \star (H \wedge H)) - L(H)) \\
\partial_t \varphi &= \sum_a e^{-2\varphi}(\nabla_a - 2e^{-2\varphi}\langle h_a\psi, \psi\rangle)\{e^{2\varphi}(\nabla_a\varphi + e^{-2\varphi}(\nabla_a\varphi + e^{-2\varphi}\langle h_a\psi, \psi\rangle)\} \\
\partial_t \psi &= -\sum_a (\nabla^H_a)^\dagger \nabla^H_a \psi + c(t)\psi
\end{aligned} \tag{6.10}$$

公式中涉及的各个量定义如下：方括号 $\{ab\}$ 表示关于 a 和 b 的对称化； $h_a = \frac{1}{2}((\lambda|H)_a + (\lambda|H)_a^\dagger)$ 是算子 $(\lambda|H)_a$ 的厄米部分； c 是给定的常数； $L(H)$ 是如下定义的 p 形式

$$\langle L(H), \beta\rangle = \frac{1}{2}\langle c\star(\beta\wedge H + H\wedge\beta), d^\dagger H - c\star(H\wedge H)\rangle,$$

系数 $c(t)$ 和张量 Q_{ab} 定义为

$$c(t) = e^{-2\varphi}|\nabla^H\psi|^2 - 2e^{-2\varphi}\sum_a\langle h_a\psi,\psi\rangle((\nabla_a\varphi + e^{-2\varphi}\langle h_a\psi,\psi\rangle)$$
$$Q_{ab}^H = \nabla_c\langle\gamma^{ca}\psi, \nabla_b^H\psi\rangle.$$

定理 11 [19] 设 M 是维数为 n 的自旋流形，考虑其上四元组 $(g_{ij}, \psi, H, \varphi)$ 的流 (6.10)，其中 H 是一个 p-形式，且 $3p = n+1$。则该流保持归一化条件 (6.9)。此外，

(a) 在任意平稳点，旋量场关于联络 ∇^H 协变常数，且通量 H 满足方程

$$dH = 0, \quad d^\dagger H = c\star H\wedge H. \tag{6.11}$$

(b) 流 (6.10) 是弱抛物型的，并且对于任意满足归一化约束 (6.9) 的光滑初始数据，该流总能在某个正时间区间内存在。

(c) 以下 Shi 型估计成立：假设在时间区间 $(0, \frac{\tau}{A})$ 上，我们有以下估计

$$|\nabla\psi|^2, |\nabla^2\psi|, |H|^2, |\nabla H|, |Rm| \le A, \quad \|\varphi\|_{L^\infty} \le \hat{A} \tag{6.12}$$

ˆ 对某个常数 A 成立。则对于任意整数 $q \ge 0$，存在一个仅依赖于 q、n、A 以及 τ 的上界的常数 C_q，使得

$$|\nabla^q Rm| + |\nabla^{q+2}\psi| + |\nabla^{q+2}e^{2\varphi}| + |\nabla^{q+1}H| \le C_q\frac{A}{t^{q/2}} \tag{6.13}$$

在 $[0, \frac{\tau}{A}$ 上一致）。

我们注意到，上述流的提出源于这样一个要求：在平稳点处，通量 H 满足由 $5d$ 和 $11d$ 超引力理论导出的方程。一个关键的新发现是，要求 ψ 协变常数意味着 φ 必须满足一个特定的自身方程。(6.10) 中对 φ 流的选择旨在使该方程在平稳点处得到满足，并使整个系统呈弱抛物型。

此处还可以指出，形式 $Q^H_{\{p,\ell\}}$ 与里奇曲率 $R_{p\ell}$ 之间存在一个恒等式，它推广了 Ammann、Weiss、Witt [1] 以及 He 和 Wang [69],提出的一个类似恒等式

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(Q^H_{\{p,\ell\}}) &= \frac{1}{2}e^{2\varphi}R_{p\ell} + \mathrm{Re}(\langle\psi, \gamma^\ell\nabla_p/D\psi\rangle) - \frac{1}{2}\mathrm{Hess}(e^{2\varphi})_{p\ell}\\ &\quad -\mathrm{Re}(\langle/D\psi, \gamma^\ell\nabla_p\psi\rangle) + \nabla_a\mathrm{Re}(\langle\gamma^{a\ell}\psi, (\lambda|H)_p\psi\rangle) + 2\mathrm{Re}\langle\nabla_p\psi, \nabla_\ell\psi\rangle\end{aligned}$$

该恒等式将度量 $g_{p\ell}$ 的流与里奇流联系起来。

下面的定理更具体地依赖于将旋量流 (6.10) 视为一个耦合系统:

定理 **12** [19] 假设我们有以下估计

$$|\nabla\psi|^2, |\nabla^2\psi|, |H|^2, |\nabla H|, |\nabla^2 H|^{\frac{2}{3}} \leq A, \qquad \|\varphi\|_{L^\infty} \leq \hat{A} \tag{6.14}$$

ˆ 在某个时间区间 $[0,\tau)$ 上成立。那么存在一个常数 C，它仅依赖于 A、A、n、τ 的一个上界，以及

$$\kappa := \int_M |Rm(0)|^q \sqrt{g(0)} + \mathrm{Vol}(M, g(0)) \tag{6.15}$$

对于某个 $q > \frac{n}{2}$，使得在 $[0,\tau)$ 上，一致地有

$$|Rm(t)|_{g(t)} \leq C. \tag{6.16}$$

最后，我们想提及另一个有趣的方向，即洛伦兹流形上的平行旋量。特别是，Murcia 和 Shahbazi[86, 87] 已证明，在双曲洛伦兹四维流形上存在全局平行旋量，会在柯西超曲面上诱导出一个称为“平行旋量流”的双曲流的解，反之亦然。

7 一些进一步的发展

我们此前将讨论限定在受弦理论启发的几何流上，其显著特点是具有某种新的底层特殊几何。近年来，基于更为成熟的几何概念的流也取得了显著进展。其中一个日益受到关注的方向是 G_2 流，或平衡度量的流。Bryant 的G_2 拉普拉斯流的短时存在性和 Shi 型估计已得到确立； [41],引入的 [8, 3, 75, 83, 37], 孤立子以及在特定情形下的收敛性也已得到研究，这在一定程度上借鉴了研究异常流时新近引入的技术。另一个方向是 K¨ ahler-Ricci 流[11], ，尤其是受解析极小模型纲领 [101]启发的问题。针对复 Monge-Amp`ère 方程 [60, 57] 估计的偏微分方程技术 L^∞ 带来了新的格林函数估计，这些估计不再依赖于对里奇曲率 [58]的直接条件。这些进展又帮助回答了关于 K¨ ahler-Ricci 流的直径界和 Gromov-Hausdorff 收敛的一些长期悬而未决的问题，涵盖有限时和长时间解两种情形 [59]。

展望未来，几乎所有来自统一弦理论的流都可以视为与其他场耦合的里奇流这一事实，表明了发展

研究此类流的方法应该非常有价值。在此方向上的努力似乎相对较少，除了与标量场和调和映射的耦合（参见例如 [85, 82, 72, 56] 及其参考文献）。另一方面，在几何和物理中具有重大重要性的一个耦合系统是黎曼曲面上的 Hitchin 系统 [67]。最近在 Vafa-Witten [115] 和 Kapustin-Witten [74] 方程的奇点方面取得了相当大的进展，这些方程可以视为 Hitchin 系统到更高维数的自然推广。参见 [106, 105]。耦合 Ricci 流的类似结果对于这里考虑的流可能真正具有重要作用。

致谢 作者非常感谢他的合作者 Tristan Collins、Teng Fei、Bin Guo、Sebastien Picard 和 Xiangwen Zhang，他们共同努力完成了本文所介绍的工作。他尤其要感谢 Li-Sheng Tseng 向他介绍自己与 Shing-Tung Yau 关于超对称性和上同调的合作成果，这些成果对他影响很大。本综述的部分内容也曾在哈佛大学、加利福尼亚大学欧文分校、都灵大学、奥赛数学实验室、汉堡大学、康涅狄格大学斯托斯校区，以及在斯洛文尼亚波尔托罗举行的“复分析与动力系统”会议上作讲座介绍。

参考文献

[1] B. Ammann、H. Weiss 和 F. Witt，旋量能量泛函：临界点与梯度流，《数学年刊》365 (2016) 1559-1602。[2] K. Becker、M. Becker 和 J.H. Schwarz，《弦理论与 M 理论：现代导论》，剑桥大学出版社，2007年。[3] L. Bedulli 和 L. Vezzoni，平衡度量的一个抛物流。《纯粹与应用数学杂志》723 (2017)，79-99。[4] L. Bedulli 和 L. Vezzoni，闭形式流的稳定性，《数学进展》364 (2020) 107030，共29页。[5] L. Bedulli 和 L. Vezzoni，关于异常流的稳定性，《数学研究快报》29 (2022) 第2期，323-338。[6] D.E. Blair 和 S. Ianus，“辛流形上的临界伴随度量”，《几何中的非线性问题》23-29，《当代数学》51，美国数学会，1986年。[7] R. Bryant，“关于 G_2 结构的一些评述”，《戈科瓦几何与拓扑会议论文集》2005，75-109，国际出版社，2006年。[8] R. Bryant 和 F. Xu，闭 G_2 结构的拉普拉斯流：短时行为，arXiv:1101.2004[9] M. Berger，《具有仿射联络的齐性全纯群及黎曼流形》，《法国数学会通报》第83卷 (1955年) 279-330。[10] P. Candelas、G. Horowitz、A. Strominger 和 E. Witten，超弦的真空构型，《核物理 B》258 (1985) 46-74。

[11] H.D. Cao，将紧致卡拉比流形上的 Kähler 度量变形为 Kähler-爱因斯坦度量，《Invent. Math.》81 (1985)，第2期，359-372。[12] H.D. Cao 和 J. Keller，关于卡拉比问题：一种有限维方法，《欧洲数学会杂志》（JEMS）15 (2013)，第3期，1033-1065。[13] J. Cao、P. Graf、P. Naumann、M. Paun、T. Peternell 和 X. Wu，奇异情形下的厄米-爱因斯坦度量，arXiv: 2303.08773。[14] G.L. Cardoso、G. Curio、G. Dall'Agara、D. L¨ust、P. Manousselis 和 G. Zoupanos，非 Kähler 弦背景及其五个挠类，hep-th/0211118。[15] S.Y. Cheng 和 P. Li，热核估计与特征值下界，《纯粹与应用数学通讯》56 (1981)，327-338。[16] S. Chiossi 和 S. Salamon， $SU(3)$ 与 G_2 结构的内禀挠率，math.DG/0202282，载于《微分几何》，瓦伦西亚，2001年，第115-133页。[17] T. Collins、T. Hisamoto 和 R. Takahashi，逆 Monge-Amp`ère 流及其在 K¨ahler-爱因斯坦度量中的应用，《微分几何杂志》120 (2022) 第1期，51-95。[18] T. Collins、S. Gukov、S. Picard 和 S.T. Yau，特殊拉格朗日圈与卡拉比-丘转变，arXiv: 2111.10355。[19] T. Collins 和 D.H. Phong，带通量的旋量流 I：短时存在性与平滑估计，arXiv: 2212.00814。[20] T. Collins、S. Picard 和 S.T. Yau，合流转变中的切丛稳定性，即将在《纯粹与应用数学通讯》发表。[21] T. Collins、S. Picard 和 S.T. Yau，K¨ahler 类平方中的斯特罗明格系统，arXiv: 2211.03784。[22] R. Conlon 和 F. Rochon，关于 C^n for $n \geq 3$ 的完全 Calabi-Yau 度量新例子，arXiv: 1705.08788[23] E. Cremmer、B. Julia 和 J. Scherk，十一维超引力理论，《物理快报 B》76 (1978)，409-412。[24] P. de Bartholomeis 和 A. Tomassini，广义 Calabi-Yau流形的拉格朗日子流形的马斯洛夫指标，Internat. J. Math. 17 (2006) 第8期，921-947。[25] E. D'Hoker，精确 M 理论解、可积系统与超代数，SIGMA 11 (2015) 609-628。[26] S.K. Donaldson，复代数曲面上的反自对偶杨-米尔斯联络与稳定向量丛，Proc. London Math. Soc. (3) 50 (1985)，第1期，1-26。[27] M.J. Duff，《十一维世界：超引力、超膜与 M 理论》，(1999)《高能物理与宇宙学研究》，IOP Publishing，Taylor & Francis。[28] M.J. Duff 和 K.S. Stelle，D$=11$ 超引力的多膜解，《物理快报 B》253 (1991)，113-118。

[29] F. Englert, 《十一维超引力的自发紧化》, Phys. Lett. B 119 (1982), 339 -342.[30] T. Fei, B. Guo 和 D.H. Phong, 《构造十一维超引力解的一种几何方法》, 《数学物理通讯》369 (2019) no. 2, 811-836.[31] T. Fei, B. Guo 和 D.H. Phong, 《十一维超引力的抛物型降维》, 《分析与偏微分方程》Vol 14 (2021) No. 5, 1333-1361.[32] T. Fei 和 D.H. Phong, 《K ¨ahler-Ricci 流与异常流的统一》, 《微分几何综述》XXIII (2020) 89-103.[33] T. Fei 和 D.H. Phong, 《辛几何流》, arXiv: 2111.14048, 即将在 PAMQ 出版, 刊于纪念 V. Guillemin 的专刊.[34] T. Fei, D.H. Phong, S. Picard 和 X.W. Zhang, 《IIB型弦几何流的估计》, 《数学年刊》382 (2022) 1935-1955.[35] T. Fei, D.H. Phong, S. Picard 和 X.W. Zhang, 《IIA型弦的几何流》, 《剑桥数学杂志》Vol. 9 (2021) No. 3, 693-807.[36] T. Fei, D.H. Phong, S. Picard 和 X.W. Zhang, 《IIA 型流的稳定性及其在辛几何中的应用》, arXiv: 2112.15580, 即将发表于《分析与几何通讯》.[37]M. Fernandez, A. Fino 和 A. Raffero, 《关于G_2结构、特殊度量及相关流》, arXiv:1810.07587.[38] M. Fernandez, S. Ivanov, L. Ugarte 和 R. Villacampa, 《具有非零通量和常膨胀子的非K ¨ahler杂化弦紧化》, 《数学物理通讯》288 (2009), 677-697.[39] M. Fernandez, S. Ivanov, L. Ugarte 和 D. Vassilev, 《具有非零通量和非常膨胀子的非K ¨ahler杂化弦解》, J. of High Energy Phy., Vol 6, (2014) 1-23.[40] A. Fino, G. Grantcharov 和 L. Vezzoni, 《具有环面对称性的Hull-Strominger系统解》, arXiv: 1901.10322.[41] A. Fino 和 A. Raffero, 《关于拉普拉斯 G_2 流的齐性孤立子的几点说明》, 《数学报告》358 (4) (2020) 401-406. [42] P. Freund 和 M. Rubin, 《降维动力学》, Phys. Lett. B 97 (1980), 233 235.[43] T. Friedrich, 《不可积几何的类型》, math.DG/0205149.[44] J.X. Fu 和 S.T. Yau, 《非K ¨ahler流形上带通量超弦理论及复Monge-Amp `ère方程的理论》, 《微分几何杂志》Vol 78, Number 3 (2008), 369-428.[45] J. X. Fu 和 S.T. Yau, 《受弦理论启发的一类Monge-Amp `ère型方程》, 《分析与几何通讯》15 (2007), no. 1, 29-76.[46] M. Garcia-Fernandez, 《非K ¨ahler三维流形上Hull-Strominger系统的T对偶解》, arXiv:1810.04740.[47] M. Garcia-Fernandez, R. Rubio, C.S. Shahbazi, C. Tipler, 《全纯Courant代数丛上的典范度量》, arXiv:1803.01873 [pdf, ps, other] math.DG hep-th math.AG math.SG

[48]M. Garcia-Fernandez 和 R.G. Molina, 《Hull-Strominger系统的Futaki不变量与Yau猜想》, arXiv: 2303.04274.[49] M. Garcia-Fernandez 和 R.G. Molina, 《Hull-Strominger系统的调和度量与稳定性》, arXiv: 2301.08236.[50] P. Gauduchon, 《厄米联络与狄拉克算子》, 意大利数学联合会通报 B (7) 11 (1997) no. 2, suppl. 257-288.[51] J. Gauntlett, J. Gutowski, C. Hull, S. Pakis 和 H. Reall, 《五维最小超引力的所有超对称解》, 《经典与量子引力》20 (2003), 4587. [hep-th/0209114[52]J. Gauntlett, D. Martelli 和 D. Waldram, 《具有内禀挠率的超弦》, arXiv:hep- th/0302158, also doi 《物理评论D辑》.69.086002.[53] J. Gauntlett 和 S. Pakis, 《D $= 11$ Killing旋量的几何》, arXiv:hep-th/0212008, 《高能物理学杂志》039 (2003), 32 pp.[54] M. Grana, R. Minasian, M. Petrini, 和A. Tomasiello, 《广义Calabi-Yau流形上的超对称背景》, 《高能物理杂志》(2004), no. 08, 046, arXiv:hep-th/0406137.[55] B. Guan, 《黎曼流形上全非线性椭圆方程的二阶估计与正则性》, 《杜克数学杂志》163 (2014), 1491-1524.[56] B. Guo, Z. Huang 和 D.H. Phong, 《耦合Ricci流的伪局部性》, 《分析与几何通讯》26 (2018) no. 3, 593-626.[57] B. Guo 和 D.H. Phong, 《关于全非线性偏微分方程的 L^∞ 估计》, arXiv: 2204.12549.[58] B. Guo, D.H. Phong 和 J. Sturm, 《格林函数与复Monge-Amp`ère方程》, arXiv: 2204.12549.[59] B. Guo, D.H. Phong, J. Song 和 J. Sturm, 《K¨ ahler几何中的直径估计》, arXiv: 2209.09428.[60] B. Guo, D.H. Phong 和 F. Tong, "关于复Monge-Amp $L^\infty$ ère方程的`估计", 即将发表于《数学年刊》(2023).[61] S. Gurrieri, J. Louis, A. Micu 和 D. Waldram, 《Calabi-Yau紧化中的镜像对称》, arXiv hep-th/0211102.[62] J.B. Gutowski, D. Martelli 和 H. S. Reall, 《六维最小超引力的所有超对称解》, Class. Quant. Grav. 20 (2003) 50495078, hep-th/0306235[63] R. Hamilton, 《具有正里奇曲率的三维流形》, 《微分几何杂志》17 (1982) no. 2, 255-306.[64] R. Hamilton, 《里奇流中的奇点形成》, 《微分几何综述》Vol. II (1993).[65] R. Harvey 和 H.B. Lawson, 《标定几何》, 《数学学报》148 (1982) 47-157.[66] F. He 和 C. Wang, 《旋量能量泛函梯度流的正则性估计》, 即将发表于《数学研究快报》。

[67] N.J. Hitchin, 《黎曼曲面上的自对偶方程》, Proc. London Math. Soc. 55 (1987年) 59-126.[68] N.J. Hitchin, 《六维中的三形式几何》, 微分几何杂志 55 (2000年) 第 3 期, 547-576.[69] P. Horava 和 E. Witten, 《十一维中的杂化弦与 I 型弦动力学》, 核物理 460 (1995) 506.[70] C. Hull, 《杂化超弦的紧化》, Phys. Lett. 178 B (1986年) 357-364.[71] S. Ivanov, 《杂化超对称性、反常抵消与运动方程》, Phys. Lett. B 685 (2010年) 190-196.[72] F. Johne, 《扩展里奇流系统的手术》, 图宾根大学论文（2019年）。[73] D. Joyce, 《具有特殊全纯性的紧流形》, 牛津数学专著, 牛津大学出版社, 牛津, 2000年。[74] A. Kapustin 和 E. Witten, 《电磁对偶与几何朗兰兹纲领》, 数论与物理通讯 1 (2007年) 1-236.[75] S. Karigiannis, 《 G $G2$ 结构的流, I 》, 数学季刊 60(4) (2009), 487-522.[76] N. Klemyatin, 《厄米流形的收敛性与 IIB 型流》, arXiv:2209.00312.[77] N. Klemyatin, 《IIA 型流形的收敛性及其在 IIA 型流中的应用》, arXiv: 2210.05082.[78] H.V. L^e 和 G.F. Wang, 《紧辛流形上的反复化里奇流》, 《纯粹与应用数学杂志》530 (2001) 17-31.[79] Y. Li, 《C^3, 上的一个新的完备卡拉比-丘度量》, arXiv: 1705.07026.[80] J. Li 和 S.T. Yau, 《带挠率的超对称弦理论的存在性》, 微分几何杂志 70 (2005), 第 1 期, 143-181.[81] A. Lichnerowicz, 《联络与整体性群的整体理论》, Cremonese 出版社, 罗马（1955年） 15+282页。[82] B. List, 《扩展里奇流系统的演化》, 《分析与几何通讯》16 (2008) 第 5 期, 1007-1048.[83] J. Lotay 和 Y. Wei, 《闭 G 2 结构的拉普拉斯流: Shi 型估计、唯一性与紧致性》, 几何与泛函分析, 27(1) (2017年), 165-233.[84] M.L. Michelsohn, 《复几何中特殊度量的存在性》, 《数学学报》149（1982年）261-295.[85] R. M¨uller, 《与调和映射热流耦合的里奇流》, 博士论文, 2009年。[86] A. Murcia 和 C.S. Shahbazi, 《三维柯西超曲面上的平行旋量流》, arXiv: 2109.13906.[87] A. Murcia 和 C.S. Shahbazi, 《整体双曲洛伦兹四维流形上的平行旋量》, arXiv: 2011.02423, 即将发表于《数学杂志》。

[88] D.H Phong、S. Picard 和 X.W. Zhang，《几何流与斯特罗明格系统》，《数学杂志》288 (2018年)，101-113.[89] D.H Phong、S. Picard 和 X.W. Zhang，《异常流》，《分析与几何通讯》26 (2018年) 第 4 期，955-1008.[90] D.H. Phong、S. Picard 和 X.W. Zhang，《异常流与 Fu-Yau 方程》，《偏微分方程年刊》4 (2018年) 第 2 期，第 13 篇，60 页。[91] D.H. Phong、S. Picard 和 X.W. Zhang，《具有 K ¨ahler 固定点的共形平衡度量流》，《数学年刊》374 (2019年) 第 3-4 期，2005-2040.[92] D.H. Phong、S. Picard 和 X.W. Zhang，《幺模李群上的异常流》，《复几何进展》，217-237，《当代数学》735，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2019年。[93] D.H. Phong、N. Sesum 和 J. Sturm，《乘子理想层与 K ¨ahler-里奇流》，《分析与几何通讯》15 (2007年) 613-632.[94] S. Picard 和 C. Suan，《与 Calabi-Yau 流形相关的 G_2 结构流》，arXiv: 2209.03411.[95] S. Picard 和 X.W. Zhang，《紧致 K ̈ahler 流形上的抛物型 Monge-Amp ¨ere 方程》，arXiv: 1906.10235.[96] C. Pope 和 P. van Nieuwenhuizen，《Kahler 流形上的 d $= 11$ 超引力紧化》，《数学物理通讯》122 (1989年) 281-292.[97] C. Pope 和 N. Warner，《拉伸七维球面上的 SU(4) 不变 d $= 11$ 超引力紧化》，Phys. Lett. 150 B 第 5 期，352-356.[98] M. Pujia 和 L. Ugarte，《幂零流形上的异常流》，arXiv: 2004.06744.[99] A. Raffero，《IIA 型流的特殊解》，arXiv: 2107.12264.[100] K. Smith，哥伦比亚大学博士论文，2023年。[101] J. Song 和 G. Tian，《典范测度与 K ¨ahler-里奇流》，《美国数学会杂志》25 (2) (2012) 303-353.[102] J. Streets 和 G. Tian，《Hermitian 曲率流》，《欧洲数学会杂志》13 (2011年)，601-634.[103] A. Strominger，《带挠率超弦》，《核物理 B》274 (1986年)，第 2 期，253-284.[104] G. Szekelyhidi，《 C^n 的退化与卡拉比-丘度量》，arXiv: 1706.00357.[105] Y. Tanaka，《闭四维流形上 Vafa-Witten 方程解的一些有界性性质》，arXiv: 1308.0862.[106] C.H. Taubes，《紧 K ¨ahler 曲面上 Kapustin-Witten 方程与 Vafa-Witten 方程解的奇异集》，arXiv: 1510.07739.[107] A. Tomasiello，《用广义 Dolbeault 算子重新表述超对称性》，《高能物理杂志》（2008年）第 2 期，010，arXiv:0704.2613.[108] A. Tomassini 和 L. Vezzoni，《关于辛半平坦流形》，《数学手稿》125 (2008年) 第 4 期，515-530。

[109] P. Townsend, 十一维超膜再探, Phys. Lett. B 350 (1995), 184 188.[110] L.S. Tseng and S.T. Yau, 广义上同调与超对称性, 《数学物理通讯》 326 (2014), no. 3, 875885.[111] L.S. Tseng and S.-T. Yau, 辛流形上的上同调与霍奇理论：I, 微分几何杂志 91 (2012), no. 3, 383416.[112] L.S. Tseng and S.T. Yau, 辛流形上的上同调与霍奇理论：II, 微分几何杂志 91 (2012), no. 3, 417443.[113] K. Uhlenbeck and S. T. Yau, 稳定向量丛中厄米特-杨-米尔斯联络的存在性, 纯粹与应用数学通讯 39 (1986年), no. S, suppl., S257-S293. 数学科学前沿：1985（纽约，1985）。[114] Y. Ustinovskyi, Hermitian 曲率流与曲率正性条件, 普林斯顿大学博士论文，2018年6月。[115] C. Vafa and E. Witten, S对偶的强耦合检验, 《核物理 B》 431 (1994) 3-77.[116] E. Witten, 弦理论在各种维数中的动力学, 《核物理 B》 443 (1995), 85-126. [117] S.T. Yau, 紧致K ¨ahler流形的里奇曲率与复Monge-Amp `ère方程. I, 纯粹与应用数学通讯 31 (1978) 339-411.

电子邮箱地址：
phong@math.columbia.edu 数学系 哥伦比
亚大学，纽约，NY10027