arXiv:2304.02540v1 [math.NT] 5 Apr 2023

广义欧拉示性函数值的分布

Debika Banerjee[a], Bittu Chahal[a], Sneha Chaubey[a], Khyati Khurana[a]

[a] *Department of Mathematics, IIIT-Delhi,New Delhi - 110020, India*

摘要

设 $\Phi_k(n) = |\{(x_1, x_2, \cdots, x_k) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^k ; \gcd(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2, n) = 1\}|$ 是 Cald´eron 等人首次引入的广义示性函数。受 Schoenberg、Erd˝os、Bateman 和 Diamond 关于 $\Phi_1(n)$ 分布的经典研究启发，我们证明了任意 $k \geq 1$ 下 $\Phi_k(n)$ 的联合分布结果。此外，我们还给出了 $\Phi_k(n)$ 的极值阶。

关键词：欧拉函数、广义示性函数、佩龙公式、极值阶、狄利克雷特征。

2020年数学主题分类：11N60、11N64、11M06。

1. 引言

数论中的一个重要函数是欧拉函数 $\phi(n)$，它统计不超过 n 且与 n 互素的整数个数。关于 $\phi(n)$ 的取值分布问题长期以来一直受到关注，文献中已有若干相关结果。概率数论中最经典且最早为人所知的结果之一归功于 Schoenberg [17]，他研究了 $\phi(n)$ 的取值分布，并证明存在一个连续单调n函数 f，满足 $f(0) = 0$ 且 $f(1) = 1$，使得

$$\frac{1}{x}|\{n \leq x; \frac{\phi(n)}{n} \leq \alpha\}| \to f(\alpha) \;\; 0 \leq \alpha \leq 1; \text{ as } x \to \infty. \tag{1.1}$$

Erd˝os [8] 在 [20] 和[21]中研究了分布函数 $f(1/\alpha)$，并得到了更精确的误差项。特别是，这些作者研究了极限函数

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}|\{n \leq x : \frac{n}{\phi(n)} \geq t\}|.$$

Email addresses: debika@iiitd.ac.in (Debika Banerjee), bittui@iiitd.ac.in (Bittu Chahal), sneha@iiitd.ac.in (SnehaChaubey), khyatii@iiitd.ac.in (Khyati Khurana)

关于 $\phi(n)$ 的 r 阶矩分布的问题可追溯至 Chowla [3]；Walfisz 等人在 [16, 19]中针对特殊情形改进了误差项。随后，Liu 在 [10], 中研究了 $\phi(n)$ 的 r 阶矩误差项的平均值估计。此后，[13, 14, 15], 中的一系列论文对 $\left(\frac{\phi(n)}{n}\right)^{-1}$ 的黎斯平均进行了进一步分析；作者首先对 k 阶黎斯平均 [13] 的误差项提出了猜想，随后改进了对误差项的估计 [14, 15]。Martin 等人在 [11], 中研究了 $\left(\frac{\phi(n)}{n}\right)^{-1}$ 的加权平均，并证明了分布函数的存在性

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}|\{n\le x : K(n)\frac{n}{\phi(n)}\le u\}|,$$

对于某个显式函数 $K(n)$。注意，函数 $K(n)\ \frac{n}{\phi\ n}$ 出现在椭圆曲线上点数平均值的渐近公式中。

回到 (1.1)，利用分布函数 $f(\alpha)$ 的存在性，Erd˝os [7] 于 1945 年证明了使得 $\phi(m)\ \le\ n$ 等于 $cn + o(n)$ 的整数 $M(n)$ 的个数。常数 $c =$ $\zeta(2)\zeta(3)\ \zeta(6)$ 由 Dressler [6] 计算得出。Bateman 导出了一个渐近公式 [1]，由

$$M(y) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}y + O\left(y\ \exp(-(1-\epsilon)(1/2\log y\log\log y)^{1/2})\right).$$

函数 $M(y)$ 计算位于半无限水平带$\{(s,t):\ 0<s<\infty, 0<t\le y\}$. 中的点 $(n,\phi(n))$ 的个数。后来，Diamond [5] 研究了矩形的问题。他研究了函数 $\psi(x,y)$，该函数计算位于矩形 $(0,x]\times(0,y]$ 中的点 $(n,\phi(n))$ 的个数，并证明了

$$\psi(x,y) = xg(y/x) + O\left(y\exp(-(c\log ey\log\log e^2y)^{1/2})\right),$$

其中，g 是在 $(0,1)$ 上由围道积分确定的连续递增函数。

本文旨在研究关于 $\Phi_k(n)$ 的上述类似分布问题。函数 $\Phi_k(n)$ 是 k 元组集合的基数

$$S := \{(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^k\ ;\ \gcd(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2,n)=1\}.$$

有时，在研究丢番图方程的解时，研究该方程的非解集合也很重要。集合 S 是丢番图方程 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2=n$ 的非解集合的子集，最早于 [4]中引入。函数

$$\Phi_k(n) = |\{(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^k\ ;\ \gcd(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2,n)=1\}|. \tag{1.2}$$

也可以看作欧拉函数的一种推广。此前已有对欧拉函数的类似函数和推广的研究；例如，参见 [9] 和 [22], 以及 [4]中的参考文献。一个著名的推广是约当函数，以 Camille Jordan 命名。其定义为

$$\begin{aligned} J_k(n) &:= |\{(a_1, a_2, \cdots, a_k);\ 1 \le a_i \le n;\ \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_k, n) = 1\}| \\ &= n^k \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right). \end{aligned}$$

显然 $\Phi_1(n) = J_1(n) = \phi(n)$。此外，对于 $k = 2$、4 和 8， $\Phi_k(n)$ 分别与 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上的高斯整数环、四元数环和八元数环中环的单位的数目相吻合。更精确地说， $\Phi_2(n)$（文献中记为 GIphi(n) [2] ）表示模 n的简化剩余系中高斯整数 $\mathbb{Z}[i]$ 的数目。在 [4] 中已证明，函数 $\Phi_k(n)$ 对每个 k 都是积性的，并且根据 n 的素数幂分解有如下显式公式：对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_k(n) = \begin{cases} n^{k-1}\phi(n) & \text{if } k \text{ is odd}, \\ n^{k-1}\phi(n) \prod_{\substack{p|n \\ p>2}} \left(1 - \frac{(-1)^{\frac{k(p-1)}{4}}}{p^{\frac{k}{2}}}\right) & \text{if } k \text{ is even}. \end{cases} \tag{1.3}$$

此外， $\Phi_k(n)$ 可改写为

$$\Phi_k(n) = \begin{cases} n^{k-1}\phi(n) & \text{if } k \equiv 1 \pmod 2, \\ n^{k-1}\phi(n) \prod_{\substack{p|n \\ p>2}} \left(1 - \frac{1}{p^{\frac{k}{2}}}\right) & \text{if } k \equiv 0 \pmod 4, \\ n^{k-1}\phi(n) \prod_{\substack{p|n \\ p\equiv 1 \pmod 4}} \left(1 - \frac{1}{p^{\frac{k}{2}}}\right) \prod_{\substack{p|n \\ p\equiv -1 \pmod 4}} \left(1 + \frac{1}{p^{\frac{k}{2}}}\right) & \text{if } k \equiv 2 \pmod 4. \end{cases} \tag{1.4}$$

作者还推导了求和函数 $\sum_{n\le x} \Phi_k(n)$ 的渐近公式。

1.1. 主要结果。

对任意实数 β，我们定义量

$$\phi_{\Phi_k,\beta}(x, y) = |\{n \le x;\ \ \frac{\Phi_k(n)}{n^\beta} \le y\}|. \tag{1.5}$$

注意，$\frac{1}{x}\phi_{\Phi_k,\ \beta}(x, y)$ 是满足 $(n, \Phi_k(n))$ 位于 s-t 平面上的曲线 $t = s^\beta y$ 下方的整数 $n \le x$ 的比例。上述量可以改写为

$$\phi_{\Phi_k,\beta}(x, y) = \begin{cases} |\{n \le x;\ \ \frac{\phi(n)}{n^\delta} \le y\}| & \text{if } k \text{ is odd}, \\ |\{n \le x;\ \ \frac{\phi(n)\alpha_k(n)}{n^\delta} \le y\}| & \text{if } k \text{ is even}. \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 $\delta=\beta-(k-1)$，而 $\alpha_k(n)$ 是由下式给出的乘性函数

$$\alpha_k(p^m)=\begin{cases}1 & \text{if } p=2,\\ \left(1-\frac{(-1)^{\frac{k(p-1)}{4}}}{p^{\frac{k}{2}}}\right) & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{1.7}$$

对任意 $m\geq 1$。令

$$R_{k,\beta}(z)=\begin{cases}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(\frac{p}{p-1}\right)^z\right) & \text{if } k \text{ is odd,}\\ \prod_p\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(\frac{p}{p-1}\right)^z\alpha_k(p)^{-z}\right) & \text{if } k \text{ is even.}\end{cases} \tag{1.8}$$

在本文余下部分中，我们使用记号 $\alpha=\frac{y}{x}$。记号 $x_{\beta,k}$ 表示一个正实数，其在不同出现处的取值可能不同。类似地，$\varepsilon>0$ 表示一个任意小的正实数，其在不同出现处的取值可能不同。我们将使用值$\delta=\beta-(k-1)$。我们的第一个主要结果如下定理所述：

定理 1.1. 对于满足 $y=\frac{(\log((1-\delta)^{-1}+\varepsilon^{-4}x^{1-\delta}))}{c_k\kappa^4}$ 的 $0<\delta<1$，对于任意小的 $\varepsilon>0$ 和 $R_{k,\beta}$（定义见 (1.8)），存在一个正数 p_k，使得

$$\phi_{\Phi_k,\beta}(x,y)=R_{k,\beta}\left(\frac{1}{(1-\delta)}\right)y^{\frac{1}{(1-\delta)}}+O_\delta\left(y^{\frac{1}{(1-\delta)}}\exp\left(-\sqrt{p_k\log y\log\log y}\right)\right),$$

对所有 $x\geq x_{\beta,k}$ 均成立。

对于 y 的其他取值，我们得到以下估计。

定理 1.2. 对于满足 $0<y\leq x$ 且 $y\neq\frac{(\log((1-\delta)^{-1}+\varepsilon^{-4}x^{1-\delta}))}{c_k\kappa^4}$ 的 $0<\delta<1$，对于任意小的 $\varepsilon>0$，存在一个正数 p'_k，使得

$$\phi_{\Phi_k,\beta}(x,y)\ll_\delta x^{1-(1-\delta)\varepsilon}y^\varepsilon\exp\left(-\sqrt{p'_k\log x\log\log x}\right),$$

对所有 $x\geq x_{\beta,\ k}$。

注意，对于 $0<\delta<1$，若 $y\geq x$，则 $\phi_{\Phi_k,\ \beta}(x,y)$ 的值为 $=\lfloor x\rfloor$。

定理 1.3. 对于 $\delta<0$ 和 $0<\alpha<1$，任给任意小的 $\varepsilon>0$，存在一个正常数 q_k，使得

$$\phi_{\Phi_k,\beta}(x,y)\ll_\delta x^{\frac{1}{2}+(1-\delta)\varepsilon}y^{\frac{1}{2(1-\delta)}-\varepsilon}\exp\left(-\sqrt{q_k\log x\log\log x}\right),$$

对 $x\geq x_{\beta,\ k}$。

特别地，对于 $\delta=0$，即 $\beta=k-1$，我们得到

定理 1.4. 对于 $0<\alpha<1$，存在一个正常数 r_k，使得

$$\phi_{\Phi_k,k-1}(x,y)=R_{k,k-1}(1)y+O\left(y\exp\left(-\sqrt{r_k\log y\log\log y}\right)\right),$$

对于 $x\geq x_{\beta,\ k}$。

将 $k=1$ 代入上述定理后，我们得到 Diamond 的 [5] 结果。

推论 1.1。对于 $\beta=0$和 $0<\alpha<1$，有

$$\phi_{\Phi_1,0}(x,y)=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}y+O\left(y\exp\left(-\sqrt{c\log y\log\log y}\right)\right).$$

剩下唯一需要考虑的情形是 $\delta<0$ 和 $\alpha\geq 1$。

定理 1.5。对于 $\delta<0$ 和 $\alpha\geq 1$，有

$$\phi_{\Phi_k,\beta}(x,y)=R_{k,\beta}\left(\frac{1}{(1-\delta)}\right)y^{\frac{1}{(1-\delta)}}+O_\delta(x\alpha^{\frac{1}{\log x}}(\log x\log\log x)^{\frac{1}{2}}),$$

当 $x(\log\ x\log\log\ x)^{\frac{1}{2}}<e^{1-\delta}y^{\frac{1}{1-\delta}-\ \frac{1}{\log^{\alpha}x}}$时，否则

$$\phi_{\Phi_k,\ \beta}(x,y)\ll_\delta x$$

对所有 $x\geq x_{\beta,\ k}$。

1.2. 关于证明的说明。

证明主要包含三个步骤。首先，我们研究二变量解析函数$F_{k,\ \beta}(s,z)\ =\ \sum_{n\geq 1}n^{-s+\beta z}\Phi_k(n)^{-z}$，计算其在 k为奇数或偶数时不同的欧拉乘积表示，并对$F_{k,\ \beta}(s,\ z)\ \zeta(s+z-\delta z)$给出界。下一步实质上是关键步骤，旨在建立$F_{k,\ \beta}(s,z)$的系数平均值的渐近公式。仔细应用有效 Perron 公式、关于ζ 函数的界，以及第一步得到的估计，有助于实现这一目标。这也是证明方法与 Diamond [5] 在研究通常的欧拉函数时所用方法不同之处。Diamond 使用了以下积分恒等式

$$\int_1^{\alpha x}\Phi(x,u)\frac{du}{u}=\frac{x}{2\pi i}\int_\Gamma\prod(1-z,z)\frac{\alpha^z}{z^2(1-z)}\,dz+O(x\ \exp(-\sqrt{c'\log x\log\log x})),\qquad(1.9)$$

此后使用差分法得到了他的分布结果。我们没有为广义示性函数建立类似的关系 (1.9)。相反，使用我们的渐近公式和求和公式

$$|h(y)-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT'}\frac{y^z}{z}dz|\ll\frac{y^a}{|\log y|}\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right)\quad(y\neq 1),\qquad(1.10)$$

其中 $h(y)$ 为 $=1$、$1/2$ 或 0，分别取决于 $y>1$、$y=1$ 和 $0<y<1$，我们得出了结果。上述恒等式使我们能够避免使用差分法。在最后一步，我们考察步骤 2 中针对 δ 和 α 不同区间所得到的误差项，并应用 Perron（命题 4.7）得到主要定理。

1.3. 极值阶的结果。

本文最后陈述关于 $\Phi_k(n)$ 的最大阶与最小阶的结果。对于算术函数 f 和一个非递减函数 g，若对某个 x_0，所有 $x \geq x_0$ 都满足其为正，则称 g 是 f 的最大阶（分别称为最小阶），当且仅当

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \quad \left(\text{resp. } \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1\right).$$

注意，$\phi(n)$ 的最大阶为 n，最小阶为 $e^{-\gamma} n \log\log n$ [18, 第 115] 页。

定理 1.6. 对任意 $k \geq 1$，$\Phi_k(n)$ 的最大阶为 n^k。

$\Phi_k(n)$ 的最小阶取决于 k 的奇偶性，具体如下：

定理 1.7. $\Phi_k(n)$ 的最小阶为

$$\begin{cases} \frac{e^{-\gamma} n^k}{\log\log n}, & \text{if } k \equiv 1 \pmod 2, \\ \left(\frac{2^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}-1}\right) \zeta\left(\frac{k}{2}\right)^{-1} \frac{e^{-\gamma} n^k}{\log\log n} & \text{if } k \equiv 0 \pmod 4, \\ L\left(\frac{k}{2}, \chi_1\right)^{-1} \frac{e^{-\gamma} n^k}{\log\log n} & \text{if } k \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

2. 组织结构

在第 4 节中，我们回顾了素数和求和公式的一些关键结果，这些结果将在第 6 节所阐述的关键引理证明以及第 8 节的极值阶中用到。在第 5.1 小节中，我们介绍生成函数。在第 5.2 小节中，我们证明了第 5.1 小节所定义的生成函数中各函数的上界。在第 6 节中，我们推导了求和函数的渐近公式；这些也是证明主要定理所需的关键结果。在第 7 节中，我们给出主要定理的证明。最后，在第 8 节中，我们推导出定理 1.6 和定理 1.7 的证明。

3. 资助

本研究得到大学拨款委员会、高等教育部、印度政府的资助：拨款编号 191620205105 授予 K.K.]，以及科学与工程研究委员会、科学技术部、印度政府的资助：拨款编号 SB/S2/RJN-053/2018 授予 S.C.]。作者感谢审稿人对论文早期版本提出的宝贵建议。

4. 预备知识

本节回顾了推导主要定理所需的若干关键结果。其中一些结果可从早期研究中获得，另一些则需要证明。我们首先总结梅滕斯关于依赖于素数的量的渐近行为的结果。

命题 4.1. 对所有 $x \geq 2$,

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + R(x),$$

其中 $R(x) = O(1)$。此外,

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + b_0 + O\left(\frac{1}{\log x}\right), \tag{4.1}$$

其中 $b_0 = 1 - \log \log 2 + \int_2^\infty \frac{R(u)}{u (\log u)^2} du$。

证明。证明见第 [12, 页 50]。 □

命题 4.1 的直接推论得出梅滕斯公式

命题 4.2。对于 $x \geq 2$,

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right),$$

其中 γ 是欧拉常数。

证明。见第 [18, 页 19]。 □

命题 4.3. 对于 $x \geq 2$ and $j \geq 2$,

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p^j}\right) = \zeta(j)^{-1} + O\left(\frac{1}{x^{j-1}}\right).$$

证明. 该证明由以下恒等式得出

$$\log\zeta(j) = -\sum_{p\le x}\log\left(1-\frac{1}{p^j}\right) + O\left(\int_x^\infty \frac{1}{t^j}dt\right).$$

□

命题 4。 4. 设 χ_1 为模 4 的非主狄利克雷特征。对于 $x \ge 2$ 和 $j \ge 1$,

$$\prod_{p\le x}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^j}\right) = L(j,\chi_1)^{-1} + \begin{cases} O\left(\frac{1}{x^{j-1}}\right) & \text{if } j>1, \\ O\left(\frac{1}{\log x}\right) & \text{if } j=1. \end{cases}$$

证明。证明很简单。 □

接下来，我们总结求和公式。

命题 4.5。对于任意正的 a、T、T'，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT'}\frac{y^s}{s}ds = h(y) + O\left(\frac{y^a}{|\log y|}\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right)\right) \quad (y\ne 1),$$

其中 $h(y)$ 定义如下:

$$h(y) = \begin{cases} 1 & y>1, \\ \frac{1}{2} & y=1, \\ 0 & 0<y<1. \end{cases}$$

证明。证明见 [18, 第 218] 页。 □

作为命题 4.5 的直接应用，我们得到佩龙公式。设 $f(n)$ 为算术函数， $F(s)$ 为其狄利克雷级数，绝对收敛横坐标为 σ_a。设 $A(x)$ 为规范化求和函数

$$A(x) = \sum_{n\le x}{}' f(n),$$

其中 $\sum'$ 表示当 $x\in\mathbb{N}$ 时 $f(n)$ 的系数为 $\frac{1}{2}$。

Prop 命题 4.6（佩龙公式）。对于 $a > \max(0,\sigma_a)$， $T\ge 1$ 和 $x\ge 1$，我们有 e

$$A(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT} F(s)\ x^s\frac{ds}{s} + O\left(\frac{x^a}{T}\sum_{n\ge 1}\frac{|f(n)|}{n^a|\log(x/n)|}\right).$$

证明。该证明由命题 4.5 得出。 □

为处理式 (1.5) 中的计数函数，我们对任意实值算术函数 f 以及 x、$y \geq 1$、$z \in \mathbb{C}$ 引入一个一般计数函数，

$$\phi_f(x,y) := \sum_{\substack{n \leq x \\ f(n) \leq y}} 1 = |\{n \leq x; \quad f(n) \leq y\}|,$$

在前面的引理中，我们利用求和函数估计 $\phi_f(x,y)$

$$A_z(x) = \sum_{n \leq x} f(n)^{-z}. \tag{4.2}$$

命题 4.7. 设 f 是任意实值算术函数。另设对每个 $n \geq 1$，都有 $f(n) \geq 0$。那么，对任意 U、$U' \geq 1$ 和 $b > 0$，有

$$\phi_f(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iU}^{b+iU'} A_z(x) \frac{y^z}{z} dz + O\left(y^b \sum_{n \leq x} f(n)^{-b} \left(\frac{1}{U} + \frac{1}{U'} \right) \right).$$

其中 $A_z(x)$ 如 (4.2) 中所定义。

证明. 该证明直接由命题 4.5 及以下事实得出：

$$\int_{b-iU}^{b+iU'} \left(\sum_{n \leq x} f(n)^{-z} \right) \frac{y^z}{z} dz = \sum_{n \leq x} \int_{b-iU}^{b+iU'} f(n)^{-z} \frac{y^z}{z} dz.$$

□

在应用佩龙公式时，我们将使用以下关于黎曼ζ函数的估计。当 $|t| \geq 1$ 足够大时，

$$\zeta(\sigma + it) \ll \begin{cases} |t|^{\varepsilon} & \sigma \geq 1, \\ |t|^{\frac{1}{2}(1-\sigma)} & 0 < \sigma < 1, \\ |t|^{\frac{1}{2}-\sigma} & \sigma \leq 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

最后，我们推导系数 $\alpha_k(p)$ 的界。由 (1.7) 可知，当 $k \equiv 2 \pmod 4$ 且 $p \equiv 3 \pmod 4$ 时，$\alpha_k(p) \leq \left(1 + 2^{-k/2}\right)$，而 $\alpha_k(p) \leq 1$；否则则相反。类似地，可得下界

$$\alpha_k(p) \geq \begin{cases} 1 & \text{if } k \equiv 2 \pmod 4 \text{ and } p \equiv 3 \pmod 4, \\ \left(1 - \frac{1}{2^{k/2}}\right) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

综合以上结果，我们得到

Prop 命题 4.8. 对任意素数 p 以及在 (1.7 中定义的算术函数 α_k)

$$\left(1 - \frac{1}{2^{k/2}}\right) \leq \alpha_k(p) \leq \left(1 + \frac{1}{2^{k/2}}\right).$$

5. 初步步骤

5.1. 生成函数。

令 $s=\sigma+it$ 且 $z=\xi+i\eta$ 是复变量。令 $S_\alpha=\{(s,z):\ \sigma+(1-\delta)\xi>\alpha\}$，定义 e

$$F_{k,\beta}(s,z)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s+\beta z}\Phi_k(n)^{-z}.$$

该级数在 S_1 上收敛，因为 $\Phi_k(n)\gg n^k/(\log\log n)^2$。由于 $\Phi_k(n)^{-z}$ 是积性函数，因此 $F_{k,\ \beta}$在 S_1 上有欧拉乘积表示，其形式取决于 k的奇偶性。

情形 (1)：当 k为奇数时，我们在 S_1 上得到 $F_{k,\ \beta}$ 的欧拉乘积表示，形式如下

$$\begin{aligned}
F_{k,\beta}(s,z)&=\prod_p\{1+p^{-s+\delta z}\phi(p)^{-z}+p^{-2s+2\delta z}\phi(p^2)^{-z}+p^{-3s+3\delta z}\phi(p^3)^{-z}+\cdots\}\\
&=\prod_p\{1+p^{-s+\delta z}(p-1)^{-z}(1+p^{-s+\delta z-z}+p^{-2s+2\delta z-2z}+\cdots)\}\\
&=\prod_p\{1+p^{-s+\delta z}(p-1)^{-z}(1-p^{-s+\delta z-z})^{-1}\}\\
&=\prod_p\{1-p^{-s+\delta z-z}+p^{-s+\delta z}(p-1)^{-z}\}\zeta(s+z-\delta z)\\
&=G_{k,\beta}(s,z)\zeta(s+z-\delta z),
\end{aligned}\tag{5.1}$$

其中 ζ 是黎曼ζ函数。

情形（2）当 k 为偶数时， S_1 上的 $F_{k,\ \beta}$ 的欧拉乘积表示计算为

$$\begin{aligned}
F_{k,\beta}(s,z)&=\prod_p\{1+\alpha_k(p)^{-z}(p^{-s+\delta z}\phi(p)^{-z}+p^{-2s+2\delta z}\phi(p^2)^{-z}+p^{-3s+3\delta z}\phi(p^3)^{-z}+\cdots)\}\\
&=\prod_p\{1+p^{-s+\delta z}(p-1)^{-z}\alpha_k(p)^{-z}(1+p^{-s+\delta z-z}+p^{-2s+2\delta z-2z}+\cdots)\}\\
&=\prod_p\{1+p^{-s+\delta z}(p-1)^{-z}\alpha_k(p)^{-z}(1-p^{-s+\delta z-z})^{-1}\}\\
&=\prod_p\{1-p^{-s+\delta z-z}+p^{-s+\delta z}(p-1)^{-z}\alpha_k(p)^{-z}\}\zeta(s+z-\delta z)\\
&=I_{k,\beta}(s,z)\zeta(s+z-\delta z).
\end{aligned}\tag{5.2}$$

5.2. $I_{k,\ \beta}(s,z)$ 和 $G_{k,\ \beta}(s,z)$ 的上界

在受$F_{k,\beta}(s,z)$全纯性启发的区域内，为$I_{k,\beta}(s,z)$和$G_{k,\beta}(s,z)$给出明确的上界，不仅是我们证明中所必需的，也是自然而然的要求。我们考虑的区域如下：对于 $r\geq 0$，令

$$S_r^+=\{(\sigma+it,\xi+i\eta);\ \sigma\geq 0,\ (1-\delta)\xi\geq 0;\ \sigma+(1-\delta)\xi>r\}.$$

引理 5.1. 若 k 为偶数，则定义$I_{k,\beta}(s,z)$的乘积收敛，并在S_0^+上定义了关于 s 和 z 的解析函数。此外，

$$I_{k,\beta}(s,z) \ll \begin{cases} \exp\left(\dfrac{M_k \log|\eta|}{\log\log|\eta|}\right) & \text{if } \sigma+(1-\delta)\xi \geq 1-\log\log|\eta|/\log|\eta| \text{ and } \log\log|\eta| \geq 10, \\ 1 & \text{if } \sigma+(1-\delta)\xi \geq \frac{1}{2} \text{ and } |\eta| < \exp\exp 10. \end{cases}$$

这些估计的成立与 t无关。

证明。利用命题（4.8）中关于 $\alpha_k(p)$的下界，对于 $\xi>0$，显然有

$$|\alpha_k(p)^{-z}(p-1)^{-z}-p^{-z}| \ll_k (p-1)^{-\xi}. \tag{5.3}$$

命题（4.8）中关于 $\alpha_k(p)$的下界给出了如下估计

$$|\alpha_k(p)^{-z}(p-1)^{-z}-p^{-z}| = \left| z\int_{\alpha_k(p)(p-1)}^{p} u^{-z-1}\,du \right| \ll_k |z|(p-1)^{-\xi-1}. \tag{5.4}$$

对于$\log\log|\eta| \geq 10$和 $\sigma+(1-\delta)\xi \geq 1-\varepsilon$，我们将由$I_{k,\beta}(s,z)$定义的乘积分成两部分

$$|I_{k,\beta}(s,z)| = |\prod_{p\leq|\eta|}|.|\prod_{p>|\eta|}|. \tag{5.5}$$

有限部分可按如下方式估计:

$$\begin{aligned} |\prod_{p\leq|\eta|}| &= |\prod_{p\leq\eta}\{1+p^{-s+\delta z}((p-1)^{-z}\alpha_k(p)^{-z}-p^{-z})\}| \leq \prod_{p\leq\eta}\{1+A_k(p-1)^{-\sigma-(1-\delta)\xi}\} \\ &\leq \exp\left(\sum_{p\leq\eta}\{A_k(p-1)^{-\sigma-(1-\delta)\xi}\}\right) \leq \exp\left(A_k + A_k\int_{3/2}^{\eta} v^{-\sigma-(1-\delta)\xi}d\pi(v)\right) \\ &\leq \exp\left(A_k + A_k\int_{3/2}^{\eta} v^{-1+\varepsilon}\frac{dv}{\log v}\right), \end{aligned} \tag{5.6}$$

其中 $A_k = \frac{2^{k+2}}{(2^{k/2}-1)^2}\cdot$将 $w:=\varepsilon\log v$代入（5.6），可得

$$\begin{aligned} |\prod_{p\leq|\eta|}| &\leq \exp\left(A_k + A_k\int_{\varepsilon\log(\frac{3}{2})}^{\varepsilon\log(|\eta|)}\frac{e^w}{w}\,dw\right) \\ &= \exp\left(A_k + A_k\left(\int_{\varepsilon\log(\frac{3}{2})}^{1}\frac{e^w}{w}\,dw + \int_{1}^{\frac{\varepsilon\log|\eta|}{2}}\frac{e^w}{w}\,dw + \int_{\frac{\varepsilon\log|\eta|}{2}}^{\varepsilon\log|\eta|}\frac{e^w}{w}\,dw\right)\right) \\ &= \exp(A_k + A_k(I_1+I_2+I_3)). \end{aligned} \tag{5.7}$$

第一个积分估计为

$$I_1 = \int_{\varepsilon\log(\frac{3}{2})}^{1}\frac{e^w}{w}\,dw \leq \frac{e}{\varepsilon\log\frac{3}{2}}\int_{\varepsilon\log(\frac{3}{2})}^{1}dw \leq \frac{e}{\varepsilon\log\frac{3}{2}} \ll \frac{1}{\varepsilon}. \tag{5.8}$$

接下来，简单应用分部积分即可得到式（5.7）中第二个积分的估计

$$I_2 = \int_1^{(1/2)\varepsilon \log|\eta|} \frac{e^w}{w}\, dw \le e^{(1/2)\varepsilon \log|\eta|}. \tag{5.9}$$

对于第三个积分，我们有

$$|I_3| = \int_{(1/2)\varepsilon \log|\eta|}^{\varepsilon \log|\eta|} \frac{e^w}{w}\, dw \le \frac{e^{\varepsilon \log|\eta|}}{\varepsilon \log|\eta|} + e^{(1/2)\varepsilon \log|\eta|} \frac{1}{\varepsilon \log|\eta|} \ll \frac{e^{\varepsilon \log|\eta|}}{\varepsilon \log|\eta|}. \tag{5.10}$$

从（5.8）、（5.9）和（5.10）中最优地选取 $\varepsilon = \log\log|\eta| / \log|\eta|$，并将其代入（5.7），得到

$$\Big|\prod_{p\le|\eta|}\Big| \ll \exp\left(\frac{A_k \log|\eta|}{\log\log|\eta|}\right).$$

接下来，我们考虑（5.5）中的无穷部分，其中 $B_k = 2\left(\frac{2^{k/2}}{2^{k/2}-1}\right)^3$

$$\begin{aligned}
\Big|\prod_{p>|\eta|}\Big| &\le \Big|\prod_{p>|\eta|}\{1 + p^{-s+\delta z}((p-1)^z \alpha_k(p)^{-z} - p^{-z})\}\Big| \le \prod_{p>|\eta|}\{1 + B_k|z|p^{-\sigma+\delta\xi}(p-1)^{-\xi-1}\} \\
&\le \prod_{p>|\eta|}\{1 + C_k|z|(p-1)^{-\sigma-(1-\delta)\xi-1}\} \le \exp\left(\sum_{p>|\eta|} C_k|z|(p-1)^{-\sigma-(1-\delta)\xi-1}\right) \\
&\le \exp\left(C_k|z|(|\eta|-1)^{-2+\varepsilon} + C_k|z|\int_{|\eta|}^{\infty} v^{-2+\varepsilon} d\pi(v)\right) \le \exp\left(D_k|z|\int_{|\eta|}^{\infty} v^{-2+\varepsilon}\frac{dv}{\log v}\right) \\
&\le \exp\left(\frac{D_k|z||\eta|^{\varepsilon-1}}{(1-\varepsilon)\log|\eta|}\right) = O(1),
\end{aligned}$$

其中 $C_k = 4B_k$，且 $D_k = 2C_k$。对于 $\log\log|\eta| < 10$ 和 $\sigma + (1-\delta)\xi \ge 1/2$，我们有

$$|I_{k,\beta}(s,z)| \le \exp\left(\sum_p C_k|z|(p-1)^{-\sigma-(1-\delta)\xi-1}\right) = O(1).$$

对于任意 $\varepsilon > 0$、$M < \infty$，在每个集合 $S_\varepsilon^+ \cap \{z \text{ 上}: |z| \le M\}$ 乘积一致收敛，因为

$$\begin{aligned}
&\left|\log\left(\prod_{a<p<b}\{1 + p^{-s+\delta z}((p-1)^{-z}\alpha_k(p)^{-z} - p^{-z})\}\right)\right| \ll \sum_{a<p<b}\left(\frac{1}{p^{\sigma-\delta\xi}}\left|\alpha_k(p)^{-z}(p-1)^{-z} - p^{-z}\right|\right) \\
&\ll \sum_{a<p<b}\left(\frac{B_k|\xi|}{(p-1)^{\xi+\sigma-\delta\xi+1}}\right) \to 0
\end{aligned}$$

当 a、$b \to \infty$ 以及（s、z）$\in S_\varepsilon^+ \cap \{z: |z| \le M\}$ 时，一致收敛。因此，该乘积在 S_ε^+ 上定义了关于 s 和 z 的解析函数。

□

类似地，一个 c 并推导函数 $G_{k,\ \beta}(s,z)$ 的上界，此处省略证明 .

引理 5.2. 若 k 是奇数，则定义 $G_{k,\ \beta}(s,z)$ 的乘积收敛，并定义了关于 s 和 z 的解析函数，其定义域为 S_0^+。此外

$$G_{k,\beta}(s,z) \ll \begin{cases} \exp\left(\dfrac{3\log|\eta|}{\log\log|\eta|}\right) & if\ \sigma+(1-\delta)\xi \geq 1-\frac{\log\log|\eta|}{\log|\eta|}\ and\ \log\log|\eta| \geq 10, \\ 1 & if\ \ \sigma+(1-\delta)\xi \geq \frac{1}{2}\ and\ |\eta| < \exp\exp 10. \end{cases}$$

接下来，我们讨论 $s=1-(1-\delta)z$ 这一特定取值，此时可得如下结果。

引理5.3. 对于 $\xi>0$ and $(s,z) \in S_{1-\varepsilon}^+$，存在一个常数 κ，使得

$$I_{k,\beta}(1-(1-\delta)z,z)) \ll \exp\left(\xi\left(\log c_k + 4\log\log\xi + 4\log\frac{\kappa}{e}\right)\right),$$

其中 $c_k=(1-\frac{1}{2^{k/2}})^{-1}$。

证明. 如前所述，我们将乘积 $I_{k,\ \beta}(s,z)$ 分成两部分 $|I_{k,\ \beta}(s,z)| = |\prod_{p\leq\xi}|.|\prod_{p>\xi}|$。第一部分可估计如下:

$$\begin{aligned} |\prod_{p\leq\xi}| &\ll \prod_{p\leq\xi}\{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\xi}\alpha_k(p)^{-\xi}\} \ll \prod_{p\leq\xi}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\xi}\alpha_k(p)^{-\xi}\left\{\left(1-\frac{1}{p}\right)\alpha_k(p)^{\xi}+\frac{1}{p}\right\} \\ &\ll \prod_{p\leq\xi}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\xi}\alpha_k(p)^{-\xi}\left\{\left(1-\frac{1}{p}\right)2^{\xi}+\frac{2^{\xi}}{p}\right\} \ll c_k^{\xi}\prod_{p\leq\xi}\left(\frac{2p}{p-1}\right)^{\xi}, \end{aligned}$$

其中在最后一步，我们使用了命题 4.8 中关于 $\alpha_k(p)$ 的界。利用梅滕斯估计以及命题 4.1 中的 (4.1)，并取 $b_0=\log\frac{\kappa}{e}$，可得

$$\begin{aligned} |\prod_{p\leq\xi}| &\ll c_k^{\xi}\exp\left(\sum_{p\leq\xi}\frac{2\xi}{(p-1)}\right) \ll \exp\left(\xi\left(\log c_k + 4\sum_{p\leq\xi}\frac{1}{p}\right)\right) \\ &\ll \exp\left(\xi\left(\log c_k + 4\log\log\xi + 4\log\frac{\kappa}{e}\right)\right). \end{aligned} \tag{5.11}$$

对于无穷部分，我们有

$$\begin{aligned} |\prod_{p>\xi}| &\ll \prod_{p>\xi}\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\xi}\alpha_k(p)^{-\xi}\right) \\ &= \prod_{p>\xi}\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{\xi}\left(1-\frac{(-1)^{\frac{k(p-1)}{4}}}{p^{\frac{k}{2}}}\right)^{-\xi}\right) \\ &\ll \prod_{p>\xi}\left(1+O\left(\xi p^{-2}\right)\right). \end{aligned} \tag{5.12}$$

这 个无穷乘积有界。结合（5.11）和（5.12）即可得到该结果。 □

Si对于 $G_{k,\beta}(1-(1-\delta)z,z)$，也可以得到类似的界，证明从略。

引理 5.4. 对于 $\xi > 0$ 和 $(s,z) \in S^+_{1-\varepsilon}$，存在一个常数 κ，使得

$$G_{k,\beta}(1-(1-\delta)z,z) \ll \exp\left(\xi\left(2\log\log\xi + 2\log\frac{\kappa}{e}\right)\right).$$

在半平面 $\{z \text{ 中}: \ 0 < \Re(z) \le \lambda\}$, $I_{k,\ \beta}(1-z+\delta z,z)$ 和 $G_{k,\ \beta}(1-z+\delta z,z)$ 均有一个常数作为上界。

引理 5.5. 对任意 $\lambda > 0$，在半平面 $\{z \text{ 中}: \ 0 < \Re(z) \le \lambda\}$,

$$|I_{k,\beta}(1-z+\delta z,z)| = O(1) \quad and \quad |G_{k,\beta}(1-z+\delta z,z)| = O(1).$$

证明。在这里，我们给出函数 $I_{k,\ \beta}(1-z+\delta z,z)$ 的证明。对于 $G_{k,\ \beta}(1-z+\delta z,z)$ 的证明类似。根据定义

$$\begin{aligned}
|I_{k,\beta}(1-z+\delta z,z)| &= \left|\prod_p\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(\frac{p}{p-1}\right)^z\alpha_k(p)^{-z}\right)\right| \\
&= \prod_p\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\Re(z)}\alpha_k(p)^{-\Re(z)}\right) \\
&\le \prod_p\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{p^{k/2}-1}+O\left(\frac{\lambda^2}{(p^{k/2}-1)^2}\right)\right)\right) \\
&\le \prod_p\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{p^{k/2}-1}+O\left(\frac{\lambda^2}{(p^{k/2}-1)^2}\right)\right)\right) \\
&\le \prod_p\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(1+\frac{2\lambda}{p-1}+O\left(\frac{\lambda^2}{(p-1)^2}\right)\right)\right) \\
&\le \prod_p\left(1+\frac{4\lambda}{p^2}+O_\lambda\left(\frac{1}{p(p-1)^2}\right)\right) = O(1).
\end{aligned}$$

□

6. 关键引理

引理 6.1. 设 $x \ge 1$ 为任意实数。那么

$$\sum_{n\le x}\Phi_k(n)^{-z}n^{\beta z} = R_{k,\beta}(z)\frac{x^{1-z+\delta z}}{1-z+\delta z} + O\left(x^{1-b+\delta b}\exp\left(-\sqrt{f_k\log x\log\log x}\right)\right),$$

其中

$$R_{k,\beta}(z) = \begin{cases} G_{k,\beta}(1-(1-\delta)z,z) & \text{if } k \text{ is odd,} \\ I_{k,\beta}(1-(1-\delta)z,z) & \text{if } k \text{ is even.} \end{cases} \tag{6.1}$$

对于矩形中的 $x \geq x_0(k)$ 和 z

$$\left\{ z = b + i\eta : 0 < (1-\delta)b \leq \frac{1}{2}, |\eta| \leq \exp\left(\left(\frac{1}{2} \log x \log\log x \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right\}. \tag{6.2}$$

证明。我们将证明 k 为偶数的情形。奇数 k 的证明类似。应用命题 4.6，取 $a = 1 + \log\log x \log x$ 和 $1 \leq T \ll x$，得到

$$\sum_{n \leq x} \Phi_k(n)^{-z} n^{\beta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} F_{k,\beta}(s,z) \frac{x^s}{s}\, dx + O\left(\frac{x^a}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_k(n)^{-b}}{n^{a-b\beta} |\log \frac{x}{n}|} \right). \tag{6.3}$$

我们首先估计 (6.3) 中的误差项 R。

$$\begin{aligned} R &\ll \frac{x^a}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log\log n)^{2b}}{n^{a+b-b\delta} \log(\frac{x}{n})} \qquad (6.4) \\ &\leq \frac{x^a}{T} \left(\sum_{n \leq \frac{x}{e}} \frac{(\log\log n)^{2b}}{n^{a+b-b\delta}} + \sum_{\frac{x}{e} < n < ex} \frac{(\log\log n)^{2b}}{n^{a+b-b\delta} \log(\frac{x}{n})} + \sum_{n \geq ex} \frac{(\log\log n)^{2b}}{n^{a+b-b\delta}} \right) \\ &\leq \frac{x^a (\log\log x)^{2b}}{T} \left(\sum_{n \leq \frac{x}{e}} \frac{1}{n^{a+b-b\delta}} + \left(\frac{e}{x}\right)^{a+(1-\delta)b} \sum_{\frac{x}{e} \leq n \leq ex} \frac{ex}{|n-x|} + \sum_{n \geq ex} \frac{1}{n^{a+b-b\delta}} \right) \\ &\leq \frac{x^{1-(1-\delta)b}}{T} (\log\log x)^{2b} \log x. \qquad (6.5) \end{aligned}$$

现在我们关注 (6.3) 中的积分，并将其记为 I。为此，我们考虑由线段 $[a-iT, a+iT]$、$[a+iT, c+iT]$、$[c+iT, c-iT]$ 和 $[c-iT, a-iT]$ 组成的围道，其中 $c = 1 - (1-\delta)b - \sqrt{(\log\log x)/(2\log x)}$。由于被积函数在矩形内部的 $s = 1 - (1-\delta)z$ 处有一个一阶极点，根据柯西留数定理，可得

$$\begin{aligned} I =& R_{k,\beta}(z) \frac{x^{1-z+\delta z}}{1-z+\delta z} + \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{a-iT}^{c-iT} + \int_{c-iT}^{c+iT} + \int_{c+iT}^{a+iT} \right\} F_{k,\beta}(s,z) \frac{x^s}{s}\, ds \\ =& R_{k,\beta}(z) \frac{x^{1-z+\delta z}}{1-z+\delta z} + J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned} \tag{6.6}$$

其中 $R_{k,\beta}(z)$ 是留数。其表达式为

$$R_{k,\beta}(z) = \begin{cases} G_{k,\beta}(1-(1-\delta)z, z) & \text{if } k \text{ is odd}, \\ I_{k,\beta}(1-(1-\delta)z, z) & \text{if } k \text{ is even}. \end{cases} \tag{6.7}$$

接下来，我们估计线积分。我们有

$$\begin{aligned} J_3 &\le \frac{1}{T}\int_c^a x^\sigma |\zeta((1-\delta)z+\sigma+iT)||I_{k,\beta}(\sigma+iT,b+i\eta)|\ d\sigma \\ &\le \frac{\exp\left(\dfrac{M_k\log|\eta|}{\log\log|\eta|}\right)}{T}\int_c^a x^\sigma|\zeta(z(1-\delta)+\sigma+iT)|\ d\sigma \\ &\ll \frac{\exp\left(\frac{N_k\log x}{\log\log x}\right)^{1/2}}{T}\int_c^a x^\sigma|\zeta(z(1-\delta)+\sigma+iT)|\ d\sigma. \end{aligned} \tag{6.8}$$

倒数第二步由引理 5.1 得出，因为

$$\sigma+b(1-\delta)\ge c+b(1-\delta)=1-\left(\frac{\log\log x}{2\log x}\right)^{1/2}\ge 1-\frac{\log\log|\eta|}{\log|\eta|}.$$

利用 $\zeta(s)$ 的界 (4.3) 以及上述结果，(6.8) 中的积分可改写为

$$\begin{aligned} \int_c^a x^\sigma|\zeta(z(1-\delta)+\sigma+iT)|\ d\sigma &\ll \left(\int_c^1+\int_1^a\right)x^\sigma|\zeta((1-\delta)z+\sigma+iT)|\ d\sigma \\ &\ll \left(\int_c^1 x^\sigma T^{\frac12(1-\sigma-(1-\delta)b)}\ d\sigma+\int_1^a x^\sigma\ d\sigma\right) \\ &\ll T^{\frac12(1-(1-\delta)b)}\int_c^1\left(\frac{x}{\sqrt{T}}\right)^\sigma\ d\sigma+\int_1^a x^\sigma\ d\sigma \\ &\ll x+x^{1-(1-\delta)b}T^{\frac12\left(\frac{\log\log x}{2\log x}\right)^{1/2}}\exp(-(\frac12\log x\log\log x)^{\frac12}). \end{aligned} \tag{6.9}$$

由此得到估计

$$J_3\ll x\frac{\exp\left(\frac{N_k\log x}{\log\log x}\right)^{1/2}}{T}+\frac{x^{1-(1-\delta)b}\exp(-N_k'(\log x\log\log x)^{\frac12})}{T^{1-\frac12\left(\frac{\log\log x}{2\log x}\right)^{1/2}}}. \tag{6.10}$$

对 J_1 也可得到类似的估计。接下来，我们关注积分 J_2:

$$\begin{aligned} J_2 &\ll x^c\int_{-T}^T\frac{|\zeta((1-\delta)z+c+it)I_{k,\beta}(c+it,z)|}{|c+it|}\ dt \\ &\ll \left(x^{(1-(1-\delta)b)}+x^{1-(1-\delta)b}T^{\frac12\left(\frac{\log\log x}{2\log x}\right)^{1/2}}\right)\exp\left(-\frac{1}{\sqrt2}(\log x\log\log x)^{\frac12}\right)\exp\left(\frac{N_k\log x}{\log_2 x}\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{6.11}$$

其中我们使用了引理 5.1 和 (4.3) 中的界。选取

$$T=x^{(1-\delta)b}\exp((e_k\log x\log\log x)^{\frac12}),$$

由此得到 (6.10) 中 J_1 和 J_3 的以下界:

$$J_1,J_3\ll x^{(1-(1-\delta)b)}\exp(-e_k'(\log x\log\log x)^{\frac12}) \tag{6.12}$$

对于 $x \geq x$（k）。将 (6.7)、(6.11) 和 (6.12) 代入 (6.6)，得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT} F_{k,\beta}(s,z)\frac{x^s}{s}\ ds = R_{k,\beta}(z)\frac{x^{1-z+\delta z}}{1-z+\delta z} + O(x^{(1-(1-\delta)b)}\exp(-f_k(\log x\log\log x)^{\frac{1}{2}}))$$

该结论在 (6.2) 中给出的矩形区域内成立 $x \geq x(k)$。结合 (6.3) 和 (6.4)，即可完成证明。

□

接下来，我们计算 $\phi_{\Phi_k,\ \beta}(x,y)$。为此，我们使用命题 4.7，并选择 $\tau = \exp\left(\frac{1}{2}\log\ x\log\log\ x\right)^{\frac{1}{2}}$。常数 b 将根据 δ 和 α的取值稍后确定。

引理 6.2. 对于 $x \geq x_{\delta,\ k}$，存在正数常数 f_k' 和 q_k，使得

$$\phi_{\Phi_k,\beta}(x,y) = \frac{x}{2\pi i}\int_{b-i\tau}^{b+i\tau} R_{k,\beta}(z)\frac{(\alpha x^\delta)^z}{z(1-(1-\delta)z)}\,dz + E_1,$$

其中， E_1 是由下式给出的误差项

$$E_1 \ll \begin{cases} x^{1-\varepsilon+\delta\varepsilon}y^\varepsilon\exp(-\sqrt{f_k'\log x\log\log x}) & \textit{if } 0\leq\delta\leq 1,\\ x^{\frac{1}{2}+(1-\delta)\varepsilon}y^{\frac{1}{2(1-\delta)}-\varepsilon}\exp(-\sqrt{q_k\log x\log\log x}) & \textit{if } \delta<0 \textit{ and } 0<\alpha<1,\\ e^\delta x\alpha^{\frac{1}{\log x}}(\log x\log\log x)^{\frac{1}{2}} & \textit{if } \delta<0 \textit{ and } 1\leq\alpha. \end{cases}$$

证明. 在命题 4.7 中取 $\Phi_{k(n)}\ n^\beta$ 并令 $b>0$，可得

$$\phi_{\Phi_k,\beta}(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iU}^{b+iU}\left(\sum_{n\leq x}\left(\frac{\Phi_k(n)}{n^\beta}\right)^{-z}\right)\frac{y^z}{z}\,dz + O\left(\frac{y^b}{U}\sum_{n\leq x}\Phi_k(n)^{-b}n^{b\beta}\right). \tag{6.13}$$

情况 (1)：若 $0\leq\delta\leq 1$，则可使用引理 6.1（因为 $(1-\delta)\ \geq 0$蕴含 $b>0$），取 $0<b=\varepsilon$和 $U=\tau$，来计算表达式 (6.13) 中的积分。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\tau}^{b+i\tau}\left(\sum_{n\leq x}\left(\frac{\Phi_k(n)}{n^\beta}\right)^{-z}\right)\frac{y^z}{z}\,dz = \frac{x}{2\pi i}\int_{b-i\tau}^{b+i\tau}R_{k,\beta}(z)\frac{(\alpha x^\delta)^z}{z(1-z+\delta z)}dz$$
$$+ O\left(x^{1-\varepsilon+\delta\varepsilon}y^\varepsilon\exp\left(-\sqrt{f_k'\log x\log\log x}\right)\right).$$

再次运用引理 6.1，式 (6.13) 中的误差项可估计为 $\ll \frac{y^b}{\tau}x^{1-b+\delta b}$ and$0<\alpha<1$，由此得到结论。

情形 (2) 若 $\delta<0$，则有两种情况： $0<\alpha<1$ and $\alpha\geq 1$。

子情形 (1) 若 $0<\alpha<1$，我们将选取 $b = {}_2{}^1\ \cancel{(1-\delta)-}\ \varepsilon$ 和 $U=\tau$ 在引理 6.1 中来计算表达式 (6.13) 中的积分，从而得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\tau}^{b+i\tau}\left(\sum_{n\leq x}\left(\frac{\Phi_k(n)}{n^\beta}\right)^{-z}\right)\frac{y^z}{z}\,dz = \frac{x}{2\pi i}\int_{b-i\tau}^{b+i\tau}R_{k,\beta}(z)\frac{(\alpha x^\delta)^z}{z(1-z+\delta z)}dz$$
$$+ O\left(x^{\frac{1}{2}+(1-\delta)\varepsilon}y^{\frac{1}{2(1-\delta)}-\varepsilon}\exp(-\sqrt{q_k\log x\log\log x})\right).$$

子情形 (2) 对于 $\alpha \geq 1$，我们取 $b = \frac{1}{\log x}$。容易看出存在 $x_\delta \geq 0$使得对所有 $x \geq x_\delta$ 有 $2(1-\delta) < \log x$。我们将应用命题 4.7，其中 $U = \exp((\log x \log\log x)^{\frac{1}{2}})$。则 (6.13) 可计算为

$$\phi_{\Phi_k,\beta}(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b-i\tau}^{b+i\tau} + \int_{b-iU}^{b-i\tau} + \int_{b+i\tau}^{b+iU}\right)\left(\sum_{n\leq x}\left(\frac{\Phi_k(n)}{n^\beta}\right)^{-z}\right)\frac{y^z}{z}\,dz$$
$$+ O\left(\frac{y^b}{U}\sum_{n\leq x}\Phi_k(n)^{-b}n^{b\beta}\right).$$

现在，误差项可以是 $\ll \frac{\alpha^b}{U}x^{1+\delta b}$。对于范围 $[b-i\tau, b+i\tau]$ 内的积分，我们将使用引理（6.1）得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\tau}^{b+i\tau}\left(\sum_{n\leq x}\left(\frac{\Phi_k(n)}{n^\beta}\right)^{-z}\right)\frac{y^z}{z}\,dz = \frac{x}{2\pi i}\int_{b-i\tau}^{b+i\tau}R_{k,\beta}(z)\frac{(\alpha x^\delta)^z}{z(1-z+\delta z)}dz$$
$$+ O\left(x^{1+\delta b}\alpha^b\exp\left(-\sqrt{f_k'''\log x\log\log x}\right)\right).$$

我们通过观察 $|\sum_{n\leq x}\Phi_k(n)^{-b}n^{b\beta}| \ll x^{1+\delta b}$ 和 $|y^z| \leq |(\alpha x)^z| \leq e\alpha^b$ 来估计 $\int_{b-iU}^{b-i\tau}$ 和 $\int_{b+i\tau}^{b+iU}$。因此

$$\left(\int_{b-iU}^{b-i\tau} + \int_{b+i\tau}^{b+iU}\right)\left(\sum_{n\leq x}\left(\frac{\Phi_k(n)}{n^\beta}\right)^{-z}\right)\frac{y^z}{z}\,dz \ll e\alpha^b x^{1+\delta b}(\log x\log\log x)^{\frac{1}{2}}.$$

□

引理 6.3。存在一个绝对正常数 κ，使得对于任意 $\delta \leq 0$，只要满足任意 $y \geq 1$，且对于满足 $0 < y \leq (\log((1-\delta)^{-1}+\varepsilon^{-4}x^{1-\delta}))$ 的 $0 < \delta < 1$，我们都有

$$\frac{x}{2\pi i}\int_{b-i\tau}^{b+i\tau}R_{k,\beta}(z)\frac{(\alpha x^\delta)^z}{z(1-z+\delta z)}dz = R_{k,\beta}\left(\frac{1}{(1-\delta)}\right)y^{\frac{1}{(1-\delta)}} + E_2, \tag{6.14}$$

其中 E_2 是由下式给出的误差项

$$E_2 \ll_\delta \begin{cases} x\exp\left(-4\exp\left(\kappa(c_k\alpha x^\delta)^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}\right) & \text{if } k \text{ is even,} \\ x\exp\left(-2\exp\left(\kappa(\alpha x^\delta)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right) & \text{if } k \text{ is odd.} \end{cases}$$

对于 $x \geq x_{\beta,\ k}$。

证明。我们将考虑 k 为偶数的情况。k 为奇数的情况类似。我们将上述积分记为 $I_{(b,\tau)}$。取由以下线段构成的围道：$[b-i\tau, b+i\tau]$、$[b+$

$i\tau$、$d+i\tau]$、$[d+i\tau, d-i\tau]$、$[d-i\tau, b-i\tau]$，其中 $d>\frac{1}{1-\delta}$ 是稍后选定的参数。由于被积函数在矩形内的 $z=\ ^{1}\ _{(1-\delta)}$ 处有一个一阶极点，根据柯西留数定理，我们有

$$I_{(b,\tau)}=R_{k,\beta}\left(\frac{1}{(1-\delta)}\right)y^{\frac{1}{(1-\delta)}}+\frac{x}{2\pi i}\left(\int_{d-i\tau}^{d+i\tau}+\int_{d+i\tau}^{b+i\tau}+\int_{b-i\tau}^{d-i\tau}\right)R_{k,\beta}(z)\frac{(\alpha x^{\delta})^{z}}{z(1-z+\delta z)}dz.$$

为估计水平积分，我们使用引理5.3，得到

$$\begin{aligned}&\int_{d+i\tau}^{b+i\tau}R_{k,\beta}(z)\frac{(\alpha x^{\delta})^{z}}{z(1-z+\delta z)}dz\\&\ll_{\delta}\exp\left(\xi\left(\log c_k+4\log\log\xi+4\log\frac{\kappa}{e}\right)\right)\tau^{-2}\int_{b}^{d}(\alpha x^{\delta})^{u}du\\&\ll_{\delta}\exp(-(2\log x\log\log x)^{\frac{1}{2}})\exp\left(d\left(\log c_k+4\log\log d+4\log\frac{\kappa}{e}\right)\right)(\alpha x^{\delta})^{d}.\end{aligned}$$

类似地，可以处理另一个水平积分。接下来只需估计积分 $\int_{d-i\tau}^{d+i\tau}$。

$$\int_{d-i\tau}^{d+i\tau}R_{k,\beta}(z)\frac{(\alpha x^{\delta})^{z}}{z(1-z+\delta z)}dz\ll_{\delta}\exp\left(d\left(\log c_k+4\log\log d+4\log\frac{\kappa}{e}\right)\right)(\alpha x^{\delta})^{d}\left(1+\frac{1}{\tau}\right).$$

综合这些估计，我们得到

$$\begin{aligned}I_{(b,\tau)}&=R_{k,\beta}\left(\frac{1}{(1-\delta)}\right)y^{\frac{1}{(1-\delta)}}+O_{\delta}\left(x\exp\left(d\left(\log c_k+4\log\log d+4\log\frac{\kappa}{e}\right)\right)(\alpha x^{\delta})^{d}\right)\\&=R_{k,\beta}\left(\frac{1}{(1-\delta)}\right)y^{\frac{1}{(1-\delta)}}+O_{\delta}\left(x\exp\left(d\left(\log c_k+4\log\log d+4\log\frac{\kappa}{e}+\log(\alpha x^{\delta})\right)\right)\right).\quad(6.15)\end{aligned}$$

我们将以一种方式选择 d，使得 $(\log\ c_k+4\log\log\ d+4\log\ \frac{\kappa}{e}+\log(\alpha x^{\delta}))$ 变为负数且小于等于 -4；这仅当 $d\leq\exp\left((\kappa(c_k\alpha x^{\delta})^{\frac{1}{4}})^{-1}\right)$时才会发生。我们取 $d=\exp\left((\kappa(c_k\alpha x^{\delta})^{\frac{1}{4}})^{-1}\right)$。于是，(6.15) 中的表达式化简为

$$I_{(b,\tau)}=R_{k,\beta}\left(\frac{1}{(1-\delta)}\right)y^{\frac{1}{(1-\delta)}}+O_{\delta}\left(x\exp\left(-4\exp\left(\kappa(c_k\alpha x^{\delta})^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}\right)\right).\qquad(6.16)$$

奇数 k 的情形类似，只是在这种情况下，我们将使用引理 5.4，并取 $d=\exp\left((\kappa(\alpha x^{\delta})^{\frac{1}{2}})^{-1}\right)$。该情形下的误差项为 $\ll_{\delta}x\exp\left(-2\exp\left(\kappa(\alpha x^{\delta})^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right)$。

对于 $\delta\leq 0$ 的情况，选择 d 会自动满足判据 $d>\ ^{1}\ _{(1-\delta)}$。但对于 $0<\delta<$ ~~1 的~~情况，任意小的 $\varepsilon>0$ 都有 $d=\exp\left((\kappa(c_k\alpha x^{\delta})^{\frac{1}{4}})^{-1}\right)\geq\ ^{1}\ _{(1-\delta)+\varepsilon}$，当且仅当 $y\leq\ _{c_k\kappa^4}^{(\log((1-\delta)^{-1}+\varepsilon\ ^{-4}}x^{1-\delta}))}$。 □

最终得到 $0<\delta<1$ 对于 $_{c_k\kappa^4}^{(\log((1-\delta)^{-1}+\varepsilon\ ^{-4}}x^{1-\delta}<y\leq x))$的情况，概述如下。

引理6.4。对于满足 $_{c_k\kappa^4}^{(\log((1-\delta)^{-1}+\varepsilon\ ^{-4}}x^{1-\delta}<y\leq x))$的 $0<\delta<1$，我们有

$$\frac{x}{2\pi i}\int_{b-i\tau}^{b+i\tau}R_{k,\beta}(z)\frac{(\alpha x^{\delta})^{z}}{z(1-z+\delta z)}dz\ll_{\delta}x^{1-\varepsilon+\delta\varepsilon}y^{\varepsilon}\exp\left(-\sqrt{f_k'\log x\log\log x}\ \right),$$

对于 $x\geq x_{\beta,\ k}$。

7. 主要定理的证明

定理 1.1 的证明。当 $0<\delta<1$ 且 $0<\alpha<1$ 时，我们注意到引理 6.2 中定义的项 E_1 将占主导地位，其大小超过前一个引理 6.3 中定义的误差项 E_2。但是，为了使式 (6.14) 中的主项占主导地位并超过 E_1，我们需要满足定理 1.1 中给出的条件。结合引理 6.2 和引理 6.3，即可得到所需结果。

□

此外，

定理 1.2 的证明。引理 6.2 中的表达式可以估计为

$$\phi_{\Phi_k,\beta}(x,y) \ll_\delta x^{1-(1-\delta)\varepsilon} y^{\varepsilon} \exp\left(-\sqrt{p_k' \log x \log\log x}\right),$$

因此得证。 □

定理 1.3 的证明。引理 6.2 中的积分结果为

$$\phi_{\Phi_k,\beta}(x,y) \ll_\delta x^{\frac{1}{2}+(1-\delta)\varepsilon} y^{\frac{1}{2(1-\delta)}-\varepsilon} \exp\left(-\sqrt{q_k \log x \log\log x}\right),$$

从而得证。 □

定理 1.4 的证明。结合引理 6.2 和引理 6.3，我们得到

$$\phi_{\Phi_k,k-1}(x,y) = R_{k,k-1}(1)y + O(x \exp\left(-\sqrt{f_k' \log x \log\log x}\right). \tag{7.1}$$

只要将 (7.1) 中的误差项表示为关于 y 的形式，证明便完成了；为此，我们采用与 [5] 中相同的推理。 □

推论 1.1 的证明。对于 $k=1$ 和 $\beta=0$ 或 $\delta=0$，常数 $R_{1,\ 0}(1)$ 可以等同于$\zeta(2)\zeta(3)\zeta(6)$ 。

□

定理 1.5 的证明。我们首先指出，存在一个 $x'_{\beta,\ k}$，使得对于所有 $x \geq x'_{\beta,\ k}$ 和 $\delta<1$，$x \geq (1-\delta)$ 成立。

注意，对于 $\delta<0$ 和 $\alpha \geq 1$，引理 6.2 中定义的项 E_1 支配引理 6.3 中定义的误差项E_2。此外，在这种情况下，如果 $x(\log x \log\log x)^{\frac{1}{2}} < e^{1-\delta} y^{\frac{1}{1-\delta}-\ {}^{1}_{\log x}}$，那么引理 6.3 中的主项大于误差项 E_1。否则，我们只能得到关于$\phi_{\Phi_k,\beta}(x,y)$的界。因此，结合引理 6.2 和引理 6.3，我们得到

$$\phi_{\Phi_k,\beta}(x,y) = R_{(k,\beta)}\left(\frac{1}{(1-\delta)}\right) y^{\frac{1}{(1-\delta)}} + O_\delta(x\alpha^{\frac{1}{\log x}}(\log x \log\log x)^{\frac{1}{2}}).$$

而在另一种情况下，引理 6.2 中的积分可以估计为

$$\frac{x}{2\pi i}\int_{(b,\tau)} R_{k,\beta}(z)\frac{(\alpha x^{\delta})^{z}}{z(1-(1-\delta)z)}\,dz \ll_{\delta} x\alpha^{\frac{1}{\log x}}(\log x\log\log x)^{\frac{1}{2}}.$$

由此得出结论

$$\phi_{\Phi_k,\,\beta}(x,y) \ll_{\delta} \min(x,(x\alpha^{\frac{1}{\log x}}(\log x\log\log x)^{\frac{1}{2}})) \ll_{\delta} x.$$

□

8. $\Phi_k(n)$ 的最大阶与最小阶

本节致力于证明定理 1.6 和定理 1.7。

定理 1.6 的证明。对于奇数 k，证明可直接由 [18] 得出。若 k 为偶数，我们注意到 $\frac{\Phi_k(n)}{n^k} \leq 1$。现在，设数列 $\{p_j\}$ 中含有 p_j 个素数，且对于 $j \geq 1$，$p_j < p_{j+1}$ 满足 $\lim_{j\to\infty}\frac{\Phi_k(p_j)}{p_j^k} = 1$。由此得出结论。

□

定理 1.7 的证明。当 k 为奇数时，证明可直接由 [18] 得出。对于偶数 k，我们分两种情况讨论:

情况（1）设 $k \equiv 0 \pmod 4$。为计算最小阶，我们注意到 at

$$\Phi_k(n) \geq \left(\frac{2^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}-1}\right) n^{k-1}\phi(n)\prod_{p\leq n}\left(1-\frac{1}{p^{\frac{k}{2}}}\right)$$

$$\Phi_k(n) \geq \left(\frac{2^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}-1}\right)\left(\zeta\left(\frac{k}{2}\right)^{-1}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{k}{2}-1}}\right)\right)\frac{e^{-\gamma}n^k}{\log\log n}.$$

在最后一步中，我们使用了命题 4.3。构造序列 $\{n_s\}$，使其满足 $n_s = \prod_{1\leq i\leq s} p_i$，其中 $s \geq 1$。于是，

$$\log n_s = \sum_{p\leq p_s}\log p = p_s\left(1+O\left(\frac{1}{p_s}\right)\right).$$

利用这一点，我们得到

$$\begin{aligned}\Phi_k(n_s) &= \left(\frac{2^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}-1}\right) n_s^{k-1}\phi(n_s)\prod_{p\leq n_s}\left(1-\frac{1}{p^{\frac{k}{2}}}\right)\\ &= \left(\frac{2^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}-1}\right)\left(\zeta\left(\frac{k}{2}\right)^{-1}+O\left(\frac{1}{n_s^{\frac{k}{2}-1}}\right)\right)\frac{e^{-\gamma}n_s^k}{\log\log n_s}.\end{aligned}$$

情形（2）若 $k \equiv 2$ （模 4），我们观察到

$$\begin{aligned}\Phi_k(n) &\geq n^k \prod_{p \leq n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^{\frac{k}{2}}}\right) \\ &\geq \begin{cases} \left(L\left(1, \chi_1\right)^{-1} + O(\frac{1}{\log x})\right) \frac{e^{-\gamma} n^k}{\log \log n} & \text{if } k = 2, \\ \left(L\left(\frac{k}{2}, \chi_1\right)^{-1} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{k}{2}-1}}\right)\right) \frac{e^{-\gamma} n^k}{\log \log n} & \text{if } k \neq 2. \end{cases}\end{aligned}$$

这里我们使用了命题4.4。然后，考虑序列 $\{n_t\}$ 及其 $n_t = \prod_{1 \leq i \leq t} p_i$，并按上述方法继续推导，即可得到所需结果。

□

利益冲突 作者声明不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] P. T. Bateman, 《欧拉函数值的分布》，Acta Arith.，21，1972，329-345。

[2] J. T. Cross, 《高斯整数中的欧拉 ϕ函数》，美国数学月刊，90，1983，518-528。

[3] S. D. Chowla, 《涉及欧拉 ϕ函数的一个阶数结果》，印度数学会杂志（旧版），18，1929/1930，138-141。

[4] C. Calder´on、J. M. Grau、Antonio M. O. Marc´en 和 L. T´oth, 《模 n 可逆平方和的计数及欧拉函数的一种新推广》，《德布勒森数学出版物》87/1-2，2015，133-145。

[5] H. G. Diamond, 《欧拉 φ 函数值的分布》，《解析数论》，纯粹数学研讨会论文集，第 XXIV 卷，圣路易斯大学，密苏里州圣路易斯，1972，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1973，63-75。

[6] R. E. Dressler, 《一种计重数的密度》，《太平洋数学杂志》34，1970，371-378。

[7] P. Erd˝os, 《关于欧拉 φ 函数及若干相关问题的一些评述》，《美国数学会通报》51，1945，540-544。

[8] P. Erd˝os，关于加性和乘性函数的一些注记，《美国数学会通报》52，1946，527-537。

[9] J . Kaczorowski, On a generalization 的 E uler 托蒂nt function, *Monatsh. Math* 170 2013 ., , , 第1期，27-48.[10] J. Liu，论 Chowla 的一个误差项。I、II、III，《数论杂志》，64，1997，第1期，20–35、36–50、51–58.[11] G. Martin、P. Pollack 和 E. Smith，椭圆曲线点数的平均值，《代数与数论》，8，2014，第4期，813–836.[12] H. L. Montgomery 和 R. C. Vaughan，《乘法数论 I：经典理论》，剑桥大学出版社，2007.[13] A. Sankaranarayanan 和 S. K. Singh，关于 $n/\phi(n)$ 的黎斯平均，《哈代-拉马努金杂志》，36，2013，8-20.[14] A. Sankaranarayanan 和 S. K. Singh，关于 $n/\phi(n)$-II 的黎斯平均，《巴塞尔数学档案》，103，2014，第4期，329–343.[15] A. Sankaranarayanan 和 S. K. Singh，关于 $n/\phi(n)$—III 的黎斯平均，《巴塞尔数学档案》，170，2015，第3期，275–286.[16] A. Sivaramasarma，《法里级数与欧拉函数理论中的若干问题》，博士论文（第8章），瓦尔泰尔，1979..[17] I. J. Schoenberg，关于模1实数的渐近分布，《数学杂志》，28，1928，171-199.[18] G. Tenenbaum，《解析与概率数论导论》，美国数学会，第3版，第163卷，2015.[19] A. Walfisz，《现代数论中的魏尔指数和》，《数学研究报告》，15，德国科学出版社，柏林，1963.[20] A. Weingartner， $\sigma(n)/n$ 和 $n/\phi(n)$ 的分布函数，《美国数学会会刊》，135，2007，2677–2681.[21] A. Weingartner， $\sigma(n)/n$ 和 $n/\phi(n)$ 的分布函数，II，《数论杂志》，132，2012，2907–2921。

[22] W. Zhai，关于欧拉函数的一种推广，Funct. Approx. Comment. Math.，65，2021年，第1期，119-139。