零特征局部域循环扩张的伽罗瓦模结构

Sébastien Bosca

arXiv:2304.02551v1 [math.NT] 5 Apr 2023

摘要： 设 K 是一个非阿基米德零特征局部域。若 F/K 是一个次数为 p^n 的循环扩张，我们将确定 $\mathbb{Z}_p[G]$-模 $F^\times$ 在同构意义下的结构。

I 引言

类域论描述数域的阿贝尔扩张，但它提出的问题至少和它解答的问题一样多。我们至今仍不清楚 $\mathbb{Q}[\sqrt{pq}]$ 的基本单位何时范数为 1 或 -1，参见 [Schol]，Lemmermeyer 在 [Lem] 中也讨论了这一问题。关于 $K^\times$ 如何映射到其幂等元群的基本事实仍不为人所知（参见 Gross、Leopold、岩泽猜想）。

岩泽理论通常研究 G-模在伪同构意义下的结构，而非同构意义下的结构。在局部情形中，这显然比整体情形容易；对于任意伽罗瓦扩张 F/K， $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} F^\times$ 的特征
由于正规基定理和对数映射，这一点是已知的。但仅凭这个特征，还不足以完全确定 G-模 $F^\times$。这就留下了有限差异的空间。在 $\mathbb{Z}_p$-扩张中沿着 K_n/K变化时， K_n 的幂等元群中的这些有限差异可能随 n 增加，并为 K_∞的经典 Λ-模带来一个意想不到的 λ 不变量。

那么，关于给定局部循环扩张 F/K 的 $F^\times$ 结构，已有何种研究成果？当 F/K 的伽罗瓦群的阶为 p^n，且 K 不含阶为 p的幂的单位根时，Yakovlev 于 1970 年提出的一项结果可用于确定 G-模 $F^\times$，见 [Yak]。近年来，Sharifi 使用滤过研究了局部单位群，见 [Sha]。

在此背景下，本文的主要动机是确定在最简单的循环情形中，基本参数是否足以完全描述 G-模 $F^\times$。本文给出的答案是：对于任意次数为 p^n的局部域循环扩张 F/K，只要知道 K 在 $\mathbb{Q}_p$上的维数、剩余特征是否为 p、 K中单位根的个数、在 F中，伽罗瓦群 Gal(F/K) 对它们的作用方式，以及它们在 F/K 中有多大范数，就足以将 $F^\times$ 确定到同构意义下。

II 基本工具与记号

在本文中， K 表示一个局部 p-进域，而 F 是 K 的循环扩张，其次数为 p^n，其中 $n > 0$为某个整数， G 是其伽罗瓦群，且 σ 是 G的生成元。

我们只处理 $K^\times$、 $F^\times$ 等的 p 部分，使用 p 完备化，正如 III 开头所述。

μ_K 表示 K中的单位根群，其阶是 p的幂。

在任意的 A-模中， M, $\langle x, y\rangle$ 表示由 x和 y生成的子模；当 A可能不明确时，我们会加以说明，特别是 $\langle x, y\rangle_{\mathbb{Z}_p}$和 $\langle x, y\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}$分别表示由 x 和 y生成的 $\mathbb{Z}_p$-模和 $\mathbb{Z}_p[G]$-模。

此外，我们还将运用以下领域中的概念和工具：

(1.1) 库默尔理论：若 K 包含单位根，则 F/K 的根式；参见 [Mil], 附录第226页，或 [CaFr], 第III章第85–93页。对于给定的循环扩张 F/K，若 L/F 是库默尔扩张，则 $G = \mathrm{Gal}(F/K)$ 在 $Rad(L/F)$ 上按 ω-型作用，当且仅当 $L \subset K^{ab}$ （其中 K^{ab} 是 K 的最大阿贝尔扩张，而 ω 是 G 在 μ_F上的作用特征）；这一事实将在 III 的情形 5 中用到。

(1.2) 类域论：若 F/K 是局部域的循环扩张，

$$\frac{K^\times}{N_{F/K}(F^\times)} = \mathrm{Gal}(F/K)\ ,$$

以及伽罗瓦群限制与范数映射之间的相容性（见 [CaFr] 或 [Mil]），即若 $K \subset L$ 是两个局部域，且 $K^\times$ 和 $F^\times$ 是它们乘法群的完备化，则下图交换：

$$\begin{array}{ccc} L^\times & \xrightarrow{\sim} & \text{伽罗瓦群}(L^{ab}/L) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle N_{L/K}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Res} \\ K^\times & \xrightarrow{\sim} & \text{伽罗瓦群}(K^{ab}/K) \end{array}$$

(1.3) $N(L) = N(M)$ lemma：

设 M 是一个有限型 $\mathbb{Z}_p[G]$-模，并且

$$H^1(G, M) = \{0\}\ ;$$

并假设 $L \subset M$ 满足

$$N(L) = N(M)$$

其中 $N = N_{F/K} = 1 + \sigma + \sigma^2 + ... + \sigma^{p^n - 1}$ 是范数映射，则有：

$$L = M$$

证明： $H^1(G, M)$表示 $M^{1-\sigma}$是范数映射的核（σ是 G的生成元），因此 $N(L) = N(M)$表示 $M = LM^{1-\sigma}$；于是， $Q = M/L$满足 $Q = Q^{1-\sigma}$，可以将中山引理应用于作为 $\mathbb{Z}_p[G]$-模的 Q，其中 $\mathbb{Z}_p[G]$ 是一个极大理想为 $I = (1 - \sigma, p)$的局部环。

(1.4) 上同调： $H^0(G, M)$、 $H^1(G, M)$的定义，其中 G是一个循环群， M是一个$\mathbb{Z}_p[G]$-模；Herbrand商的基本性质：

$$q(G, M) = \frac{|H^0(G, M)|}{|H^1(G, M)|}$$

参见 Lang 的第 IX 章，或 Mil 第 90 页；应用实例见 Bos 第 9 页。

(1.5) 有限群的特征：正则特征，与直和及商相关的性质（见 [Ser]），以及以下结果：

性质：

设 χ 是 $G=\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 的一个 $\mathbb{Q}_p$-不可约特征；则其 Herbrand 商为：

$$q(\chi)=\begin{cases}p^n & if \quad \chi=1\\ \frac{1}{p} & if \quad \chi\neq 1\end{cases}$$

其中，1 表示 $\mathbb{Z}_p$ 的特征，在该特征下 G 的作用是平凡的。
为证明这一点，注意到任意单生成 $\mathbb{Q}_p[G]$-模都是 $\frac{\mathbb{Q}_p[X]}{X^{p^n}-1}=\prod_{k=0}^{n}\frac{\mathbb{Q}_p[X]}{P_k\ X}()\ =\prod V_k$ 的商，其中多项式 $P_k(X)$ 是 $P_k(X)=\frac{X^{p^k}-1}{X^{p^{k-1}}-1}$，对于 $k>0$，且 $P_0(X)=X-1$；每个 V_k 都是不可约的，简单的计算可得 $q(V_0)=p^n$，并且当 $k>0$ 时，$q(V_k)=\frac{1}{p}$。

(1.6) $N\in\mathbb{Z}_p[G]$ 或 $N_{F/K}$ 表示范数映射：

$$N=1+\sigma+\sigma^2+....+\sigma^{p^n-1}=\sum_{k\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\sigma^k$$

(1.7) $A\in\mathbb{Z}_p[G]$ 表示如下内容：

$$A=0+1\sigma+2\sigma^2+....+(p^n-1)\sigma^{p^n-1}=\sum_{0\leq k\leq p^n-1}k\sigma^k$$

并且在 $\mathbb{Z}_p[G]$ 中具有如下性质：

$$A(1-\sigma)=N-p^n$$

证明：这是一个阿贝尔变换：

$$\begin{aligned}A(1-\sigma)&=\sigma+2\sigma^2+...+(p^n-1)\sigma^{p^n-1}-\sigma^2-2\sigma^3-...-(p^n-2)\sigma^{p^n-1}-(p^n-1)\sigma^{p^n}\\&=(1-0)\sigma+(2-1)\sigma^2+...+(p^n-1-(p^n-2))\sigma^{p^n-1}-(p^n-1).1\\&=\sigma+\sigma^2+...+\sigma^{p^n-1}-p^n+1\\&=N-p^n\ .\end{aligned}$$

(1.8) 关于 $\mathbb{Z}_p$-模 的一个基本结果：

设 M 是一个有限型无挠元 $\mathbb{Z}_p$-模。那么，对于任意子模 $L\subset M$，以下条件等价：

1. L 是 M 中的一个直因子：对于某个 S，$M=L\oplus S$
2. $L\cap M^p=L^p$

更准确地说，为了证明 L 是 M中的一个直因子，对于给定的由 l_1、...、l_k 构成的生成 L 的元素族，如果我们证明

$$\prod_{i=1}^{k}l_i^{\alpha_i}\in M^p\iff\forall i\in[\![1;k]\!]:\ p\mid\alpha_i$$

我们证明，L 是 M 的一个直因子，并且$(l_i)_{1\leq i\leq k}$ 在 L/L^p中线性无关。

III 循环扩张中的计算

设 F/K 是一个特征为 0 的局部域扩张。注意， $G =$ 是由 σ生成的 Gal(F/K)。如上所述, $|G| = p^n$ 是 G中的元素个数。在下文中，我们默认将模 $K^\times$、 $F^\times$ 等替换为它们的 p-完备化。有限模的 p-完备化就是其 p-部分，因此通常也将 p-完备化称为 p-部分。

$$\overline{K^\times} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \frac{K^\times}{K^{\times p^n}}$$

并且对于 $F^\times$，同样有逆极限 $F^\times$。 $K^\times$ 和 $K^\times$ 之间有什么区别？本质上，我们将由赋值参数生成的子群 $\pi^{\mathbb{Z}}$ 替换为例如 $\pi^{\mathbb{Z}_p}$；并且去掉所有阶与 p互素的单位根。

不过，这些记号在此处并不重要，我们将省略它们，改用 $K^\times$ 和$F^\times$，而不用 $K^\times$和 $F^\times$。

计算 $\mathbb{Z}_p[G]$-模 M的特征时，我们指的是 $\mathbb{Q}_p \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} M$的特征。1 表示
c $\mathbb{Z}_p$ 的特征，在该特征下 G 的作用是平凡的；而 χ_{reg} 则表示 $\mathbb{Z}_p[G]$的特征。

有时我们需要考虑包含 K的 F 的子域，此时 K_i 表示满足 $[K_i/K] = p^i$ 的唯一域$K \subset K_i \subset F$：

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_n = F$$

我们将逐步使用以下参数：

1. 记 μ_K 为 K 中阶为 p 的幂的单位根集合， a 是满足 $|\mu_K| = p^a$ 的正整数；此外，μ_{p^k} 是阶为 p^i 的单位根群， $0 \le i \le k$ 位于 K 和 $\mu_\infty = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mu_K$ 的代数闭包中。2. 在阶为 p^n 的循环扩张 F/K 中， b 是满足以下条件的正整数： μ_K 在 $K^\times/N(F^\times)$ 中的阶为 p^b。注意， $b \le a$ 和 $b \le n$ 均成立，因为 p^b 是阶为 p^n 的群中一个阶为 p^a 的元素的阶。3. m 是满足以下条件的正整数： $K_m = K[\mu_F]$ 是包含于 F 中的 K 的最大圆分扩张。如果 $p \neq 2$ 或 $a \ge 2$，这意味着 $K_m = F \cap K[\mu_\infty]$；然而，如果 $p = 2$ 且 $i \notin K$，当 $K[\mu_\infty]/K$ 不是前循环群时，这个等式可能不成立，详见下文。

为了证明主要结果，即定理 IV.5，我们必须讨论许多情形。我们先从最简单的情形开始，其中第 5 种情形最为重要。读者可以自行选择感兴趣的情形。

情形 1： $\mu_F = \mu_K = \{1\}$

这是最简单的情形，可以视为 Yakovlev 在[Yak]中证明的结果的推论。对数映射是局部域 F 的单位群 $\mathcal{U}_F$ 的一个开子群与 F 的整数环的群 $\mathcal{O}_F$ 的一个开子群之间的同构。正规基定理表明， F/K 的特征是正则特征，因此

$$\chi_{\mathcal{O}_F} = \chi_{\text{reg}}$$

作为一个 $\mathcal{O}_K[G]$-模，然后，

$$\chi_{\mathcal{O}_F} = d\chi_{\text{reg}}$$

作为 $\mathbb{Z}_p[G]$-模，其中 $d = [K : \mathbb{Q}_p]$。因此，

$$\chi_{\mathcal{U}_F} = d\chi_{\text{reg}} \ ,$$

使得

$$\chi_{F^\times} = d\chi_{\text{reg}} + 1 \ .$$

类域论指出

$$N_{F/K}(F^\times)$$

是 $K^\times$ 的一个开子群，指数为 $|G| = p^n$。

因此，我们选择 $x \in K^\times$，它在 $K^\times/N(F^\times)$ 中的阶为 p^n；并选择一族 $v_1, ..., v_d$，使其属于 $N(F^\times)$，且 $v_1, ..., v_d$是 $\mathbb{F}_p$-向量空间 $K^\times/K^{\times p}$中 $N(F^\times)$的一组基，其维数为 $d+1$（因为 K 没有单位根）。

$$x \notin N(F^\times)K^{\times p}$$

然后，

$$K^\times/\langle v_1, ..., v_d\rangle$$

是循环的，由 x生成，因此

$$K^\times/\langle v_1, ..., v_d, x^{p^n}\rangle$$

是循环的，且其阶小于或等于 p^n；但现在

$$\langle v_1, ..., v_d, x^{p^n}\rangle \subset N(F^\times)$$

最后，我们有

$$N(F^\times) = \langle v_1, ..., v_d, x^{p^n}\rangle \ .$$

现在我们可以找到一个族 $u_1, ..., u_d$ 属于 $F^\times$，使得 $N(u_i) = v_i$ 对于 $i = 1, ..., d$，并且有 $N(x) = x^{p^n}$。"$N(L) = N(M)$" 引理得出

$$F^\times = \langle u_1, ..., u_d, x\rangle \ .$$

由于我们知道 x 是不变的，因此 $F^\times$ 是以下的一个商

$$\mathbb{Z}_p[G]^d \times \mathbb{Z}_p \ ;$$

但其特征恰好是 $d\chi_{reg} + 1$，因此我们确信 $(u_i)_{1\leq i\leq d}$ 生成一个秩为 d 的自由 $\mathbb{Z}_p[G]$-模，并且

$$F^\times \simeq \mathbb{Z}_p[G]^d \times \mathbb{Z}_p$$

情形 2: $\mu_F = \mu_K = \mu_{p^a} \subset N(F^\times)$

对于这个更复杂的情形，我们将使用以下两个引理:

引理(3.2.1): 计算 $N(y)$当 $z^{p^a} = y^{1-\sigma}$， $N(z) = \xi$

设 F/K 是次数为 p^n的域（局部或非局部）的有限循环扩张，其中 $\mu_{p^a} \subset K$。那么，关系

$$z^{p^a} = y^{1-\sigma}$$

对于满足 $N(z) = \xi$ 的 z，其中 ξ 是阶为 p^a 的本原单位根，这意味着，对于 $c = \min(n, a)$，有:

$$r = z^{p^{a-c}A}y^{p^{n-c}} = \begin{cases} z^{p^{a-n}A}y & \text{if} \quad n \leq a \\ z^A y^{p^{n-a}} & \text{if} \quad n \geq a \end{cases} \ ,$$

满足以下条件

$$r^{(1-\sigma)} = \xi^{p^{a-c}}$$

从而

$$r_0 = r^{p^c} \in K$$

是包含于 F 中的次数为 p^c 的唯一扩张的根式。此外，有:

$$N(y) = r_0$$

证明:

我们使用（1.7）中给出的公式， $A(1-\sigma) = N - p^n$:

$$r = z^{p^{a-c}A} y^{p^{n-c}}$$
$$r^{(1-\sigma)} = z^{p^{a-c}A(1-\sigma)} y^{p^{n-c}(1-\sigma)}$$
$$r^{(1-\sigma)} = \frac{N(z)^{p^{a-c}}}{z^{p^{n+a-c}}} z^{p^{a+n-c}}$$
$$r^{(1-\sigma)} = N(z)^{p^{a-c}} = \xi^{p^{a-c}}$$

另一方面，由于

$$z^{p^a} = y^{1-\sigma}$$

可得

$$z^{p^a A} = y^{(1-\sigma)A}$$
$$z^{p^a A} = \frac{N(y)}{y^{p^n}}$$
$$N(y) = z^{p^a A} y^{p^n} = r_0$$

这里，我们假设 $\mu_{p^a} \subset N(F^\times)$，于是存在 $z \in F^\times$ 使得 $N(z) = \xi$ 其中 ξ 是阶为 p^a 的本原单位根; 由于 $N(z)^{p^a} = \xi^{p^a} = 1$，希尔伯特第90定理指出 $H^1(G, F^\times) = 1$，并且我们可以找到 $y \in F^\times$ 使得 $z^{p^a} = y^{1-\sigma}$。上面的引理进而保证 $N(y) = r_0$。我们还考虑模 $N(F^\times)$ 下阶为 p^n 的 $x \in K^\times$。

引理 (3.2.2) : 一个方便的直因子

当 $\mu_K = \mu_F = \mu_{p^a} \in N(F^\times)$ 时，若 r_0 表示 K_1/K 的根式（模 $K^{\times p}$ 唯一），

$$W_0 = \langle \mu_K, r_0, x^{p^n} \rangle$$

是 $N(F^\times)$ 中的一个直因子。

证明:

由于 $\mu_K \subset W_0$, W_0 是 $N(F^\times)$ 中的直因子，当且仅当 W_0/μ_K 是 $N(F^\times)/\mu_K$ 中的直因子，而后者没有挠元。依照 (1.8)，我们假设

$$N(t)^p = \xi^\alpha r_0^\beta x^{p^n \gamma} \tag{3.2.3}$$

对于某些 α、β、$\gamma \in \mathbb{Z}_p$，并将证明 p 同时整除 β 和 γ。

起初，如果 $p \nmid \beta$ 有 $r_0 \in \mu_{p^a} K^{\times p}$，然后 $F \supset K[\sqrt[p]{r_0}] = K[\mu_{p^{a+1}}]$，因此 $\mu_F \neq \mu_K$，which 相矛盾我们的假设。因此 $p \mid \beta$。由此可得 $\xi^\alpha \in K^{\times p}$，进而 $p \mid \alpha$; 但随后

$$N(t) = \xi^{\alpha'} r_0^{\beta'} x^{p^{n-1}\gamma}$$

因为如此 我 α'， $\beta' \in \mathbb{Z}_p$，并且由于 ξ 和 r_0 都属于 $N(F^\times)$， $x^{p^{n-1}\gamma} \in N(F^\times)$，因此 $p \mid \gamma$。

该引理使我们能够考虑等式

$$N(F^\times) = W_0 \oplus S$$

对于某个 $S \simeq \mathbb{Z}_p^{d-1}$。于是我们可以写出

$$S = \langle v_1, v_2, ..., v_{d-1} \rangle$$

with

$$v_i = N(u_i),\ 1 \leq i \leq d-1$$

然后

$$N(F^\times) = \langle N(z), N(y), N(x), N(u_1), N(u_2), ..., N(u_{d-1}) \rangle$$

从而，根据“N(L)=N(M)”引理:

$$F^\times = \langle z, y, x, u_1, ..., u_{d-1} \rangle$$

最后，令

$$V = \frac{\langle X, Y, Z, U_1, ..., U_{d-1} \rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle Z^{p^a} Y^{\sigma-1} \rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}} = \frac{M}{D}$$

为形式空间，其中，在 M：

$$\langle X, Y, Z, U_1, ..., U_{d-1} \rangle = \langle X \rangle \oplus \langle Y \rangle \oplus \langle Z \rangle \oplus \langle U_1 \rangle \oplus .... \langle U_{d-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p[G] \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_p[G]$$

与 $X^\sigma = X$，并且在 V 中:

$$\langle X \rangle \oplus \langle Y, Z \rangle \oplus \langle U_1 \rangle \oplus .... \langle U_{d-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}_p \oplus \frac{\langle Y, Z \rangle}{\langle Z^{p^a} Y^{\sigma-1} \rangle} \oplus \mathbb{Z}_p[G] \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_p[G]$$

这意味着 $X^\sigma = X$和 $Z^{p^a} = Y^{1-\sigma}$生成了 X、Y、Z、$U_2 ... U_{d-1}$之间的所有关系。我们在 IV 中研究 $W = \langle X \rangle \oplus \frac{\langle Y, Z \rangle}{\langle Z^{p^a} Y^{\sigma-1} \rangle} = \frac{\langle X, Y Z \rangle}{\langle Z^{p^a} Y^{\sigma-1} \rangle}$的结构，证明:

$$H^0(G, W) = p^n$$

$$H^1(G, W) = 1$$

$$\chi_W = \chi_{reg} + 1$$

and

$$W_{tors} = \mu_{p^a}$$

那么， $F^\times$ 是 V的商。但它具有相同的特征

$$\chi_{F^\times} = \chi_V = d\chi_{reg} + 1$$

并且具有相同的挠元，因此注意到 ϕ 自然满射 ϕ： $V \to F^\times$，有 χ(核(ϕ)) $= 0$，于是核(ϕ) $\subset V_{tors} = F^\times_{tors} = \mu_{p^a}$，然后

$$\ker(\phi) = 1$$

and

$$F^\times \simeq V$$

情形 3： $F = K[\mu_F]$ ： 分圆情形

1. **关于 $N(\mu_F)$ 的讨论：**

We 首先注意到 $F = K[\mu_F]$ 意味着 $a \geq 1$，因为对于 $p \neq 2$， $[K[\mu_p] : K]$ 与 p 互素，且对于 r $p = 2$， $\mu_2 \in K$。此外，

$$\prod_{\xi^p=1} \xi = \begin{cases} 1 & \text{if } p \neq 2 \\ -1 & \text{if } p = 2 \end{cases}$$

因此，注意到 ξ 是阶为 p^{a+1}的本原单位根，

$$N_{K[\mu_{p^{a+1}}]/K}(-\xi) = -\xi^p$$

当 $p \neq 2$ 或 $a \geq 2$时，最后一个等式沿着 $K[\mu_\infty]/K$ 传递，因此两者都成立；注意到 ξ_F是 $\mu_F = \mu_{p^{a+m}}$ 的生成元，且 $\xi_K = \xi_F^{p^m}$ 是 $\mu_K = \mu_{p^a}$ 的生成元：

$$N_{F/K}(-\xi_F) = -\xi_K$$

and

$$[K[\mu_{p^{a+m}}] : K] = p^m$$

然而，当 $p = 2$ 且 $K \not\ni i$ 时，根据以下结果，这可能不成立：

引理 (3.3.1) : 对于循环扩张 F/K 中任意生成 μ_F 的 ξ_F，注意 $[K[\mu_F] : K] = p^m$ 和 $K_m = K[\mu_F]$:

$$N_{K_m/K}(\xi_F) = \begin{cases} \xi_F^{p^m} & \text{if } p \neq 2 \text{ or } m = 0 \\ -\xi_F^{2^m} & \text{if } p = 2,\ a \geq 2 \text{ and } m > 0 \\ -1 & \text{if } m > 0,\ p = 2,\ a = 1 \text{ and } K[\mu_\infty]/K \text{ procyclic} \\ 1 & \text{if } p = 2,\ a = 1 \text{ and } K[\mu_\infty]/K \text{ not procyclic} \end{cases}$$

证明 :

上文已经提及 $p \neq 2$ 或 $a \geq 2$ 的情形，因此我们聚焦于 $m > 0$、 $p = 2$ 和 $a = 1$ 的情形。首先， $K[\mu_\infty]/K$ 是前循环的，当且仅当 $\mathrm{Gal}(K[\mu_\infty]/K)$ 没有扭元。存在一个同构：

$$\phi : \begin{pmatrix} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_2[\mu_\infty]/\mathbb{Q}_2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2^\star \\ \varphi : \xi \in \mu_\infty \mapsto \varphi(\xi) = \xi^k & \longmapsto & k \end{pmatrix}$$

并且 $\mathrm{Gal}(K[\mu_\infty]/K)$ 是 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_2[\mu_\infty]/\mathbb{Q}_2)$ 的子群。于是， $K[\mu_\infty]/K$ 是前循环的，当且仅当

$$\phi(\mathrm{Gal}(K[\mu_\infty]/K)) \ni -1$$

或者 $K[\mu_\infty]/K$ 是前循环的: $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_2[\mu_\infty]/\mathbb{Q}_2)$ 的任意开前循环子群都等于

$$I_l = \phi^{-1}(1 + 2^l\mathbb{Z}_2)$$

或到

$$J_l = \phi^{-1}(-1 + 2^l\mathbb{Z}_2)$$

其中 $l \geq 2$ （对于 $l = 1$， $I_1 = J_1$ 不是前循环的）。 I_l 固定 i，然后，

$$\mathrm{Gal}(K[\mu_\infty]/K) = J_l$$

对某个 $l \geq 2$ 成立。于是，伽罗瓦群 $K[\mu_\infty]/K(i) = J_l^2 = \phi^{-1}((-1+2^l)^2) = \phi^{-1}(1-2^{l+1}+2^{2l})$，因此：

$$\mu_{K(i)} = \mu_{2^{l+1}}$$

并且，由于 $\phi^{-1}(-1+2^l)$ 生成伽罗瓦群 $K(i)/K$，可得：

$$N_{K(i)/K}(\xi_{2^{l+1}}) = \xi_{2^{l+1}}^{1-1+2^l} = \xi_{2^{l+1}}^{2^l} = -1$$

之后，我们可以在 $K(m)/K(i)$ 中应用当 $a \geq 2$ 时得到的结果（将 a 替换为 $l+1$，并将 m 替换为 $m-1$），于是对任意 $k \in \mathbb{N}^\star$：

$$[K[\mu_{2^{l+k}}] : K] = 2^k \text{ and } N_{K[\mu_{2^{l+k}}]/K}(\mu_{K[\mu_{2^{l+k}}]}) = -1$$

这就证明了

$$\mu_F = \mu_{2^{l+m}} \quad \text{and} \quad N_{K_m/K}(\xi_F) = -1 \tag{3.3.2}$$

或者 $K[\mu_\infty]/K$ 不是前循环的：于是， $\phi^{-1}(-1) \in$伽罗瓦群 $K[\mu_\infty]/K$，并生成伽罗瓦群 $K(i)/K$，因此：

$$\forall \xi \in \mu_{K(i)},\ N_{K(i)/K}(\xi) = \xi\xi^{-1} = 1$$

此外，

$$\mathrm{Gal}(K[\mu_{2^{l+1}}]/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

于是，由于 K_m/K 是循环的：

$$K_m \subset K(i)$$

最后：

$$m \leq 1 \text{ and } N_{K_m/K}(\xi_F) = 1 \tag{3.3.3}$$

从现在起，为避免重复列出所有这些条件，我们将情形 $m > 0$、 $p = 2$、 $a = 1$、 $K[\mu_\infty]/K$ 前循环称为“特殊情形 1”，将情形 $m > 0$、 $p = 2$、 $a = 1$、 $K[\mu_\infty]/K$ 非前循环称为“特殊情形 2”。

2. **最一般的情形：**

现在假设 $F = K[\mu_F]$。由前述引理可知

$$N_{F/K}(\mu_F) = \mu_K$$

除第 3 节研究的特殊情形 2 外。首先，按惯例，取 $x \in K$，其在 $F^\times/N(F^\times)$ 中的阶为 p^n，并取 μ_K 的一个生成元 ξ_K，我们证明

$$W_0 = \langle \mu_K, x^{p^n} \rangle$$

是 $N(F^\times)$ 的一个直因子：为此，我们先注意到它包含 $K^\times_{tors}$，因此，它是 $N(F^\times)$ 的一个直因子，当且仅当 $\langle x^{p^n}\rangle$ 是 $N(F^\times)/\mu_K$ 的一个直因子；假设

$$N(t^p) = \xi_K^\alpha x^{p^n\beta}$$

对于某些 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$，我们先推导出 $\xi_K^\alpha \in K^{\times p}$，然后得到 $p \mid \alpha = p\alpha'$，接着，

$$N(t/\xi^\alpha)^p = x^{p^n\beta}$$

使得

$$N(t/\xi^\alpha) = \xi x^{p^{n-1}\beta}$$

对于某个 $\xi \in \mu_p$，它是 F/K 中的一个范数。因此， $x^{p^{n-1}}$ 也是一个范数，并且 $p \mid \beta$，正如预期的那样。现在可以合法地选取 $v_1, ..., v_d \in N(F^\times)$，使得

$$N(F^\times) = \langle \xi_K, x^{p^n}, v_1, ..., v_d\rangle_{\mathbb{Z}_p}$$

应用“$N(M) = N(L)$”引理，并选取 $u_1, ..., u_d \in F^\times$，使得 $N(u_i) = v_i$对于$1 \le i \le d$ 意味着

$$F^\times = \langle \xi_F, x, u_1, ..., u_d\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}$$

最后，在比较特征并使用与情形 2 中相同的论证后，可得

$$F^\times \simeq \mu_F \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p[G]^d$$

其中 G 在第一个因子上按 ω-等型作用，在第二个因子上平凡作用；后者是由 d 个元素生成的自由模。

3. **特殊情形**

情形 1 已在第 2 节的一般情形中研究过。特殊情形 2 会怎样呢？(3.3.3) 证明了 $m \le 1$。如果 $m = 0$，就没有什么特别值得讨论的，因此我们假设 $m = 1$，然后 $F = K(i)$。我们首先注意到，使其满足以下条件的整数 $l \ge 2$：

$$|\mu_F| = 2^l$$

而 ξ_F 表示 μ_F 的一个生成元。最后，我们定义

$$t = 1 - \xi_F$$

并进行如下计算：

$$t^{1-\sigma} = \frac{1-\xi_F}{1-\xi_F^{-1}} = \frac{1-\xi_F}{(\xi_F-1)\xi_F^{-1}} = -\xi_F$$

然后，

$$t^{2^{l-1}(1-\sigma)} = -1 \tag{3.3.4}$$

我们的基本关系将直接由此推出，但首先我们必须考察 -1 是否是 F/K 中的一个范数：

引理 (3.3.5) :

在特殊情形2 中，-1是 $K(i)/K$ 中的范数，当且仅当 $\dim_{\mathbb{Q}_2}(K)$ 为偶数。

证明：这是范数与限制应用之间兼容性的直接结果，见(1.2)，在图中将 K 替换为 $\mathbb{Q}_2$ 并将 L 替换为 K。

(a) $\dim_{\mathbb{Q}_2}(K)$ 为奇数:

这里， -1 不是 F/K 中的范数，其中 $F = K(i)$。我们有，注意到 $\theta = \frac{2\pi}{2^l}$ （另见(3.6.4)）：

$$N(t) = 2 - 2\cos(\theta)$$

它在 K 中不是一个平方（已在引理 (3.6.9) 中证明）。此外， $N(F^\times) \not\ni -1$，因此 $N(F^\times)$ 没有挠元。于是,

$$W_0 = \langle t \rangle_{\mathbb{Z}_p}$$

是 $N(F^\times) \simeq \mathbb{Z}_2^{d+1}$ 中的一个直因子。于是我们选取 S，使得

$$N(F^\times) = W_0 \oplus S$$

以及生成 S 的一族 $v_1, ..., v_d$。于是我们将 $v_i = N(u_i)$ 写成某个 $u_i \in F^\times$ 和 $1 \leq i \leq d$。 “N(L)=N(M)” 引理证明:

$$F^\times = \langle t, u_1, ..., u_d \rangle_{\mathbb{Z}_2[G]}$$

最后，令

$$V = \frac{\langle T, U_1, ..., U_d \rangle_{\mathbb{Z}_2[G]}}{\langle T^{2^l(1-\sigma)} \rangle_{\mathbb{Z}_2[G]}} = \frac{M}{D}$$

V 中的形式空间，其中 M 是由 $d+1$ 个元素 $T, U_1, ..., U_d$ 生成的自由 $\mathbb{Z}_2[G]$-模:

$$\langle T \rangle \oplus \langle U_1 \rangle \oplus ....\langle U_d \rangle \simeq \frac{\langle T \rangle}{\langle T^{2^l(1-\sigma)} \rangle} \oplus \mathbb{Z}_2[G] \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_2[G]$$

现在我们研究 W_{tors}，其中

$$W = \frac{\langle T \rangle}{\langle T^{2^l(1-\sigma)} \rangle}$$

如果 $T^\alpha \in W_{tors}$ 在 W 中的阶为 p^k，那么在 $\mathbb{Z}_2[G]$ 中:

$$2^k \alpha = 2^l(1-\sigma)\lambda$$

对某个 $\lambda \in \mathbb{Z}_2[G]$ 成立。接着，我们将 λ 除以 N，进行欧几里得除法，并将 λ 视为次数为 $i < 2^n = 2$ 的多项式:

$$\lambda = N \times Q + R$$

$R \in \mathbb{Z}_2[X]$ 的次数为 $d < d^\circ N = 1$，因此 R 是一个常数，并且

$$2^k \alpha = 2^l(1-\sigma)(NQ + R) = 2^l(1-\sigma)R$$

于是，对于某个 $C \in \mathbb{Z}_2$ 和 $\alpha = C$，有 $2^k \mid 2^l R = 2^k C$ （$1-\sigma$）。这证明 $T^{1-\sigma}$ 生成 W_{tors}，其阶为 2^l。

总之，我们首先注意到， $F^\times$ 是 V的一个商。但它具有相同的特征

$$\chi_{F^\times} = \chi_V = d\chi_{reg} + 1$$

（因为 χ（W）$=1$），并且扭元的数量相同。因此，注意到 ϕ 自然满射 ϕ： $V \to F^\times$，有 χ（ker（ϕ））$=0$，于是ker（ϕ）$\subset V_{tors}$。因此，ker（ϕ）$\neq 1$将意味着 $|F^\times_{tors}| < |V_{tors}|$，这是不可能的。最后：

$$F^\times \simeq V$$

注： 此处没有 x生成 $K^\times/N(F^\times)$。不过， $x=-1$会更方便，而且包含于 $\langle t\rangle = W$中。

(b) $\dim_{\mathbb{Q}_2}(K)$ 为偶数：

这里， -1 是 F/K 和 $F=K(i)$中的一个范数。接着，我们选取 y 使得

$$N(y) = y^{1+\sigma} = -1$$

并且它由 (3.3.4) 得出：

$$t^{2^{l-1}(1-\sigma)} = y^{1+\sigma} \tag{3.3.6}$$

(3.3.6) 是我们的基本关系。最后，我们选取 $x \in F^\times$ 生成 $K^\times/N(F^\times)$。

引理 (3.3.7)： $W_0 = \langle x^2, N(y)\ N(t)\rangle$ 是 $N(F^\times)$的一个直因子。

证明： $W_0 \supset K^\times_{tors} = N(F^\times)_{tors} = \mu_2$，因此 W_0 是 $N(F^\times)$ 的直因子，当且仅当 W_0/μ_2 是 $N(F^\times)/\mu_2$ 的直因子。假设

$$N(f^2) = (-1)^k x^{2\alpha} N(t)^\beta N(y)^\gamma$$

于是我们必须证明 $N(f) \in \mu_2 W_0$。我们先利用 $N(y) = -1$，改写前一个等式：

$$N(f^2) = \pm\, x^{2\alpha} N(t)^\beta \tag{3.3.7}$$

由此可知， $\pm\, N(t)^\beta$ 是 $K^\times$中的一个平方。引理 (3.6.9) 随即证明了 $2|\beta = 2\beta'$，于是 (3.3.7) 变为：

$$N\left(\frac{f}{t^{\beta'}}\right)^2 = \pm\, x^{2\alpha}$$

于是，

$$N\left(\frac{f}{t^{\beta'}}\right) = \pm\, x^{\alpha}$$

无论符号如何， -1 都是一个范数，因此 x^α 也如此，进而 $2 \mid \alpha = 2\alpha'$，最后：

$$N(f) = \pm\, x^{2\alpha'} N(t)^{\beta'} \in \mu_2 W_0$$

这也证明了（见 1.8），在 $^N{}_{(F^\times)\mu_2 N(F^\times)^2}$，中，$\dim_{\mathbb{F}_2}\langle x^2, \underline{N(t)\rangle = 2}$，于是 $\chi(W_0) = 2\times 1$。我们继续选择 $S \simeq \mathbb{Z}_2^{d-1}$，使得

$$N(F^\times) = W_0 \oplus S$$

以及生成 S 的一族 $v_1, ..., v_{d-1}$。然后，对于某个 $u_i \in F^\times$ 和 $1 \le i \le d-1$，我们写作 $v_i = N(u_i)$。“N(L)=N(M)”引理证明：

$$F^\times = \langle x, y, t, u_1, ..., u_{d-1}\rangle_{\mathbb{Z}_2[G]}$$

最后，令

$$V = \frac{\langle X, Y, T, U_1, ..., U_{d-1}\rangle_{\mathbb{Z}_2[G]}}{\langle T^{2^{l-1}(1-\sigma)} Y^{-1-\sigma}\rangle_{\mathbb{Z}_2[G]}} = \frac{M}{D}$$

是形式空间，其中等式 $X^\sigma = X$ 在 M 和 V中均成立，并且在 V中:

$$\langle X, Y, T\rangle \oplus \langle U_1\rangle \oplus ....\langle U_{d-1}\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \frac{\langle Y, T\rangle}{\langle T^{2^{l-1}(1-\sigma)} Y^{-1-\sigma}\rangle} \oplus \mathbb{Z}_2[G] \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_2[G]$$

现在来看

$$W = \frac{\langle Y, T\rangle}{\langle T^{2^{l-1}(1-\sigma)} Y^{-1-\sigma}\rangle}$$

关键是确定 W_{tors}。为此，我们假设对于某个 $k \geq 1$， $w = T^\alpha Y^\beta \in W_{tors}$ 在 W中具有阶 p^k；于是，在 $\mathbb{Z}_2[G]$ 中:

$$\begin{cases} 2^k \alpha = 2^{l-1}(1-\sigma)\lambda \\ 2^k \beta = -(1+\sigma)\lambda \end{cases}$$

对于某个 $\lambda \in \mathbb{Z}_2[G]$。但是，$(1-\sigma) \mid \alpha$，而 $(1+\sigma) \mid \beta$。由此可得

$$w \in \langle T^{1-\sigma}, N(Y)\rangle_{\mathbb{Z}_2[G]}$$

并且在 W 中， $N(Y) = T^{2^{l-1}(1-\sigma)}$，因此

$$w \in \langle T^{1-\sigma}\rangle_{\mathbb{Z}_2[G]}$$

此外， $T^{2^k(1-\sigma)} = 1$ 在 W 中当且仅当

$$\begin{cases} 2^k(1-\sigma) = 2^{l-1}(1-\sigma)\lambda \\ 0 = -(1+\sigma)\lambda \end{cases}$$

我们可以将 λ 视为次数为 $d < p^n = 2$ 的多项式，然后我们可以写出 $\lambda = r + s\sigma$，并且第二个方程成立当且仅当 $s = -r$ 和 $\lambda = r - r\sigma$。第一个方程则变为，因为$(1-\sigma)^2 = 2 - 2\sigma \in \mathbb{Z}_2[G]$：

$$2^k(1-\sigma) = 2^{l-1}(1-\sigma)(r - r\sigma) = 2^l r(1-\sigma)$$

这蕴含 $k \geq l$；反之在 W 中:

$$T^{2^l(1-\sigma)} = N(Y)^2 = N(N(Y)) = N(T^{2^{l-1}(1-\sigma)}) = 1$$

这证明了:

$$|W_{tors}| = 2^l$$

正如预期。

下一步是计算 $\chi(W)$。在 $\mathbb{Q}_2 \underset{\mathbb{Z}_2}{\otimes} W$中，

$$T^{2^{l-1}(1-\sigma)} = N(Y)$$

意味着 $N(N(Y)) = 1$然后 $N(Y) = 1$，并且 $T^{1-\sigma} = 1$。接着，

$$\chi(W) = \chi(\langle T\rangle) + \chi(\langle Y\rangle) = 1 + (\chi_{reg} - 1) = \chi_{reg}$$

然后，

$$\chi(V) = d\chi_{reg} + 1 = \chi(F^\times)$$

正如预期。于是， V 和 $F^\times$ 具有相同的特征和相同数量的扭元。 $F^\times$ 是 V 的一个商，利用通常的论证：

$$F^\times \simeq V$$

情形 4： $\mu_F = \mu_K$

这种情形与情形 2 类似，但更一般，因为我们不再假设 $\mu_K \in N(F^\times)$。接下来我们将使用参数 b ，其定义见 III 开头。

照例，我们先选取生成 $F^\times/N(F^\times)$ 的 x。接着注意到， ξ_K 模 $N(F^\times)$ 的阶为 p^b，因此有

$$\xi_K \equiv x^{\alpha p^{n-b}} \mod N(F^\times)$$

对某个 $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$ 成立。将 x 替换为同样生成 $K^\times/N(F^\times)$ 的 $x^{-\alpha}$，则有：

$$\xi_K x^{p^{n-b}} = N(s) \tag{3.4.1}$$

对某个 $s \in F^\times$ 成立。由此可得

$$N\left(s^{p^a}/x^{p^{a-b}}\right) = (\xi_K x^{p^{n-b}})^{p^a} x^{p^{n+a-b}} = 1$$

这使得我们可以写出：

$$\frac{s^{p^a}}{x^{p^{a-b}}} = t^{1-\sigma} \tag{3.4.2}$$

对于某个 $t \in F^\times$。（3.4.2）是我们的基本关系。然后我们定义

$$r = \begin{cases} s^A t^{p^{n-a}} \text{ if } n \geq a \\ s^{p^{a-n}A} t \text{ if } n \leq a \end{cases}$$

记 $c = \min(n, a)$，得到：

$$r = s^{p^{a-c}A} t^{p^{n-c}}$$

and

$$r^{1-\sigma} = s^{p^{a-c}A(1-\sigma)} t^{p^{n-c}(1-\sigma)}$$

利用 (1.7) 以及 (3.4.2)：

$$r^{1-\sigma} = s^{p^{a-c}(N-p^n)} \left(\frac{s^{p^a}}{x^{p^{a-b}}}\right)^{p^{n-c}}$$

$$r^{1-\sigma} = \frac{N(s)^{p^{a-c}}}{s^{p^{n+a-c}}} \left(\frac{s^{p^a}}{x^{p^{a-b}}}\right)^{p^{n-c}} = \xi_K^{p^{a-c}}$$

它是一个阶为 p^c 的单位根。于是，

$$r_0 = r^{p^c} \in K^\times$$

是 $Rad(K_c/K)$ 的生成元——注意， $c>0$。另一方面，

$$t^{(1-\sigma)A}=\frac{s^{p^a A}}{x^{p^{a-b}A}}=\frac{N(t)}{t^{p^n}}$$

从而

$$N(t)=\frac{s^{p^a A}t^{p^n}}{x^{p^{a-b}A(1)}}$$

其中 $A(1)=\frac{p^n}{(p^n-1)\cdot 2}$ 是 A 的系数和。

$$N(t)=\frac{r_0}{x^{p^{n+a-b}(p^n-1)/2}} \tag{3.4.3}$$

接下来我们使用以下结果：

引理 (3.4.4)： $W_0=\langle N(s)\ N(x)\ N(t)\rangle$ 是 $N(F^\times)$ 的一个直因子，其中 x 取适当值。

证明：我们首先注意到

$$\xi_K^{p^b}=\frac{N(s^{p^b})}{N(x)}\in W_0$$

从而 $N(F^\times)_{tors}\in W_0$，因此 W_0 是 $N(F^\times)$ 的一个直因子，当且仅当 $\frac{W_0}{\mu_K\cap N}(F^\times)$ 是 $\frac{N}{(F^\times)\mu_K\cap N(F^\times)}$ 的一个直因子。利用 (1.8)，我们假设

$$N(f^p)=N(s)^\alpha N(x)^\beta N(t)^\gamma$$

并且必须证明 $N(f)\in W_0$。由此可得：

$$N(f^p)=\xi_K^\alpha x^{\alpha p^{n-b}+\beta p^n-\gamma p^{a-b+n}(p^n-1)/2}\ r_0^\gamma$$

首先，注意到 $p^{n-b}\mid(\alpha p^{n-b}+\beta p^n-\gamma p^{a-b+n}(p^n-1)/2)$，即使 $p=2$ （因为 $a>0$ ）.

若 $n>b$，则可推出 $r_0^\gamma=\xi_K^{-\alpha}\delta^p$ 对于某个 $\delta\in K^\times$，于是 $p\mid\gamma$ 或 $\mu_{p^{a+1}}\subset F$；由于 $\mu_K=\mu_F$，后一种情况不可能，因此 $p\mid\gamma$。

若 $n=b$，首先要说明的是，随意选择 x 显然不是最佳选择，最佳选择应为 $x=\xi_K$；不过，为避免考察越来越多的情况，我们将证明引理 (3.4.4) 仍然成立。首先记住，当 x生成 $K^\times/N(F^\times)$ 时，任取 $y\in F^\times$， $xN(y)$ 也成立： x的选择是模 $N(F^\times)$ 的。于是，我们可以选择 x，使得

$$\dim_{\mathbb{F}_p}\langle\xi_K,x,r_0\rangle=3 \tag{3.4.5}$$

在 $K^\times/K^{\times p}$ 中，因为否则我们有 $x\in\langle\xi_K、\ r_0\rangle$ 和 $N(F^\times)\subset\langle\xi_K、\ r_0\rangle$模 $K^{\times p}$，且由于$dim_{\mathbb{F}_p}N(F^\times)=d+1$，这将意味着 $d=1$、 $N(F^\times)=\langle\xi_K、\ r_0\rangle\ni x$模 $N(F^\times)$，于是 $x\in N(F^\times)K^{\times p}$无法生成 $K^\times/N(F^\times)$，矛盾。

因此，我们证明了可以选取满足 (3.4.5) 的 x，今后均作此假设。显然，在倒数第二个等式中， p 同时整除 $\alpha=p\alpha'$ 和 $\gamma=p\gamma'$。

于是，

$$N\left(\frac{f}{t^{\gamma'}s^{\alpha'}}\right)^p=x^{\beta p^n}$$

从而

$$N\left(\frac{f}{t^{\gamma'}s^{\alpha'}}\right)=\xi x^{\beta p^{n-1}}$$

对于某个 $\xi\in\mu_p$。注意到 $\xi=\xi_K^\lambda$，可得

$$N\left(\frac{f}{t^{\gamma'}s^{\alpha'}}\right)=\xi_K^\lambda x^{\beta p^{n-1}}=N(s^\lambda)x^{\beta p^{n-1}-\lambda p^{n-b}}$$

因此最终

$$N\left(\frac{f}{t^{\gamma'}s^{\alpha'+\lambda}}\right)=\xi_K^{\lambda}x^{\beta p^{n-1}}=x^{\beta p^{n-1}-\lambda p^{n-b}}$$

这个等式右边的项是一个范数，因此可以写成 $N(x^{\mu})$，其中 $\mu\in\mathbb{Z}_p$ 是某个元素，因此

$$N(f)=N(x^{\mu}s^{\alpha'+\lambda}t^{\gamma'})\in W_0$$

引理得证。

由 (3.4.5) 可知，$\dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p\underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes}W_0)=2$，然后记作

$$N(F^{\times})=W_0\oplus S$$

由于 $N(F^{\times})_{tors}\subset W_0$，有：

$$S\simeq\mathbb{Z}_p^{d-1}$$

于是我们可以写出

$$S=\langle v_1,v_2,...,v_{d-1}\rangle$$

with

$$v_i=N(u_i),\ 1\leq i\leq d-1$$

然后

$$N(F^{\times})=\langle N(s),N(t),N(x),N(u_1),...,N(u_{d-1})\rangle$$

因此，根据“N(L)=N(M)”引理：

$$F^{\times}=\langle s,t,x,u_1,...,u_{d-1}\rangle$$

最后，令

$$V=\frac{\langle X,S,T,U_1,...,U_{d-1}\rangle_{\mathbb{Z}2[G]}}{\langle S^{p^a}X^{-p^{a-b}}T^{\sigma-1}\rangle_{\mathbb{Z}2[G]}}=\frac{M}{D}$$

为形式空间，其中在 M 中：

$$\langle X,S,T,U_1,...,U_{d-1}\rangle=\langle X\rangle\oplus\langle S\rangle\oplus\langle T\rangle\oplus\langle U_1\rangle\oplus....\langle U_{d-1}\rangle\simeq\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_p[G]\oplus...\oplus\mathbb{Z}_p[G]$$

而在 V 中：

$$\langle X,S,T\rangle\oplus\langle U_1\rangle\oplus....\langle U_{d-1}\rangle\simeq\frac{\langle X,S,T\rangle}{\langle S^{p^a}X^{-p^{a-b}}T^{\sigma-1}\rangle}\oplus\mathbb{Z}_p[G]\oplus...\oplus\mathbb{Z}_p[G]$$

这意味着 $X^{\sigma}=X$ 和 $\frac{S^{p^a}}{x^{-p^{a-b}}}=T^{1-\sigma}$ 生成了 X、S、T、$U_1...U_{d-1}$之间的所有关系。我们将在 IV 中研究 $W=\frac{\langle X,S\ T\rangle}{\langle S^{p^a}X^{-p^{a-b}}T^{\sigma-1}\rangle}$，的结构，并证明：

$$H^0(G,W)=p^n$$

$$H^1(G,W)=1$$

$$\chi_W=\chi_{reg}+1$$

and

$$W_{tors}=\mu_F=\mu_K$$

那么，$F^{\times}$ 是 V 的商。但它具有相同的特征

$$\chi_{F^{\times}}=\chi_V=d\chi_{reg}+1$$

且具有相同的挠元，因此，使用情形 2 末尾的相同论证：

$$F^{\times}\simeq V$$

情形 5：混合情形

现在我们研究最一般的情形，它是分圆情形与情形 4 的混合。这里的情况并非完全一般：我们假设 $\mu_F \neq 1$ （否则适用情形 1 ）。另一个难点是，我们不假设 $\mu_K \subset N$ （ $F^\times$ ）。因此，我们必须使用 III 开头定义的参数 b和 m，并假设 $m \neq 0$ （否则适用情形 4）以及 $n > m$ （否则适用分圆情形）。由于 $\mu_F \neq 1$， $\mu_K \neq 1$ （因为如果 $p \neq 2$， $[K[\mu_p]: K]$ 与 p 互素；而如果 $p = 2$，无论如何$K \supset \mu_2$ ），所以 $a \geq 1$。此外，这里排除了特殊情形 2（将适用情形 6），但不排除特殊情形 1（其中将使用参数 $l \geq 2$ ，使得 $\mu_{K(i)} = \mu_{2^l}$ ）。与上文一样，我们选取$x \in F^\times$，其模 N的阶为 p^n （$F^\times$）。

由于排除了特殊情形 2，引理 (3.3.1) 表明

$$N_{K_m/K}(\mu_F) = \mu_K$$

然后，选取 μ_F 的一个生成元 ξ_F 后，我们定义

$$\xi_K = N_{K_m/K}(\xi_F) \tag{3.5.1}$$

此时，我们注意到 x 在 $N_{F/K_m}^{K_m^\times(F^\times)}$ 中的阶~~为 p^{n-m}~~(不可能更大，因为 $p^{n-m} = [F/K_m]$，而 $x^{p^{n-m-1}} = N_{F/K_m}(t)$ 会推出 $N_{F/K}(t) = x^{p^{n-1}}$ ，从而导致矛盾）。然后，x 也生成 $N_{F/K_m}^{K_m^\times(F^\times)}$ ，因此可以合理地写成, ~~令 N_m~~表示 N_{F/K_m} ：

$$N_m(s) = \xi_F x^\alpha$$

对某个 $s \in F^\times$ 和某个 $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ 成立。对这个等式取 $N_{K_m/K}$ 得到

$$N_{F/K}(s) = \xi_K x^{\alpha p^m}$$

由于 ξ_K 模 $N(F^\times)$ 的阶为 p^b，且 $\xi_K \equiv x^{-\alpha p^m}$ 模 $N(F^\times)$，因此可得

$$n - b \geq m \tag{3.5.2}$$

并且 $\alpha = \beta p^{n-b-m}$ 对某个 $\beta \in \mathbb{Z}_p^\times$成立。然后我们也用 x^β替换 x ，这样做同样方便，于是最后 3 个等式中有 2 个变为:

$$N_m(s) = \xi_F x^{p^{n-m-b}} \tag{3.5.3}$$

然后,

$$N_{F/K}(s) = \xi_K x^{p^{n-b}} \tag{3.5.4}$$

现在我们需要引入 $k_\sigma \in \mathbb{Z}_p$ ，使得:

$$\forall \xi \in \mu_F : \xi^\sigma = \xi^{k_\sigma} \tag{3.5.5}$$

有:

$$k_\sigma = 1 + \kappa p^a$$

对某个 $\kappa \in \mathbb{Z}_p^\times$成立（因为 σ 必须固定 μ_{p^a} 中的任意元素，而不是 $\mu_{p^{a+1}}$中的所有元素）。除特殊情形外，可以假设 $\kappa = 1$，必要时可用某个 $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$将 σ 替换为 σ^α 。不过我们不假设 $\kappa = 1$。

由于

$$N_m(s) = \xi_F x^{p^{n-m-b}}$$

有:

$$N_m(s)^{-\sigma + k_\sigma} = x^{(k_\sigma - 1)p^{n-m-b}} = x^{\kappa p^{a+n-m-b}}$$

然后:

$$N_m\left(\frac{s^{-\sigma+1+\kappa p^a}}{x^{\kappa p^{a-b}}}\right)=1$$

在伽罗瓦群由 σ^{p^m} 生成的 F/K_m 中应用希尔伯特90定理:

$$\frac{s^{-\sigma+1+\kappa p^a}}{x^{\kappa p^{a-b}}}=t^{1-\sigma^{p^m}} \tag{3.5.6}$$

对某个 $t\in F^{\times}$。
(3.5.6) 是我们的基本关系，所起的作用与 $z^{p^a}=y^{1-\sigma}$ 在情形 2 中完全相同。

下一步是计算 $N_{F/K}(t)$。为此，我们将使用以下两个引理:

引理(3.5.7): 当 $z^{p^a}=x_0y^{1-\sigma}, N(z)^{p^{a-c}}=\xi x_0^{p^{n-c}}$，$x_0\in K$，且 ξ 的阶为 p^c （其中 $c=\min(n,a)$）时，计算 $N(y)$

设 F/K 是一个次数为 p^n 的有限循环域扩张（局部或非局部），且 $\mu_{p^a}\subset K$ 和 $c=\min(n,a)$。那么，关系

$$z^{p^a}=x_0y^{1-\sigma}$$

对于满足 $N(z)^{p^{a-c}}=\xi x_0^{p^{n-c}}$ 的 z，若 ξ 的阶为 p^c，则有:

$$r=z^{p^{a-c}A}y^{p^{n-c}}$$

使得

$$r^{(1-\sigma)}=\xi$$

从而

$$r_0=r^{p^c}\in K$$

是包含在 F中的次数为 p^c 的唯一扩张的根式。此外，有:

$$N(y)=\frac{r_0}{x_0^{p^n(p^n-1)/2}}$$

证明:

类似于引理(3.2.1)，但有一些差异:

$$r=z^{p^{a-c}A}y^{p^{n-c}}$$

$$r^{(1-\sigma)}=z^{p^{a-c}A(1-\sigma)}y^{p^{n-c}(1-\sigma)}$$

$$r^{(1-\sigma)}=\frac{N(z)^{p^{a-c}}}{z^{p^{n+a-c}}}\frac{z^{p^{a+n-c}}}{x_0^{p^{n-c}}}$$

$$r^{(1-\sigma)}=\frac{N(z)^{p^{a-c}}}{x_0^{p^{n-c}}}=\frac{\xi x_0^{p^{n-c}}}{x_0^{p^{n-c}}}=\xi$$

阶为 p^c。另一方面，由于

$$z^{p^a}=x_0y^{1-\sigma}$$

它来自

$$z^{p^aA}=x_0^Ay^{(1-\sigma)A}$$

$$z^{p^aA}=\frac{x_0^AN(y)}{y^{p^n}}$$

$$N(y)=\frac{z^{p^a A}y^{p^n}}{x_0^A}=\frac{r_0}{x_0^A}=\frac{r_0}{x_0^{p^n(p^n-1)/2}}$$

因为 $A(1)=p^n\frac{(p^n-1)}{2}$ 是 A 和 $x_0^\sigma=x_0$ 的系数和（注意，对于任意 $P\in\mathbb{Z}_p[G]=\mathbb{Z}_p[X]/(X^{p^n}-1)$，以及对于任意 $\xi\in\mu_{p^n}$，我们可以定义 $P(\xi)$，这使得使用记号 $A(1)$ 是合理的）。

在寻找 $N(F^\times)$ 中方便的直因子之前，我们还需要以下结果：

引理 (3.5.8)： 注意到 $c=\min(n-m,a)$，有：$Rad(K_{m+c}/K_m)$，其中某个 $\delta_0\in K^\times$。

证明：首先，注意 $Rad(K_{m+c}/K_m)$ 不能在 $K^\times$ 中选取，因为 F 与 $K[\sqrt[p]{\delta_0}]$ 的复合域要么是 F，要么不是循环的；此外，根据定义，$\mu_F=\mu_{K_m}$，并且 G 在 $\langle r_m\rangle$ 上按 ω-同型方式作用，其中 ω 是 G 在 μ_F 上作用的特征（与 k_σ 相关联）。对阶为 $o\le p^a$ 的元素施加 ω-同型作用，就只是平凡作用，于是

$$r_m\in\left(\frac{K_m^\times}{K_m^{\times p^c}}\right)^G$$

因此，对于某个 $y\in K_m^\times$，有 $r_m^{1-\sigma}=y^{p^c}$，故 $N_{Km/K}(y)^{p^c}=1$。如果 $N_{Km/K}(y)^{p^{c-1}}=1$，我们可以写成 $y^{p^{c-1}}=f^{1-\sigma}$，于是 $r_m^{1-\sigma}=f^{(1-\sigma)p}$。由此可得，对于某个 $\gamma_0\in K^\times$，有 $r_m=f^p\gamma_0$，进而得到 $K_{m+1}=K_m[\sqrt[p]{\gamma_0}]$，这不可能，正如上文所述。因此，$N_{K_m/K}(y)$ 是一个阶为 p^c 的单位根，如 $\xi_K^{p^{a-c}}$，随后最终将 y 替换为带有 $\beta\in\mathbb{Z}_p^\times$ 的 y^β：

$$N_{Km/K}(y)=\xi_K^{p^{a-c}}=N_{Km/K}(\xi_F^{p^{a-c}})$$

因此，$y=\xi_F^{p^{a-c}}w^{1-\sigma}$ 对某个 $w\in K_m^\times$ 成立，然后，

$$r_m^{1-\sigma}=y^{p^c}=\xi_F^{p^a}w^{(1-\sigma)p^c}=\xi_F^{-\kappa^{-1}(1-\sigma)}w^{(1-\sigma)p^c}$$

因为 $\xi_F^\sigma=\xi_F^{1+\kappa p^a}$。最后，不出所料：

$$r_m=\xi_F^{-\kappa^{-1}}w^{p^c}\delta_0\equiv\xi_F^{-\kappa^{-1}}\delta_0\mod K_m^{\times p^c}$$

对某个 $\delta_0\in K^\times$成立。当然，我们可以用 $r_m^{-\kappa}$替换它，并将 $\delta_0^{-\kappa}$重命名为 δ_0，这样就证明了引理 (3.5.8)。

r备注 (3.5.9)： 这最终证明了，尽管 K_{m+c}/K 不是库默尔的，但可以写成：

$$K_{m+c}=K_m\left[\sqrt[p^c]{\xi_F\delta_0}\right]=K\left[\sqrt[p^{c+m}]{\xi_K\delta_0^{p^m}}\right]$$

最后一个等式在特殊情形 1 中不成立，此时 $c=a=1$ 和 $K\left[\sqrt[2^{m+l-1}]{-\delta_0^{2^{m+l-2}}}\right]$ 才是正确的公式，但这并不十分重要。

现在，我们正在寻找这样的“根式”

$$R=r^{p^{m+c}}\equiv\left(\xi_K\delta_0^{p^m}\right)^\tau\mod K^{\times p^{m+c}}$$

如前一条注释所述，其中 $\tau\in\mathbb{Z}_p^\times$和 r 满足条件：$r^{1-\sigma}=\xi$ 是阶为p^{m+c} 的单位根（或在 2^{m+l-1} 特殊情形 1 下）。注意，当固定 $\xi=r^{1-\sigma}$ 时，R 在 $K^\times/K^{\times p^{m+c}}$中是唯一的（因为如果 $r^{1-\sigma}=r'^{1-\sigma}=\xi$，那么对某个 $\gamma_0\in K$，有 $r=r'\gamma_0$，于是 $R=R'\gamma_0^{p^{m+c}}$），并且$c=\min(n-m,a)>0$；不过这里我们不必关注 ξ，此时 R在相差某个可逆幂的意义下已确定，我们将其记为 τ。

一种通用方法是在 K_c/K 和 K_{m+c}/K_m 中分别应用引理 (3.5.8)，然后比较结果；不过我们采用以下捷径，使用

$$S_m = 1 + \sigma + \sigma^2 + ... + \sigma^{p^m} \quad \text{and} \quad A_m = \sum_{k=0}^{p^{n-m}-1} k\sigma^{kp^m}$$

满足

$$1 - \sigma^{p^m} = (1-\sigma)S_m \quad \text{and} \quad A_m(1-\sigma^{p^m}) = N_m - p^{n-m} \quad :$$

设 $r \in K_{m+c}$ 为由以下内容定义的数。

$$r = s^{\kappa S_m A_m p^{a-c}} \left(\frac{t^{S_m}}{s}\right)^{p^{n-m-c}} \tag{3.5.10}$$

于是，有:

$$r^{1-\sigma} = s^{\kappa(1-\sigma^{p^m})A_m p^{a-c}} \left(\frac{t^{S_m}}{s}\right)^{(1-\sigma)p^{n-m-c}}$$

$$r^{1-\sigma} = s^{\kappa(N_m - p^{n-m})p^{a-c}} \left(\frac{t^{S_m}}{s}\right)^{(1-\sigma)p^{n-m-c}}$$

另一方面，由 (3.5.6) 可得:

$$\frac{s^{\kappa p^a}}{x^{\kappa p^{a-b}}} = \left(\frac{t^{S_m}}{s}\right)^{1-\sigma}$$

从而倒数第二个等式变为:

$$r^{1-\sigma} = s^{\kappa(N_m - p^{n-m})p^{a-c}} \left(\frac{s^{\kappa p^a}}{x^{\kappa p^{a-b}}}\right)^{p^{n-m-c}}$$

$$r^{1-\sigma} = \frac{N_m(s^{\kappa p^{a-c}})}{s^{\kappa p^{n-m+a-c}}} \left(\frac{s^{\kappa p^a}}{x^{\kappa p^{a-b}}}\right)^{p^{n-m-c}}$$

$$r^{1-\sigma} = \frac{N_m(s)^{\kappa p^{a-c}}}{x^{\kappa p^{n-m-c+a-b}}}$$

然后使用 (3.5.3) :

$$r^{1-\sigma} = \frac{(\xi_F x^{p^{n-m-b}})^{\kappa p^{a-c}}}{x^{\kappa p^{n-m-c+a-b}}}$$

$$r^{1-\sigma} = \xi_F^{\kappa p^{a-c}} \tag{3.5.11}$$

是阶为 p^{m+c} 的单位根，除了在特殊情形 1 中，其中 $a = c = 1$ 和 $r^{1-\sigma}$ 的阶为2^{m+l-1} 如预期。在下一次计算中，我们将使用

$$m' = \begin{cases} m & \text{apart from the special case} \\ m + l - 2 & \text{in the special case} \end{cases}$$

因此可以合理地写成:

$$R = r^{p^{m'+c}} = (\xi_K \delta_0^{p^{m'}})^\tau \lambda_0^{p^{m'+c}}$$

对于某个 $\lambda_0 \in K^\times$。

现在我们可以明确 $N_{F/K}(t)$ 和 δ_0 from (3.5.10) 之间的关系：为避免讨论特殊情形 1，对于一个整数 $k >> 0$:

$$N(r)^{p^k} = R^{p^{k+n-m'-c}}$$

另一方面,

$$N(r) = N\left(s^{\kappa S_m A_m p^{a-c}} \left(\frac{t^{S_m}}{s}\right)^{p^{n-m-c}}\right)$$

$$N(r) = N(s)^{\kappa S_m(1) A_m(1) p^{a-c} - p^{n-m-c}} N(t)^{S_m(1) p^{n-m-c}}$$

$$N(r) = N(s)^{\kappa A_m(1) p^{m+a-c} - p^{n-m-c}} N(t)^{p^{n-c}}$$

并且 $A_m(1) = \sum_{k=0}^{p^{n-m}-1} k = \frac{p^{n-m}(p^{n-m}-1)}{2}$ 使得

$$N(r) = N(s)^{\kappa p^{n+a-c}(p^{n-m}-1)/2 - p^{n-m-c}} N(t)^{p^{n-c}}$$

并利用（3.5.4）:

$$N(r) = (\xi_K x^{p^{n-b}})^{\kappa p^{n+a-c}(p^{n-m}-1)/2 - p^{n-m-c}} N(t)^{p^{n-c}}$$

于是，当 $k >> 0$ 时，去掉单位根:

$$N(r)^{p^k} = R^{p^{k+n-m'-c}} = (\delta_0^{\tau p^{m'}} \lambda_0^{p^{m'+c}})^{p^{k+n-m'-c}} = (x^{p^{n-b}})^{\kappa p^{k+n+a-c}(p^{n-m}-1)/2 - p^{k+n-m-c}} N(t)^{p^{k+n-c}}$$

因此,

$$\delta_0^{\tau p^{k+n-c}} \lambda_0^{p^{k+n}} = x^{\kappa p^{2n+k+a-b-c}(p^{n-m}-1)/2 - p^{2n+k-m-b-c}} N(t)^{p^{k+n-c}}$$

最后得到:

$$\delta_0^{\tau} \lambda_0^{p^c} = \xi_K^{-\rho} x^{\kappa p^{n+a-b}(p^{n-m}-1)/2 - p^{n-m-b}} N(t)$$

对某个 $\rho \in \mathbb{Z}_p$，于是:

$$N(t) = \frac{\xi_K^{\rho} \delta_0^{\tau}}{x^{\kappa p^{n+a-b}(p^{n-m}-1)/2 - p^{n-m-b}}} \lambda_0^{p^c}$$

可以写成:

$$N(t) = \frac{\xi_K^{\rho} \delta_0^{\tau}}{x^{\nu p^{n-m-b}}} \lambda_0^{p^c} \tag{3.5.12}$$

对某个 ν ，$\tau \in \mathbb{Z}_p^{\times}$.

引理（3.5.13）： 对于适当的 x，在 $K^{\times}/K^{\times p}$ 中有:

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \langle x, \xi_K, \delta_0 \rangle = 3$$

然后:

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} (\mathbb{Q}_p \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} W_0) = 2$$

证明:

首先注意，在 $K^{\times}/K^{\times p}$, ξ_K 和 $\delta_0 \in K$ 中， $\xi_F \delta_0 = Rad(K_{m+1}/K_m)$ 不依赖于生成 $K^{\times}$ 模 $N(F^{\times})$ 的 x 的选取。另一方面，$\mu_{p^{a+1}} \not\subset K$，于是 $\delta_0 \not\subset \mu_K K^{\times p}$，因此在 $K^{\times}/K^{\times p}$ 中,

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \langle \xi_K, \delta_0 \rangle = 2$$

最后，如果 x 生成 $K^\times$ 模 $N(F^\times)$，那么对任意 $f \in F^\times$，$xN(f)$ 也如此。于是，$\dim_{\mathbb{F}_p}\langle xN(f)\ \xi_K,\ \delta_0\rangle = 2$ 对任意 $f \in F^\times$ 成立，当且仅当 x 和 $N(F^\times)$ 都包含在 $\langle \xi_K, \delta_0\rangle K^{\times p}$ 中。然而，$\dim^{\mathbb{F}_p}(N(F^\times)) = d+1$，于是有 $d = 1$, $\langle \xi_K, \delta_0\rangle = N(F^\times) \bmod K^{\times p}$，进而 $x \in N(F^\times)K^{\times p}$ 不能生成 $K^\times$ 模 $N(F^\times)$，这就产生了矛盾。

一旦选定一个方便的 x 使得 $\dim_{\mathbb{F}_p}\langle x, \xi_K, \delta_0\rangle = 3$，(3.5.12) 便证明了

$$\dim_{\mathbb{F}_p}\langle x, \xi_K, N(t)\rangle = 3 \tag{3.5.14}$$

然后:

$$\dim(\mathbb{Q}_p \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} W_0) = 2$$

这使我们能够在 $N(F^\times)$ 中选取一个直因子:

引理 (3.5.15)： 一个方便的直因子

$$W_0 = \langle N(s), N(t), N(x)\rangle$$

是 $N(F^\times)$ 中的一个直因子。

证明:

首先注意，利用 (3.5.4)，$N(s) = \xi_K x^{p^{n-b}}$，因此 $N(s)^{p^b} = \xi_K^{p^b} x^{p^n}$，进而 $\xi_K^{p^b} \in \langle N(s)\ N(x)\rangle$。另一方面，$\xi_K^{p^b}$ 生成 $\mu_K \cap N(F^\times) = (W_0)_{tors}$，记为 μ_N；于是，W_0 是 $N(F^\times)$ 的直因子，当且仅当 W_0/μ_N 是 $N(F^\times)/\mu_N$ 的直因子，而后者没有挠元。根据 (1.8)，我们假设，对于 $\xi_N = \xi_K^{p^b}$：

$$N(f)^p = \xi_N^\alpha N(s)^\beta x^{p^n\gamma} N(t)^\delta \tag{3.5.16}$$

在这个等式中用 $\xi_K x^{p^{n-b}}$ 替换 $N(s)$，并利用 (3.5.14)，可得 $p \mid \delta = p\delta'$，因此我们将 (3.5.16) 改写为:

$$N(f/t^{\delta'})^p = \xi_N^\alpha N(s)^\beta x^{p^n\gamma} = \xi_K^{\alpha p^b} N(s)^\beta x^{p^n\gamma} = \xi_K^{\alpha p^b+\beta} x^{p^n\gamma+\beta p^{n-b}}$$

若 $b > 0$，则可推出 $\xi^\beta \in K^{\times p}$（因为 $n - b > 0$），进而得到 $p \mid \beta = b\beta'$，然后$N(f/t^{\delta'}s^{\beta'})^p = \xi_N^\alpha x^{p^n\gamma} = \xi_K^{\alpha p^b} x^{p^n\gamma} = N(s)^{\alpha p^b} x^{(\gamma-\alpha)p^n}$，再得到 $x^{(\gamma-\alpha)p^n} \in N(F^\times)^p$，因此 $p \mid (\gamma-\alpha) = pw$，从而

$$N(f/t^{\delta'}s^{\beta'})^p = N\left(s^{\alpha p^{b-1}} x^w\right)^p$$

然后 $N(f/t^{\delta'}s^{\beta'}) = \xi N\left(s^{\alpha p^{b-1}} x^w\right)$ 对于某个 $\xi \in \mu_p$，必然是范数，因而属于 W_0。所以如果 $b > 0$，我们就完成了。

如果 $b = 0$，等式变为

$$N(f/t^{\delta'})^p = \xi_K^{\alpha+\beta} x^{p^n(\gamma+\beta)}$$

因此 $p \mid (\beta + \alpha) = p\mu$，但由于 ξ_K 是范数（因为 $b = 0$），可得 $\xi_K^{p\mu} \in N(F^\times)^p$，然后$p \mid (\gamma + \beta) = p\nu$。但是,

$$N(f/t^{\delta'})^p = \xi_K^{p\mu} x^{p^{n+1}\nu}$$

同时具有两者 右侧的因子 W_0^p，这样我们就可以像上面那样完成证明，引理的证明也就结束了。

ma (3.5.15).

最后一步是选择 S，使得

$$N(F^\times) = W_0 \oplus S$$

其中 $S \simeq \mathbb{Z}_p^{d-1}$。于是我们可以写出

$$S = \langle v_1, v_2, ..., v_{d-1} \rangle$$

with

$$v_i = N(u_i),\ 1 \leq i \leq d-1$$

然后

$$N(F^\times) = \langle N(s), N(t), N(x), N(u_1), ..., N(u_{d-1}) \rangle$$

从而，根据“N(L)=N(M)”引理：

$$F^\times = \langle s, t, x, u_1, ..., u_{d-1} \rangle$$

最后，令

$$V = \frac{\langle X, S, T, U_1, ..., U_{d-1} \rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle S^{1-\sigma+\kappa p^a} X^{-\kappa p^{a-b}} T^{\sigma^{p^m}-1} \rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}} = \frac{M}{D}$$

是形式空间，其中在 M 中：

$$\langle X, S, T, U_1, ..., U_{d-1} \rangle = \langle X \rangle \oplus \langle S \rangle \oplus \langle T \rangle \oplus \langle U_1 \rangle \oplus ....\langle U_{d-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p[G] \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_p[G]$$

并且在 V：

$$\langle X, S, T \rangle \oplus \langle U_1 \rangle \oplus ....\langle U_{d-1} \rangle \simeq \frac{\langle X, S, T \rangle}{\langle S^{1-\sigma+\kappa p^a} X^{-\kappa p^{a-b}} T^{\sigma^{p^m}-1} \rangle} \oplus \mathbb{Z}_p[G] \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_p[G]$$

这意味着 $X^\sigma = X$和 $\frac{S^{1-\sigma+\kappa p^a}}{X^{-\kappa p^{a-b}}} = T^{1-\sigma^{p^m}}$生成了 X、S、T、$U_1 ... U_{d-1}$之间的所有关系。我们在 IV 中研究 $W = \frac{\langle X, \frac{S\ T\rangle}{\langle S^{1-\sigma+\kappa p^a} X^{-\kappa p^{a-b}} T^{\sigma^{p^m}-1} \rangle}}{}$，证明：

$$H^0(G, W) = p^n$$

$$H^1(G, W) = 1$$

$$\chi_W = \chi_{reg} + 1$$

and

$$W_{tors} = \mu_F$$

那么，$F^\times$ 是 V的一个商。但它具有相同的特征

$$\chi_{F^\times} = \chi_V = d\chi_{reg} + 1$$

且具有相同的挠元，因此，运用常见论证：

$$F^\times \simeq V$$

情形 6： $p = 2$, $a = m = 1$,$\dim_{\mathbb{Q}_2} K$ 为偶数，$K[\mu_\infty]/K$ 不是前循环的，一个特殊情形

我们深入探讨特殊情形 2 中的情况，假设 $n \geq 2$ （否则适用分圆情形）。当 $\dim_{\mathbb{Q}_2} K$ 为奇数时，这种情况不可能发生（若如此，-1 不是 $K(i)/K$ 中的范数，见 (3.3.5)，于是$K(i)$不能包含在任何次数为 4 的循环扩张 F/K 中）。第一个参数是 $K(i) = K_1$ 中单位根的数量；接着我们记 $l \geq 2$ 为满足以下条件的整数：

$$\mu_{K(i)} = \mu_{2^l}$$

正如 III.1 中所述，$\mu_F = \mu_{K(i)}$ 并且我们注意到 ξ_F 是这个群的一个生成元。由于

$$N_{K(i)/K}(\xi_F) = \xi_F \xi_F^{-1} = 1$$

将 (1.2) 中的交换图应用于以 $K(i)$ 替换 L 的情形，可证明 ξ_F 是任意 K 的阿贝尔扩张中的范数， F 也是如此，因此我们可以写出

$$\xi_F = N_{F/K_1}(z)$$

对于某个 $z \in F^\times$。此外，

$$N(z) = N_{K_1/K}(\xi_F) = 1$$

从而

$$z = t^{1-\sigma}$$

对于某个 $t \in F^\times$。另一方面，

$$1 = \xi_F^{2^l} = N_1(t^{2^l(1-\sigma)})$$

其中 $N_1 = N_{F/K_1} = \sum \sigma^{2k}$ 并在 F/K_1 中应用希尔伯特90定理：$0 \le k \le 2^n - 1$

$$t^{2^l(1-\sigma)} = y^{1-\sigma^2} \tag{3.6.1}$$

对于某个 $y \in F^\times$。于是，有

$$\left(\frac{t^{2^l}}{y^{1+\sigma}}\right)^{1-\sigma} = 1$$

然后

$$\frac{t^{2^l}}{y^{1+\sigma}} = x_0 \in K^\times$$

接着我们注意到，对于任意 $\delta_1 \in K_1$，在（3.6.1）中得到的 y 都可以替换为 $y\delta_1$，因为（$y\delta_1$）$^{1-\sigma^2} = y^{1-\sigma^2}$。于是， x_0 变为

$$x_0' = x_0 / N_{K_1/K}(\delta_1)$$

然后， x_0 可以模 $N_{K_1/K}$（$K_1^\times$）改变，其在 $K^\times$ 中的指数为 2。这一点稍后会派上用场。

$$t^{2^l} = x_0 y^{1+\sigma} \tag{3.6.2}$$

这就是我们的基本关系，稍后将对此作更精确的说明。
下一步是确定 N（t）和 N（y）可能呈现何种形式。我们先从

$$N_1(z) = \xi_F = N_1(t)^{1-\sigma}$$

然后注意到

$$(1-\xi_F)^{1-\sigma} = \frac{1-\xi_F}{1-\xi_F^{-1}} = -\xi_F$$

比较前两个等式可得：

$$N_1(-it)^{1-\sigma} = -\xi_F = (1-\xi_F)^{1-\sigma}$$

然后，

$$N_1(t) = (1-\xi_F) i \delta_0 \tag{3.6.3}$$

对于某个 $\delta_0 \in K^\times$。然后，

$$N(t) = ((1-\xi_F)i\delta_0)^{1+\sigma}$$

$$N(t) = (2-2\cos\theta)\delta_0^2 \tag{3.6.4}$$

其中我们注意到 $\theta = \frac{2\pi}{2^l}$ 和 $N_{K_1/K}(1-\xi_F) = 2-2\cos\theta \in K^\times$。当然，$\mathbb{Q}_2$ 的有限扩张与复平面并不相同，但以下计算仍然是合法的（将 F 和 $\mathbb{C}$ 都视为同一数域的完备化）：

$$1-e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}) = e^{i\theta/2}(-2i\sin(\theta/2)$$

然后：

$$(1-e^{i\theta})^2 = -4e^{i\theta}\sin^2(\theta/2) = -e^{i\theta}(2-2\cos\theta)$$

值得注意的是：

$$(1-\xi_F)^{2^l} = -(2-2\cos\theta)^{2^{l-1}} \tag{3.6.5}$$

现在，将 N_1 应用于 (3.6.2)：

$$N_1(t)^{2^l} = x_0^{2^{n-1}}N(y)$$

以及 (3.6.3) 和 (3.6.5)：

$$((1-\xi_F)i\delta_0)^{2^l} = x_0^{2^{n-1}}N(y)$$

然后：

$$N(y) = \frac{-(2-2\cos\theta)^{2^{l-1}}}{x_0^{2^{n-1}}}\delta_0^{2^l} \tag{3.6.6}$$

再次从 (3.6.2) 出发，取范数：

$$N(t)^{2^l} = x_0^{2^n}N(y)^2$$

然后，

$$N(t)^{2^{l-1}} = \pm\, x_0^{2^{n-1}}N(y)$$

现在很容易确定这个等式中的符号：如果是加号，那么 $N(y)$ 就会是 K 中的一个平方（因为 $n \geq 2$），接着利用 (3.6.6)，-1 就会是 K中的一个平方，也就是说 $i \in K^\times$。这与假设矛盾，因此我们可以写成：

$$N\left(\frac{t^{2^{l-1}}}{y}\right) = -\,x_0^{2^{n-1}} \tag{3.6.7}$$

记住，x_0 是模 $N_{K_1/K}(K_1^\times)$ 的，或者 $x_0 \in N_{K_1/K}(K_1^\times)$，我们将继续取 $x_0 = 1$；或者 $x_0 \notin N_{K_1/K}(K_1^\times)$，我们将继续取 x_0 为 $K^\times/N_{K_1/K}(K_1^\times)$ 的任意一个生成元，因而它也是 $K^\times/N(F^\times)$ 的一个生成元。在第一种情况下，(3.6.7) 意味着 -1 是 F/K 中的一个范数；在第二种情况下，-1 不是一个范数，否则 $x_0^{2^{n-1}}$ 也会是一个范数，并且无法生成 $K^\times/N(F^\times)$。(3.6.2) 因此变为：

$$\begin{cases} t^{2^l} = y^{1+\sigma} & \text{if } -1 \text{ is a norm in } F/K \\ t^{2^l} = x_0y^{1+\sigma} & \text{if } -1 \text{ is not a norm in } F/K \end{cases} \tag{3.6.8}$$

注意，在第二种情况下，x_0 表示 $K^\times/N(F^\times)$的生成元。随后我们需要以下引理，以便在 $N(F^\times)$中找到一个方便的直因子：

引理 (3.6.9)： $K^\times$ 中的 -1、 $2-2\cos\theta$、 $-2+2\cos\ \theta$ 均不是平方。

证明：我们已经知道 -1 不是平方，并且可以利用公式 $2-2\cos\theta=4\sin^2(\theta/2)$ 看出，如果 $2-2\cos\ \theta$ 或 $-2+2\cos\theta$ 是平方，那么 $K(i)$ 将包含 i、$\sin(\theta/2)$ 和 $\sin\ \theta=2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$，因此 $e^{i\theta/2}$ 这个阶为 2^{l+1} 的单位根将属于 F，这与假设矛盾。

由 (3.6.4) 和 (3.6.6) 可知，在 $K^\times/K^{\times 2}$ 中：

$$\langle N(t),N(y)\rangle_{\mathbb{F}_2}=\langle -1,2-2\cos\theta\rangle$$

于是，根据前述引理，

$$W_0=\langle N(t),N(y)\rangle_{\mathbb{Z}_2}$$

是 $N(F^\times)$ 的一个直因子。在第一种情形中， -1 是一个范数，因此有 $-1=N(t^{2^{l-1}}/y)$。在第二种情形中， $N(F^\times)$ 没有挠元；因此

$$\begin{cases}\dim\mathbb{Q}_2\underset{\mathbb{Z}_2}{\otimes}W_0=1 & \text{if } -1 \text{ is a norm in } F/K\\ \dim\mathbb{Q}_2\underset{\mathbb{Z}_2}{\otimes}W_0=2 & \text{if } -1 \text{ is not a norm in } F/K\end{cases}$$

很容易看出，在第一种情形中，当 -1 是一个范数、 x_0 是 $K^\times/N(F^\times)$ 的任意生成元时，$\langle x_0$、$N(t)$ $N(y)\rangle_{\mathbb{Z}_p}$ 也同样是 $N(F^\times)$ 中的一个直因子：基本上，如果 $N(f^2)=\pm x^{2^n\alpha}N(t)^\beta N(y)^\gamma$，我们可以设 $\gamma=0$ 使用 $-1=N(t^{2^{l-1}}/y)$，而引理 (3.6.9) 证明了 $2\mid\beta$；由此可知，对于某个 $h\in F^\times$， $N(h^2)=\pm x^{2^n\alpha}$，于是它是正的（因为 -1 不是平方），读者便可得出 $2\mid\alpha$。

这就得到：

$$\begin{cases}V=\langle X\rangle\oplus\langle T,Y\rangle\oplus\langle U_1\rangle\oplus....\langle U_{d-1}\rangle\simeq\mathbb{Z}_2\oplus\frac{\langle T,Y\rangle}{\langle T^{2^l}Y^{-1-\sigma}\rangle}\oplus\mathbb{Z}_2[G]\oplus...\oplus\mathbb{Z}_2[G] & \text{if } -1 \text{ is a norm in } F/K\\ V=\langle X,T,Y\rangle\oplus\langle U_1\rangle\oplus....\langle U_{d-1}\rangle\simeq\frac{\langle X,T,Y\rangle}{\langle T^{2^l}X^{-1}Y^{-1-\sigma}\rangle}\oplus\mathbb{Z}_2[G]\oplus...\oplus\mathbb{Z}_2[G] & \text{if } -1 \text{ is not a norm in } F/K\end{cases}$$

运用通常的论证，在研究形式空间之后

$$W_1=\frac{\langle X,T,Y\rangle}{\langle T^{2^l}Y^{-1-\sigma}\rangle}$$

and

$$W_2=\frac{\langle X,T,Y\rangle}{\langle T^{2^l}X^{-1}Y^{-1-\sigma}\rangle}$$

我们将能够写成：

$$F^\times\simeq V$$

情形 7： $Char(k)\neq p$

最后一种情形考虑次数为 p^n 的扩张 F/K，其中 K 的剩余域 k_K 含有 $q=q_0^i$ 个元素， q_0 是满足 $q_0\neq p$ 的素数。在这种情况下，（由于我们只考虑 p 部分：）

$$K^\times=\mu_K\times\pi_K^{\mathbb{Z}_p}\tag{3.7.1}$$

对于 K 的任意素元 π_K。

或者 $\mu_K = 1$，那么 F/K 未分歧（因为 K^{ab}，即在 K 上的极大 pro-p 阿贝尔扩张，是未分歧的），且 $p \neq 2$；此外， $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的自同构数与 $p \neq 2$ 互素，因此 $\mu_F = 1$ ，进而，记住我们只考虑 p-部分:

$$F^\times = K^\times$$

或者 $\mu_K \neq 1$。由于在类域论中， μ_K 对应于伽罗瓦群 Gal(K^{ab}/K) 的分歧子群,

$$p^b = e$$

是 F/K 的分歧指数，而

$$p^m = f$$

是惯性指数。于是我们有

$$n = m + b$$

于是我们注意到 $c = \min(n-m, a) = \min(b, a) = b$，那么 $K_{m+c} = K_n = F$。引理 (3.5.8) 和注记 (3.5.9) 适用，并证明 F/K 是伪库默尔的，含义是

$$F = K\left[\sqrt[p^n]{r}\right]$$

因此如此我 $r \in K^\times \backslash K^{\times p}$。 K_m/K 未分歧，则（或许将 r 替换为 r^λ ，并将 r^λ 替换为 $\lambda \in \mathbb{Z}_p^\times$），w e 可以假设 这一点

$$r = \xi_K^\alpha \pi_K^{p^m}$$

对于某个 $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$ 以及 K的某个素元 π_K。最后，我们注意到

$$\pi_F = \sqrt[p^n]{\xi_K^\alpha \pi_K^{p^m}} \tag{3.7.2}$$

它是 F的一个素元。除非 $p = 2$ 和 $a = 1$，否则有

$$|\mu_F| = p^{a+m}$$

若 $p = 2$ 和 $a = 1$，记住将 $x \in k_K$ 映到 x^q 的弗罗贝尼乌斯自同构生成伽罗瓦群(K_m/K) = 伽罗瓦群(k_F/k_K)，则有 $2 \mid (q-1)$ 和 $4 \nmid (q-1)$。于是，对某个 κ，有 $q = -1 + \kappa 2^{l-1}$，且 $l \in \mathbb{N}$，其中 κ 为奇数，且 $l \geq 3$ （因为 $q \equiv -1\ [4]$）。由此可得 $q^2 = 1 - \kappa 2^l + \kappa^2 2^{2l-2}$，因此若 $m = 1$， $\mu_F = \mu_{2^l}$，容易通过归纳证明

$$|\mu_F| = 2^{l+m-1}$$

与特殊情形 1 中一样。无论如何，在所有情形下，根据 F 中的 (3.7.1):

$$F^\times = \langle \pi_F, \mu_F \rangle_{\mathbb{Z}_p} \tag{3.7.3}$$

and

$$\pi_F^{1-\sigma} = \xi \tag{3.7.4}$$

一个阶为 p^n 的单位根（根据 (3.7.2)）。然后我们定义 δ 这个正整数，使得

$$p^\delta = \left|\frac{\mu_F}{\langle \xi \rangle}\right| = \begin{cases} p^{a-b} & \text{if } p \neq 2 \text{ or } a \neq 1 \\ 2^{l-b-1} & \text{if } p = 2 \text{ and } a = 1 \end{cases}$$

我们选择 ξ_F 作为生成元 μ_F，使得：

$$\xi = \xi_F^{p^\delta} \tag{3.7.5}$$

最后，我们注意到 $k_\sigma \in \mathbb{Z}_p^\times$ 一个 p 进单位，使得：

$$\forall \zeta \in \mu_F,\ \zeta^\sigma = \zeta^{k_\sigma}$$

然后，利用 (3.7.4)， G 对 $F^\times$ 的作用由下式给出：

$$\left(\pi_F^\alpha \xi_F^\beta\right)^\sigma = \pi_F^\alpha \xi_F^{p^\delta \alpha + k_\sigma \beta} \tag{3.7.6}$$

对所有 α 和 β均如此；根据 (3.7.3)，在 $\mathbb{Z}_p$ 中选取它们就足以完整描述 G 的作用，但也可以在 $\mathbb{Z}_p[G]$ 中选取它们（因为它是交换的）。

IV 挠子模与形式空间的上同调

本节将确立 III 中引入的形式空间的基本性质。我们从最一般的空间开始。

设 $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 为阶为 p^n 的循环群，$W_{a,\ b,\ m,\ n}$ 为形式空间，它被定义为一个 $\mathbb{Z}_p[G]$-模，其中 a、b、m、n 为满足以下条件的任意正整数：

$$\begin{cases} n \geq 1 \\ a \geq 1 \\ b \leq \min(a, n) \\ m + b \leq n \end{cases}$$

by :

$$W_{a,b,m,n} = \frac{\langle X, S, T\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle S^{-\sigma+1+\kappa p^a} X^{-\kappa p^{a-b}} T^{\sigma^{p^m}-1}\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}} = \frac{M}{D}$$

其中，$X^\sigma = X$和 $S^{-\sigma+1+\kappa p^a} = X^{\kappa p^{a-b}} T^{1-\sigma^{p^m}}$生成了 X、S、T之间的所有关系（第一个关系在 M和$W = W_{a,\ b,\ m,\ n}$中均成立，而第二个关系仅在 W中成立）；并且 $\kappa \in \mathbb{Z}_p^\times$满足以下限制：若 $p = 2$ 和 $a = 1$，则必须有：

$$\kappa \neq -1$$

否则，$\chi(W)$的计算将会出错。读者可以验证，在特殊情形 1 中，$\kappa \equiv 1$ [4]，因此满足前述条件；而在特殊情形 2 中，$\kappa \equiv -1$ 模 $|\mu_F|/2$，于是将使用另一个形式空间，如情形 6 所示。

读者应注意，尽管$W_{a,\ b,\ m,\ n}$尤其适用于混合情形，但我们将看到它也可应用于其他一些情形，因此这里不考虑情形 5 的大多数限制（$m > 0$、$n > m$）。

1. **特征 W：**

要确定 $\chi(W)$，我们注意到 $P \in \mathbb{Q}_p[G]$ 在 $\mathbb{Q}_p[G]$ 中有逆元当且仅当：

$$\forall \xi \in \mu_{p^n},\ P(\xi) \neq 0$$

其中， $P(\xi)$是将 σ 替换为 ξ 后在 P的表达式中得到的，这对任意$\xi \in \mu_{p^n}$都有意义。然后我们注意到

$$q = S^{-\sigma+1+\kappa p^a} X^{-\kappa p^{a-b}} T^{\sigma^{p^m}-1}$$

D的一个生成元，因此

$$\chi(W) = \chi(M) - \chi(D) = 2\chi_{reg} + 1 - \chi(D)$$

因为

$$M \simeq \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p[G] \oplus \mathbb{Z}_p[G]$$

现在假设 $q^\alpha = 1$ 属于 $\mathbb{Q}_p \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} M$，且 $\alpha \in \mathbb{Q}_p[G]$。考察 S-部分，可得

$$(-\sigma + 1 + \kappa p^a)\alpha = 0$$

在 $\mathbb{Q}_p[G]$中，因此对所有 $\xi \in \mu_{p^n}$：

$$(-\xi + 1 + \kappa p^a)\alpha(\xi) = 0$$

在 $\mathbb{Q}_p$中。 $-X + 1 + \kappa p^a$ 的唯一根是 $r = 1 + \kappa p^a$。若 $p \neq 2$，则 $r \in \mathbb{Z}_p$ 因此不可能是阶为 p的幂的单位根。若 $p = 2$，则 $\mu_{2^n} \cap \mathbb{Z}_2 = \mu_2$，且排除了 $r = 1$ （因为$\kappa \in \mathbb{Z}_2^\times$），而 $r = -1$ 可能，当且仅当 $\kappa \times 2^a = -2$，即 $\kappa = -1$ 且 $a = 1$。我们排除了这种情况，最后， $-\sigma + 1 + \kappa p^a$ 在 $\mathbb{Q}_p[G]$中可逆，因此：

$$\forall \xi \in \mu_{p^n},\ \alpha(\xi) = 0$$

然后 $\alpha = 0$ 属于 $\mathbb{Q}_p[G]$，因此 χ（D） $= \chi_{reg}$，且可得：

$$\chi(W) = \chi_{reg} + 1 \tag{4.1.1}$$

2. **更一般的结果**

我们进行计算，这将允许我们计算 $H^i(G, W)$ 对于 $i = 0$、1 以及 W_{tors}，既针对最一般的形式空间 $W_{a,b,m,n}$ 也针对情形 6 中定义的形式空间 W_1，W_2。

我们定义

$$W = \frac{\langle X, S, T\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle S^P X^Q T^R\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}} = \frac{M}{D}$$

对于某些 $P, Q, R \in \mathbb{Z}_p[G]$，其中 $X^\sigma = X$和 $S^P X^Q T^R = 1$生成 X, S, T之间的所有关系（第一个关系在 M和 W中都成立，而第二个仅在 W中成立）。我们注意到$q = S^P X^Q T^R \in M$。

我们进一步假设：

$$\forall \xi \in \mu_{p^n},\ P(\xi) \neq 0$$

这特别意味着（如同 IV.1 中那样）

$$\chi(W) = 2\chi_{reg} + 1 - \chi_{reg} = \chi_{reg} + 1$$

然后我们考虑 B 和 C 使得，在 $\mathbb{Z}_p[X]$ 中：

$$BC = X^{p^n} - 1$$

这特别意味着 B 和 C 是本原的，最后我们定义：

$$H(B,C,W)=\frac{Ker\ (B,W)}{Im\ (C,W)}=\frac{\{w\in W,\ w^B=1\}}{\{w\in W,\ \exists v\in W,\ w=v^C\}}$$

并且我们用这种方式计算 $H(B,C,W)$：假设 $w\in Ker(B,W)$，则在 M 中有：

$$w^B=q^\lambda$$

对于某个 $\lambda\in\mathbb{Z}_p[G]$，然后如果 $w=S^\alpha X^\beta T^\gamma$对于某些 α、β、$\gamma\in\mathbb{Z}_p[G]$：

$$w^B=S^{\alpha B}X^{\beta B}T^{\gamma B}=S^{P\lambda}X^{Q\lambda}T^{R\lambda}$$

在 S 方面，可得：

$$\forall\xi\in\mu_{p^n},\ B(\xi)=0\implies P(\xi)\lambda(\xi)=0\implies\lambda(\xi)=0$$

因为 P本应在 μ_{p^n}中没有根。但这样一来， $B\mid\lambda=B\lambda'$和：

$$w^B=q^{B\lambda'}$$

以便

$$w=q^{\lambda'}\delta$$

对于某个 $\delta\in M$，使得 $\delta^B=1$，即 $\delta\in Ker(B,M)$。有：

$$Ker(B,M)=\begin{cases}S^{C\mathbb{Z}_p[G]}X^{\mathbb{Z}_p[G]}T^{C\mathbb{Z}_p[G]} & \text{if } B(1)=0\\ S^{C\mathbb{Z}_p[G]}T^{C\mathbb{Z}_p[G]} & \text{if } B(1)\neq 0\end{cases}$$

然后，由于 $w=\delta$ 在 W 中，其中 $\delta\in Ker(B,M)$：

$$H(B,C,W)=\begin{cases}\frac{\langle X\rangle}{\langle X\rangle\cap W^C} & \text{if } B(1)=0\\ 1 & \text{if } B(1)\neq 0\end{cases}$$

计算 $\langle X\rangle\cap W^C$ 相当容易：如果

$$X^\mu=S^{\alpha C}X^{\beta C}T^{\gamma C}S^{P\lambda}X^{Q\lambda}T^{R\lambda}$$

S 边如上证明了 $C\mid\lambda$，然后 $X^\mu\in\langle X\rangle^C$。最后得到：

$$H(B,C,W)=\begin{cases}\frac{\langle X\rangle}{\langle X\rangle^{C(1)}} & \text{if } B(1)=0\\ 1 & \text{if } B(1)\neq 0\end{cases}$$

其阶为：

$$|H(B,C,W)|=\begin{cases}\mid\mathbb{Z}_p/C(1)\mathbb{Z}_p\mid & \text{if } B(1)=0\\ 1 & \text{if } B(1)\neq 0\end{cases}\tag{4.2.1}$$

注意，取 $B=1-\sigma$，$C=N$和 $B=N$，$C=1-\sigma$分别导致计算 $H^0(G,W)$和 $H^1(G,W)$，因此

$$|H^i(G,W)|=\begin{cases}p^n & \text{if } i=0\\ 1 & \text{if } i=1\end{cases}\tag{4.2.2}$$

现在，我们旨在研究 W_{tors}。为此，我们将对 R 作出另一个假设：从现在起，在$\mathbb{Z}_p[X]$ 中：

$$X^{p^n}-1=RV$$

R 和 V 都是本原多项式。接着我们假设 $w=S^{\alpha}X^{\beta}T^{\gamma}\in W_{tors}$，也就是说，存在某个 $\lambda\in\mathbb{Z}_p$：

$$w^{p^k}=S^{p^k\alpha}X^{p^k\beta}T^{p^k\gamma}=q^{\lambda}=S^{P\lambda}X^{Q\lambda}T^{R\lambda} \tag{4.2.3}$$

我们用 V 对 λ 作欧几里得除法：

$$\lambda=Vt+\rho$$

其中 $d^{\circ}t<d^{\circ}V$。由于 $RV=0$ 属于 $\mathbb{Z}_p[G]$，(4.2.3) 的 T 边表明：

$$p^k\gamma=R\rho$$

其中 R 是本原的，且 $d^{\circ}(R\rho)<d^{\circ}R+d^{\circ}V=p^n$，因此：

$$\rho=p^k\rho'$$

在 $\mathbb{Z}_p[G]$ 中，则 $\lambda=Vt+p^k\rho'$，且 (4.2.3) 变为：

$$(w/q^{\rho'})^{p^k}=S^{PVt}X^{QVt}=q^{Vt}$$

这意味着 $p^k\mid PVt$ 和 $p^k\mid QVt$，于是存在某个 μ、$\nu\in\mathbb{Z}_p[G]$：

$$w\equiv S^{\mu V}X^{\nu}\mod q$$

现在我们确定 $w=S^{\mu V}X^{\nu}\in W$ 属于 W_{tors} 的条件。首先，P 在$\mathbb{Q}_p[G]$ 中可逆，因此存在 $C\in\mathbb{Z}_p[G]$，使得 $PC=p^j$ 属于 $\mathbb{Q}_p[G]$。于是，

$$w\in W_{tors}\iff w^P\in W_{tors}$$

现在，$w^P=S^{\mu VP}X^{\nu P}$是扭元，当且仅当对于 $i>>0$，在 M 中：

$$w^{p^iP}=S^{p^i\mu VP}X^{p^i\nu P}=S^{P\lambda}X^{Q\lambda}$$

对某个 $\lambda\in\mathbb{Z}_p[G]$成立。$S$ 一侧以及 P 在 $\mathbb{Q}_p[G]$ 中可逆这一事实证明了$\lambda=p^i\mu V$，而 X 一侧则给出（记住，$P(1)\neq 0$）在 $\mathbb{Q}_p$ 中：

$$\nu(1)=\frac{Q(1)V(1)}{P(1)}\mu(1)$$

如果这个等式成立，则有 $w^{p^iP}=q^{p^i\mu V}$，因此最终：

$$w=S^{\mu V}X^{\nu}\in W_{tors}\iff\nu(1)=\frac{Q(1)V(1)}{P(1)}\mu(1)$$

这证明了 W_{tors} 由以下元素生成：

$$\begin{aligned}
&\Xi=S^{V} && \text{if V(1)Q(1)=0}\\
&\Xi=S^{V}X^{\frac{Q(1)V(1)}{P(1)}} && \text{if } P(1)\mid Q(1)V(1)\neq 0\\
&\Xi=S^{\frac{P(1)}{Q(1)V(1)}V}X \text{ and } \Xi'=S^{V(1-\sigma)} && \text{if } 0\neq Q(1)V(1)\mid P(1)
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

最后，在 W中，有 $\Xi^P = \Xi^R = 1$。反过来， $\Xi^\alpha = 1$ 在 W中蕴含在 S侧有 $P \mid V\alpha$属于 $\mathbb{Z}_p[G]$。我们可以认为 α 模 R，因为 $S^{RV} = 1$；但若假设 $d^\circ\alpha < d^\circ R$，则有 $d^\circ(V\alpha) < p^n$，进而 $P \mid V\alpha$ 属于 $\mathbb{Z}_p[X]$，再由 P在 μ_{p^n}中没有根以及 $V \mid (X^{p^n} - 1)$，可得 $P \mid \alpha$。然后， Ξ的湮灭理想为：

$$I = (P, R)$$

而在 (4.2.4) 的第三种情形中， Ξ' 的湮灭子为；注意在该情形下， $RV = X^{p^n} - 1$和 $Q(1)V(1) \neq 0$ 蕴含 $(X-1) \mid R = (X-1)R'$：

$$J = (P, R')$$

由此可得：

$$W_{tors} \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_p[X]/(P,R) & \text{if } P(1) \mid V(1)Q(1) \ (= 0 \text{ or not}) \\ (\frac{P(1)}{Q(1)V(1)}, 1-X)/(P,R) & \text{if } 0 \neq Q(1)V(1) \mid P(1) \end{cases} \tag{4.2.5}$$

该同构将 $S^{\alpha V}$（最终乘以 X 的某个幂）映到 α。注意，在 (4.2.5) 的第二种情形中，分子中的理想包含分母中的理想，因为 $(1-X) \mid R$ 和 $P = P(1) + (1-X)Z = \overline{P_{(1)\,Q(1)V(1)} \times Q(1)V(1) + (1-X)Z}$，其中 $Z \in \mathbb{Z}_p[X]$。

3. **应用于** $W_{a,\ b,\ m,\ n}$ **：**

$$W_{a,b,m,n} = \frac{\langle X, S, T \rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle S^{-\sigma+1+\kappa p^a} X^{-\kappa p^{a-b}} T^{\sigma^{p^m}-1} \rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}$$

然后我们在此应用 IV.2 中得到的结果：

$$\begin{gathered} P = -X + 1 + \kappa p^a \\ Q = -\kappa p^{a-b} \\ R = X^{p^m} - 1 \\ V = N_m = \textstyle\sum_{k=0}^{p^{n-m}-1} X^{kp^m} \end{gathered}$$

(4.2.2) 随即证明：

$$|H^0(G, W_{a,b,m,n})| = p^n$$

and

$$|H^1(G, W_{a,b,m,n})| = 1$$

如预期。

为了描述 W_{tors}，我们首先注意到 $P(1) = \kappa p^a$， $Q(1) = -\kappa p^{a-b}$和 $V(1) = p^{n-m}$，因此$P(1) \mid Q(1)V(1)$因为 $n - m - b \geq 0$（见 (3.5.2)）。然后，(4.2.4) 指出$W_{a,b,m,n}$ 的挠子模由

$$\Xi = S^{N_m} X^{-p^{n-m-b}}$$

其本应在 $F^\times$ 中等于 ξ_F；而 (4.2.5) 给出：

$$W_{tors} \simeq \mathbb{Z}_p[X]/(X^{p^m} - 1, -X + 1 + \kappa p^a)$$

现在我们必须将其与 μ_F 进行比较，后者同样是 ω-同型的。于是排除了特殊情形 2。

$$\mu_F = \mu_{K_m} = \left\{\xi \in \mu_\infty, \xi^{\sigma^{p^m}} = \xi\right\}$$

（在特殊情形 2 中，右侧的集合可能大于 μ_F），然后，

$$\sigma^{p^m} - 1 = -\sigma + 1 + \kappa p^a = 1$$

在 μ_F 中也成立，而它是 $\mathbb{Z}_p[X]/(X^{p^m}-1, -X+1+\kappa p^a)$ 的一个商。读者可以验证，两边的阶相同，因此这个商实际上也是一个同构；特殊情形 1 除外，此时它是 2^{m+l-1}（而不是 2^{m+1}）。最后，

$$W_{tors} \simeq \mu_F \simeq \mathbb{Z}_p[X]/(X^{p^m}-1, -X+1+\kappa p^a) \tag{4.3.1}$$

正如预期。

4. **关于各种情形的讨论：**

先前的计算证明，同构

$$F^\times \simeq V$$

在情形 5 中是正确的。其他情形呢?

(a) $\underline{m=0,\ \mu_F = \mu_K}$：

$$W_{a,b,0,n} = \frac{\langle X, S, T\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle S^{-\sigma+1+\kappa p^a} X^{-\kappa p^{a-b}} T^{\sigma-1}\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}$$

定义 $Z = S^\kappa$、$X_0 = X^\kappa$ 和 $Y = T/S$：有 $\langle X、S、T\rangle = \langle X_0、Z、Y\rangle$，并且

$$S^{-\sigma+1+\kappa p^a} X^{-\kappa p^{a-b}} T^{\sigma-1} = Z^{p^a} X_0^{-p^{a-b}} Y^{\sigma-1}$$

然后:

$$W_{a,b,0,n} = \frac{\langle X_0, Y, Z\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle Z^{p^a} X_0^{-p^{a-b}} Y^{\sigma-1}\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}$$

这正是研究情形 4 所需的形式空间，因此情况也是如此：在该情形中也证明了同构。

(b) $\underline{b=0,\ \mu_K \subset N(F^\times)}$:

$$W_{a,0,m,n} = \frac{\langle X, S, T\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle S^{-\sigma+1+\kappa p^a} X^{-\kappa p^a} T^{\sigma^{p^m}-1}\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}$$

定义 $Z = S/X$：

$$S^{-\sigma+1+\kappa p^a} X^{-\kappa p^a} T^{\sigma^{p^m}-1} = Z^{-\sigma+1+\kappa p^a} T^{\sigma^{p^m}-1}$$

然后，

$$W_{a,0,m,n} = \frac{\langle X, Z, T\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle Z^{-\sigma+1+\kappa p^a} T^{\sigma^{p^m}-1}\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}} = \langle X\rangle \oplus \frac{\langle Z, T\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle Z^{-\sigma+1+\kappa p^a} T^{\sigma^{p^m}-1}\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}$$

这是最有趣的情形，因为 W 分裂为一个直和项。它不对应于 III 中研究的任何情形，但仍必须提及。只要$\mu_K \subset N(F^\times)$，尤其是在 $\mathbb{Z}_p$-扩张中，就会发生这种情况。

(c) $m=0$和 $b=0,\ \mu_K=\mu_F\subset N(F^\times)$:

$$W_{a,0,0,n}=\frac{\langle X,S,T\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle S^{-\sigma+1+\kappa p^a}X^{-\kappa p^a}T^{\sigma-1}\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}$$

定义 $Z=S^\kappa/X^\kappa,\ Y=T/S,\ X_0=X$：

$$W_{a,0,0,n}=\frac{\langle X_0,Y,Z\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle Z^{p^a}Y^{\sigma-1}\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}$$

而这正是要在情形 2 中研究的空间 W （如 (b) 中所示，它可分解），其同构随后得到了验证。

(d) $m=n$和 $b=0,\ \mu_K\subset N(F^\times)$，且 F/K是圆分的:

$$W_{a,0,n,n}=\frac{\langle X,S,T\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle S^{-\sigma+1+\kappa p^a}X^{-\kappa p^a}\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}$$

定义 $Z=S^\kappa/X^\kappa$：

$$W_{a,0,n,n}=\frac{\langle X,Z,T\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle Z^{-\sigma+1+\kappa p^a}\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}\simeq\langle X\rangle\oplus\frac{\langle Z\rangle}{\langle Z^{-\sigma+1+\kappa p^a}\rangle}\oplus\langle T\rangle\simeq\mathbb{Z}_p\oplus\omega\oplus\mathbb{Z}_p[G]$$

在分圆情形下，没有可供研究的形式空间；不过，我们可以注意到，如上所述，$W_{a,\ 0,\ n,\ n}$实际上是 $F^\times$ 的一个直因子，如情形 3 中所述，但特殊情形 2 除外。

(e) $a=b=m=0,\ \mu_K=1$：

$$W_{0,0,0,n}=\frac{\langle X,S,T\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle S^{-\sigma+1+\kappa}X^{-\kappa}T^{\sigma-1}\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}$$

定义 $Z=S^\kappa/X^\kappa$ 和 $Y=T/S$:

$$W_{0,0,0,n}=\frac{\langle X,Y,Z\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle ZY^{\sigma-1}\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}=\langle X,Y\rangle\simeq\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_p[G]$$

再一次，在情形 1 中没有空间可供研究，但 $W_{0,\ 0,\ 0,\ n}$ 也是一个直因子。

(f) a special case : $p=2,\ a=1,\ K[\mu_\infty]/K$ not procyclic

这是在情形 6 中研究的特殊情形 2，我们必须研究

$$W_1=\frac{\langle X,T,Y\rangle}{\langle T^{2^l}Y^{-1-\sigma}\rangle}$$

and

$$W_2=\frac{\langle X,T,Y\rangle}{\langle T^{2^l}X^{-1}Y^{-1-\sigma}\rangle}$$

首先，i、$j\in\{1,2\}$ 的 $H^i(G,W_j)$ 计算由 (4.2.2) 给出，并且与之匹配。 h
预期值。
之后，我们可以将 W_1 和 W_2 与为 $p=2$ 得到的$W_{l,\ b,\ 0,\ n}$ 进行比较（我们更改了一个变量的名称）：

$$W_{l,b,0,n} = \frac{\langle X, S, U\rangle_{\mathbb{Z}_2[G]}}{\langle S^{-\sigma+1+\kappa 2^l} X^{-\kappa 2^{l-b}} U^{\sigma-1}\rangle_{\mathbb{Z}_2[G]}}$$

我们可以观察到，经过如下变量替换： $Y = S/U, T = X^\kappa/S^\kappa$，分别将 b 替换为 0 和 1 后，有:

$$W_1' \simeq W_{l,0,0,n}$$

and

$$W_2' \simeq W_{l,1,0,n}$$

其中

$$W_1' = \frac{\langle X, T, Y\rangle}{\langle T^{2^l} Y^{-1+\sigma}\rangle}$$

and

$$W_2' = \frac{\langle X, T, Y\rangle}{\langle T^{2^l} X^{-1} Y^{-1+\sigma}\rangle}$$

总之， W_1 和 W_2 与 $W_{l,\ b,\ 0,\ n}$ 分别带有 $b = 0$、1 时颇为相似；但遗憾的是， σ 上方的符号在分母中并不相同，这当然会改变许多事情。于是我们放弃比较，尽管 W_1 可以进行比较；为此先分离出会分裂的 X-部分，再与 $W_{l,\ 0,\ 0,\ n}$的张量化版本进行比较。

为了计算 $W_{i,\ tors}$ 对于 $i = 1$、2 的情形，我们随后将 (4.2.5) 应用于 $P = 2^l$、 $Q = -b$ （$Q = 0$ 对应 W_1，$Q = -1$ 对应 W_2）、 $R = -1 - X$、 $V = \sum_{k=0}^{2^n-1} (-\sigma)^k$ （其中 $V(1) = 0$）；得到:

$$W_{i,tors} \simeq \frac{\mathbb{Z}_2[X]}{(2^l, -1-X)}$$

在所有情形下，其阶均为 2^l，正如预期。于是，情形 6 中描述的同构得以证明。

(g) $Char(k) \neq p$:

当 K 的剩余域 k 的特征不等于 p 时，由于我们已证明 $n = m + b$，我们旨在比较 $F^\times$ 与 $W_{a,\ b,\ n-b,\ n_\circ}$ 为此，我们定义 $\kappa \in \mathbb{Z}_p^\times$，使得

$$k_\sigma = 1 + \kappa p^a$$

and

$$l = \begin{cases} 2 & \text{if } p \neq 2 \text{ or } a \neq 1 \\ l \quad \text{such that } |\mu_{K(i)}| = 2^l & \text{if } p = 2 \text{ and } a = 1 \end{cases}$$

于是 (3.7.4) 和 (3.7.5) 变为:

$$\pi_F^{1-\sigma} = \xi_F^{p^\delta} = \xi_F^{p^{a-b+l-2}}$$

于是,

$$\left(\pi_F^{p^b} \xi_F^{p^{l-2}\kappa^{-1}}\right)^{1-\sigma} = \xi_F^{p^{a+l-2}} \xi_F^{p^{l-2}\kappa^{-1}(-\kappa p^a)} = 1$$

然后我们定义

$$\pi_K = \pi_F^{p^b} \xi_F^{p^{l-2}\kappa^{-1}} \in K^\times$$

它是 G-不变的，并且是 K的素元。于是有：

$$\frac{\pi_F^{-\sigma+1+\kappa p^a}}{\pi_K^{\kappa p^{a-b}}} = \frac{\xi_F^{p^{a-b+l-2}} \pi_F^{\kappa p^a}}{(\pi_F^{p^b} \xi_F^{p^{l-2}\kappa^{-1}})^{\kappa p^{a-b}}}$$

$$\frac{\pi_F^{-\sigma+1+\kappa p^a}}{\pi_K^{\kappa p^{a-b}}} = 1$$

这是$W_{a,\ b,\ m,\ n}$ 对任意 m成立，其中以 π_K替换 X ，以 π_F 替换 S ，并以 **1** 替换T 。于是， $K^\times$ 是形式空间

$$W = \frac{\langle X, S\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle S^{-\sigma+1+\kappa p^a} X^{-\kappa p^{a-b}}\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}} = \frac{M}{D}$$

其中 $X^\sigma = X$ 如常。读者可能会惊讶地发现， W 不依赖于m；然而，此处 $m = n - b$ 确实是 m的最大可能值。在 M中，

$$\Xi = N_m(S)/X$$

满足

$$\Xi^{-\sigma+1+\kappa p^a} = q^{N_m}$$

其中 $q = S^{-\sigma+1+\kappa p^a} X^{-\kappa p^{a-b}}$，于是，在 W中， Ξ是 ω-等型的。另一方面，考虑：

$$\omega_n = \left| \frac{\mathbb{Z}_p[X]}{\langle X^{p^n} - 1, -X + 1 + \kappa p^a\rangle} \right|$$

根据 (4.3.1) 以及应用于 F/K_m的引理 (3.3.1)，

$$\omega_n = p^{n-m}\omega_m$$

只要 $1 \le m \le n$成立。此外，

$$\frac{W}{\langle X\rangle} = \frac{\langle S\rangle}{\langle S^{1-\sigma+\kappa p^a}\rangle} \simeq \frac{\mathbb{Z}_p[X]}{\langle X^{p^n} - 1, -X + 1 + \kappa p^a\rangle}$$

其阶为 $\omega_n = p^{n-m}\omega_m$。涉及 $F^\times$ 的对应模为，若记作 ϕ： $W \longrightarrow F^\times$ 该映射将 S 映射为 π_F，并将 X 映射为 π_K：

$$\frac{\phi(W)}{\langle \phi(X)\rangle} = \frac{F^\times}{\langle \pi_K\rangle}$$

由此可得：

$$\left|\frac{F^\times}{\langle \pi_K\rangle}\right| = \left|\frac{F^\times}{\langle \mu_F \pi_K\rangle}\right| \left|\frac{\langle \mu_F \pi_K\rangle}{\langle \pi_K\rangle}\right| = |Im(\psi)| \times |\mu_F|$$

其中 ψ 是该映射

$$\psi : \begin{pmatrix} F^\times & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^b\mathbb{Z} \\ w & \mapsto & v(w) \mod p^b \end{pmatrix}$$

其中 v 是 F 中经 $v(\pi_F)=1$归一化的赋值。于是，

$$|Im(\psi)| \times |\mu_F| = p^b |\mu_F| = p^b \omega_m = \omega_m p^{n-m}$$

（参见 (4.3.1)）。那么， $W/\langle X\rangle$ 和 $\phi(W)/\langle \phi(X)\rangle$ 具有相同的阶，即 $\ker(\phi) \subset \langle X\rangle$。因此，$\ker(\phi) \neq 1$ 将意味着 $\chi(F^\times) = 0$ ，这将构成矛盾，故最终得到：

$$W \simeq F^\times$$

5. **主定理**

设 F/K和 F'/K'是两个次数相同的 p^n 的零特征局部域的循环扩张。注意到 σ是 Gal(F/K) 的一个生成元， σ'是 Gal(F'/K') 的一个生成元， $F^\times$和 $F'^\times$分别是 F和 F'的乘法群的 p-完备化，则存在一个同构

$$\Psi : F^\times \longrightarrow F'^\times$$

使得

$$\forall w \in F^\times, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \Psi(w^{\sigma^k}) = (\Psi(w))^{\sigma'^k}$$

当且仅当:

(a)

$$\mu_F \simeq \mu_{F'}$$

作为 G-模，含义如下:

$$|\mu_F| = |\mu_{F'}|$$

and

$$\exists k \in \mathbb{Z}_p : \ \forall \xi \in \mu_F, \ \ \xi^\sigma = \xi^k \ ; \ \forall \xi \in \mu_{F'}, \ \ \xi^{\sigma'} = \xi^k$$

(b)

$$\left|\mu_K \cap N_{F/K}(F^\times)\right| = \left|\mu_{K'} \cap N_{F'/K'}(F'^\times)\right|$$

(c)

the residual characteristics of K and K' are both different from p

or

K 和 K' 的剩余特征均等于 p ，且 $\mathsf{dim}_{\mathbb{Q}_p} K = \mathsf{dim}_{\mathbb{Q}_p} K'$

此外，注意到：若 K 的剩余特征不是 p $\mathsf{dim}_{\mathbb{Q}_p} K$ ，而 K 的剩余特征等于 p，则有:

$$F^\times \simeq W \oplus \mathbb{Z}_p[G]^{d-1}$$

其中， W 是 $F^\times$ 的一个合适的直因子，如 III 中所述并在 IV.4 中讨论，且

$$\chi(W) = \begin{cases} 1 & \text{if the residual characteristic of K is not } p \\ \chi_{reg} + 1 & \text{if the residual characteristic of K is } p \end{cases}$$

更确切地说:

$$W = \frac{\langle X, S, T\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}}{\langle \mathcal{R}\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}} = \frac{\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p[G] \oplus \mathbb{Z}_p[G]}{\langle \mathcal{R}\rangle} = \frac{M}{D}$$

其中 $X^\sigma = X$ 在 M 和 D 中的两者，以及 $\mathcal{R}$ ，是 F/K中的一个基本关系，给定为（参数 a、b、m 在 III 开始处定义， κ 在 (3.5.5) 中定义）：

$$\mathcal{R} = \begin{cases} S^{-\sigma+1+\kappa p^a} X^{-\kappa p^{a-b}} T^{\sigma^{p^m}-1} & \text{in Cases 1, 2, 3.2, 4, 5} \\ S^{-\sigma+1+\kappa p^a} X^{-\kappa p^{a-b}} & \text{in Case 7, replacing } T \text{ with 1 in both } M \text{ and } D \\ S^{2^l} X^{-1} & \text{in Case 3.3.a} \\ S^{2^{l-1}(1-\sigma)} T^{-1-\sigma} & \text{in Case 3.3.b} \\ S^{2^l} T^{-1-\sigma} & \text{in Case 6, } -1 \in N(F^\times) \\ S^{2^l} X^{-1} T^{-1-\sigma} & \text{in Case 6, } -1 \notin N(F^\times) \end{cases}$$

最后，分裂:

$$W \simeq \frac{W}{\langle X \rangle} \oplus \mathbb{Z}_p$$

当且仅当 $\mu_K \subset N(F^\times)$ 时发生。

证明:

首先，条件 (a)、(b)、(c) 表明，在 III 开头定义的参数 a、b、m 对 F/K 和 F'/K' 相同。还要注意，这些参数可以区分特殊情形 1 和特殊情形 2，因为在特殊情形 2 中， $k \equiv -1$ 模 $|\mu_F|$，而特殊情形 1 中并非如此（或者说， $|\mu_K \cap N(F^\times)|$ 在两种情形下并不相同）。因此，无需说明 $K[\mu_\infty]/K$ 是否为前循环的；不过在实际操作中，这一点确有必要，因为判断这一点比确定 G 对 μ_F 的具体作用更容易。
此外，涉及 K （其剩余特征为 p）和 K' （其剩余特征不为 p）的同构是不可能的，因为若果真如此:

$$\chi(F^\times) = d\chi\{reg\} + 1 > \chi_{reg} > \chi(F'^\times) = 1$$

那么，如果满足 $F^\times \simeq F'^\times$，条件 (a)、(b) 和 (c) 必然全部成立。除此之外，III 和 IV 中已证明了所有内容，唯独最后一个假设尚未证明。读者可以逐一核查每个基本关系 $\mathcal{R}$ （相应调整表示变量的字母）；不过，对于情形 3.3.a，我们不保留原来的关系

$$T^{2^{l}(1-\sigma)} = 1$$

在 M 和 D 中都没有 X 的情况下，我们注意到

$$\frac{\langle T \rangle}{\langle T^{2^l(1-\sigma)} \rangle} \simeq \frac{\langle X, T \rangle}{\langle T^{2^l} X^{-1} \rangle}$$

（ $X^\sigma = X$ 按照惯例）。读者还应参阅 IV.4 中的讨论。最后一个假设（$\mu_K \subset N(F^\times)$ 蕴含分裂）曾在 IV.4.b 中关于 $W_{a,\ b,\ m,\ n}$ 的讨论中提及，随后又在情形 1、2、3.2、4、5、7 中提及。在情形 3.3.b 和情形 6（当 -1 是一个范数时）， X 根本没有出现在 $\mathcal{R}$ 中，因此分裂显然成立。

关于逆命题（分裂意味着 $\mu_K \subset N(F^\times)$），我们注意到，情形 1、2、3.2、3.3.b 与此无关（$\mu_K \subset N(F^\times)$）；在情形 4、5 中，模 X 有： $N(S) = \xi_K$一个阶为

p^a 的元，而这在 $F^\times$ 中是错误的，如果 $\mu_K \not\subset N(F^\times)$。在情形 3.3.a 中，$X = S^{2^l}$ 与 $l \geq 2$ 不能在 $F^\times$ 中生成一个直因子。在情形 6 中，当 -1 不是范数时，$\mathcal{R}$ 模 X 给出在 -1 是范数时得到的基本关系；而分裂随后意味着存在一个阶为 2 的不变元，它是一个范数，但事实并非如此，因为 -1 不是范数。最后，在情形 7 中，IV.4.g 指出 $|W/\langle X\rangle| = \omega_n$，而 $|\mu_F| = |F^\times_{tors}| = \omega_m$，因此分裂意味着 $m = n$，也就是 $\mu_K \subset N(F^\times)$。以上证明了逆命题。但请注意，这仅对本文始终采用的这些 X 成立：在情形 7 中，当 F/K 完全分歧时，有 $\mu_K = \mu_F$，且 $X = \xi_K$ 生成 $K^\times/N(F^\times)$，其中 $\langle X\rangle$ 是 $F^\times$ 中的一个直因子。

V 结论

本文的主要动机是确定，基本参数是否足以完整描述零特征局部域的循环扩张中 G 的作用。答案是肯定的。情形 5 难以处理，但最终证明它是最重要的情形，并凸显了特征 ω 的作用。此外，它还使我们得以找到参数化空间 $W_{a,\ b,\ m,\ n}$；这一结果完全出乎意料，而且适用于几乎所有情形。另一个重要之处是，W ——以及在可以分裂时的 $W/\langle X\rangle$ ——汇集了关于 F/K 的所有有趣内容。作者相信，这项研究还有很多可供探索之处。

参考文献

[Ser] Jean-Pierre Serre，有限群的线性表示，Hermann，巴黎。[CaFr] Cassels 和 Fröhlich，代数数论，Academic Press，1973年。[Mil] J.S. Milne，类域论，4.03版，2020年8月，参见 j milne.org：https://jmilne.org/math/CourseNotes/CFT.pdf。[Lang] Serge Lang，代数数论，第二版，Graduate Texts in Mathematics 110（1994）。[Bos] Sébastien Bosca，Georges Gras，Jean-François Jaulent，数域阿贝尔扩张中理想的主化，International Journal of Number Theory，World Scientific Publishing，2009年，第5卷，第1–13页。ffhal-00267830v2f; https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00267830/document[Lem] F. Lemmermeyer，《从 Euler 到 Eisenstein 的互反律》（Springer-Verlag，柏林，2000年）。[Schol] A. Scholz，《关于方程 $t^2 - Du^2 = -4$ 的可解性》，Math. Z. 39（1934），95–111。[Sha] Sharifi R.，《局部单位群的伽罗瓦模结构》，Algebra Number Th. 7（2013），157–191。[Yak] Yakovlev A. V.，《以幂为基的环的 p 进表示的同调判定》，苏联科学院通报，数学系列，34（1970），1000–1014，MR0282945。