arXiv:2304.02562v2 [math.RT] 7 May 2023

量子 Grothendieck 环与簇代数之间的同构

Ryo Fujita、David Hernandez、Se-jin Oh 和 Hironori Oya

Abstract. 我们建立了量子环代数表示的量子 Grothendieck 环之间同构的簇理论解释 [FHOO22]。因此，我们获得了[KKOP21b]的幺半范畴化定理的量子化。我们建立了这些新要素的应用。首先，我们解决了任意非单边量子环路代数中的长期问题：所有单模的（q,t）-特征的正性，以及所有可达模（在簇幺半范畴化中）的 Kazhdan–Lusztig 猜想的类似命题。我们还建立了关于 Kirillov–Reshetikhin模的（ T-系统q,t）-特征的猜想性量子系统。最终，我们证明了我们的同构源自变量的显式双有理变换，并将其称为代换公式。这揭示了单模的（q,t）-特征之间新的非平凡关系。

Contents

引言 1
1. 量子簇代数 $\mathcal{A}_i$ 5
2. 之间的关系 $\mathcal{A}_i$'s 8
3. 与对偶典范基的比较 17
4. 量子格罗滕迪克环的回顾 19
5. 上的簇结构 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq\xi})$ 26
6. 量子格罗滕迪克环之间的同构及其应用 33
7. 代换公式 40
附录A. 量子簇代数 47
附录B. 上的簇结构 $K(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 50
附录C. 代换公式的例子 52
参考文献 56

Introduction

考虑一个复有限维单李代数 $\mathfrak{g}$ 和 q 一个一般量子参数。相应的量子环代数 $U_q(L\mathfrak{g})$是 $\mathfrak{g}$ 的量子仿射化，并具有 Hopf 代数的结构。特别地，在 $U_q(L\mathfrak{g})$ 上的有限维表示构成一个刚性幺半范畴 $\mathscr{C}_{\mathfrak{g}}$，其结构十分复杂，因为它既不是半单的，也不是编织的。该范畴有许多应用，并且已经从不同角度得到了深入研究。然而，一些基本问题仍然悬而未决，例如 q-特征（就 Frenkel–Reshetikhin [FR99]的意义而言）以及

Date: 2023年5月9日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 17B37, 13F60, 20G42, 81R50, 17B10, 17B67。

非单边类型。在本文中，我们证明，Kazhdan–Lusztig 型方法可用于解决这一问题，适用于非常广泛的一族单模。

量子 Grothendieck 环 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_\mathfrak{g})$ 的 $\mathscr{C}_\mathfrak{g}$ 是 Grothendieck 环 $K(\mathscr{C}_\mathfrak{g})$ 的一个非交换变形 $\mathscr{C}_\mathfrak{g}$，位于量子环面 $\mathcal{Y}_t$中。它由 [Nak04、VV03]针对单边类型引入，随后 [Her04] 采用不同的方法针对非单边类型引入。该环具有一个典范基$\mathbf{L}_{t,\ \mathfrak{g}}$ 其元素 $L_t(m)$ 被称为单模的 (q,t)-特征，并可通过 Kazhdan–Lusztig型算法计算。在这里， m 属于一个集合 $\mathcal{M}$，该集合充当 $\mathscr{C}_\mathfrak{g}$ 中单模 $L(m)$ 的参数集（该集合可与 Drinfel'd 多项式的集合相比较）。

量子 Grothendieck 环是研究$\mathscr{C}_\mathfrak{g}$中单模的有用工具。事实上，当 $\mathfrak{g}$ 为单边时，Nakajima 基于箭图簇的几何证明了单模的（q， t）-特征可特化为单模的 q-特征[Nak04]。也就是说，单模的 q-特征可以通过 Kazhdan–Lusztig 型算法计算。更确切地说，该算法计算标准模¨中的 Jordan–H$^{P_{\text{mölder 重数，}\ m'}}$ 即单模 $L(m')$在标准模 $M(m)$中出现的重数；后者是基本表示的张量积，其 q-特征由 Frenkel–Mukhin [FM01]所知。由于我们有

$$[M(m)] = [L(m)] + \sum_{m' \in \mathcal{M}\colon\, m' < m} P_{m,m'}[L(m')]$$

在针对 $\mathcal{M}$的某个偏序下的格罗滕迪克环 $K(\mathscr{C}_\mathfrak{g})$ 中，该算法原则上使我们能够计算出所有的简单 q-特征标。

这里我们强调，箭图簇在确保该算法有效性方面发挥着至关重要的作用。当 $\mathfrak{g}$ 非单边时，由于缺乏成熟完备的箭图簇理论，上述理论并不适用。不过，对于一般的 $\mathfrak{g}$，仍可以提出一个猜想性的 Kazhdan–Lusztig 型算法。

猜想 0.1（Kazhdan–Lusztig 猜想的类比，[Her04，猜想 7。3]）。在特化 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_\mathfrak{g}) \to K(\mathscr{C}_\mathfrak{g})$ 处 $t = 1$，元素 $L_t(m)$ 对应于简单类 $[L(m)]$ 对于任意 $m \in \mathcal{M}$。

由于可以像通常的 Kazhdan–Lusztig 理论那样，通过算法计算单模的（q， t）特征，猜想0.1 使我们能够在验证后通过算法计算所有单模的 q-特征。除单边类型外，该猜想已在 B 型以及 $\mathscr{C}_\mathfrak{g}$ 中的某些显著单体子范畴上得到证明，见 [FHOO22]；这些子范畴规模较小（即只包含有限个基本表示）。

另一个相关问题是以下正性猜想。已知该猜想对单边类型成立 [Nak04、VV03]，，并且早在近 20 年前就针对非单边类型提出了这一猜想 [Her04]。对于 CFG 型，目前该结论仅对基本表示成立，且这一结论是通过计算机计算得出的[Her05]。

猜想0.2（(q,t)-特征的正性）。在量子环面 $\mathcal{Y}_t$ 中，元素 $L_t(m)$ 的系数均为非负数。

在本文中，利用下文将要说明的新要素，我们证明了所有单对象均满足猜想0.2，并证明一大类单对象满足猜想0.1 。

定理0.3 (=推论 6.12 & 推论 6.10)。

(1) 对于一般的 $\mathfrak{g}$，猜想0.2 成立。(2) 对于一般的 $\mathfrak{g}$，猜想0.1 对所有可达模均成立。

如果一个单模的类（或其某个谱参数平移）是 [HL16] 在 $\mathscr{C}^-$ 的一个子范畴上建立的簇代数结构中的簇单项式 $\mathscr{C}_{\mathfrak{g}}$，则称其为可达的。这是一个庞大的单模族，其中包括许多有趣的模，例如所有 Kirillov–Reshetikhin 模。这种簇代数结构及其若干变体将在我们的证明中发挥关键作用。

对我们而言，另一个重要的要素是在 [FHOO22]中建立的非单边量子环代数及其展开的单边型量子环代数的量子格罗滕迪克环之间的一系列同构。下面对此进行说明。现在我们假设 $\mathfrak{g}$ 是非单边型的。于是我们选取另一个单李代数 $\mathfrak{g}$，其为单边型，并且其 Dynkin 图是通过 展开 的 Dynkin 图得到的 $\mathfrak{g}$ （见图 1）。在 [FHOO22] 中证明了存在一个（不唯一的）同构 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数。

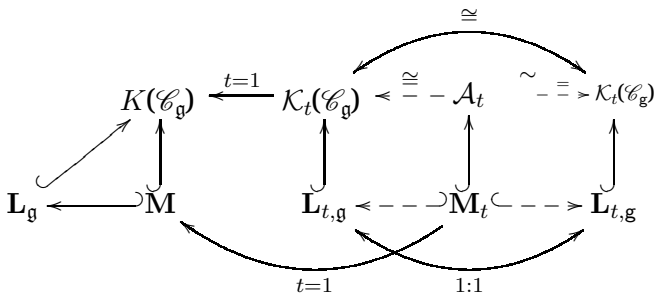
$$\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathfrak{g}}) \simeq \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathfrak{g}}) \tag{0.1}$$

它在q,t-单模的（ $t=1$ 特化0.1）字符之间诱导出一个双射。同构（0.1）在 $t=1$ 处的特化给出了通常的格罗滕迪克环之间的一个非平凡同构。例如，它既不保持基本模的类，也不保持标准模的类。鉴于我们将要阐述的新结果，我们理解了为什么这个双射的组合结构很复杂，因为它们与簇代数结构相关。

我们证明了该范畴的量子 Grothendieck 环 $\mathscr{C}^-$ （以及我们引入的该范畴的一些变体 $\mathscr{C}_{\leq \xi}$ ）具有量子簇代数的结构。这推广了先前的结果 [HL15、Qin17、Bit21]。我们对上述构造的量子 Grothendieck 环之间的同构给出了簇理论解释，以及它们在典范基上的行为。因此，我们得到如下结果。

定理 0.4（= 定理 6.6）。 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}^-)$ 的量子簇单项式属于单模 (q,t)-特征标的典范基 $\mathbf{L}_{t,\ \mathfrak{g}}$ 。

这一结果是[KKOP21b]中幺半范畴化定理的量子版本。该定理指出， $\mathcal{K}(\mathscr{C}^-$中的（经典）簇单项式是单模的类。对于整个范畴 $\mathscr{C}_{\mathfrak{g}}$ ，我们也有类似的陈述（见定理6.15；为简便起见，实际处理的是 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的 $\mathscr{C}_{\mathfrak{g}}$ 幺半骨架）。我们用下图概括这一情况：



这里 $\mathbf{L}_{\mathfrak{g}}$ 是 Grothendieck 环 $K(\mathscr{C}_{\mathfrak{g}})$ 由简单类组成的基。它包含可达模类的集合 $\mathbf{M}$ 由 [KKOP21b]。量子簇代数 $\mathcal{A}_t$同构于 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathfrak{g}})$ 以及 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathfrak{g}})$ ，如第 5 和 6节所证。簇代数 $\mathcal{A}_t$ 包含其量子簇单项式集合 $\mathbf{M}_t$ ，它在 $t=1$ 处特殊化为 $\mathbf{M}$。该

这些同构到 $\mathcal{A}_t$ 的复合还原了 [FHOO22] 的同构（0.1），这一点已在第6节中证明。该同构在上文提到的典范基$\mathbf{L}_{t,\mathfrak{g}}$与$\mathbf{L}_{t,\mathfrak{g}}$ 之间诱导出一个双射。我们在第6节证明，$\mathbf{M}_t$ 被映射到$\mathbf{L}_{t,\mathfrak{g}}$的一个子集，因此也被映射到$\mathbf{L}_{t,\mathfrak{g}}$的一个子集。综合上述结果可知，$\mathbf{L}_{t,\mathfrak{g}}$ 中来自$\mathbf{M}_t$ 中元素的元素，在 $t=1$ 处取值后会得到$\mathbf{L}_{\mathfrak{g}}$中的元素，这就是定理0.3（2）。（在论文正文中，我们实际处理的是上述关于范畴 $\mathscr{C}_{\leq\xi}$的图表的类似情形。）

定理 0.3 （1）通过将（q， t）-特征标中出现的系数与量子 Grothendieck 环相对于典范基 $\mathbf{L}_{t,\ \mathfrak{g}}$ 的某些结构常数进行对应，从而对所有单模得到证明。对于这一对应，某些特殊的可达单模（称为 Kirillov–Reshetikhin 模）的（q， t）-特征标发挥了关键作用。我们的幺半范畴化定理的量子版本意味着，它们满足量子 T-系统，正如 [FHOO22]，中所猜想的那样；这些系统有助于我们研究这些（q， t）-特征标的结构。

作为量子 Grothendieck环之间的同构的簇理论解释的另一项应用，我们证明我们的同构源自量子环面中变量的显式双有理变换 $\mathcal{Y}_t$ （定理 7.1）。我们将这些双有理变换称为代换公式。事实上，在[FHOO22 中，我们在§10.3], 中给出了一种计算以下对应关系的方法：在我们的同构下相互关联的单模的（ ℓ-最高权单项式与（q， t）-特征之间的对应关系，而低阶项之间的显式对应关系此前尚不清楚。本文中的代换公式提供了一种计算该对应关系的方法，并揭示了单模的（q， t）-特征之间新的非平凡关系。注意到，我们已经知道，在若干情形下（q， t）-单模特征在 q-特征处专门化为它们的 $t=1$ ，例如，当 $\mathfrak{g}$ 属于ABDE 型，或在本文确立的新情形下），因此我们的公式也蕴含了单模的 q-特征之间的若干非平凡关系。这似乎是簇代数在量子环代数表示论中的一项新应用，进一步研究我们的公式的含义或许是一个有趣的问题。

关于非对称量子化库仑分支近期研究的讨论[NW23， Nak] 由Nakajima和Weekes以及与我们结果的可能关系，参见[FHOO22]的引言。

本文组织如下。第 1 节中，我们引入与无限序列 $\boldsymbol{i}$ 相关联的量子簇代数$\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$ ，该序列的取值属于 Δ_0，即 g 的 Dynkin 图的顶点集（每个值都出现无限多次），以此模仿量子幺幺群的簇结构。第 2 节中，我们研究量子簇代数 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$ 和 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'}$ 之间的关系，其中 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{i}'$ 通过简单操作相关联（分别在第 2.1、2.2 和 2.3 节讨论交换变换、辫子变换和前向移位）。特别地，我们得到与本文目的相关的量子簇代数同构和嵌入。第 3 节中，我们回顾 GLS13、KKKO18、KK19] 中的结果：根据这些结果，与 g 相关联的量子幺幺群 $\mathcal{A}_t[N_-]$ 具有与对偶典范基相容的量子簇代数结构，并且同构于某些（有限版本的）量子簇代数 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$。我们证明这些同构与上一节的变换相容（推论 3.4）。第 4 节中，我们简要回顾量子环代数的有限维表示范畴 $\mathscr{C}$的一般知识，特别是这一背景下的 Kazhdan–Lusztig 型猜想。我们还回顾 [HL10、HL16] 中定义的单体子范畴 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 和 $\mathscr{C}^-$，并引入推广 $\mathscr{C}^-$的子范畴 $\mathscr{C}_{\leq\xi}$。第 5 节中，我们

证明，范畴 $\mathscr{C}_{\leq\xi}$ 的量子 Grothendieck 环具有量子簇代数结构，并与上文引入的代数 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$ 同构（定理 5.16）。我们的证明首先部分基于我们所建立的量子环面同构（推论 5.13）。第 6 节中，我们从簇理论角度阐释 [FHOO22] 所构造的量子 Grothendieck 环同构（定理 6.3），以及相应的典范基（推论 6.4）。这导出了针对范畴 $\mathscr{C}_{\leq\xi}$（定理 6.6）和 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$（定理 6.15）的幺半范畴化定理的量子版本。我们推导出上文讨论的应用（推论 6.10、推论 6.12）。第 7 节中，我们证明量子 Grothendieck 环之间的同构源自量子环面 $\mathcal{Y}_t$中变量之间显式的双有理变换，我们称之为代换公式（定理 7.1 和 7.2）。

致谢。R. F. 得到了 JSPS海外研究员奖学金的资助。D.H. 得到了法国大学研究院的资助。S.-J. OH得到了大韩民国教育部和韩国国家研究基金会（NRF- 2022R1A2C1004045）的资助。H. O. 得到了 JSPS 青年科学家研究资助（编号：19K14515）。

约定。设 $\mathbb{N} := \mathbb{Z}_{>0}$ 为 正整数 的集合且 $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$。对于 $a, b \in \mathbb{Z}$，我们令 $[a, b] := \{u \in \mathbb{Z} \mid a \leq u \leq b\}$。对于一个命题 P，我们令 δ(P) 为 1 或 0，视 P 为真或否而定。作为特例，我们使用记号 $\delta_{i,j} := \delta(i = j)$（克罗内克δ）。

1. The quantum cluster algebra $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$

设 Δ 为有限维单李代数 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathbb{C}$ 上的 Dynkin 图，其顶点集为 Δ_0。我们引入与取值于 Δ_0 的无限序列 $\boldsymbol{i}$（其中每个值都出现无穷多次）相关联的量子簇代数 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$，以模仿量子幺幺群的簇结构。本节的结果对任意类型的 $\mathfrak{g}$ 均成立；但在本文将要讨论的任意非扭曲型量子环代数表示论应用中，我们只会使用由单边型 $\mathfrak{g}$ 得到的量子簇代数 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$（即使我们处理的是非单边量子环代数）。

1.1. 记号。令 $\mathsf{C} = (\mathsf{c}_{ij})_{i,j\in\Delta_0}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 矩阵，$\mathsf{D} = \mathrm{diag}(\mathsf{d}_i \mid i \in \Delta_0)$ 为其最小左对称化子（即 $\min\{\mathsf{d}_i \mid i \in \Delta_0\} = 1$）。对于 $i, j \in \Delta_0$，当 $\mathsf{c}_{ij} < 0$ 时，我们记作 $i \sim j$。令 $\mathfrak{h}^*$ 为 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数的对偶。令 $\{\alpha_i\}_{i\in\Delta_0}$ 和 $\{\varpi_i\}_{i\in\Delta_0}$ 分别为由单根和基本权构成的 $\mathfrak{h}^*$ 的两组基。它们满足关系 $\alpha_i = \sum_{j\in\Delta_0} \mathsf{c}_{ji}\varpi_j$。我们考虑 $\mathfrak{h}^*$ 上的对称双线性配对 $(\cdot,\cdot)$，其定义为 $(\alpha_i, \alpha_j) = \mathsf{d}_i\mathsf{c}_{ij}$。对于每个 $i \in \Delta_0$，第 i 个单反射 s_i 是 $\mathfrak{h}^*$ 上的线性算子，其定义为 $s_i\varpi_j = \varpi_j - \delta_{i,j}\alpha_i$，其中 $j \in \Delta_0$。令 W 表示 $\mathfrak{g}$ 的外尔群，它是由单反射 $\{s_i\}_{i\in\Delta_0}$ 生成的 $GL(\mathfrak{h}^*)$ 的子群。注意，配对 $(-,-)$ 在 W 的作用下不变。对 $(\mathsf{W}\ \{s_i\}_{i\in\Delta_0})$ 构成一个有限Coxeter系统。令 $w_\circ$ 为 W 的最长元，$\ell \in \mathbb{N}$ 为其长度。令 $i \mapsto i^*$ 表示由 $w_\circ$ 给出的 Δ 的对合，即 $w_\circ\alpha_i = -\alpha_{i^*}$。

考虑由 Δ_0中元素组成的 $\Delta_0^{\mathbb{N}}$ 无限序列集合。令 $\Delta_0^{(\infty)}$ 表示 $\Delta_0^{\mathbb{N}}$的子集，该子集由满足以下条件的序列 $\boldsymbol{i} = (i_u)_{u\in\mathbb{N}}$ 组成：

$$\text{For any } i \in \Delta_0, \text{ we have } |\{u \in \mathbb{N} \mid i_u = i\}| = \infty. \tag{1.1}$$

1.2. 相容对 $(\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}}, \Lambda_{\boldsymbol{i}})$. 在本节中，我们固定一个序列 $\boldsymbol{i} = (i_u)_{u\in\mathbb{N}} \in \Delta_0^{(\infty)}$. 对于$u \in \mathbb{N}$ 和 $j \in \Delta_0$，我们写

$$\begin{aligned} u^+ = u_{\boldsymbol{i}}^+ &:= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > u, i_k = i_u\}, \\ u^- = u_{\boldsymbol{i}}^- &:= \max(\{k \in \mathbb{N} \mid k < u, i_k = i_u\} \cup \{0\}), \\ u^+(j) = u_{\boldsymbol{i}}^+(j) &:= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > u, i_k = j\}, \\ u^-(j) = u_{\boldsymbol{i}}^-(j) &:= \max(\{k \in \mathbb{N} \mid k < u, i_k = j\} \cup \{0\}). \end{aligned}$$

对于 $u \in \mathbb{N}_0$，我们定义

$$w_u = w_u^{\boldsymbol{i}} := s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_u} \in \mathsf{W}.$$

~考虑由下式给出的 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-矩阵 $B_{\boldsymbol{i}} = (b_{u,\ v})_{u,\ v\in\mathbb{N}}$

$$b_{u,v} = \begin{cases} 1 & \text{if } v = u^+, \\ -1 & \text{if } u = v^+, \\ \mathsf{c}_{i_u,i_v} & \text{if } u < v < u^+ < v^+, \\ -\mathsf{c}_{i_u,i_v} & \text{if } v < u < v^+ < u^+, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

~注意，$B_{\boldsymbol{i}}$ 可由 $\mathsf{diag}(\mathsf{d}_{i_u} \mid u \in \mathbb{N})$ 反对称化。

令 $\Lambda_{\boldsymbol{i}} = (\Lambda_{u,\ v})_{u,\ v\in\mathbb{N}}$ 为由下式定义的反对称矩阵

$$\Lambda_{u,v} = -\Lambda_{v,u} := (\varpi_{i_u} - w_u\varpi_{i_u}, \varpi_{i_v} + w_v\varpi_{i_v}) \quad \text{for } u \le v. \tag{1.2}$$

引理 1.1. 令 $u, v \in \mathbb{N}$。若 $u < v^+$，则有 $\Lambda_{u,\ v} = (\varpi_{i_u} - w_u\varpi_{i_u}, \varpi_{i_v} + w_v\varpi_{i_v})$。

证明。当 $u \le v$ 时，这不过是定义（1.2）。当 $v < u < v^+$ 时，我们有 $(w_u\varpi_{i_u},\ w_v\varpi_{i_v}) = (\varpi_{i_u},\ \varpi_{i_v})$，因此

$$\Lambda_{u,v} = -(\varpi_{i_u} + w_u\varpi_{i_u}, \varpi_{i_v} - w_v\varpi_{i_v}) = (\varpi_{i_u} - w_u\varpi_{i_u}, \varpi_{i_v} + w_v\varpi_{i_v}). \qquad \square$$

命题 1.2. 设 $\boldsymbol{i} = (i_u)_{u\in\mathbb{N}} \in \Delta_0^{(\infty)}$。对于任意 $u, v \in \mathbb{N}$，我们有

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} b_{k,u}\Lambda_{k,v} = 2\mathsf{d}_{i_u}\delta_{u,v}. \tag{1.3}$$

~证明. 令 $i := i_u$. 根据 $B_{\boldsymbol{i}}$ 的定义，我们有

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} b_{k,u}\Lambda_{k,v} = \Lambda_{u^-,v} - \Lambda_{u^+,v} + \sum_{j\sim i} \mathsf{c}_{ji}\left(\Lambda_{u^-(j),v} - \Lambda_{(u^+)^-(j),v}\right) =: x_{u,v},$$

其中我们约定 $\Lambda_{0,\ v} = 0$（于是，（1.2）仍对 $u = 0$）。注意，$(u^+)^-(j)$ 表示最大的整数 $u' < u^+$ 使得 $i_{u'} = j$。

我们需要证明$x_{u,v} = 2\mathsf{d}_{i_u}\delta_{u,v}$。由于 $s_i\varpi_j = \varpi_j - \delta_{ij}\alpha_i$和 $\alpha_i = 2\varpi_i + \sum_{j\sim i}\mathsf{c}^{ji}\varpi_j$，我们有

$$w_u\varpi_i = -w_{u^-}\varpi_i - \sum_{j\sim i} \mathsf{c}_{ji} w_{u^-(j)}\varpi_j \tag{1.4}$$

[{"id":0,"output":"对于任意 $u \in \mathbb{N}$。两次使用这一恒等式，我们得到"}]

$$y_u := w_{u^+}\varpi_i - w_{u^-}\varpi_i + \sum_{j\sim i} \mathsf{c}_{ji}(w_{(u^+)^-(j)}\varpi_j - w_{u^-(j)}\varpi_j) = 0.$$

首先，考虑 $u \le v$ 的情形。如果 $u^+ \le v$，那么我们有

$$x_{u,v} = (y_u, \varpi_{i_v} + w_v\varpi_{i_v}) = 0.$$

当 $u \le v < u^+$ 时，我们有

$$\begin{aligned} x_{u,v} &= (\varpi_i - w_{u^-}\varpi_i, \varpi_{i_v} + w_v\varpi_{i_v}) + (\varpi_i + w_{u^+}\varpi_i, \varpi_{i_v} - w_v\varpi_{i_v}) \\ &\quad + \sum_{j\sim i} \mathsf{c}_{ji} \left\{ (\varpi_j - w_{u^-(j)}\varpi_j, \varpi_{i_v} + w_v\varpi_{i_v}) + (\varpi_j + w_{(u^+)^-(j)}\varpi_j, \varpi_{i_v} - w_v\varpi_{i_v}) \right\} \\ &= (-s_i\varpi_i + w_u\varpi_i, \varpi_{i_v} + w_v\varpi_{i_v}) + (-s_i\varpi_i - w_u\varpi_i, \varpi_{i_v} - w_v\varpi_{i_v}) \\ &= 2(-s_i\varpi_i, \varpi_{i_v}) + 2(\varpi_i, \varpi_{i_v}) \\ &= 2(\alpha_i, \varpi_{i_v}) \\ &= 2\mathsf{d}_i\delta_{i,i_v}. \end{aligned}$$

这里第一个等式由引理 1.1 (注意，$v < u^+ < (u^+)^-(j)^+$)。第二个等式由（1.4）得出。第三个等式是因为（$w_u\varpi_i, w_v\varpi_{i_v}$）$=$（$w_v\varpi_i, w_v\varpi_{i_v}$）$=$（$\varpi_i, \varpi_{i_v}$）。最后，我们注意到，在条件 $u \le v < u^+$ 下，$\delta_{i,\ i_v} = \delta_{u,\ v}$。

接下来，假设 $u > v$。若 $u^- \ge v$，则有

$$x_{u,v} = (y_u, \varpi_{i_v} - w_v\varpi_{i_v}) = 0.$$

这里我们再次使用引理 1.1 （注意，$(u^+)^-(j)^+ \ge u^-(j)^+ > u > v$）。

当 $u > v > u^-$ 时，有

$$\begin{aligned} x_{u,v} &= (\varpi_i - w_{u^-}\varpi_i, \varpi_{i_v} + w_v\varpi_{i_v}) + (\varpi_i + w_{u^+}\varpi_i, \varpi_{i_v} - w_v\varpi_{i_v}) \\ &\quad + \sum_{j\sim i} \mathsf{c}_{ji} \left\{ -(\varpi_j + w_{u^-(j)}\varpi_j, \varpi_{i_v} - w_v\varpi_{i_v}) + (\varpi_j + w_{(u^+)^-(j)}\varpi_j, \varpi_{i_v} - w_v\varpi_{i_v}) \right\} \\ &= (y_u + \varpi_i + w_{u^-}\varpi_i, \varpi_{i_v} - w_v\varpi_{i_v}) + (\varpi_i - w_{u^-}\varpi_i, \varpi_{i_v} + w_v\varpi_{i_v}) \\ &= 2(\varpi_i, \varpi_{i_v}) - 2(w_{u^-}\varpi_i, w_v\varpi_{i_v}) \\ &= 2(\varpi_i, \varpi_{i_v}) - 2(w_v\varpi_i, w_v\varpi_{i_v}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

这里第一个等式由引理 1.1 （注意，$(u^+)^-(j)^+ \ge u^-(j)^+ > u > v$）。第四个等式由我们的假设 $u > v > u^-$。

The calculations above complete the proof. □

Let us take $n \in \mathbb{N}$ and set

$$J := [1, n], \quad J_f := \{k \in [1, n] \mid k^+ > n\}, \quad J_e := J \setminus J_f.$$

~通过截断 $B_{\boldsymbol{i}}$ 和 $\Lambda_{\boldsymbol{i}}$，我们得到一个 $J \times J_e$-矩阵 $B^n_{\boldsymbol{i}} := (b_{u,\ v})_{u\in J,\ v\in J_e}$ 以及一个 $J \times J$-矩阵 $\Lambda^n_{\boldsymbol{i}} := (\Lambda_{u,\ v})_{u,\ v\in J}$。

~推论 1.3。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，如上所定义的对 $(B^n_{\boldsymbol{i}}, \Lambda^n_{\boldsymbol{i}})$ 构成一个相容对。更确切地说，我们有

$$\sum_{k\in J} b_{k,u}\Lambda_{k,v} = 2\mathsf{d}_{i_u}\delta_{u,v} \quad \textit{for } u \in J_e, v \in J.$$

证明。 根据 J_e的定义，我们有 $b_{k,\ u} = 0$ 对于 $u \in J_e$ 和 $k \in \mathbb{N} \setminus J$。因此，结果由命题 1.2得出。□

注 1.4。 推论 1.3 在（i_1，……，i_n）是 W 的一个约化词时是众所周知的（参见 [GLS13，命题 10.1，引理11。3] 和 [GY17，命题 10。4]）。此外，推论 1.3 对 [KO23，猜想 1] 给出了肯定的回答。

定义 1.5. 设 $\boldsymbol{i} = (i_1, \dots, i_n)$ 为 Δ_0 中的任意有限序列。我们将其扩展为一个无限序列 $\boldsymbol{i} = (i_u)_{u\in\mathbb{N}}$ 满足 (1.1) 并定义一个相容对

$$(\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}}, \Lambda_{\boldsymbol{i}}) := (\widetilde{B}^n_{\tilde{\boldsymbol{i}}}, \Lambda^n_{\tilde{\boldsymbol{i}}}).$$

显然，它与扩张 $\tilde{\boldsymbol{i}} \in \Delta_0^{(\infty)}$ 的选择无关，因此定义良好。

1.3. 量子簇代数 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$。关于量子簇代数的一般性介绍，请参阅附录 A。我们将与相容对 $(\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}} = \mathcal{A}_t(B_{\boldsymbol{i}}, \Lambda_{\boldsymbol{i}})$ 相关联的量子簇代数记为 $(\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}}, \Lambda_{\boldsymbol{i}})$，其中相容对见命题 1.2。它是量子环面 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$的子代数 $\mathcal{T}(\Lambda_{\boldsymbol{i}})$。这里我们回顾一下，$\mathcal{T}(\Lambda_{\boldsymbol{i}})$ 是由 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$生成的 $\{X_u^{\pm 1}\}_{u\in\mathbb{N}}$ -代数，并满足以下关系：

- $X_u X_u^{-1} = X_u^{-1} X_u = 1$ 对于 $u \in \mathbb{N}$,
- $X_u X_v = t^{\Lambda_{u,v}} X_v X_u$ 对于 $u, v \in \mathbb{N}$.

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都有量子簇代数 $\mathcal{A}^n_{\boldsymbol{i}} := \mathcal{A}_t(B^n_{\boldsymbol{i}}, \Lambda^n_{\boldsymbol{i}})$，其环境量子环面为 $\mathcal{T}(\Lambda^n_{\boldsymbol{i}})$。我们自然地将 $\mathcal{T}(\Lambda^n_{\boldsymbol{i}})$ 视为由 $\{X_u^{\pm 1}\}_{u\in[1,n]}$ 生成的 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-子代数 $\mathcal{T}(\Lambda_{\boldsymbol{i}})$。因此，我们有包含关系

$$\mathcal{A}^1_{\boldsymbol{i}} \subset \mathcal{A}^2_{\boldsymbol{i}} \subset \cdots \subset \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}} \subset \mathcal{T}(\Lambda_{\boldsymbol{i}}) \quad \text{such that} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^n_{\boldsymbol{i}} = \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}.$$

特别地，对于足够大的 $n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$ 的每个簇变量（分别为簇单项式）都是 $\mathcal{A}^n_{\boldsymbol{i}}$ 的簇变量（分别为簇单项式）。

2. Relations among $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$'s

本节研究量子簇代数 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$ 与 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'}$之间的关系，其中 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{i}'$ 通过简单操作（分别在第 2.1、2.2 和 2.3节中的交换变换、辫子变换和前向移位）相关联。特别地，我们得到了与本文目的相关的量子簇代数的同构和嵌入。通过这些变换，我们"跟踪"簇单项式的次数（g-向量），这将在下文中发挥作用。

在本节及后续各节中，我们取 Δ 为有限型 ADE 的 Dynkin 图。对于每个序列 $\boldsymbol{i} = (i_u)_{u\in\mathbb{N}} \in \Delta_0^{(\infty)}$，我们关联如下定义的无限箭图 $\Gamma_{\boldsymbol{i}}$：$\Gamma_{\boldsymbol{i}}$ 的顶点集就是 $\mathbb{N}$。对于 u、$v \in \mathbb{N}$，当以下任一条件成立时，我们在 $\Gamma_{\boldsymbol{i}}$ 中指定一条箭头 $u \to v$

- $i_u \sim i_v$ and $u < v < u^+ < v^+$, or
- $i_u = i_v$ and $u = v^+$.

于是，我们有

$$b_{u,v} = |\{\text{arrows } v \to u \text{ in } \Gamma_{\boldsymbol{i}}\}| - |\{\text{arrows } u \to v \text{ in } \Gamma_{\boldsymbol{i}}\}|. \tag{2.1}$$

对于集合 X，我们用 $\mathfrak{S}_X$ 表示 X 的置换群。对于矩阵 $A = (A_{u,\,v})_{u,\,v\in X}$ 及置换 $\pi \in \mathfrak{S}_X$，我们令 $\pi A := (A_{\pi^{-1}(u)\,\pi^{-1}(v)})_{u,\,v\in X}$。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，令 $\sigma_k \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ 为 k 和 $k+1$ 的简单对换。

在下文中，我们研究两个序列 $\boldsymbol{i} = (i_u)_{u\in\mathbb{N}}, \boldsymbol{i}' = (i'_u)_{u\in\mathbb{N}} \in \Delta_0^{(\infty)}$。

2.1. 交换变换。首先，我们考虑序列中两个连续元素的简单置换情形，这两个元素在 Dynkin 图中并不相邻。具体而言，对于某个 $k \in \mathbb{N}$，当 $(i'_k, i'_{k+1}) = (i_{k+1}, i_k)$ 与 $i_k \neq i_{k+1}$ 和 $i_k \not\sim i_{k+1}$，且 $i_u = i'_u$ 对于 $u \notin \{k, k+1\}$ 时，即为这种情形。在此情况下，我们记作 $\boldsymbol{i}' = \gamma_k \boldsymbol{i}$。

~ ~引理 2.1。当 $\boldsymbol{i}' = \gamma_k \boldsymbol{i}$ 时，我们有 $B_{\boldsymbol{i}'} = \sigma_k B_{\boldsymbol{i}}$ 和 $\Lambda_{\boldsymbol{i}'} = \sigma_k \Lambda_{\boldsymbol{i}}$。

证明。由于交换关系 $s_{i_k} s_{i_{k+1}} = s_{i_{k+1}} s_{i_k}$，显然，该~ ~置换 σ_k 诱导了一个箭图同构 $\Gamma_{\boldsymbol{i}} \simeq \Gamma_{\boldsymbol{i}'}$。因此我们得到 $\sigma_k B_{\boldsymbol{i}} = B_{\boldsymbol{i}'}$。为证明 $\sigma_k \Lambda_{\boldsymbol{i}} = \Lambda_{\boldsymbol{i}'}$，设 $\Lambda_{\boldsymbol{i}} = (\Lambda_{u,v})_{u,v \in \mathbb{N}}$ 并且 $\Lambda_{\boldsymbol{i}'} = (\Lambda'_{u,v})_{u,v \in \mathbb{N}}$。对于 u, $v \notin \{k, k+1\}$，我们需要证明以下内容：

(i) $\Lambda_{u,v} = \Lambda'_{u,v}$,
(ii) $\Lambda_{u,k} = \Lambda'_{u,k+1}$, (iii)
$\Lambda_{u,k+1} = \Lambda'_{u,k}$, (iv) $\Lambda_{k,}$
$_{k+1} = \Lambda'_{k+1,k}$.

对于 $a \neq k$，我们有 $w^{\boldsymbol{i}}_a = w^{\boldsymbol{i}'}_a$，由此可得（i）。此外，我们注意到 $w^{\boldsymbol{i}}_k \varpi_{i_k} = w^{\boldsymbol{i}}_{k+1} \varpi_{i_k} = w^{\boldsymbol{i}'}_{k+1} \varpi_{i'_{k+1}}$，由此可得（ii）。（iii）是（ii）的对偶。为证明（iv），我们可以使用引理 1.1。□

Lemma 2.1 implies the following (see Appendix A.3).

命题2.2。假设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{i}' \in \Delta_0^{(\infty)}$ 通过某个 $k \in \mathbb{N}$由 $\boldsymbol{i}' = \gamma_k \boldsymbol{i}$ 相关联。那么，我们有一个 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数之间的同构

$$\gamma_k^* (= \sigma_k^*) \colon \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'} \simeq \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}} \qquad \textit{given by } X_u \mapsto X_{\sigma_k(u)} \textit{ for all } u \in \mathbb{N},$$

which induces a bijection between the sets of quantum cluster monomials.

注 2.3. 当 $n \neq k$，同构 γ_k^* 限制为同构

$$\gamma_k^* \colon \mathcal{A}^n_{\boldsymbol{i}'} \simeq \mathcal{A}^n_{\boldsymbol{i}}.$$

现在，我们来解释簇单项式的次数如何发生变化。

引理2.4. 假设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{i}' \in \Delta_0^{(\infty)}$ 通过某个 $k \in \mathbb{N}$与 $\boldsymbol{i}' = \gamma_k \boldsymbol{i}$ 相关。如果 $x \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'}$ 是一个次数为 $\boldsymbol{g}' = (g'_u)_{u \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\oplus \mathbb{N}}$ 的簇单项式，那么元素 $\gamma_k^* x \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$ 是其次数 $\boldsymbol{g} = (g_u)_{u \in \mathbb{N}}$ 由下式给出的簇单项式

$$g_u = \begin{cases} g'_{k+1} & \textit{if } u = k, \\ g'_k & \textit{if } u = k+1, \\ g'_u & \textit{otherwise.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Proof. Immediate from the construction. □

定义 2.5（交换等价）。设 $J = \mathbb{N}$，或 $J = [1, n]$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$。设 $\pi \in \mathfrak{S}_J$ 是一个置换。若两个序列 $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \ldots\ldots)$ 和 $\boldsymbol{i}' = (i'_1, i'_2, \ldots\ldots) \in \Delta_0^J$ 通过 π 交换等价，即对所有 $u \in J$ 都有 $i_u = i'_{\pi(u)}$，且当 $[u < v$ 和 $\pi(u) > \pi(v)]$ 时，我们有 $[i_u \neq i_v$ 和 $i_u \not\sim i_v]$。若 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{i}'$ 通过某个 $\pi \in \mathfrak{S}_J$ 交换等价，则简称它们交换等价。

上述讨论可以推广如下。

命题 2.6. 设 $J = \mathbb{N}$，或者对某个 $n \in \mathbb{N}$ 有 $J = [1, n]$。假设两个序列~$\boldsymbol{i}$和 $\boldsymbol{i}'$在置换 $\pi \in \mathfrak{S}_J$下交换等价。那么，我们有 $(B_{i'}, \Lambda'_{\boldsymbol{i}}) = (\pi\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}}, \pi\Lambda_{\boldsymbol{i}})$，因此存在 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数的同构 π^*: $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'} \simeq \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$，它在量子簇单项式集合之间诱导出一个双射。

2.2. 辫子变换。接下来，我们考虑对序列中连续三个元素进行辫变换的情形。具体而言，假设 $(i_k, i_{k+1}, i_{k+2}) = (i, j, i)$，其中 $i \sim j$满足某个 $k \in \mathbb{N}$，并且 $\boldsymbol{i}'$是通过应用辫子变换 (i, j, i) (j, i, j) 从 $\boldsymbol{i}$ 得到的。也就是说，对于 $l \notin \{k, k+1, k+2\}$，有 $i'_l = i_l$，且 $(i'_k, i'_{k+1}, i'_{k+2}) = (j, i, j)$。在此情形下，我们记作$\boldsymbol{i}' = \beta_k\boldsymbol{i}$。令 μ_k 表示在 k处的变异。

Lemma 2.7. 当 $\boldsymbol{i}' = \beta_k\boldsymbol{i}$ 时，置换 σ_{k+1} 诱导一个箭图同构 $\mu_k\Gamma_{\boldsymbol{i}} \simeq \Gamma_{\boldsymbol{i}'}$。~~换句话说，我们有 $B_{\boldsymbol{i}'} = \sigma_{k+1}\mu_k B_{\boldsymbol{i}}$。

证明。令 $K = \{k, k+1, k+2, k^-_{\boldsymbol{i}}, (k+1)^-_{\boldsymbol{i}}\} \cap \mathbb{N}$。这是 k 在 $\Gamma_{\boldsymbol{i}}$ 中的邻域，也就是说，它是与 k 相等或相邻的顶点集合，其中相邻关系取自箭图 $\Gamma_{\boldsymbol{i}}$（的底层图）。由于 $k^-_{\boldsymbol{i}} = (k+1)^-_{\boldsymbol{i}'}$ 且 $(k+1)^-_{\boldsymbol{i}} = k^-_{\boldsymbol{i}'}$，集合 K 也是箭图 $\Gamma_{\boldsymbol{i}'}$ 中 k 的邻域，同时也是 $\sigma_{k+1}\Gamma_{\boldsymbol{i}'}$的邻域。注意，变异 μ_k 只改变满子箭图$\Gamma_{\boldsymbol{i}}|_K$，并且我们有

$$\mu_k\Gamma_{\boldsymbol{i}} \setminus (\mu_k\Gamma_{\boldsymbol{i}}|_K) = \Gamma_{\boldsymbol{i}} \setminus (\Gamma_{\boldsymbol{i}}|_K) = \sigma_{k+1}\Gamma_{\boldsymbol{i}'} \setminus (\sigma_{k+1}\Gamma_{\boldsymbol{i}'}|_K).$$

因此，我们只需检验 $\mu_k\Gamma_{\boldsymbol{i}}|_K = \sigma_{k+1}\Gamma_{\boldsymbol{i}'}|_K$。我们只考虑 $k^-_{\boldsymbol{i}}$ 和 $(k+1)^-_{\boldsymbol{i}}$ 均非零的情形，因为另一种情形的证明类似，或者说更简单。在这种情形下，箭图 $\Gamma_{\boldsymbol{i}}|_K$ 如下图所示：

$$\Gamma_{\boldsymbol{i}}|_K = \begin{pmatrix} (k+1)^-_{\boldsymbol{i}} & \longleftarrow & k+1 \\ \uparrow{\scriptstyle \alpha} & \swarrow\ \searrow & \uparrow{\scriptstyle \beta} \\ k^-_{\boldsymbol{i}} & & k+2 \end{pmatrix}, \qquad k \text{ 居中}$$

其中，当且仅当 $k^-_{\boldsymbol{i}} < (k+1)^-_{\boldsymbol{i}}$ 时，我们有箭头 α；当且仅当 $(k+1)^+_{\boldsymbol{i}} < (k+2)^+_{\boldsymbol{i}}$ 时，我们有箭头 β。它在 k 处的变异为：

$$\mu_k\Gamma_{\boldsymbol{i}}|_K = \begin{pmatrix} (k+1)^-_{\boldsymbol{i}} & & k+1 \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & \swarrow\ \searrow & \uparrow{\scriptstyle \beta} \\ k^-_{\boldsymbol{i}} & \longleftarrow & k+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k+1)^-_{\boldsymbol{i}} & & k+1 \\ \uparrow{\scriptstyle \alpha'} & \swarrow\ \searrow & \uparrow{\scriptstyle \beta'} \\ k^-_{\boldsymbol{i}} & \longleftarrow & k+2 \end{pmatrix},$$

其中，我们有箭头 α' 当且仅当 $k^-_{\boldsymbol{i}} > (k+1)^-_{\boldsymbol{i}}$，并且有箭头 β' 当且仅当 $(k+1)^+_{\boldsymbol{i}} > (k+2)^+_{\boldsymbol{i}}$。另一方面，箭图 $\Gamma_{\boldsymbol{i}'}|_K$ 表示为：

$$\Gamma_{\boldsymbol{i}'}|_K = \begin{pmatrix} k^-_{\boldsymbol{i}'} & & k+2 \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha''} & \swarrow\ \searrow & \uparrow{\scriptstyle \beta''} \\ (k+1)^-_{\boldsymbol{i}'} & \longleftarrow & k+1 \end{pmatrix}, \qquad k \text{ 居中}$$

其中我们有箭头 α'' 当且仅当 $k_{i'}^- < (k+1)_{i'}^-$，并且有箭头 β'' 当且仅当 $(k+1)_{i'}^+ < (k+2)_{i'}^+$。由于 $(k_{i'}^-, (k+1)_{i'}^-) = ((k+1)_i^-, k_i^-)$ 且 $((k+1)_{i'}^+, (k+2)_{i'}^+) = ((k+2)_i^+, (k+1)_i^+)$，我们得到 $\mu_k \Gamma_{\boldsymbol{i}}|_K = \sigma_{k+1}\Gamma_{\boldsymbol{i}'}|_K$ 如所要求的。□

引理 2.8。当 $\boldsymbol{i}' = \beta_k \boldsymbol{i}$ 时，我们有 $\Lambda_{\boldsymbol{i}'} = \sigma_{k+1}\mu_k \Lambda_{\boldsymbol{i}}$。

证明。令 $(i,j) := (i_k, i_{k+1})$。如前，我们记 $\Lambda_{\boldsymbol{i}} = (\Lambda_{u,v})_{u,v\in\mathbb{N}}$ 以及 $\Lambda_{\boldsymbol{i}'} = (\Lambda'_{u,v})_{u,v\in\mathbb{N}}$。我们必须证明 $\Lambda'_{u,v} = (\mu_k \Lambda_{\boldsymbol{i}})_{\sigma_{k+1}(u)\,\sigma_{k+1}(v)}$ 对于 $u < v$。这分为以下10种情况：

(i) $\Lambda'_{u,v} = \Lambda_{u,v}$ 为 $u, v \notin \{k, k+1, k+2\}$, (ii) $\Lambda'_{k+2,v} = \Lambda_{k+1,v}$ 为 $v > k+2$, (iii) $\Lambda'_{k+1,v} = \Lambda_{k+2,v}$ 为 $v > k+2$, (iv) $\Lambda'_{k+1,k+2} = \Lambda_{k+2,k+1}$, (v) $\Lambda'_{u,k+2} = \Lambda_{u,k+1}$ 为 $u < k$, (vi) $\Lambda'_{u,k+1} = \Lambda_{u,k+2}$ 为 $u < k$, (vii) $\Lambda'_{k,v} = \Lambda_{k^-(j)\,v} + \Lambda_{k+2,v} - \Lambda_{k,v}$ 为 $v > k+2$, (viii) $\Lambda'_{k,k+2} = \Lambda_{k^-(j)\,k+1} + \Lambda_{k+2,k+1} - \Lambda_{k,k+1}$, (ix) $\Lambda'_{k,k+1} = \Lambda_{k^-(j)\,k+2} - \Lambda_{k,k+2}$, (x) $\Lambda'_{u,k} = \Lambda_{u,k^-(j)} + \Lambda_{u,k+2} - \Lambda_{u,k}$ 为 $u < k$.

这里 $k^-(j) := k_{\boldsymbol{i}}^-(j) = k_{\boldsymbol{i}'}^-(j)$. 回忆辫群关系 $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$。于是我们有 $w_a^{\boldsymbol{i}} = w_a^{\boldsymbol{i}'}$ 对于任意 $a \in \mathbb{N} \setminus \{k, k+1\}$，由此可得 (i)。此外，我们注意到 $w_{k+2}^{\boldsymbol{i}}\varpi_i = w_{k+2}^{\boldsymbol{i}'}\varpi_i = w_{k+1}^{\boldsymbol{i}'}\varpi_i$，由此可得 (ii) 和 (v)。(iii) 和 (vi) 与它们对偶。为验证 (iv)，我们也可以使用引理 1.1。为验证 (vii)，我们注意到 $(s_i - s_i s_j s_i)\varpi_i = \alpha_j$ 因此

$$\begin{aligned} x &:= \varpi_j - w_{k^-(j)}^{\boldsymbol{i}}\varpi_j - w_{k+2}^{\boldsymbol{i}}\varpi_i + w_k^{\boldsymbol{i}}\varpi_i \\ &= \varpi_j - w_{k-1}^{\boldsymbol{i}}(\varpi_j - (s_i - s_i s_j s_i)\varpi_i) \\ &= \varpi_j - w_{k-1}^{\boldsymbol{i}}(\varpi_j - \alpha_j) \\ &= \varpi_j - w_k^{\boldsymbol{i}'}\varpi_j. \end{aligned}$$

Therefore we have

$$\Lambda_{k^-(j),v} + \Lambda_{k+2,v} - \Lambda_{k,v} = (x, \varpi_{i_v} + w_v^{\boldsymbol{i}}\varpi_{i_v}) = (\varpi_j - w_k^{\boldsymbol{i}'}\varpi_j, \varpi_{i'_v} + w_v^{\boldsymbol{i}'}\varpi_{i'_v}) = \Lambda'_{k,v}.$$

我们可以用类似的方式，在引理1.1的帮助下检查剩下的 (viii)、(ix) 和 (x)（对于 (ix)，还需用到一个显然的事实 $\Lambda_{k+2,k+2} = 0$）。□

~　　~引理 2.7 和 2.8 表明等式 $(\Lambda_{\boldsymbol{i}'}, B_{\boldsymbol{i}'}) = \sigma_{k+1}\mu_k(\Lambda_{\boldsymbol{i}}, B_{\boldsymbol{i}})$ 在附录 A 的记号下成立。因此我们有以下结论。

命题 2.9. 假设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{i}' \in \Delta_0^{(\infty)}$ 通过某个 $k \in \mathbb{N}$ 由 $\boldsymbol{i}' = \beta_k \boldsymbol{i}$ 相关联。则我们有 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数的同构

$$\beta_k^*(= \mu_k^* \sigma_{k+1}^*) \colon \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'} \simeq \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}} \qquad \textit{given by } X_u \mapsto \mu_k^*(X_{\sigma_{k+1}(u)}) \textit{ for all } u \in \mathbb{N},$$

这诱导了量子簇单项式集合之间的双射。

注 2.10. 当 $n \notin \{k, k+1\}$ 时，同构 β_k^* 限制为同构

$$\beta_k^* \colon \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'}^n \simeq \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}^n.$$

现在，让我们解释簇单项式的次数如何发生变化。

引理2.11。假设 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}' \in \Delta_0^{(\infty)}$ 通过 $\boldsymbol{i}' = \beta_k \boldsymbol{i}$ 与某个 $k \in \mathbb{N}$ 相关。若 $x \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'}$ 是一个次数为 $\boldsymbol{g}' = (g'_u)_{u\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ 的簇单项式，则元素 $\beta_k^* x \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$ 是一个次数 $\boldsymbol{g} = (g_u)_{u\in\mathbb{N}}$ 由下式给出的簇单项式

$$g_u = \begin{cases} -g'_k & \text{if } u = k, \\ g'_{\sigma_{k+1}(u)} + \max(g'_k, 0) & \text{if } u \in \{k+2, (k+1)^-_{\boldsymbol{i}}\}, \\ g'_{\sigma_{k+1}(u)} + \min(g'_k, 0) & \text{if } u \in \{k+1, k^-_{\boldsymbol{i}}\}, \\ g'_u & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.3}$$

证明。 应用定理 A.5中的公式。 □

2.3. 前移。现在，我们考虑对序列中的元素进行整体前向移位。具体来说，假设序列 $\boldsymbol{i} = (i_u)_{u\in\mathbb{N}}, \boldsymbol{i}' = (i'_u)_{u\in\mathbb{N}} \in \Delta_0^{(\infty)}$ 满足

$$i'_u = i_{u+1} \quad \text{for all } u \in \mathbb{N}.$$

在这种情况下，我们记作 $\boldsymbol{i}' = \partial_+ \boldsymbol{i}$。令 $i := i_1$。通过条件 $x_1 = 1$ 定义正整数递增序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，并且 $x_n = (x_{n-1})^+_{\boldsymbol{i}}$ 对于 $n > 1$ 成立，从而 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{k \in \mathbb{N} \mid i_k = i\}$。在以下引理中，我们考虑与 $(x_1, x_2, \ldots)$ 对应的无限变异序列。令 $\sigma_+ \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ 为如下定义的置换

$$\sigma_+(k) = \begin{cases} k^+_{\boldsymbol{i}} - 1 & \text{if } i_k = i, \\ k - 1 & \text{if } i_k \neq i, \end{cases}$$

whose inverse σ_+^{-1} is given by

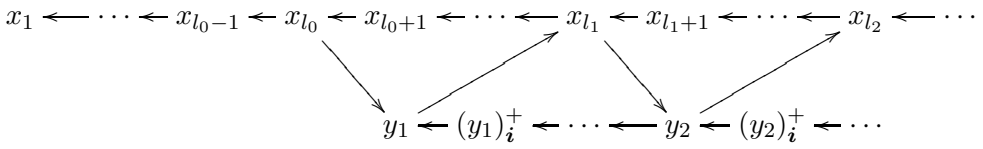
$$\sigma_+^{-1}(k) = \begin{cases} (k+1)^-_{\boldsymbol{i}} & \text{if } i_{k+1} = i, \\ k + 1 & \text{if } i_{k+1} \neq i. \end{cases}$$

引理 2.12。假设 $\boldsymbol{i}' = \partial_+ \boldsymbol{i}$ 并沿用上述记号。那么，极限

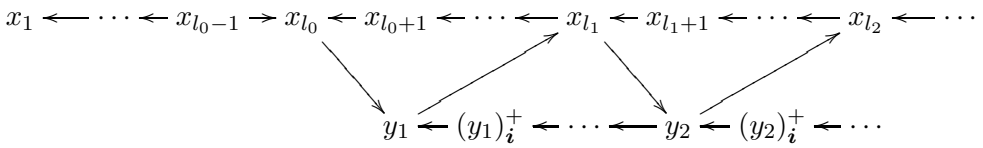
$$\lim_{n\to\infty} \mu_{x_n} \cdots \mu_{x_2} \mu_{x_1} \widetilde{B}_{\boldsymbol{i}}$$

~ ~ ~给出一个定义良好的矩阵$\mu_+ B_{\boldsymbol{i}}$，并且我们有$\sigma_+ \mu_+ B_{\boldsymbol{i}} = B_{\boldsymbol{i}'}$。

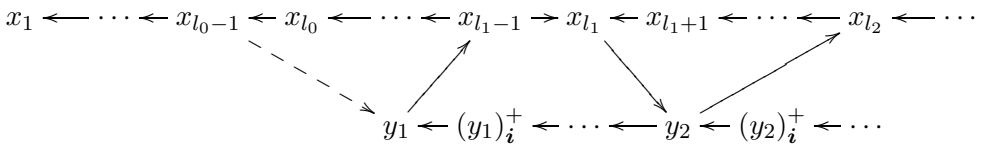
证明。对于 $j \in \Delta_0$，令 $X_j := \{k \in \mathbb{N} \mid i_k = j\}$。根据定义，我们有 $X_i = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$。取一个与 i相邻的指标 $j \in \Delta_0$，并考虑由 $x_n \mapsto (x_n)^-_{\boldsymbol{i}}$ (j)给出的映射 $X_i \to X_j \cup \{0\}$。令 $\{0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots\}$ 为该映射像的自然排序。对于每个$n \in \mathbb{N}_0$，令 l_n 为满足 $(x_{l_n})^-_{\boldsymbol{i}}$ (j) $= y_n$ 的最大整数 (> 0)。将箭图 $\Gamma_{\boldsymbol{i}}$ 限制在 $X_{ij} := X_i \cup X_j$ 上所得的图示如下：



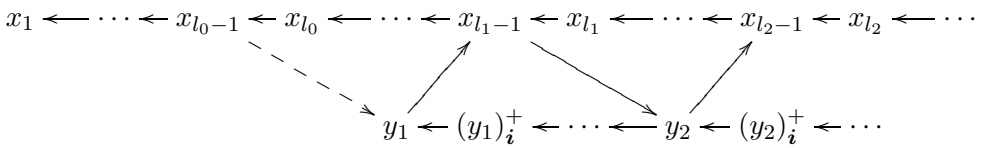
我们很容易看出，变异后的箭图 $\mu_{x_{l_0-1}} \cdots \mu_{x_1}(\Gamma_{\boldsymbol{i}}|_{X_{ij}})$ 为：



然后，应用下文的引理 2.13，箭图 $\mu_{x_{l_1-1}}\cdots\mu_{x_1}(\Gamma_{\boldsymbol{i}}|_{X_{ij}})$ 如下所示：



当且仅当 $l_0>1$ 时，我们有虚线箭头。通过重复这一过程，最终得到极限 $\lim_{n\to\infty}\mu_{x_n}\cdots\mu_{x_1}(\Gamma_{\boldsymbol{i}}|_{X_{ij}})$，它给出了一个定义良好的箭图，如下所示：



其同构于 $\Gamma_{\boldsymbol{i}'}|_{\sigma_+(X_{ij})}$。此外，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，在箭图 $\mu_{x_{n-1}}\cdots\mu_{x_1}\Gamma_{\boldsymbol{i}}$ 中，进入顶点 x_n 的箭除 $x_{n-1}\to x_n$ 和 $x_{n+1}\to x_n$ 之外没有其他箭（见引理 2.13 下面的后一断言）。因此，我们有

$$\mu_{x_n}\cdots\mu_{x_1}(\Gamma_{\boldsymbol{i}}|_{X_{ij}})=(\mu_{x_n}\cdots\mu_{x_1}\Gamma_{\boldsymbol{i}})|_{X_{ij}}.$$

由于突变 $\{\mu_{x_1},\mu_{x_2},\ldots\}$ 只改变支撑在 $\bigcup_{j\sim i}X_{ij}$ 上的满子箭图，我们发现极限 $\mu_+\Gamma_{\boldsymbol{i}}:=\lim_{n\to\infty}\mu_{x_n}\cdots\mu_{x_1}\Gamma_{\boldsymbol{i}}$ 是良定义的。此外，置换 σ_+ 给出了箭图 $\sigma_+\colon\ \mu_+\Gamma_{\boldsymbol{i}}\simeq\Gamma_{\boldsymbol{i}'}$ 的同构。因此我们得到结论。□

引理 2.13. 令 $n\in\mathbb{N}$，并考虑由下式给出的箭图 Q

$$Q=\left(\begin{array}{ccccccccc}0&\longrightarrow&1&\longleftarrow&2&\longleftarrow&\cdots&\longleftarrow&n&\longleftarrow&n+1\\&&&\searrow&&&&\swarrow&&&\\&&&&&\bullet&&&&&\end{array}\right).$$

于是，我们有

$$\mu_n\cdots\mu_2\mu_1Q=\left(\begin{array}{ccccccccc}0&\longleftarrow&1&\longleftarrow&2&\longleftarrow&\cdots&\longleftarrow&n&\longrightarrow&n+1\\&&&\searrow&&&&\swarrow&&&\\&&&&&\bullet&&&&&\end{array}\right).$$

此外，对于每个 $k\in[1,n]$，在箭图 $\mu_{k-1}\cdots\mu_1Q$ 中，没有其他箭头指向顶点 k，除了 $k-1\to k$ 和 $k+1\to k$。

证明。证明很直接：

$$\mu_1Q=\left(\begin{array}{ccccccccc}0&\longleftarrow&1&\longrightarrow&2&\longleftarrow&3&\longleftarrow&\cdots&\longleftarrow&n+1\\&&&\searrow&&\swarrow&&\searrow&&\swarrow&\\&&&&&\bullet&&&&&\end{array}\right),$$

$$\mu_2\mu_1Q=\left(\begin{array}{ccccccccc}0&\longleftarrow&1&\longleftarrow&2&\longrightarrow&3&\longleftarrow&\cdots&\longleftarrow&n+1\\&&&\searrow&&\swarrow&\downarrow&\searrow&&\swarrow&\\&&&&&\bullet&&&&&\end{array}\right),$$

$\cdots$

$$\mu_{n-1}\cdots\mu_1 Q = \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longleftarrow & 1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & n-1 & \longrightarrow & n & \longleftarrow & n+1 \\ & \searrow & & & & & \uparrow & \swarrow & & \searrow & \\ & & & & & & \bullet & & & & \end{array} \right).$$ □

引理 2.14. 假设 $\boldsymbol{i}' = \partial_+ \boldsymbol{i}$ 并沿用上述记号。那么，极限

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{x_n}\cdots\mu_{x_2}\mu_{x_1}\Lambda_{\boldsymbol{i}}$$

给出一个定义良好的矩阵 $\mu_+\Lambda_{\boldsymbol{i}}$，并且我们有 $\sigma_+\mu_+\Lambda_{\boldsymbol{i}} = \Lambda_{\boldsymbol{i}'}$。

证明。 我们设 $\Lambda_{\boldsymbol{i}} = (\Lambda_{u,\ v})_{u,\ v\in\mathbb{N}}$ 以及 $\Lambda_{\boldsymbol{i}'} = (\Lambda'_{u,\ v})_{u,\ v\in\mathbb{N}}$。正如我们在引理 2.12 的证明中所见，在箭图 $\mu_{x_{k-1}}\cdots\mu_{x_1}\Gamma_{\boldsymbol{i}}$ 中，除 $x_{k-1}\to x_k$ 和 $x_{k+1}\to x_k$ 之外，没有箭指向顶点 x_k，对每个 $k\in\mathbb{N}$ 均如此。因此，我们有

$$\mu_{x_n}\cdots\mu_{x_2}\mu_{x_1}\Lambda_{\boldsymbol{i}} = (E^{(1)}E^{(2)}\cdots E^{(n)})^T\Lambda_{\boldsymbol{i}}(E^{(1)}E^{(2)}\cdots E^{(n)}),$$

其中矩阵 $E^{(k)} = (e^{(k)}_{u,v})_{u,v\in\mathbb{N}}$ 由以下给出

$$e^{(k)}_{u,v} = \begin{cases} \delta_{u,v} & \text{if } v \neq x_k, \\ -\delta_{u,x_k} + \delta_{u,x_{k-1}} + \delta_{u,x_{k+1}} & \text{if } v = x_k. \end{cases}$$

因此，极限 $\lim_{n\to\infty} E^{(1)}E^{(2)}\cdots E^{(n)}$ 产生了一个定义良好的矩阵 E，从而

$$\mu_+\Lambda_{\boldsymbol{i}} = \lim_{n\to\infty}\mu_{x_n}\cdots\mu_{x_1}\Lambda_{\boldsymbol{i}} = E^T\Lambda E$$

也定义良好。更确切地说，令 $E = (e_{u,\ v})_{u,\ v\in\mathbb{N}}$，我们有

$$e_{u,v} = \sum_{a_1,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{N}} e^{(1)}_{u,a_1}e^{(2)}_{a_1,a_2}\cdots e^{(n)}_{a_{n-1},v},$$

其中 $n\in\mathbb{N}$ 是满足 $v\le x_n$的整数。由此可得$e_{u,v} = \delta_{u,v}$ 若 $i_v \neq i := i_1$，并且$e_{u,x_n} = -\delta_{u,x_n} + e_{u,x_{n-1}} + \delta_{u,x_{n+1}}$。利用后一个等式，我们进一步计算

$$e_{u,x_n} - \delta_{u,x_{n+1}} = e_{u,x_{n-1}} - \delta_{u,x_n} = \cdots = e_{u,x_1} - \delta_{u,x_2} = -\delta_{u,1},$$

其中，最后一个等式成立是因为 $e_{u,x_1} = e^{(1)}_{u,1} = -\delta_{u,1} + \delta_{u,x_2}$。因此，我们得到

$$e_{u,v} = \begin{cases} \delta_{u,v} & \text{if } i_v \neq i, \\ \delta_{u,v^+} - \delta_{u,1} & \text{if } i_v = i, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中 $v^+ = v^+_{\boldsymbol{i}}$。因此，我们有

$$(\mu_+\Lambda_{\boldsymbol{i}})_{u,v} = (E^T\Lambda_{\boldsymbol{i}}E)_{u,v} = \begin{cases} \Lambda_{u,v} & \text{if } i\notin\{i_u, i_v\}, \\ \Lambda_{u^+,v} - \Lambda_{1,v} & \text{if } i_u = i \text{ and } i_v\neq i, \\ \Lambda_{u,v^+} - \Lambda_{u,1} & \text{if } i_u\neq i \text{ and } i_v = i, \\ \Lambda_{u^+,v^+} - \Lambda_{1,v^+} - \Lambda_{u^+,1} & \text{if } i_u = i_v = i. \end{cases}$$

由此，所需的等式 $(\mu_+\Lambda_{\boldsymbol{i}})_{u,v} = \Lambda'_{\sigma_+(u)\,\sigma_+(v)}$ 对于任意 $u, v \in \mathbb{N}$均成立。例如，当 $i_u = i_v = i$ 和 $u < v$时，我们有

$$\begin{aligned}\Lambda'_{\sigma_+(u),\sigma_+(v)} &= (\varpi_i - s_i w^{\boldsymbol{i}}_{u^+}\varpi_i, \varpi_i + s_i w^{\boldsymbol{i}}_{v^+}\varpi_i)\\ &= ((1-s_i)\varpi_i + s_i(1-w^{\boldsymbol{i}}_{u^+})\varpi_i, (1-s_i)\varpi_i + s_i(1+w^{\boldsymbol{i}}_{v^+})\varpi_i)\\ &= ((1-s_i)\varpi_i, (1-s_i)\varpi_i) - ((1-w^{\boldsymbol{i}}_{u^+})\varpi_i, (1-s_i)\varpi_i)\\ &\quad - ((1-s_i)\varpi_i, (1+w^{\boldsymbol{i}}_{v^+})\varpi_i) + ((1-w^{\boldsymbol{i}}_{u^+})\varpi_i, (1+w^{\boldsymbol{i}}_{v^+})\varpi_i)\\ &= \Lambda_{1,u^+} - \Lambda_{1,v^+} + \Lambda_{u^+,v^+}.\end{aligned}$$

这里，在最后一个等式中，我们用到了恒等式

$$((1-s_i)\varpi_i, (1-s_i)\varpi_i) = ((1-s_i)\varpi_i, 2\varpi_i).$$

对于另一种情况，通过类似的计算即可验证所需的等式。 □

对于每个 $u \in \mathbb{N}$，存在 $n_u \in \mathbb{N}$ 使得 $x_{n_u} > u$，因为 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是递增的。于是，当 $n \geq n_u$ 时，我们有 $\mu^*_{x_n}(X_u) = X_u$。我们定义一个 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数同态

$$\mu^*_+ \colon \mathcal{A}_t(\mu_+(\Lambda_{\boldsymbol{i}}, \widetilde{B}_{\boldsymbol{i}})) \to \mathcal{A}_t(\Lambda_{\boldsymbol{i}}, \widetilde{B}_{\boldsymbol{i}})$$

对所有 $u \in \mathbb{N}$，令 $\mu^*_+(X_u) := \mu^*_{x_1}\mu^*_{x_2}\cdots\mu^*_{x_{n_u}}(X_u)$。注意，$\mu^*_+(X_u)$ 与满足 $x_{n_u} > u$ 的 n_u 的选取无关，因此 μ^*_+ 是良定义的。根据构造，它将每个量子簇单项式映射为量子簇单项式。

引理2.12 &2.14 表明等式（$\Lambda_{\boldsymbol{i}'}$, $\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}'}) = \sigma_+\mu_+(\Lambda_{\boldsymbol{i}}, \widetilde{B}_{\boldsymbol{i}})$ of compatible pairs. Therefore we have obtained the following.

命题 2.15. 假设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{i}' \in \Delta_0^{(\infty)}$ 由 $\boldsymbol{i}' = \partial_+\boldsymbol{i}$ 相关。则，我们有一个 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数同态

$$\partial^*_+ (= \mu^*_+\sigma^*_+) \colon \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'} \to \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}} \qquad \textit{given by } X_u \mapsto \mu_+(X_{\sigma_+^{-1}(u)}) \textit{ for all } u \in \mathbb{N},$$

其将 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'}$ 中的每个簇单项式发送到 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$中的一个簇单项式。

现在，让我们解释在某个条件下簇单项式的次数如何被修改。对于 $\boldsymbol{i} \in \Delta_0^{(\infty)}$，令 $C_{\boldsymbol{i}} \subset \mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ 表示一个由

$$C_{\boldsymbol{i}} := \left\{ \boldsymbol{g} = (g_u)_{u\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{v\geq u, i_v = i_u} g_v \geq 0, \forall u \in \mathbb{N} \right\} = \sum_{u\in\mathbb{N}} \mathbb{N}_0(\boldsymbol{e}_u - \boldsymbol{e}_{u^-_{\boldsymbol{i}}}), \tag{2.5}$$

其中 $\{\boldsymbol{e}_u\}_{u\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ 的自然基，并且我们理解 $\boldsymbol{e}_0 = 0$。

引理 2.16. 假设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{i}' \in \Delta_0^{(\infty)}$ 与 $\boldsymbol{i}' = \partial_+\boldsymbol{i}$相关。设 $x' \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'}$ 是次数为 $\boldsymbol{g}' = (g'_u)_{u\in\mathbb{N}}$ 的簇单项式。在假设 $\boldsymbol{g}' \in C_{\boldsymbol{i}}$的情况下，簇单项式 $\partial^*_+x' \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$ 的次数 $\boldsymbol{g} = (g_u)_{u\in\mathbb{N}}$ 由下式给出

$$g_u = \begin{cases} -\sum_{v\in\mathbb{N}; i'_v = i_1} g'_v & \textit{if } u = 1,\\ g'_{u-1} & \textit{if } u > 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

换句话说，赋值 $\boldsymbol{g}' \mapsto \boldsymbol{g}$ 由 $\mathbb{N}_0$-线性映射 $C_{\boldsymbol{i}'} \to C_{\boldsymbol{i}}$ 给出，该映射将$\boldsymbol{e}_u - \boldsymbol{e}_{u^-_{\boldsymbol{i}'}} \in C_{\boldsymbol{i}'}$ 发送到 $\boldsymbol{e}_{u+1} - \boldsymbol{e}_{(u+1)^-_{\boldsymbol{i}}} \in C_{\boldsymbol{i}}$，对于所有 $u \in \mathbb{N}$。

证明. 这是定理 A.5 的应用。更精确地说，设 $\boldsymbol{g}'' = (g''_u)_{u\in\mathbb{N}} := (g'_{\sigma_+(u)})_{u\in\mathbb{N}}$ 使得我们有 $\deg \sigma_+^*(x') = \boldsymbol{g}''$ （见注记 A.7）。取一个足够大的整数 $n \in \mathbb{N}$使得 $g''_u = 0$ 对于所有 $u > x_n$。然后我们有 $\partial_+^* x' = \mu_{x_1}^* \mu_{x_2}^* \cdots \mu_{x_n}^* \sigma_+^* x'$。假设$\boldsymbol{g}' \in C_{\boldsymbol{i}'}$ 蕴含

$$s_m := \sum_{m\le l\le n} g''_{x_l} \ge 0$$

对所有 $m \in [2, n]$。由于 $g''_{x_n} = s_n \ge 0$，我们可以应用备注 A.6 得到

$$\deg(\mu_{x_n}^* \sigma_+^* x') = E^{(n)} \boldsymbol{g}'',$$

其中 $E^{(n)}$ 是引理证明中的矩阵 2.14。再次，由于 $(E^{(n)}\boldsymbol{g}'')_{x_{n-1}} = s_{n-1} \ge 0$，我们可以应用注记 A.6 来找到

$$\deg(\mu_{x_{n-1}}^* \mu_{x_n}^* \sigma_+^* x') = E^{(n-1)} E^{(n)} \boldsymbol{g}''.$$

由于$(E^{(m+1)} \cdots E^{(n)} \boldsymbol{g}'')_{x_m} = s_m \ge 0$对于任意 $m \in [2, n-1]$，我们可以依次应用类似的论证，最终得到

$$\boldsymbol{g} = \deg(\mu_{x_1}^* \mu_{x_2}^* \cdots \mu_{x_n}^* \sigma_+^* x') = E^{(1)} E^{(2)} \cdots E^{(n)} \boldsymbol{g}'' = E\boldsymbol{g}'',$$

其中 $E = (e_{u,v})_{u,\ v\in\mathbb{N}}$ 是由2.4给出的矩阵。最后一个方程等价于所需的方程2.6。□

我们通过证明相关的技术引理来结束本节。引理 2.17 将用于定理 6.3的证明，而引理 2.18 将用于引理 7.4的证明。

引理 2.17。 假设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{i}' \in \Delta_0^{(\infty)}$ 通过 $\boldsymbol{i}' = \gamma_k \boldsymbol{i}$ （分别 $\boldsymbol{i}' = \beta_k \boldsymbol{i}$）对于某个$k \in \mathbb{N}$。那么，由等式 $\boldsymbol{g}' \mapsto \boldsymbol{g}$ 给出的映射 （2.2）（分别 （2.3））将锥$C_{\boldsymbol{i}'} \subset \mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ 映入锥 $C_{\boldsymbol{i}} \subset \mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$。

证明。为简化记号，对于 $\boldsymbol{g} = (g_u)_{u\in\mathbb{N}}$ 和 $\boldsymbol{g}' = (g'_u)_{u\in\mathbb{N}}$，我们记

$$\Sigma_u := \sum_{v\ge u, i_v = i_u} g_v, \quad \Sigma'_u := \sum_{v\ge u, i'_v = i'_u} g'_v$$

对每个 $u \in \mathbb{N}$。我们必须证明 $\Sigma'_u \ge 0$ $(\forall u \in \mathbb{N})$ 蕴含 $\Sigma_u \ge 0$ $(\forall u \in \mathbb{N})$ 在该假设下成立。当 $\boldsymbol{i}' = \gamma_k \boldsymbol{i}$时，该断言是显然的。因此，我们只考虑以下情形：$\boldsymbol{i}' = \beta_k \boldsymbol{i}$ 并且 $\boldsymbol{g}$ 由 $\boldsymbol{g}'$ 通过（2.3）得到。假设 $\Sigma'_u \ge 0$ 对所有 $u \in \mathbb{N}$。

- 若 $u > k+2$，则有 $\Sigma_u = \Sigma'_u \ge 0$。
- 如果 $u = k+2$，则有 $\Sigma_{k+2} = \Sigma'_{k+1} + \max(g'_k, 0) \ge 0$。
- 如果 $u = k+1$，则有 $\Sigma_{k+1} = \delta(g'_k \ge 0)\Sigma'_{k+2} + \delta(g'_k < 0)\Sigma'_k \ge 0$。
- If $u = k$, we have

$$\begin{aligned}\Sigma_k &= \Sigma_{k+2} + g_k \\ &= \Sigma'_{k+1} + \max(g'_k, 0) - g'_k \\ &= \Sigma'_{k+1} + \max(-g'_k, 0) \ge 0.\end{aligned}$$

- 如果 $u < k$，我们有 $\Sigma_u = \Sigma'_u \ge 0$ 因为我们看到

$$\begin{aligned}g_{k+2} + g_k + g_{k^-_{\boldsymbol{i}}} &= g'_{k+1} + \max(g'_k, 0) - g'_k + g'_{(k+1)^-_{\boldsymbol{i}'}} + \min(g'_k, 0) \\ &= g'_{k+1} + g'_{(k+1)^-_{\boldsymbol{i}'}}\end{aligned}$$

并且类似地 $g_{k+1} + g_{(k+1)^-_{\boldsymbol{i}}} = g'_{k+2} + g'_k + g'_{k^-_{\boldsymbol{i}'}}$.

因此，我们得到了该断言。 □

对于 $\boldsymbol{g}=(g_u)_{u\in\mathbb{N}}$ 和 $\boldsymbol{i}\in\Delta_0^{(\infty)}$，记

$$\mathsf{p}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{g};i):=\sum_{u\in\mathbb{N},i_u=i} g_u. \tag{2.7}$$

引理的证明 2.17 表明了以下关于 $\mathsf{p}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{g};i)$.

引理 2.18。令 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{i}'\in\Delta_0^{(\infty)}$。若 $\boldsymbol{i}'=\gamma_k\boldsymbol{i}$ 对于某个 $k\in\mathbb{N}$，元素 $\boldsymbol{g}$，$\boldsymbol{g}'\in\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ 由方程 (2.2) 相关，满足

$$\mathsf{p}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{g};i)=\mathsf{p}_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{g}';i)$$

for all $i\in\Delta_0$.

若 $\boldsymbol{i}'=\beta_k\boldsymbol{i}$ 对某个 $k\in\mathbb{N}$，元素 $\boldsymbol{g}$、$\boldsymbol{g}'\in\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ 由方程 (2.3) 联系，则满足

$$\mathsf{p}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{g};i)=\begin{cases}\mathsf{p}_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{g}';i)+\max(-g'_k,0) & \text{if } i=i_k \text{ and } k_{\boldsymbol{i}}^-=0,\\ \mathsf{p}_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{g}';i)-\max(g'_k,0) & \text{if } i=i_{k+1} \text{ and } (k+1)_{\boldsymbol{i}}^-=0,\\ \mathsf{p}_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{g}';i) & \text{otherwise.}\end{cases}$$

3. Comparison with dual canonical bases

我们回顾一下，根据[GLS13、KKKO18、KK19] 与 $\mathcal{A}_t[N_-]$ g 相关联的量子幺幺群具有与对偶典范基相容的量子簇代数结构，该结构与某些量子簇代数 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$同构。我们证明，这些同构与上一节中的变换相容：对于$\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}\simeq\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'}$ 此类变换的复合，其在 $\mathcal{A}_t[N_-]$ 上诱导的相应变换就是恒等式（推论 3.4）。我们的证明基于对簇单项式次数的分析。

3.1. 对偶典范基。本小节简要回顾对偶典范基的 PBW 参数化。关于精确定义，请参阅 [FHOO22，附录 A]及其中的参考文献。

令 $\mathcal{A}_t[N_-]$ 表示幺幺群 $N_-=\exp(\mathfrak{n}_-)$的量子坐标环，其中 $\mathfrak{n}_-$ 是李代数$\mathfrak{g}$ 的负部分。更准确地说，我们考虑定义在 $\mathbb{Z}[t^{\pm1/2}]$ 上的整形式。它具有规范化对偶典范基 $\widetilde{\mathbf{B}}^*$。每个最长元的约化词 $\boldsymbol{i}=(i_1,\ldots,i_\ell)$给出一个参数化 $\widetilde{\mathbf{B}}^*=\{\widetilde{G}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{c})\mid\boldsymbol{c}\in\mathbb{N}_0^\ell\}$，其特征是

$$\widetilde{G}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{c})\equiv t^{\nu_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{c})}\prod_{u\in[1,\ell]}^{\rightarrow}\widetilde{D}(w_u\varpi_{i_u},w_{u-1}\varpi_{i_u})^{c_u}\mod\sum_{b\in\widetilde{\mathbf{B}}^*}t\mathbb{Z}[t]b$$

对于每个 $\boldsymbol{c}=(c_1,\ldots,c_\ell)\in\mathbb{N}_0^\ell$，其中

$$\nu_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{c})=-\frac{1}{2}\sum_{u,v\in[1,\ell]}c_uc_v(w_{u-1}\alpha_{i_u},w_{v-1}\alpha_{i_v})+\sum_{u\in[1,\ell]}c_u^2,$$

和 $D(\lambda,\mu)$ 表示重整化量子幺幂小式。特别地，当 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_k:=(\delta_{u,k})_{u\in[1,\ell]}$ 时，我们有

$$\widetilde{G}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{e}_k)=\widetilde{D}(w_k\varpi_{i_k},w_{k-}\varpi_{i_k}).$$

命题 3.1 (Lusztig [Lus93，第 42]章)。设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{i}'\in\Delta_0^\ell$ 是 $w_\circ$的两个约化词，且 $\boldsymbol{c}=(c_1,\ldots,c_\ell)$ $\boldsymbol{c}'=(c'_1,\ldots,c'_\ell)\in\mathbb{N}_0^\ell$。

(1) 当 $\boldsymbol{i}' = \gamma_k \boldsymbol{i}$ 对于某个 $k \in [1, \ell - 1]$ 时，我们有

$$\widetilde{G}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{c}) = \widetilde{G}_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{c}') \quad \textit{if and only if} \quad \begin{cases} (c_k, c_{k+1}) = (c'_{k+1}, c'_k), \\ c_u = c'_u \ \textit{if } u \notin \{k, k+1\}. \end{cases}$$

(2) 当 $\boldsymbol{i}' = \beta_k \boldsymbol{i}$ 对某个 $k \in [1, \ell - 2]$ 时，我们有

$$\widetilde{G}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{c}) = \widetilde{G}_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{c}') \quad \textit{if and only if} \quad \begin{cases} c'_k = c_{k+1} + c_{k+2} - \min(c_k, c_{k+2}), \\ c'_{k+1} = \min(c_k, c_{k+2}), \\ c'_{k+2} = c_{k+1} + c_k - \min(c_k, c_{k+2}), \\ c'_u = c_u \ \textit{if } u \notin \{k, k+1, k+2\}. \end{cases}$$

3.2. 上的簇结构 $\mathcal{A}_t[N_-]$。 回忆一下，对于任意有限序列 $\boldsymbol{i}$ 中的 Δ_0，我们有~与 $\boldsymbol{i}$ 定义 1.5 中的一个相容对（$B_{\boldsymbol{i}}$， $\Lambda_{\boldsymbol{i}}$）相关联1.5。

定理 3.2 (Geiß–Leclerc–Schr¨oer [GLS13], Kang–Kashiwara–Kim–Oh [KKKO18], Kashi-wara–Kim [KK19])。 对于每个最长元的约化词 $\boldsymbol{i} \in \Delta_0^\ell$ ，都存在一个 $w_\circ$-代数同构 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数

$$\varphi_{\boldsymbol{i}} \colon \mathcal{A}_t(\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}}, \Lambda_{\boldsymbol{i}}) \simeq \mathcal{A}_t[N_-]$$

which satisfies the following:

(1) 对于任意 $1 \le v < u \le \ell$ 满足 $i_u = i_v$，存在一个簇变量，它对应~于 $D(w_u \varpi_{i_u}, w_v \varpi_{i_v})$，在 $\varphi_{\boldsymbol{i}}$， ~下(2) 每个簇单项式对应于基 $\mathbf{B}^*$ 中的一个元素，在 $\varphi_{\boldsymbol{i}}$下，

(3) 对于每个 $\boldsymbol{c} = (c_u) \in \mathbb{N}_0^\ell$，元素 $\varphi_{\boldsymbol{i}}^{-1}$ $\widetilde{G}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{c})$ *is pointed and we have*

$$\deg \varphi_{\boldsymbol{i}}^{-1} \widetilde{G}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{c}) = \sum_{u \in [1,\ell]} c_u (\boldsymbol{e}_u - \boldsymbol{e}_{u^-}) \in \mathbb{Z}^\ell, \tag{3.1}$$

其中我们将 $\boldsymbol{e}_0 = 0$ 理解为.....。特别地，映射 $\deg \circ \varphi_{\boldsymbol{i}}^{-1} \colon \ \widetilde{}\mathbf{B}^* \to \mathbb{Z}^\ell$ 是单射。

3.3.约化词的变换。我们建立上一节中的变换 γ_k、 β_k 与同构 $\varphi_{\boldsymbol{i}}$ 之间的相容性。

命题 3.3。设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{i}' \in \Delta_0^\ell$ 是 $w_\circ$ 的两个约化词。假设对于某个 $\tau \in \{\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell-1}\} \cup \{\beta_1, \dots, \beta_{\ell-2}\}$，我们有 $\boldsymbol{i}' = \tau \boldsymbol{i}$。则下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_t(\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}'}, \Lambda_{\boldsymbol{i}'}) & \xrightarrow{\varphi_{\boldsymbol{i}'}} & \mathcal{A}_t[N_-] \\ {\scriptstyle \tau^*}\downarrow & & \| \\ \mathcal{A}_t(\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}}, \Lambda_{\boldsymbol{i}}) & \xrightarrow{\varphi_{\boldsymbol{i}}} & \mathcal{A}_t[N_-]. \end{array}$$

Proof. 由于 $\mathcal{A}_t[N_-]$ 由 $\{G_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{e}_u)\}_{u \in [1,\ell]}$生成，只需证明该等式

$$\varphi_{\boldsymbol{i}} \tau^* \varphi_{\boldsymbol{i}'}^{-1} \widetilde{G}_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{e}_u) = \widetilde{G}_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{e}_u) \tag{3.2}$$

对所有 $u \in [1, \ell]$。由于 τ^* 保留簇单项式，我们知道（3.2）的左端属于~ $\mathbf{B}^*$，由定理 3.2可知。当 $\tau = \gamma_k$ 对某个 $k \in [1, \ell - 1]$成立时，我们有

$$\deg \gamma_k^* \varphi_{\boldsymbol{i}'}^{-1} \widetilde{G}_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{e}_u) = \boldsymbol{e}_{\sigma_k(u)} - \boldsymbol{e}_{\sigma_k(u^-_{\boldsymbol{i}'})} = \boldsymbol{e}_{\sigma_k(u)} - \boldsymbol{e}_{\sigma_k(u)^-_{\boldsymbol{i}}} = \deg \varphi_{\boldsymbol{i}}^{-1} \widetilde{G}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{e}_{\sigma_k(u)})$$

由引理 2.4 和定理 3.2。由于 $\deg \circ \varphi_{\boldsymbol{i}}^{-1}$ 在 ~$\mathbf{B}^*$上是单射，因此我们得到 $\varphi_{\boldsymbol{i}} \gamma_k^* \varphi_{\boldsymbol{i}'}^{-1} \widetilde{G}_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{e}_u) =$ ~ ~ ~$G_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{e}_{\sigma_k(u)})$。另一方面，由命题 $G_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{e}_{\sigma_k(u)}) = G_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{e}_u)$ 可知 3.1。因此，

我们得到（3.2）对于 $\tau=\gamma_k$。接下来，我们考虑 $\tau=\beta_k$ 对于某个 $k\in[1,\ell-2]$。根据引理2.11和定理3.2，我们有

$$\deg \beta_k^*\varphi_{\boldsymbol{i}'}^{-1}\widetilde{G}_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{e}_u)=\begin{cases}\boldsymbol{e}_{k+2}-\boldsymbol{e}_k & \text{if } u=k,\\ \boldsymbol{e}_{k+2}-\boldsymbol{e}_{k_{\boldsymbol{i}}^-} & \text{if } u=k+1,\\ \boldsymbol{e}_k-\boldsymbol{e}_{k_{\boldsymbol{i}}^-} & \text{if } u=k+2,\\ \boldsymbol{e}_u-\boldsymbol{e}_{u_{\boldsymbol{i}}^-} & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Again 由 $\deg\circ\varphi_{\boldsymbol{i}}^{-1}$ 在 $\widetilde{\mathrm{B}}^*$ 上的单射性，我们得到 $\varphi_{\boldsymbol{i}}\tau^*\varphi_{\boldsymbol{i}'}^{-1}\widetilde{G}_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{e}_u)=\widetilde{G}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{c}_u)$，其中

$$\boldsymbol{c}_u\coloneqq\begin{cases}\boldsymbol{e}_{k+2} & \text{if } u=k,\\ \boldsymbol{e}_k+\boldsymbol{e}_{k+2} & \text{if } u=k+1,\\ \boldsymbol{e}_k & \text{if } u=k+2,\\ \boldsymbol{e}_u & \text{otherwise.}\end{cases}$$

另一方面，我们有 $G_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{c}_u)=G_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{e}_u)$，由命题 3.1可知。因此，我们得到（3.2），对于$\tau=\beta_k$。 □

对于任意两个表示 $w_\circ$的约化词 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{i}'\in\Delta_0^\ell$，我们总能在 $\{\gamma_1,\dots,\gamma_{\ell-1}\}\cup\{\beta_1,\dots,\beta_{\ell-2}\}$ 中找到一个有限序列 $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\dots,\tau_l)$，使得 $\boldsymbol{i}'=\tau_1\cdots\tau_l\boldsymbol{i}$。于是我们得到复合同构映射

$$\boldsymbol{\tau}^*\coloneqq\tau_l^*\circ\cdots\circ\tau_1^*\colon\mathcal{A}_t(\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}'},\Lambda_{\boldsymbol{i}'})\simeq\mathcal{A}_t(\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}},\Lambda_{\boldsymbol{i}}).$$

推论 3.4. 使用上述记号，以下图表是可交换的：

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{A}_t(\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}'},\Lambda_{\boldsymbol{i}'}) & \xrightarrow{\varphi_{\boldsymbol{i}'}} & \mathcal{A}_t[N_-]\\ {\scriptstyle\boldsymbol{\tau}^*}\downarrow & & \Vert\\ \mathcal{A}_t(\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}},\Lambda_{\boldsymbol{i}}) & \xrightarrow{\varphi_{\boldsymbol{i}}} & \mathcal{A}_t[N_-].\end{array}$$

特别地，同构 $\boldsymbol{\tau}^*=\varphi_{\boldsymbol{i}}\circ\varphi_{\boldsymbol{i}'}^{-1}$ 仅取决于数对 $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}')$，而不取决于满足 $\boldsymbol{i}'=\tau_1\cdots\tau_l\boldsymbol{i}$的序列 $\boldsymbol{\tau}$。

注 3.5. 根据定义，同构 $\boldsymbol{\tau}^*$ 在 $\mathcal{A}_t(B_{\boldsymbol{i}'},\Lambda_{\boldsymbol{i}'})$ 中的簇单项式与 $\mathcal{A}_t(B_{\boldsymbol{i}},\Lambda_{\boldsymbol{i}})$ 中的簇单项式之间诱导出一个双射。

4. Reminders on quantum Grothendieck rings

我们给出关于量子 Grothendieck 环的一般说明，该环属于以下范畴：$\mathscr{C}$ 量子环代数的有限维表示范畴。特别地，我们回顾这一背景下的量子T-系统、Q-数据和 Kazhdan–Lusztig 型猜想。我们还回顾单体子范畴 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 以及 $\mathscr{C}^-$ 中 $\mathscr{C}$（定义见 [HL10、HL16]），并介绍推广 $\mathscr{C}_{\leq\xi}$ 的子范畴 $\mathscr{C}^-$。

4.1. 量子环代数与范畴 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$。设 $\mathfrak{g}$ 为复有限维单李代数（不应与前几节中的李代数 g 混淆）。设 $C=(c_{ij})_{i,j\in I}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 矩阵，其中 I 是 Dynkin 指标的集合。对于i、$j\in I$，若 $c_{ij}<0$ 则记 $i\sim j$。设 $r\in\{1,2,3\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的绞合数，且 $d\colon I\to\{1,r\}$为满足对所有 i、$j\in I$ 有 $d_ic_{ij}=d_jc_{ji}$ 的函数，即 C 的最小左对称化子。

设 $U_q(L\mathfrak{g})$ 为与 $\mathfrak{g}$ 相关联的量子环代数。它是定义在代数闭域 $\Bbbk=\mathbb{Q}(q)$ 上的 Hopf 代数，其中 q 是一个形式参数。设 $\mathscr{C}$ 表示刚性

有限维幺半范畴 $U_q(L\mathfrak{g})$-模，带有标准的 1 型条件。它配备了逆变自等价 $\mathfrak{D}^{\pm 1}$，该逆变自等价将每个模映射为其左对偶/右对偶。回忆一下，范畴 $\mathscr{C}$的单模同构类由集合$(1+z\Bbbk[z])^I$ 中的 I-元首一多项式组（称为 Drinfeld 多项式） [CP94, CP95]。

在本文中，我们将自身限制在一个由 Hernandez–Leclerc $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 引入的 $\mathscr{C}$ 良好的幺半子范畴 [HL10] 上，该范畴是由一族特定的单模生成的 Serre 子范畴。确切地说，我们固定一个函数 $\epsilon\colon\ I \to \{0,1\}$ 满足条件

$$\epsilon_i \equiv \epsilon_j + \min(d_i, d_j) \pmod 2 \quad \text{whenever } i \sim j, \tag{4.1}$$

我们称其为奇偶函数，并令

$$\widehat{I} := \{(i,p) \in I \times \mathbb{Z} \mid p \equiv \epsilon_i \pmod 2\}.$$

对于每个 $(i,p) \in I$，我们引入一个形式变量 $Y_{i,\,p}$ 并考虑 Laurent 多项式环 $\mathcal{Y} := \mathbb{Z}[Y_{i,p}^{\pm 1} \mid (i,p) \in \widehat{I}]$。令 $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{Y}$ 为所有 Laurent 单项式构成的集合。元素 $m \in \mathcal{M}^*$ 写作

$$m = \prod_{(i,p)\in\widehat{I}} Y_{i,p}^{u_{i,p}(m)}. \tag{4.2}$$

对于每个 $(i,p) \in I$，$m \in \mathcal{M}^*$ 满足 $u_{i,p}(m) \geq 0$，我们就称 $m \in \mathcal{M}^*$ 是主导的。令 $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*$ 为主导单项式的集合。对于每个 $m \in \mathcal{M}$，我们都有一个与 Drinfeld 多项式 $(\prod_p (1-q^p z)^{u_{i,p}(m)})_{i\in I}$相对应的单模 $L(m) \in \mathscr{C}$。范畴 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 定义为由单模 $\{L(m) \mid m \in \mathcal{M}\}$生成的 $\mathscr{C}$ 的 Serre 子范畴。它在张量积和自同构 $\mathfrak{D}^{\pm 1}$下封闭，因此自身构成一个刚性幺半范畴。事实上，对于任意 $m \in \mathcal{M}$，都有 $\mathfrak{D}^{\pm 1}L(m) \simeq L(\mathfrak{D}^{\pm 1}m)$。这里，右端的 $\mathfrak{D}^{\pm 1}$ 表示 $\mathcal{Y}$ 的自同构，由 $Y_{i,p} \mapsto Y_{i^*,p\pm rh^\vee}$ 对 $(i,p) \in \widehat{I}$给出，其中 $i \mapsto i^*$是由最长 Weyl 群元素诱导的 I 的对合，而 $h^\vee$ 是 $\mathfrak{g}$的对偶 Coxeter 数。此外，$\mathscr{C}$ 的每个素单模（即不能分解为模的非平凡张量积的单模）在经过适当的谱参数平移后都属于 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$。

Frenkel–Reshetikhin 定义的 q-特征同态χ_q [FR99] 给出了一个单射环同态 $\chi_q\colon\ K(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) \to \mathcal{Y}$。作为一个环，格罗滕迪克环 $K(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 同构于由 $\{[L(Y_{i,p})]\}_{(i,p)\in\widehat{I}}$ 中的多项式构成的环。形如 $L(Y_{i,p})$ 的单模称为基本模。

对于每个满足 $(i,p-d_i) \in I$ 的 $(i,p) \in I \times \mathbb{Z}$，我们定义元素 $A_{i,p} \in \mathcal{M}^*$ 如下：

$$A_{i,p} = Y_{i,p-d_i}Y_{i,p+d_i} \prod_{(j,s)\in\widehat{I}\colon\ j\sim i, |s-p|<d_i} Y_{j,s}^{-1},$$

它是第 i 个单根[FR99]的环类比。对于 $m, m' \in \mathcal{M}^*$，如果$m'm^{-1}$ 是由各种 $A_{i,p}$（其中 $(i,p-d_i) \in \widehat{I}$）构成的单项式，我们记作 $m \leq m'$。这在$\mathcal{M}^*$上定义了一个偏序，称为中岛偏序。对于任意 $m \in \mathcal{M}$，我们有

$$\chi_q(L(m)) = m + \sum_{m'\in\mathcal{M}^*\colon\ m'<m} a[m;m']m' \tag{4.3}$$

对于某个 $a[m;\ m'] \in \mathbb{N}_0$。证明见 [Nak01] 和 [FM01]。

4.2. $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的量子 Grothendieck环。量子卡当矩阵 $C(q)=(C_{ij}(q))_{i,\ j\in I}$是一个取值于 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 的矩阵，定义为

$$C_{ij}(q) \coloneqq \delta_{i,j}(q^{d_i}+q^{-d_i})+(1-\delta_{i,j})[c_{ij}]_q$$

对于任意 $i,j\in I$，其中 $[k]_q=(q^k-q^{-k})/(q-q^{-1})$ 是标准的 q-整数。矩阵 $C(q)^{\sim}$ $^{\sim}$作为 $\mathbb{Q}(q)$-值矩阵是可逆的，我们将其逆记为 $C(q)^{\sim}=(C_{ij}(q))_{i,j\in I}$。对于任意$i,j\in I$，我们记

$$\widetilde{C}_{ij}(q)=\sum_{u\in\mathbb{Z}}\widetilde{c}_{ij}(u)q^u\in\mathbb{Z}((q))$$

$^{\sim}$为 (i,j)-项 $C_{ij}(q)$ 在 $q=0$ 处的 Laurent 展开。这样，我们得到一组整数 $\{\widetilde{c}_{ij}(u)\mid i,j\in I,u\in\mathbb{Z}\}$。我们定义一个映射 $\mathscr{N}\colon (I\times\mathbb{Z})^2\to\mathbb{Z}$ 由

$$\mathscr{N}(i,p;j,s)\coloneqq \widetilde{c}_{ij}(p-s-d_i)-\widetilde{c}_{ij}(p-s+d_i)-\widetilde{c}_{ij}(s-p-d_i)+\widetilde{c}_{ij}(s-p+d_i).$$

它满足 $\mathscr{N}(i,p;\ j,s)=-\mathscr{N}(j,s;\ i,p)$ 对于任意 $(i,p),(j,s)\in I\times\mathbb{Z}$。

令 t 为一个带有形式平方根 $t^{1/2}$ 的不定元。我们将量子环面$\mathcal{Y}_t$ 定义为由生成元集合 $\{\underline{Y_{i,p}^{\pm 1}}\mid (i,p)\in\widehat{I}\}$ 及以下关系给出的 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数:

- $\underline{Y_{i,p}}\cdot\underline{Y_{i,p}^{-1}}=\underline{Y_{i,p}^{-1}}\cdot\underline{Y_{i,p}}=1$ for each $(i,p)\in\widehat{I}$,
- $\underline{Y_{i,p}}\cdot\underline{Y_{j,s}}=t^{\mathscr{N}(i,p;j,s)}\underline{Y_{j,s}}\cdot\underline{Y_{i,p}}$ for each $(i,p),(j,s)\in\widehat{I}$.

注意，$\mathcal{Y}_t$ 是 $\mathcal{Y}$的变形。事实上，存在一个满射 $\mathbb{Z}$-代数同态 $\mathrm{ev}_{t=1}\colon \mathcal{Y}_t\to\mathcal{Y}$，由 $t^{1/2}\mapsto 1$和$Y_{i,p}\mapsto Y_{i,p}$对所有 $(i,p)\in\widehat{I}$给出。$\mathcal{Y}_t$中的元素 $\widetilde{m}$ 若可表示为生成元$Y_{i,p}^{\pm 1}$（其中 $(i,p)\in\widehat{I}$）与 $t^{\pm 1/2}$的乘积，则称为单项式。若单项式 $\widetilde{m}$ 满足 $\mathrm{ev}_{t=1}(\widetilde{m})$ 是主导的，则称其为主导单项式。按照 [Her04, §6.3], ，我们在 $\mathcal{Y}_t$ 上定义 $\mathbb{Z}$-代数反自反 $(\cdot)$，如下:

$$\overline{t^{1/2}}\coloneqq t^{-1/2},\qquad \overline{\underline{Y_{i,p}}}\coloneqq\underline{Y_{i,p}}.$$

这称为 $\mathcal{Y}_t$ 上的条形对合。对于任意 $m\in\mathcal{M}^*$，我们用 $\underline{m}$ 表示 $\mathcal{Y}_t$ 中满足 $\overline{\underline{m}}=\underline{m}$ 且 $\mathrm{ev}_{t=1}(\underline{m})=m$ 的唯一单项式。这类元素称为交换单项式（参见附录 A.1）。注意，我们有 $(m^{-1})^{\sim}=(\underline{m})^{-1}(=:\underline{m^{-1}})$。交换单项式构成 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-模 $\mathcal{Y}_t$ 的自由基~~，对于~~任意 $m,m'\in\mathcal{M}^*$，我们有

$$\underline{m\cdot m'}=t^{-\mathscr{N}(m,m')/2}\underline{m}\cdot\underline{m'}=t^{\mathscr{N}(m,m')/2}\underline{m'}\cdot\underline{m}$$

其中 $\mathscr{N}(m,m')\in\mathbb{Z}$ 是一个斜对称配对，由下式给出

$$\mathscr{N}(m,m')\coloneqq\sum_{(i,p),(j,s)\in\widehat{I}}u_{i,p}(m)u_{j,s}(m')\mathscr{N}(i,p;j,s)\tag{4.4}$$

按照（4.2）中的记号。

对于每个 $i\in I$，用 $\mathcal{K}_{i,\ t}$ 表示由以下元素生成的 $\mathcal{Y}_t$ 的 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-子代数

$$\left\{\underline{Y_{i,p}}(1+t^{-1}\underline{A_{i,p+d_i}^{-1}})\;\middle|\;(i,p)\in\widehat{I}\right\}\cup\left\{\underline{Y_{j,s}^{\pm 1}}\;\middle|\;(j,s)\in\widehat{I},j\neq i\right\}.$$

根据 [Nak04、VV03、Her04], ，我们将量子 Grothendieck 环 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 定义为由 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$生成的 $\mathcal{Y}_t$ -子代数

$$\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})\coloneqq\bigcap_{i\in I}\mathcal{K}_{i,t}.$$

注意， $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 在条形对合下保持不变。此外，我们有 $\mathrm{ev}_{t=1}(\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})) = \chi_q(K(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}))$。为便于后续使用，我们指出如下事实。

引理 4.1. 假设两个非零元素 $x \in \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 和 $y \in \mathcal{Y}_t$ 满足 $xy \in \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$。则有 $y \in \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$。

证明。此处是对 [HL16] 中所述论证的量子类比。事实上，该断言源于以下事实： $\mathcal{K}_{i,t}$ 是 t-变形的 i 阶筛算子 $S_{i,t}$ 的核。也就是说，存在一个 $\mathcal{Y}_t$-双模 $\mathcal{Y}_{i,t}$ ，以及一个 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-线性映射 $S_{i,t}\colon \mathcal{Y}_t \to \mathcal{Y}_{i,t}$ ，使得 $S_{i,t}(xy) = S_{i,t}(x)y + xS_{i,t}(y)$ 对任意 $x, y \in \mathcal{Y}_t$ 均成立，且 $\operatorname{Ker} S_{i,t} = \mathcal{K}_{i,t}$。详情参见 [Her04，定理 4.10] 。□

我们有以下由第二位署名作者得到的结果，这对我们的研究至关重要。

定理 4.2 ([Her04，定理 5.11][Her05，定理 7.5])。对于每个主导单项式 $m \in \mathcal{M}$，存在唯一的元素 $F_t(m)$ 属于 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$，使得 $\underline{m}$ 是 $F_t(m)$ 中出现的唯一主导单项式。它满足 $F_t(m) = F_t(m)$。此外，集合 $\{F_t(m) \mid m \in \mathcal{M}\}$ 构成 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 的一个 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-基，而集合 $\{F_t(Y_{i,p}) \mid (i,p) \in \widehat{I}\}$ 生成 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$。

我们可以构造 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 的典范基 $\mathbf{L}_t$ ，其元素 $L_t(m)$ 被猜想是 q-特征 $\chi_q(L(m))$ 的一个 t-类比。

定理 4.3 ([Nak04，定理 8.1], [Her04，定理 6.9])。存在唯一的 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-基 $\mathbf{L}_t = \{L_t(m) \mid m \in \mathcal{M}\}$ 属于 $\underline{\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})}$ ，并由以下性质刻画：对于每个 $m \in \mathcal{M}$，有 $L_t(m) = L_t(m)$，且

$$L_t(m) \equiv t^{\mathcal{N}(m)} \prod_{p\in\mathbb{Z}}^{\rightarrow} \prod_{i\in I\colon (i,p)\in\widehat{I}} F_t(Y_{i,p})^{u_{i,p}(m)} \mod \sum_{m'<m} t\mathbb{Z}[t]L_t(m')$$

在记号 (4.2) 对于某个 $\mathcal{N}(m) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$。明确地，有

$$\mathcal{N}(m) = -\frac{1}{2} \sum_{(i,p),(j,s)\in\widehat{I}\colon\, p<s} u_{i,p}(m)u_{j,s}(m)\mathcal{N}(i,p;j,s).$$

注意，对于固定的 p， $F_t(Y_{i,p})$'s $(i \in I)$ 彼此交换，因此 $L_t(m)$ 的公式定义良好。元素 $L_t(m)$ 称为 (q, t)-特征标，记作 $L(m)$。作为方程（4.3）的 t-类比，对于每个 $m \in \mathcal{M}$，我们有

$$L_t(m) = \underline{m} + \sum_{m'\in\mathcal{M}^*\colon\, m'<m} a_t[m;m']\underline{m'} \tag{4.5}$$

对于某些 $a_t[m;m'] \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$。

猜想 4.4 （参见 [Her04，猜想 7.3]）。对于所有 $m \in \mathcal{M}$，我们有

(1) $\mathrm{ev}_{t=1}(L_t(m)) = \chi_q(L(m))$，以及 (2) $a_t[m;m'] \in \mathbb{N}_0[t^{\pm 1/2}]$ 对于所有满足 $m' < m$ 的 $m' \in \mathcal{M}^*$。

猜想 4.4 (1) 称为 Kazhdan–Lusztig 型猜想，其灵感源自 Nakajima 的结果。目前，我们知道，当 $\mathfrak{g}$ 为 ADE 型时，Nakajima 已证明猜想 [Nak04], 成立；当 $\mathfrak{g}$ 为 B 型时， [FHOO22]也证明了这一点。此外，对于一般的4.4(1)，猜想 $\mathfrak{g}$ 在 m 属于 $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ 且存在某些 Q-数据 $\mathcal{Q}$ 使得 $\mathfrak{g}$ (参见第 4.3 节，其中给出了 $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ 的定义） [FHOO22]。

本文将证明猜想 4.4 (1) 对可达模 $L(m)$ 成立（参见定义 6.7），并证明猜想 4.4 (2) 对一般的 $\mathfrak{g}$ 成立。参见推论 6.10 和 6.12。

我们有如下关于典范基的正性结果$\mathbf{L}_t$，该结果由 Varagnolo–Vasserot [VV03] 针对 ADE 型证明，并由作者 [FHOO22] 在一般情形下证明。

定理 4.5 ([VV03，定理4.1], [FHOO22，推论 10.7])。结构常数$\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 关于典范基 $\mathbf{L}_t$ 属于 $\mathbb{N}_0[t^{\pm 1/2}]$。

令 $\mathfrak{D}_t^{\pm 1}$为 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数自同构，由 $\mathfrak{D}_t^{\pm 1}\underline{m} = \underline{\mathfrak{D}^{\pm 1}m}$ 给出，适用于所有$m \in \mathcal{M}^*$。它满足$\mathsf{ev}_{t=1} \circ \mathfrak{D}_t^{\pm 1} = \mathfrak{D}^{\pm 1} \circ \mathsf{ev}_{t=1}$ 并保持子代数 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) \subset \mathcal{Y}_t$。此外，我们有

$$\mathfrak{D}_t^{\pm 1}(F_t(m)) = F_t(\mathfrak{D}^{\pm 1}m) \quad \text{and} \quad \mathfrak{D}_t^{\pm 1}(L_t(m)) = L_t(\mathfrak{D}^{\pm 1}m)$$

对于任意 $m \in \mathcal{M}$ （见 [FHOO22，引理 3。11]）

4.3. Q-数据和相关子范畴。对于我们的单李代数 $\mathfrak{g}$，我们关联一个唯一的对（Δ，σ），称为 展开 of $\mathfrak{g}$，其由一个单边Dynkin图 Δ 和一个 的图自同构 Δ 组成，如表 1所示，其中 id：$\Delta_0 \to \Delta_0$ 是~恒等映射，而自同构 $\vee$ 和 $\vee$ 由下方图 1中的蓝色箭头给出。

r	$\mathfrak{g}$	Δ（或 $\mathfrak{g}$）	σ	$h^\vee$	ℓ
1	A_n	A_n	id	$n+1$	$n\ (n+1)\ /2$
	D_n	D_n	id	$2n-2$	$n\ (n-1)$
	$\mathrm{E}_{6,7,8}$	$\mathrm{E}_{6,7,8}$	id	12、18、30	$36, 63, 120$
2	B_n	A_{2n-1}	$\vee$	$2n-1$	$n(2n-1)$
	C_n	D_{n+1}	$\vee$	$n+1$	$n(n+1)$
	F_4	E_6	$\vee$	9	36
3	G_2	D_4	$\widetilde{\vee}$	4	12

TABLE 1. Unfoldings and associated numerical data

此后，我们用 $\mathfrak{g}$ 表示与单边Dynkin图 Δ 相关联的单李代数，并对这个 $\mathfrak{g}$ 应用 §1.1 中的记号，只是我们采用符号 $\imath, \jmath, \ldots$ 来表示 Δ_0 的元素，以便将符号 $i, j, \ldots$ 留给 I的元素。在上述赋值 $\mathfrak{g} \mapsto (\Delta, \sigma)$ 下，我们将 $\mathfrak{g}$ 的绞合数 r 与自同构 σ的阶等同起来，并且还将 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 指标集 I 与 Δ_0 中 σ-轨道的集合 $\Delta_0/\langle\sigma\rangle$等同起来，如图 1 中的虚线所示。然后正整数$d_i \in \{1, r\}$ 与 σ-轨道 $i \in I$的基数一致。我们将自然商映射 $\Delta_0 \to I = \Delta_0/\langle\sigma\rangle$ 记为 $\imath \mapsto \bar{\imath}$。

让我们回顾一下以下在 [FO21] 中引入的概念，该概念将在下文中发挥重要作用。一个 Q-数据 对于 $\mathfrak{g}$ 定义为三元组 $\mathcal{Q} = (\Delta,\ \sigma,\ \xi)$，满足（$\Delta$，$\sigma$）是 $\mathfrak{g}$ 的展开，并且 ξ：$\Delta_0 \to \mathbb{Z}$ 是一个满足以下性质的函数：

(1) 对于满足 $\imath \sim \jmath$ 且 $d_{\bar{\imath}} = d_{\bar{\jmath}}$ 的 $\imath$、$\jmath \in \Delta_0$，我们有 $|\xi_\imath - \xi_\jmath| = d_{\bar{\imath}} = d_{\bar{\jmath}}$。

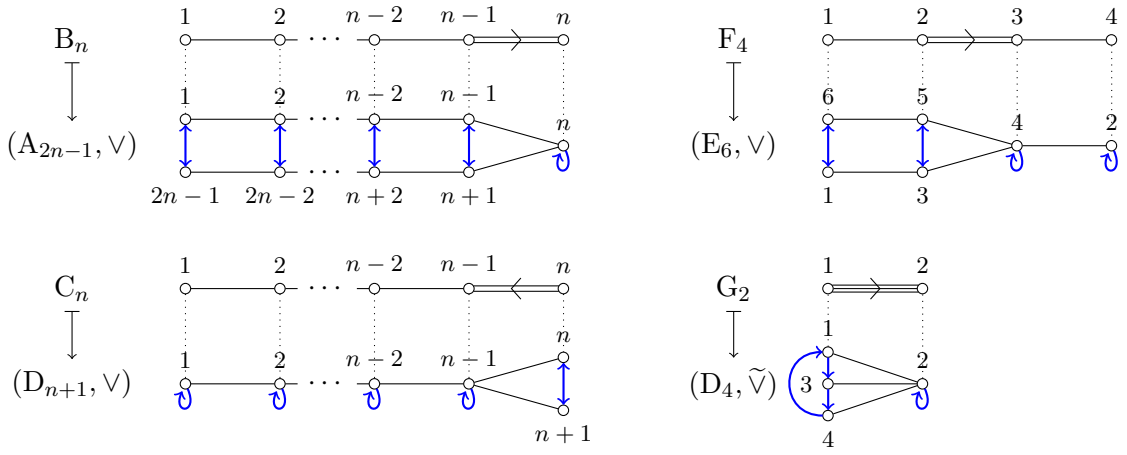


FIGURE 1. Unfoldings for non-simply-laced $\mathfrak{g}$

(2) 对于满足 $i \sim j$ 且 $d_i = 1 < d_j = r$ 的 i、$j \in I$，存在唯一的 $\jmath \in j$ 使得 $|\xi_\imath - \xi_\jmath| = 1$ 且对任意 $1 \le k < r$ 有 $\xi_{\sigma^k(\jmath)} = \xi_\jmath - 2k$，其中 $i = \{\imath\}$。

我们将函数 ξ 称为高度函数。回顾一下，我们已选择了一个奇偶函数ϵ: $I \to \{0,1\}$ 满足（4.1）于§4.1。在下文中，我们总是不失一般性地假设一个 Q-数据 $\mathcal{Q} =$（Δ, σ, ξ）满足条件

$$\xi_\imath \equiv \epsilon_{\bar\imath} \pmod 2 \quad \text{for any } \imath \in \Delta_0. \tag{4.6}$$

对于 $\mathfrak{g}$ 的一个 Q-数据 $\mathcal{Q} = (\Delta, \sigma, \xi)$，我们为 $\mathfrak{g}$ 定义另一个 Q-数据 $\mathfrak{D}^{\pm 1}\mathcal{Q} = (\Delta, \sigma, \mathfrak{D}^{\pm 1}\xi)$ 通过

$$(\mathfrak{D}^{\pm 1}\xi)_\imath := \xi_{\imath^*} \pm r h^\vee \quad \text{for } \imath \in \Delta_0. \tag{4.7}$$

容易验证 $(\mathfrak{D}^{-1}\xi)_\imath < \xi_\imath < (\mathfrak{D}\xi)_\imath$ 对每个 $\imath \in \Delta_0$ 成立，并且 $\mathfrak{D}^{\pm 1}\mathcal{Q}$ 满足条件（4.6）每当 $\mathcal{Q}$ 满足时。

现在，给定 $\mathfrak{g}$ 的一个 Q-数据 $\mathcal{Q} = (\Delta, \sigma, \xi)$，我们考虑以下集合

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta}_{[\xi]} &:= \{(\imath, p) \in \Delta_0 \times \mathbb{Z} \mid \xi_\imath - p \in 2d_{\bar\imath}\mathbb{Z}\}, \\
\widehat{\Delta}_{\le\xi} &:= \{(\imath, p) \in \widehat{\Delta}_{[\xi]} \mid p \le \xi_\imath\}, & \widehat{I}_{\le\xi} &:= f(\widehat{\Delta}_{\le\xi}), \\
\widehat{\Delta}_{\mathcal{Q}} &:= \{(\imath, p) \in \widehat{\Delta}_{[\xi]} \mid (\mathfrak{D}^{-1}\xi)_\imath < p \le \xi_\imath\}, & \widehat{I}_{\mathcal{Q}} &:= f(\widehat{\Delta}_{\mathcal{Q}}),
\end{aligned}$$

其中 $f\colon \Delta_0 \times \mathbb{Z} \to I \times \mathbb{Z}$ 是折叠映射 $(\imath, p) \mapsto (\bar\imath, p)$。注意我们有 $\widehat{I}_{\mathcal{Q}} \subset \widehat{I}_{\le\xi} \subset \widehat{I}$、$\widehat{\Delta}_{[\xi]} \simeq \widehat{I}$、$\widehat{\Delta}_{\le\xi} \simeq \widehat{I}_{\le\xi}$ 和 $\widehat{\Delta}_{\mathcal{Q}} \simeq \widehat{I}_{\mathcal{Q}}$。设 $\mathcal{Y}_t$、$_{\le\xi}$（resp.$\mathcal{Y}_t$、$_{\mathcal{Q}}$）为量子环面 $\mathcal{Y}_t$ 的 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-子代数，由所有元素 $Y_i^{\pm 1}$、$_p$ 生成，其中 $(i,p) \in \widehat{I}_{\le\xi}$（resp. $\widehat{I}_{\mathcal{Q}}$）。则代数 $\mathcal{Y}_{\le\xi} := \mathrm{ev}_{t=1}(\mathcal{Y}_{t,\le\xi})$（resp. $\mathcal{Y}_{\mathcal{Q}} := \mathrm{ev}_{t=1}(\mathcal{Y}_{t,\mathcal{Q}})$）与变量 Y_i、$_p$ 的 Laurent 多项式环相同，其中 $(i,p) \in \widehat{I}_{\le\xi}$（resp. $\widehat{I}_{\mathcal{Q}}$）。我们令 $\mathcal{M}_{\le\xi} := \mathcal{M} \cap \mathcal{Y}_{\le\xi}$ 和 $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}} := \mathcal{M} \cap \mathcal{Y}_{\mathcal{Q}}$。

令 $\mathscr{C}_{\le\xi}$（分别为 $\mathscr{C}_{\mathcal{Q}}$）为由 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 生成的所有单模$L(m)$构成的Serre子范畴，其中满足 $m \in \mathcal{M}_{\le\xi}$（分别为 $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$）。它在张量积运算下封闭。此外，范畴 $\mathscr{C}_{\le\xi}$ 在函子 $\mathfrak{D}^{-1}$下稳定，且有 $\mathfrak{D}^{-1}\mathscr{C}_{\le\xi} = \mathscr{C}_{\le\mathfrak{D}^{-1}\xi}$。我们定义$\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\le\xi})$（分别为 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathcal{Q}})$）为 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 的 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-子代数，由所有 $F_t(Y_{i,p})$ 生成，其中 $(i,\ p) \in \widehat{I}_{\le\xi}$（分别为 $\widehat{I}_{\mathcal{Q}}$）。它带有规范的 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-基$\mathbf{L}_{t,\le\xi}$（分别为$\mathbf{L}_{t,\mathcal{Q}}$）

由所有满足 $m \in \mathcal{M}_{\leq\xi}$ （分别为 $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$）的元素 $L_t(m)$ 组成。此外，代数$\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq\xi})$在自同构 $\mathfrak{D}_t^{-1}$ 下保持不变，并且有 $\mathfrak{D}_t^{-1}\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq\xi}) = \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq\mathfrak{D}^{-1}\xi})$。

让我们回顾以下截断过程。对于元素 $y \in \mathcal{Y}_t$，我们用$y_{\leq\xi}$ 表示$\mathcal{Y}_{t,\leq\xi}$ 中的元素，它由 y 去掉所有包含因子 $Y_i^{\pm1},_p$ 且满足 $(i,p) \in \widehat{I} \setminus \widehat{I}_{\leq\xi}$ 的单项式后得到。这个赋值 $y \mapsto y_{\leq\xi}$ 定义了一个 $\mathbb{Z}[t^{\pm1/2}]$-线性映射 $(\cdot)_{\leq\xi}\colon \mathcal{Y}_t \to \mathcal{Y}_{t,\leq\xi}$，它不是代数同态。不过，它在单射代数同态 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq\xi}) \hookrightarrow \mathcal{Y}_{t,\leq\xi}$ 和 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathcal{Q}}) \hookrightarrow \mathcal{Y}_{t,\mathcal{Q}}$ 上的限制（参见 [FHOO22, §5.4]）是代数同态。

For future use, we remark the following fact.

引理 4.6。设 $\mathcal{Q} = (\Delta, \sigma, \xi)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Q-数据。我们有

$$\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq\xi}) = \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) \cap \mathcal{Y}_{t,\leq\mathfrak{D}\xi}.$$

换言之，元素 $x \in \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 属于 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq\xi})$ 当且仅当它满足$x_{\leq\mathfrak{D}\xi} = x$。

证明。我们考虑子集 $I_{\geq-\xi} := \{(i,p) \in I \mid (i,-p) \in I_{\leq\xi}\}$，它属于 I，以及相应的$\mathbb{Z}[t^{\pm1/2}]$-子代数 $\mathcal{Y}_{t,\geq-\xi}$，它属于 $\mathcal{Y}_t$。那么，对于每个 $(i,p) \in \widehat{I}_{\geq-\xi}$，我们都有 $F_t(Y_{i,p}) \in \mathcal{Y}_{\geq-\xi}$ （见[FHOO22，推论 5.12] 的证明）。特别地，如果我们将 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\geq-\xi})$ 定义为由 $\{F_t(Y_{i,p}) \mid (i,p) \in I_{\geq-\xi}\}$ 生成的 $\mathbb{Z}[t^{\pm1/2}]$-子代数，则有

$$\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\geq-\xi}) = \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) \cap \mathcal{Y}_{t,\geq-\xi}.$$

设 ω_t 是 $\mathcal{Y}_t$ 的代数对合，由 $\omega_t(t^{\pm1/2}) = t^{\mp1/2}$ 和 $\omega_t(Y_{i,p}) = Y_i^{-1},_{-p}$ 对所有 $(i,p) \in I$。根据定义，我们有 $\omega_t(\mathcal{Y}_{t,\leq\xi}) = \mathcal{Y}_{t,\geq-\xi}$。此外，对于任意 $(i,p) \in I$ （见[FHOO22, §3.4]），它满足 $\omega_t(F_t(Y_{i,p})) = F_t(Y_{i^*,-p-rh^\vee})$。因此，我们有

$$\omega_t(\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq\xi})) = \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\geq-\mathfrak{D}\xi}) = \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) \cap \mathcal{Y}_{t,\geq-\mathfrak{D}\xi} = \omega_t(\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) \cap \mathcal{Y}_{t,\leq\mathfrak{D}\xi}),$$

which yields the assertion. □

4.4. 基里洛夫–雷谢提金模。回顾一下，基里洛夫–雷谢提金（KR）模是 $\mathscr{C}$ 的一个单对象，其 Drinfeld 多项式具有如下形式。

$$\left(\prod_{k=0}^{l}(1-aq^{2d_ik}z)^{\delta_{i,j}}\right)_{j\in I}$$

对于某些 $i \in I$、$l \in \mathbb{N}$ 和 $a \in \Bbbk^\times$。

命题 4.7. 对于一个 KR 模 $L(m)$，我们有 $\mathsf{ev}_{t=1}(F_t(m)) = \chi_q(L(m))$。

证明。 q-特征具有唯一的主导单项式，这已在 [Nak03，Her06] 中得到证明。此外，量子格罗滕迪克环在$\mathsf{ev}_{t=1}$ 下的像是q-特征环 [Nak04，Her04]。但是， q-特征由其主导单项式的重数刻画 [FM01]。这就得到了所要证明的结果。 □

有了命题 4.7，鉴于猜想 4.4，可以预期如下。

猜想 4.8。对于KR 模 $L(m)$，我们有 $F_t(m) = L_t(m)$。

此时，我们知道猜想 4.8 在 $\mathfrak{g}$ 为 ABDE 型时成立，由 [Nak03]和 [FHOO22，定理 11。6]。我们将证明猜想 4.8 对于剩余情形作为本文的结果之一，即当 $\mathfrak{g}$ 为 CFG 型。参见推论 6.11。

为了我们的目的，引入以下 KR 模的记号是有用的。设$\mathcal{Q}=(\Delta,\sigma,\xi)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个 Q-数据。对于 $\imath\in\Delta_0$ 以及整数 $a,b\in\mathbb{Z}$ 满足 $a\le b$，我们定义主导单项式 $m^{(\imath)}[a,b]\in\mathcal{M}$ 为

$$m^{(\imath)}[a,b]:=\prod_{(\imath,p)\in\widehat{\Delta}_{[\xi]}\,:\,p\in[a,b]} Y_{\bar{\imath},p}.$$

对应的单模 $L^{(\imath)}[a,b]:=L(m^{(\imath)}[a,b])$ 是一个 KR 模。范畴 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 中的任意 KR 模都可写成这种形式。接下来，我们通过设定 $F_t^{(\imath)}[a,b]:=F_t(m^{(\imath)}[a,b])$ 和 $L_t^{(\imath)}[a,b]:=L_t(m^{(\imath)}[a,b])$ 来简化记号。令 $(a,b]:=[a,b]\setminus\{a\},[a,b):=[a,b]\setminus\{b\}$，$(a,b):=[a,b]\setminus\{a,b\}$，我们以与 $F_t^{(\imath)}[a,b]$ 相同的方式定义 $F_t^{(\imath)}(a,b]$, $F_{(\imath)\,t}\ [a,b)$、$F_{(\imath)\,t}(a,b)$。

The following states that certain truncations of these elements are just a single monomial.

引理 4.9 ([FHOO22, Lemma 6.7])**.** 对于任意 $(\imath,p)\in\Delta_{\le\xi}$，我们有

$$F_t^{(\imath)}[p,\xi_\imath]_{\le\xi}=\underline{m^{(\imath)}[p,\xi_\imath]}.$$

以下内容推广了量子 T-系统（在单边类型中）[Nak03] 并变形了一般 T-系统 [Her06]。

定理 4.10（量子 T-系统 [FHOO22，定理 6.8]）。设 $\mathcal{Q}=(\Delta,\sigma,\xi)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Q-数据，且 $(\imath,p)$、$(\imath,s)\in\widehat{\Delta}_{[\xi]}$ 满足 $p<s$。那么 $\{F_t^{(\jmath)}(p,s)\}_{\jmath\sim\imath}$ 中的元素两两交换，差一个 $t^{\pm1/2}$ 的幂，并且我们有

$$F_t^{(\imath)}[p,s)F_t^{(\imath)}(p,s]=t^aF_t^{(\imath)}(p,s)F_t^{(\imath)}[p,s]+t^b\prod_{\jmath\sim\imath}^{\rightarrow}F_t^{(\jmath)}(p,s) \tag{4.8}$$

对于某些 $a,b\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$，位于 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 中。这里的有序乘积是相对于集合 $\{\jmath\in\Delta_0\mid\jmath\sim\imath\}$ 的任意全序取的。

注意，最后一项的因子一般并不交换，而只是以 t-交换，这就是乘积必须排序的原因。

5. Cluster structure on $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\le\xi})$

我们证明，范畴 $\mathscr{C}_{\le\xi}$ 的量子 Grothendieck环具有量子簇代数的结构，并且同构于一个代数 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$，该代数在上文（定理 5.16）中引入。这推广了先前的结果 [HL15、Qin17、Bit21]。就我们的目的而言，我们使用 [HL16] 中引入的量子仿射箭图，并讨论关于它的若干技术性结果。随后，我们的证明首先基于我们所建立的量子环面的一个同构（推论 5.13）。然后，通过在量子环面内，借助 (q,t)-特征标的截断和自然嵌入，识别它们各自的像，从而得到量子 Grothendieck 环与量子簇代数之间的同构。

5.1. 适配序列。本节中，我们固定一个适用于 $\mathfrak{g}$ 的 Q-数据 $\mathcal{Q}=(\Delta,\sigma,\xi)$。若对任意满足 $\jmath\sim\imath$ 的 $\jmath\in\Delta_0$，都有 $\xi_\imath>\xi_\jmath$，则称顶点 $\imath\in\Delta_0$ 是 $\mathcal{Q}$ 的源。在这种情况下，我们通过设定来定义一个新的 Q-数据 $s_\imath\mathcal{Q}=(\Delta,\sigma,s_\imath\xi)$。

$$(s_\imath\xi)_\jmath:=\xi_\jmath-2d_{\bar{\imath}}\delta_{\imath,\jmath}\quad\text{for }\jmath\in\Delta_0.$$

注意，如果 $\mathcal{Q}$ 满足（4.6），则 $s_\imath\mathcal{Q}$ 对于任意源 $\imath\in\Delta_0$ 的 $\mathcal{Q}$也满足。我们称序列$\boldsymbol{i}=(\imath_1,\ \imath_2,\ \ldots)$ 中的 Δ_0 是 适配于 $\mathcal{Q}$ 如果 $\imath_k$ 是 Q- 数据 $s_{\imath_{k-1}}\cdots s_{\imath_2}s_{\imath_1}\mathcal{Q}$ 对于所有

$k \in \{1, 2, \dots\}$。我们有以下组合结果，这对我们的目的至关重要。回顾定义中交换等价的概念 2.5。

命题 5.1 ([FO21, §3.5]). 对于每个 Q-数据 $\mathcal{Q}$ 对于 $\mathfrak{g}$，存在一个约化词 $(\imath_1, \dots, \imath_\ell)$，它与最长元 $w_\circ$ 相适应于 $\mathcal{Q}$，且在交换等价意义下唯一。此外，我们有 $s_{\imath_\ell} \cdots s_{\imath_1} \mathcal{Q} = \mathfrak{D}^{-1}\mathcal{Q}$。

设 $\boldsymbol{i} = (\imath_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Delta_0^{(\infty)}$ 是一个序列，满足条件 (1.1). 接下来，我们使用记号

$$n_{\boldsymbol{i}}(u) := |\{v \in \mathbb{N} \mid v < u, \imath_v = \imath_u\}|.$$

然后我们定义映射 $\rho_{\boldsymbol{i}}\colon \mathbb{N} \to \Delta_{\le\xi}$ 通过

$$\rho_{\boldsymbol{i}}(u) := (\imath_u, \xi_{\imath_u} - 2d_{\bar{\imath}_u} n_{\boldsymbol{i}}(u)).$$

根据条件（1.1），$\rho_{\boldsymbol{i}}$ 是一个双射。我们定义 $\bar{\rho}_{\boldsymbol{i}} := f \circ \rho_{\boldsymbol{i}}\colon \mathbb{N} \to I_{\le\xi}$。

对于 $(i, p), (j, s) \in \widehat{\Delta}_{[\xi]}$，记 $(i, p) \prec (j, s)$ 如果 $\imath \sim \jmath$ 且 $p = s + \min(d_{\bar{\imath}}, d_{\bar{\jmath}})$。取此关系的传递闭包，我们得到集合 $\Delta_{[\xi]}$ 上的偏序 $\preceq$。

注 5.2. 偏序集 $(\Delta_{\le\xi}, \preceq)$ 的哈斯图与重复箭图（限制于 $\Delta_{\le\xi}$）在 [FO21, §3.4]的意义下相同。

引理 5.3. 一个无限序列 $\boldsymbol{i} \in \Delta_0^{\mathbb{N}}$ 适应于 $\mathcal{Q}$ 当且仅当条件 (1.1)被满足且双射 $\rho_{\boldsymbol{i}}^{-1}\colon (\widehat{\Delta}_{\le\xi}, \preceq) \to (\mathbb{N}, \le)$ 是偏序集态射。

证明。 容易看出，当 1.1)条件在 $\boldsymbol{i} \in \Delta_0^{\mathbb{N}}$ 适配于 $\mathcal{Q}$时得到满足。于是该断言由以下观察得出：$(\imath, p) \in \Delta_{\le\xi}$ 是极小的，当且仅当 $\nsucc p = \xi_\imath$ 且 $\imath$ 是 $\mathcal{Q}$的源。此外，在此情况下，有 $\Delta_{\le\xi} \setminus \{(\imath, \xi_\imath)\} = \Delta_{\le s_\imath \xi}$。 □

引理 5.4. 假设序列 $\boldsymbol{i} = (\imath_u)_{u\in\mathbb{N}}$ 和 $\boldsymbol{i}' = (\imath'_u)_{u\in\mathbb{N}}$ 都适用于 $\mathcal{Q}$。那么 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{i}'$ 通过变换 $\rho_{\boldsymbol{i}'}^{-1} \circ \rho_{\boldsymbol{i}}$ 是交换等价的。

证明。令 $\pi := \rho_{\boldsymbol{i}'}^{-1} \circ \rho_{\boldsymbol{i}} \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$，我们有 $\imath_u = \imath'_{\pi(u)}$ 对所有 $u \in \mathbb{N}$。假设两个正整数 $u, v \in \mathbb{Z}$ 满足 $u < v$ 且 $\pi(u) > \pi(v)$。由引理 5.3，$\rho_{\boldsymbol{i}}(u)$ 和 $\rho_{\boldsymbol{i}}(v)$ 是在 $(\Delta_{\le\xi}, \preceq)$ 中不可比较的。然后，我们有 $\imath_u \ne \imath_v$ 且 $\imath_u \not\sim \imath_v$ （见 [FO21, 注 3.17]以及注 5.2）。因此，我们得到结论。 □

例 5.5。设 $\boldsymbol{i} = (\imath_u)_{u\in\mathbb{N}} \in \Delta_0^{\mathbb{N}}$ 是满足以下条件的一个序列

$$\begin{cases} \text{(1) } (\imath_1, \dots, \imath_\ell) \text{ 是适配于 } w_\circ \text{ 的约化词，并且 (2) 对所有 } u \in \mathbb{N}, \text{ 我们} \\ \text{有 } \imath_{u+\ell} = \imath_u^*. \end{cases} \tag{5.1}$$

那么，根据命题 $\boldsymbol{i}$，序列适配于 $\mathcal{Q}$。5.1

例 5.6。设 $\{(\imath_u, p_u)\}_{u\in\mathbb{N}}$ 是集合 $\Delta_{\le\xi}$ 的一个任意全序 $p_1 \ge p_2 \ge \cdots$，满足 $\boldsymbol{i} := (\imath_u)_{u\in\mathbb{N}}$ 根据引理适配于 $\mathcal{Q}$，并且根据引理5.3，我们有$\rho_{\boldsymbol{i}}(u) = (\imath_u, p_u)$ 对所有 $u \in \mathbb{N}$。

按照 [HL16], ，我们定义箭图 G 如下。箭图 G 的顶点集合为 $I_\circ$。对于 $(i, p), (j, s) \in I$，若 i，p，则赋予一条箭头（ $\to (j, s)$

$$c_{ij} \ne 0 \quad \text{and} \quad s - d_j = p - d_i + d_i c_{ij}.$$

令 $G_{\le\xi}$ 表示由集合 $I_{\le\xi}$ 支持的 G 的满子箭图。

注记 5.7. 我们总能找到一个 Q-数据 $\mathcal{Q}$ 对于 $\mathfrak{g}$ 其高度函数 ξ 满足$-2d_{\bar{\imath}} < \xi_\imath \leq 0$ 对所有 $\imath \in \Delta_{0}$。在这种情况下，箭图 $G_{\leq \xi}$ 等同于箭图 G^- 定义于 [HL16]。在这个意义上，箭图 $G_{\leq \xi}$ 是箭图 G^-的推广。

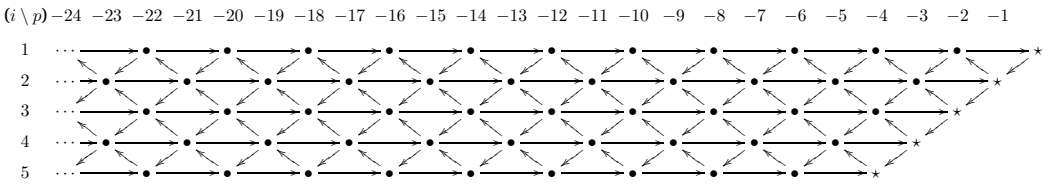
引理 5.8 ([KKOP21b，命题 7。27])。对于任意一个适配于 $\boldsymbol{i}$ 的序列 $\mathcal{Q}$，双射$\sim\bar{\rho}_{\boldsymbol{i}}$: $\mathbb{N} \to I_{\leq \xi}$ 诱导出箭图同构

$$\Gamma_{\boldsymbol{i}} \simeq G_{\leq \xi}.$$

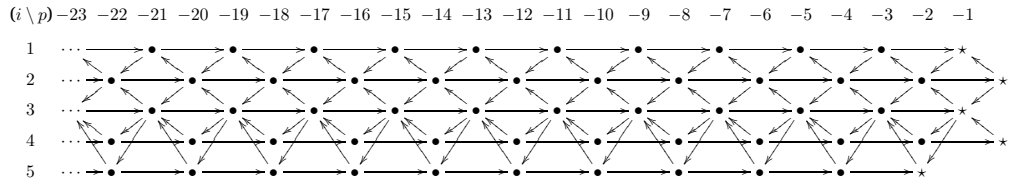
证明。根据命题 2.6 和引理 5.4，我们可以假设 $\boldsymbol{i}$ 满足例 （5.1）中的条件 5.5。那么，断言与 [KKOP21b，命题 7。27]。 □

例 5.9。我们展示箭图 $G_{\leq \xi}$的一些例子。这里， I 的标记方式与图 1中的相同。符号 $\star$ 表示顶点 $(\bar{\imath}, \xi_\imath)$，对应于 $\imath \in \Delta_{0}$。

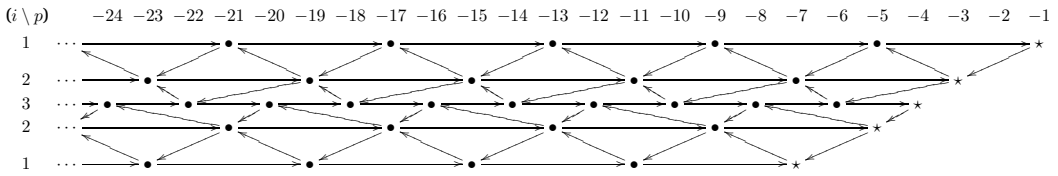
- A 型$_5$:



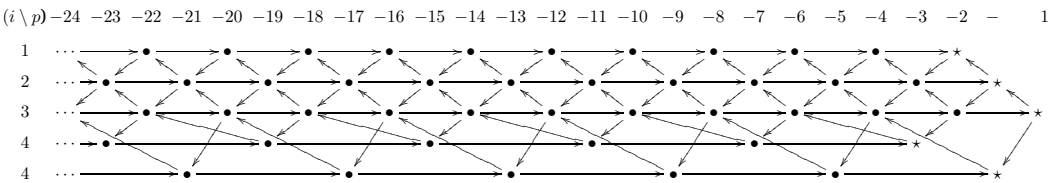
- D 型$_5$:



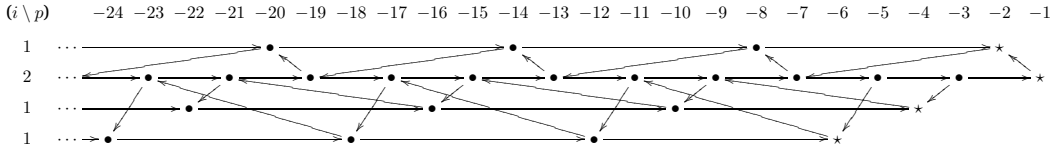
- B 型$_3$:



- C 型$_4$:



- G_2 型:



5.3.技术补充。在本小节中，我们常常将 σ 的 Δ 自同构识别为 P 上由 $\varpi_\imath \mapsto \varpi_{\sigma(\imath)}$ 给出的线性算子，其中任意 $\imath \in \Delta_0$。给定一个Q-数据$\mathcal{Q} = (\Delta, \sigma, \xi)$，对于每个 $i \in I$，令 i° 表示 σ-轨道 i 中满足$\xi_{i^\circ} = \max\{\xi_\imath \mid \imath \in i\}$的唯一顶点。我们考虑关于 $\mathcal{Q}$ 的以下条件:

$$\text{For each } i \in I \text{ and } k \in [1, d_i - 1], \text{ we have } \xi_{\sigma^k(i^\circ)} = \xi_{i^\circ} - 2k. \tag{5.2}$$

注意，除非 $\mathfrak{g}$ 是B_n 型或F_4 型，否则此条件总是满足的（不过我们强调，下面的结果和证明对所有类型都是统一的）。

命题 5.10 ([FO21, 第 3 节。6])。存在唯一的集合 $\{\tau_\mathcal{Q}\}_\mathcal{Q} \subset W \rtimes \langle\sigma\rangle$由 Q-数据标记，对于 $\mathfrak{g}$ 并由以下条件刻画:

(1) 如果 $\mathcal{Q} = (\Delta, \sigma, \xi)$ 满足 (5.2)，则有 $\tau_\mathcal{Q} = s_{i_1^\circ} \cdots s_{i_n^\circ} \sigma$，其中 $(i_1, \ldots, i_n)$ 是 I 的任意全序，满足 $\xi_{i_1^\circ} \geq \cdots \geq \xi_{i_n^\circ}$。(2) 如果 $\imath \in \Delta_0$ 是 $\mathcal{Q}$的一个源，则有 $\tau_{s_\imath \mathcal{Q}} = s_\imath \tau_\mathcal{Q} s_\imath$。

元素 $\tau_\mathcal{Q}$ 被称为与 $\mathcal{Q}$ 相关联的广义 Coxeter 元。

引理5.11。设 $\mathcal{Q} = (\Delta, \sigma, \xi)$ 是 $\mathfrak{g}$的 Q-数据，且 $\boldsymbol{i} = (\imath_u)_{u \in \mathbb{N}} \in \Delta_0^{\mathbb{N}}$ 是适配于 $\mathcal{Q}$ 的序列。那么，我们有

$$w_u^{\boldsymbol{i}} \varpi_{\imath_u} = \tau_\mathcal{Q}^{d_{\bar{\imath}_u}(n_{\boldsymbol{i}}(u)+1)} \varpi_{\imath_u} \quad \textit{for any } u \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

证明。 设 $\boldsymbol{i}' = (\imath'_u)_{u \in \mathbb{N}} \in \Delta_0^{\mathbb{N}}$ 是另一个适配于 $\mathcal{Q}$的序列。由引理 5.4，可知 $w_u^{\boldsymbol{i}} \varpi_{\imath_u} = w_{u'}^{\boldsymbol{i}'} \varpi_{\imath'_u}$ 当 $\imath_u = \imath'_{u'}$ 且 $n_{\boldsymbol{i}}(u) = n_{\boldsymbol{i}'}(u')$ 时。因此，只需对适配于 $\boldsymbol{i}$ 的某个特定选择 $\mathcal{Q}$证明该断言。

首先我们假设 $\mathcal{Q}$ 满足条件 (5.2)。令 $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ 为满足命题 5.10 (1) 中 $\xi_{i_1^\circ} \geq \cdots \geq \xi_{i_n^\circ}$ 的一个全序。然后，我们定义序列 $\boldsymbol{i} = (\imath_u)_{u \in \mathbb{N}}$，令 $\imath_u := i_u^\circ$，其中 $u \in [1, n]$，并对所有 $u \in \mathbb{N}$，令 $\imath_{u+n} := \sigma(\imath_u)$。容易看出，序列 $\boldsymbol{i}$ 适用于 $\mathcal{Q}$。对于此 $\boldsymbol{i}$，通过直接计算并利用命题 5.10 (1)，可得 (5.3) 成立。

接下来，我们将证明（5.3）对 Q-数据 $s_\imath \mathcal{Q}$ 成立，假设它对 $\mathcal{Q}$成立，其中$\imath \in \Delta_0$ 是 $\mathcal{Q}$的一个源。令 $\boldsymbol{i} = (\imath_u)_{u \in \mathbb{N}}$ 为适配于 $\mathcal{Q}$ 的序列，使得 $\imath_1 = \imath$。那么序列 $\boldsymbol{i}' = (\imath'_u)_{u \in \mathbb{N}} := \partial_+ \boldsymbol{i}$ 适配于 $s_\imath \mathcal{Q}$。任取 $u \in \mathbb{N}$ 并令 $\jmath := \imath'_u = \imath_{u+1}$在这些假设下，我们有

$$\begin{aligned}
\tau_{s_\imath \mathcal{Q}}^{d_{\bar{\jmath}}(n_{\boldsymbol{i}'}(u)+1)} \varpi_\jmath &= s_\imath \tau_\mathcal{Q}^{d_{\bar{\jmath}}(n_{\boldsymbol{i}}(u+1)-\delta_{\imath,\jmath}+1)} s_\imath \varpi_\jmath && \text{by Proposition 5.10 (2)} \\
&= s_\imath \tau_\mathcal{Q}^{d_{\bar{\jmath}}(n_{\boldsymbol{i}}(u+1)+1)} \varpi_\jmath && \text{by } s_\imath \varpi_\jmath = w_1^{\boldsymbol{i}} \varpi_\jmath = \tau_\mathcal{Q}^{d_{\bar{\jmath}}\delta_{\imath,\jmath}} \varpi_\jmath \\
&= s_\imath w_{u+1}^{\boldsymbol{i}} \varpi_\jmath && \text{by (5.3) for } \boldsymbol{i} \\
&= w_u^{\boldsymbol{i}'} \varpi_\jmath.
\end{aligned}$$

[{"id": 0, "input": "Thuswe get (5.3) for $s_\imath\mathcal{Q}$.", "layout_label": "plain text"}]

最后，回顾每个 Q-数据都可以从一个满足（5.2）的数据通过应用源反射得到（参见 [FO21，方程 (3.11)]）。因此，我们得出（5.3）对任何 Q-数据 $\mathcal{Q}$ 对于 $\mathfrak{g}$ 都成立。□

5.4. 量子环面的同构。我们首先建立量子环面的同构。同样，我们固定一个 Q-数据 $\mathcal{Q}=(\Delta,\sigma,\xi)$ 对于 $\mathfrak{g}$。

命题 5.12。 设 $\boldsymbol{i}\in\Delta_0^{\mathbb{N}}$ 是一个适配于 $\mathcal{Q}$ 和 $\Lambda_{\boldsymbol{i}}=(\Lambda_{u,\ v})_{u\text{的序列},\ v\in\mathbb{N}}$ 由 (1.2)定义的反对称矩阵。对于任意 $u,\ v\in\mathbb{N}$，我们有

$$\Lambda_{u,v}=\mathscr{N}(m^{(\imath)}[p,\xi_\imath],m^{(\jmath)}[s,\xi_\jmath]), \tag{5.4}$$

其中 $(\imath,p)=\rho_{\boldsymbol{i}}(u)$ 且 $(\jmath,s)\ =\rho_{\boldsymbol{i}}(v)$。

证明。 由命题 2.6 和引理 5.4，只需证明特定序列 $\boldsymbol{i}$ 适配于 $\mathcal{Q}$。因此，我们可以假设我们的 $\boldsymbol{i}$ 如例 5.6 所示。此外，由于（ 5.4 ）的两边都是斜对称的，我们可以假设 $u<v$。在这些假设下，我们有 $s\le p$。应用 [FHOO22，命题 8。4], 我们得到

$$\mathscr{N}(m^{(\imath)}[p,\xi_\imath],m^{(\jmath)}[s,\xi_\jmath])=(\varpi_\imath-\tau_{\mathcal{Q}}^{d_{\bar\imath}(n_{\boldsymbol{i}}(u)+1)}\varpi_\imath,\varpi_\jmath+\tau_{\mathcal{Q}}^{d_{\bar\jmath}(n_{\boldsymbol{i}}(v)+1)}\varpi_\jmath),$$

其中 $\tau_{\mathcal{Q}}$ 表示广义 Coxeter 元关联于 $\mathcal{Q}$ （见 §5.3 上文）。这里我们提醒 $p=\xi_\imath-2d_{\bar\imath}n_{\boldsymbol{i}}(u)$ 和 $s=\xi_\jmath-2d_{\bar\jmath}n_{\boldsymbol{i}}(v)$ 。现在，我们得到所需的等式（5.4）由引理5.11。 □

推论 5.13. 设 $\boldsymbol{i}\in\Delta_0^{\mathbb{N}}$ 是适配于 $\mathcal{Q}$ 的序列。我们有一个 $\mathbb{Z}[t^{\pm1/2}]$-代数的同构

$$\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}\colon\mathcal{T}(\Lambda_{\boldsymbol{i}})\simeq\mathcal{Y}_{t,\le\xi}\quad \textit{given by } X_u\mapsto\underline{m^{(\imath)}[p,\xi_\imath]}\ \textit{for } u\in\mathbb{N},$$

其中$(\imath,p)=\rho_{\boldsymbol{i}}(u)$。此外，我们有 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}\circ(\cdot)\ =(\cdot)\ \circ\overline{\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}}$。

证明。 对于每个$(\imath,\ p)\in\widehat{\Delta}_{\le\xi}$，我们有 $Y_{\bar\imath,\ p}=m^{(\imath)}[p,\xi_\imath]/m^{(\imath)}[p+2d_{\bar\imath},\xi_\imath]$。这意味着$\mathbb{Z}[t^{\pm1/2}]$-代数 $\mathcal{Y}_{t,\ \le\xi}$由 $\{\underline{m^{(\imath)}[p,\xi_\imath]}\}_{(\imath,p)\in\widehat{\Delta}_{\le\xi}}$生成。然后，命题 5.12断言，$\mathcal{Y}_{t,\ \le\xi}$ 关于这些生成元的表示与 $\mathcal{T}(\Lambda_{\boldsymbol{i}})$ 在 §1.3 中的表示在 $X_u\mapsto\underline{m^{(\imath)}[p,\xi_\imath]}$ 所述对应关系下相同。因此，我们有同构 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}$。根据定义，与条形对合的相容性显然。 □

We conclude this subsection by the following important observation.

命题 5.14 ([HL16, 引理 4.15]). 设 $\boldsymbol{i}\in\Delta_0^{\mathbb{N}}$是一个适应于 $\mathcal{Q}$。对于 $u\in\mathbb{N}$，我们设 $\boldsymbol{e}_u=(\delta_{ku})_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$，并且

$$\boldsymbol{b}_u=\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{e}_u=\sum_{k\in\mathbb{N}}b_{k,u}\boldsymbol{e}_k.$$

Then we have

$$\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(X^{\boldsymbol{b}_u})=\underline{A^{-1}_{i,p-d_i}}$$

where $(i,p)=\bar\rho_{\boldsymbol{i}}(u)$.

证明。由引理 $_{,\ p-d_i}$ 以及与 [HL16 的引理 4.15] 的证明类似的观察可知，对于某个 $a\in\mathbb{Z}$，有 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(X^{\boldsymbol{b}_u})=t^{a/2}A_i^{-1}$ 。由于 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}$ 与 $\overline{\mathcal{T}(\Lambda_{\boldsymbol{i}})}$ 和 $\mathcal{Y}_{t,\ \le\xi}$ 上的条形对合相容，因此我们可以得出 $a=0$。 □

5.5. 上的簇结构 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq\xi})$。 我们证明本节的主要结果： $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq\xi})$ 具有量子簇代数结构。利用推论 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}$ 中的量子环面同构5.13，我们采用 [HL16，Bit21]中的方法：为了识别量子环面中的相应像，对于第一个包含关系，我们证明生成元 $F_t(Y_{i,\ p})$ 对应于某些量子簇变量（通过使用量子 T-系统），然后对于另一个包含关系，我们证明量子 Grothendieck 环在量子簇变异下具有稳定性。

Recall one of the main results of [HL16].

定理 5.15 ([HL16，定理 5.1])。 格罗滕迪克环 $K(\mathscr{C}^-)$ 具有簇代数结构，使得 Kirillov-Reshetikhin 模在 $K(\mathscr{C}^-)$ 中的类是簇变量。

下面定理的证明是对 [HL16中的定理 5 的证明的推广。1] 上文的证明，以及 [Bit21中的定理 5.2 的证明，4] 适用于 ADE 型的量子 Grothendieck 环 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}^-)$。这里， $\mathscr{C}^-$ 是范畴 $\mathscr{C}_{\leq\xi}$ 的一个特殊例子，其中 ξ 满足条件$-2d_{\bar{\imath}} < \xi_\imath \leq 0$ 对所有 $\imath \in \Delta_0$ （参见注 5.7）。

定理 5.16. 设 $\mathcal{Q} = (\Delta, \sigma, \xi)$ 是关于 $\mathfrak{g}$ 的 Q-数据，且 $\boldsymbol{i} = (\imath_u)_{u\in\mathbb{N}} \in \Delta_0^{\mathbb{N}}$ 是适配于 $\mathcal{Q}$ 的序列。存在唯一的 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数同构 $\eta_{\boldsymbol{i}}$: $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}} \simeq \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq\xi})$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}} & \xrightarrow{\eta_{\boldsymbol{i}}} & \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq\xi}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\cdot)_{\leq\xi}} \\ \mathcal{T}(\Lambda_{\boldsymbol{i}}) & \xrightarrow{\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}} & \mathcal{Y}_{t,\leq\xi}. \end{array} \tag{5.5}$$

此外，当 m 是 $\mathscr{C}_{\leq\xi}$ 中某个 KR 模的主导单项式时，在同构 $\eta_{\boldsymbol{i}}$ 下，元素 $F_t(m)$ 对应于 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$ 的一个簇变量。

证明. 设 $\mathcal{K}_{t,\leq\xi} \subset \mathcal{Y}_{t,\leq\xi}$ 是 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq\xi})$ 在截断映射 $(\cdot)_{\leq\xi}$ 下的像。为建立同构 $\eta_{\boldsymbol{i}}$，只需证明 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}) = \mathcal{K}_{t,\leq\xi}$。

首先，我们将证明 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}) \supset \mathcal{K}_{t,\leq\xi}$。由于 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq\xi})$ 由元素 $F_t(Y_{i,p})$ 生成，$\widehat{\ }$ 因此只需证明对所有 $(i, p) \in I_{\leq\xi}$，均有 $F_t(Y_{i,p})_{\leq\xi} \in \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}})$。这可由以下更一般的断言推出：对于任意 $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $u \in \mathbb{N}$，有

$$\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(\partial_+^*)^k X_u = F_t^{(\imath)}[p, (s_{\imath_k} \cdots s_{\imath_1}\xi)_\imath]_{\leq\xi} \quad \text{if } \rho_{\partial_+^k \boldsymbol{i}}(u) = (\imath, p), \tag{5.6}$$

其中 $(\partial_+^*)^k$ 表示这些同态的复合

$$\mathcal{A}_{\partial_+^k \boldsymbol{i}} \xrightarrow{\partial_+^*} \mathcal{A}_{\partial_+^{k-1} \boldsymbol{i}} \xrightarrow{\partial_+^*} \cdots \xrightarrow{\partial_+^*} \mathcal{A}_{\partial_+ \boldsymbol{i}} \xrightarrow{\partial_+^*} \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$$

而 X_u 表示 $\mathcal{A}_{\partial_+^k \boldsymbol{i}}$的第 u 个初始簇变量。一旦得到断言 5.6，就可推出，对于 $\mathscr{C}_{\leq\xi}$中与 KR 模对应的所有主导单项式 m ，$\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}^{-1} F_t(m)_{\leq\xi}$ 都是簇变量，因为当 k 和 u 变化时，每个 $F_t^{(\imath)}[p, s]_{\leq\xi}$（其中 $(\imath, p)$、$(\imath, s) \in \widehat{I}_{\leq\xi}$, $p \leq s$）都会出现在等式 (5.6) 的右端。这就证明了陈述中的最后一个断言。

下面概述 (5.6) 的证明，其证明与先前的工作 [HL16、Bit21] 相同。证明通过对 $(k, u) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ 按照字典序进行超限归纳来展开。当$k = 0$时，根据引理 4.9 以及推论 5.13 中 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}$ 的定义，(5.6) 对所有 $u \in \mathbb{N}$ 都成立。下面讨论 $k = 1$ 的情形。我们设 $\imath := \imath_1$ ，并回顾在 §2.3 中定义 ∂_+^* 时出现的记号 μ_+ 和 σ_+ 。对于每个 $u \in \mathbb{N}$，令 $X'_u := \mu_+^* X_u$ 为变异后的

簇变量，使得我们有 $\partial_+^* X_{\sigma_+(u)} = X'_u$。注意，若 $\imath_u \neq \imath$，则有 $X'_u = X_u$。对于任意满足 $\imath_v = \imath$ 的 $v \in \mathbb{N}$，我们有交换关系

$$X'_v X_v = t^a X'_{v_{\boldsymbol{i}}^-} X_{v_{\boldsymbol{i}}^+} + t^b \prod_{\jmath \sim \imath}^{\rightarrow} X_{v_{\boldsymbol{i}}^+(\jmath)} \tag{5.7}$$

对于某些 $a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ (参见引理2.12 和引理2.13)。现在，我们想证明 that$\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(X'_v) = F_t^{(\imath)}[p, \xi_\imath)$ $\leq_\xi$ if $\rho_{\boldsymbol{i}}(v) = (\imath, p + 2d_{\bar{\imath}})$，这等价于$(k, u)$ 的 (5.6) $= (1, \sigma_+(v))$（注意，在此情形下 $\rho_{\partial_+ \boldsymbol{i}}(\sigma_+(v))$ $= (\imath, p)$）。根据归纳假设，我们假设 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(X'_{v_{\boldsymbol{i}}^-})$ $= F_t^{(\imath)}(p, \xi_\imath)_{\leq_\xi}$。然后，由 (5.7) 我们推得，$\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}$ (X'_v) 是形如.....的唯一条不变元

$$\left(t^a F_t^{(\imath)}[p, \xi_\imath]_{\leq_\xi} F_t^{(\imath)}(p, \xi_\imath)_{\leq_\xi} + t^b \prod_{\jmath \sim \imath}^{\rightarrow} F_t^{(\jmath)}(p, \xi_\imath)_{\leq_\xi} \right) \left(F_t^{(\imath)}(p, \xi_\imath]_{\leq_\xi} \right)^{-1}.$$

另一方面，量子 T-系统方程（4.8）的截断告诉我们，同一性质也刻画了元素 $F_t^{(\imath)}[p, \xi_\imath)_{\leq_\xi}$。因此，我们得到等式$\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(X'_v) = F_t^{(\imath)}[p, \xi_\imath)_{\leq_\xi}$，这就完成了5.6）在 $k = 1$情形下的证明。对于 $k > 1$ 情形的证明类似，因此略去。

接下来，我们将证明相反的包含关系 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}) \subset \mathcal{K}_{t, \leq_\xi}$. 取一个约化词 $(\jmath_1, \ldots, \jmath_\ell)$ 的最长元 $w_\circ$ 适应于Q-数据 $\mathfrak{DQ}$. 然后我们定义一个序列 $\boldsymbol{i}' = (\imath'_u)_{u \in \mathbb{N}}$使得 $\imath'_u = \jmath_u$ 对于 $1 \leq u \leq \ell$ 以及 $\imath'_{u+\ell} = \imath_u$ 对于任意 $u \in \mathbb{N}$. 由命题 5.1, $\boldsymbol{i}'$ 适应于 $\mathfrak{DQ}$, 并且显然我们有 $\partial_+^\ell \boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}$. 考虑以下图表:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'} & \xrightarrow{\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}'}} & \mathcal{Y}_{t, \leq_{\mathfrak{D}\xi}} \\ {\scriptstyle (\partial_+^*)^\ell}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle (\cdot)_{\leq_\xi}} \\ \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}} & \xrightarrow{\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}} & \mathcal{Y}_{t, \leq_\xi}. \end{array} \tag{5.8}$$

先验地说，尚不清楚 (5.8) 是否交换（但我们将看到它实际上确实交换）。令$\zeta := \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}'} \circ (\partial_+^*)^\ell$, 我们将通过对任意量子簇变量 $x \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$ 到初始簇的距离进行归纳，证明 $\zeta(x) \in \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq_\xi})$ 且 ζ $(x)_{\leq_\xi} = \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(x)$。当 x 是初始量子簇变量时，由 (5.6)（其中 $k = \ell$）、命题 5.1 和引理 4.6 可得结论。设 x 是由交换关系 $xx' = y_1 + y_2$ 得到的量子簇变量，其中x' 是另一个量子簇变量，而 y_1、y_2 是乘以若干个 $t^{\pm 1/2}$ 次幂的量子簇单项式。根据归纳假设，对于 $z \in \{x', y_1, y_2\}$, 有 $\zeta(z) \in \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq_\xi})$ 且 $\zeta(z)_{\leq_\xi} = \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(z)$。由于 ζ 是代数同态，我们有

$$\zeta(x)\zeta(x') = \zeta(y_1) + \zeta(y_2) \in \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq_\xi}). \tag{5.9}$$

于是，引理 4.1 & 4.6 推出 $\zeta(x) \in \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq_\xi})$。回忆一下，$(\cdot)_{\leq_\xi}$ 到$\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq_\xi})$ 的限制是一个代数同态。我们将其应用于方程 (5.9) 得到

$$\zeta(x)_{\leq_\xi} \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(x') = \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(y_1) + \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(y_2) = \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(x)\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(x'),$$

这意味着 $\zeta(x)_{\leq_\xi} = \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(x)$。因此，我们证明了 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}}(x) \in \mathcal{K}_{t, \leq_\xi}$ 对于任意量子簇变量 $x \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$。 □

为便于后续使用，我们作如下说明。

引理 5.17. 设 $\mathcal{Q}=(\Delta,\sigma,\xi)$ 是关于 $\mathfrak{g}$ 的 Q-数据，且 $\boldsymbol{i}\in\Delta_0^{\mathbb{N}}$ 是适配于 $\mathcal{Q}$ 的序列。对于每个 $(i,p)\in\widehat{I}_{\le\xi}$，元素 $\eta_{\boldsymbol{i}}^{-1}F_t(Y_{i,\,p})$ 是一个量子簇变量，其次数为 $\boldsymbol{e}_u-\boldsymbol{e}_{u_{\bar{i}}^-}$，其中 $\bar{\rho}_{\boldsymbol{i}}(u)=(i,p)$。

证明。由 (5.6)，有 $\eta_{\boldsymbol{i}}^{-1}F_t(Y_{i,p})=(\partial_+^*)^{u-1}X_1$。因此，该断言由引理2.16。□

5.6. 与HLO 同构的关系。设 $\boldsymbol{i}=(\imath_1,\dots,\imath_\ell)$ 是一个适配于 $\mathcal{Q}$ 的最长元的约化词（回顾命题 5.1）。我们将其扩展为一个适配于 $\mathcal{Q}$ 的无限序列 $\boldsymbol{i}=(\imath_u)_{u\in\mathbb{N}}$。这种扩展总是存在，见例 5.5。根据 [FHOO22,§8.2]，中的讨论，我们可以推deduce 同构 $\eta_{\tilde{\boldsymbol{i}}}\colon\mathcal{A}_{\tilde{\boldsymbol{i}}}\simeq\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\le\xi})$（定理 5.16 中）限制在 $\mathcal{A}_t(\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}},\Lambda_{\boldsymbol{i}})$ 上，得到 $\mathbb{Z}[t^{\pm1/2}]$-子代数的同构

$$\eta_{\boldsymbol{i}}\colon\mathcal{A}_{\tilde{\boldsymbol{i}}}^{\ell}=\mathcal{A}_t(\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}},\Lambda_{\boldsymbol{i}})\simeq\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathcal{Q}}),$$

其 $\tilde{\boldsymbol{i}}$不依赖于 $\boldsymbol{i}$的扩张 $\boldsymbol{i}$ 的选取。此外，复合

$$\Phi_{\mathcal{Q}}=\eta_{\boldsymbol{i}}\circ\varphi_{\boldsymbol{i}}^{-1}\colon\mathcal{A}_t[N_-]\simeq\mathcal{A}_t(\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}},\Lambda_{\boldsymbol{i}})\simeq\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathcal{Q}})$$

仅依赖于 Q-数据 $\mathcal{Q}$（即，它不依赖于适应于 $\mathcal{Q}$ 的约化词 $\boldsymbol{i}$，参见命题 2.6、3.3 与 5.1）并且它与 [HL15、§6]{HO19、§10], [FHOO22、§8.2], 中的同构相同，其在 [FHOO22] 中被称为 HLO 同构。

6. Isomorphisms among quantum Grothendieck rings and applications

我们在定理 6.3 中给出了在 [FHOO22], 中构造的量子 Grothendieck 环之间的同构及其典范基的簇理论解释（推论 6.4）。这导致了 [KKOP21b] 的幺半范畴化定理对范畴 $\mathscr{C}_{\le\xi}$ 的量子版本（定理 6.6）：量子簇单项式属于典范基。我们得到若干应用，包括（q，t）-特征标的正性猜想的证明（推论 6.12）以及可达模的 Kazhdan–Lusztig 猜想的证明（推论 6.10）。

6.1. 量子 Grothendieck 环之间的同构。我们回顾在 [FHOO22]中构造的量子 Grothendieck 环之间的同构。

令 $\mathcal{Q}=(\Delta,\sigma,\xi)$为 $\mathfrak{g}$的 Q-数据。再取一个复单李代数 $\mathfrak{g}'$ 以及其上的一个 Q-数据 $\mathcal{Q}'=(\Delta',\sigma',\xi')$。我们假设 $\Delta\simeq\Delta'$，也就是说，我们假设 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}'$ 要么通过（反）折叠相关联，要么 $\mathfrak{g}\simeq\mathfrak{g}'$ 成立。在下文中，我们将 Δ 与 Δ'认同，特别地，我们有 $\Delta_0=\Delta_0'$。为避免可能的混淆，对于与 $\mathfrak{g}'$ 相关联的数学对象 X，我们通常记作 X'。例如，我们将有限维 $U_q(L\mathfrak{g}')$- 模的范畴记作 $\mathscr{C}'$，并将 $\mathscr{C}'$ 上的对偶函子记作 $\mathfrak{D}'^{\pm1}$。在[FHOO22], 中，我们证明了以下结论。

定理 6.1 ([FHOO22,§10.3]). 在上述假设下，存在唯一的 $\mathbb{Z}[t^{\pm1/2}]$-代数

$$\Psi\equiv\Psi(\mathcal{Q},\mathcal{Q}')\colon\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}')\simeq\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$$

satisfying the following properties:

(1) 限制在子代数 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathcal{Q}}')$ 上时，它与该同构吻合。

$$\Phi_{\mathcal{Q}}\circ\Phi_{\mathcal{Q}'}^{-1}\colon\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathcal{Q}'}')\simeq\mathcal{A}_t[N_-]\simeq\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathcal{Q}}),$$

(2) 我们有 $\Psi\circ\mathfrak{D}_t'^{\pm1}=\mathfrak{D}_t^{\pm1}\circ\Psi$。

此外，同构 Ψ 诱导了简单模- 块的(q,t)-特征标之间的双射。

注意，同构 Ψ 限制为同构

$$\mathcal{K}_t(\mathscr{C}'_{\leq \mathfrak{D}'^k\xi'}) \simeq \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq \mathfrak{D}^k\xi})$$

从而对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，在典范基$\mathbf{L}'_{t,\leq \mathfrak{D}'^k\xi'}$ 和$\mathbf{L}_{t,\leq \mathfrak{D}^k\xi}$ 之间诱导出一个双射。

我们通过提及 Kashiwara、Kim、Park 和第三位署名作者的一项相关工作来结束本节。尽管本文不会使用这一观察结果，但其本身颇具意义。在 [KKOP21a], 局部化量子格罗滕迪克环上构造了自同构的集合 $\{\sigma_\imath\}_{\imath\in\Delta_0}$ $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}) \otimes_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]} \mathbb{Q}(t^{1/2})$，其满足辫群关系。当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ 和 $\mathcal{Q} = s_\imath\mathcal{Q}'$ 满足 $\imath \in \Delta_0$ 是 $\mathcal{Q}'$的源时，很容易看出，定理 $\Psi(\mathcal{Q},\mathcal{Q}')$ 中的同构 6.1 在局部化后与自同构 $\sigma_\imath$ 相同。特别地，我们得到以下结果。

命题6.2。由自同构给出的辫群对称性 $\{\sigma_\imath\}_{\imath\in\Delta_0}$ 在[KKOP21a]保持 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$的典范基。

6.2. 同构的簇理论解释。让我们选择一个满足关于 $\mathcal{Q}$ （分别关于 $\mathcal{Q}'$）的例5.5 中条件 (5.1)的无限序列 $\boldsymbol{i} = (\imath_u)_{u\in\mathbb{N}}$ （分别为 $\boldsymbol{i}' = (\imath'_u)_{u\in\mathbb{N}}$）。回忆 §2.1 和 §2.2 中分别记作 γ_k and β_k 的记号。我们选择并固定 $\{\gamma_1,\dots,\gamma_{\ell-1}\} \cup \{\beta_1,\dots,\beta_{\ell-2}\}$ such that 中的一个有限序列 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1,\dots,\tau_l)$

$$(\imath'_1,\dots.\imath'_\ell) = \tau_1\cdots\tau_l(\imath_1,\dots,\imath_\ell).$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$，我们都有 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数同构

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}^{(n)*} := \hat{\tau}_l^{(n)*}\cdots\hat{\tau}_1^{(n)*} \colon \mathcal{A}^{n\ell}_{\boldsymbol{i}'} \to \mathcal{A}^{n\ell}_{\boldsymbol{i}},$$

where we set

$$\hat{\gamma}_k^{(n)*} := \gamma_k^*\gamma_{k+\ell}^*\cdots\gamma_{k+(n-1)\ell}^*, \qquad \hat{\beta}_k^{(n)*} := \beta_k^*\beta_{k+\ell}^*\cdots\beta_{k+(n-1)\ell}^*.$$

注意，当 $\varepsilon_i \in \{\gamma_{k+n_i\ell}\}_{k\in[1,\ell-1]} \cup \{\beta_{k+n_i\ell}\}_{k\in[1,\ell-2]}$ 且 $n_1 \neq n_2$时， $\varepsilon_1^*\varepsilon_2^* = \varepsilon_2^*\varepsilon_1^*$。回顾一下，我们有 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}} = \bigcup_n \mathcal{A}^{n\ell}_{\boldsymbol{i}}$和 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'} = \bigcup_n \mathcal{A}^{n\ell}_{\boldsymbol{i}'}$。取归纳极限，我们得到$\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数同构

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}^* := \lim_{n\to\infty} \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(n)*} \colon \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'} \to \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}.$$

通过构造，同构 $\hat{}\boldsymbol{\tau}^*$ 在量子簇单项式集合之间诱导出一个双射。

以下是本节的主要定理之一，它给出了同构 Ψ 的簇理论解释。我们的证明分为两步：我们首先研究子范畴 $\mathscr{C}_{\mathcal{Q}}$ 的结果，然后将其扩展到范畴 $\mathscr{C}_{\leq\xi}$ 利用对偶性 $\mathfrak{D}_t$。

定理 6.3。在上述描述的情形下，以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'} & \xrightarrow{\eta_{\boldsymbol{i}'}} & \mathcal{K}_t(\mathscr{C}'_{\leq\xi'}) \\ {\scriptstyle \hat{\boldsymbol{\tau}}^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Psi} \\ \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}} & \xrightarrow{\eta_{\boldsymbol{i}}} & \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq\xi}). \end{array} \tag{6.1}$$

证明。 设 $\mathbf{T} := \eta_{\boldsymbol{i}} \circ \hat{}\boldsymbol{\tau}^* \circ \eta_{\boldsymbol{i}'}^{-1}$。我们必须证明 $\mathbf{T} = \Psi$。根据定理 Ψ 中同构的刻画 6.1，只需证明

(1) 将 $\mathsf{T} = \Psi$ 限制到 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}'_{\mathcal{Q}'})$ 后，以及

(2) $\mathsf{T} \circ \mathfrak{D}_t'^{-1} = \mathfrak{D}_t^{-1} \circ \mathsf{T}$。

将 (6.1) 限制到 $\mathcal{A}^{\ell}_{\boldsymbol{i}'} \simeq \mathcal{A}_t(\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}'}, \Lambda_{\boldsymbol{i}'})$，我们得到

(6.2)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_t(\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}'}, \Lambda_{\boldsymbol{i}'}) & \xrightarrow{\eta_{\boldsymbol{i}'}} & \mathcal{K}_t(\mathscr{C}'_{\mathcal{Q}'}) \\ {\scriptstyle \boldsymbol{\tau}^*}\downarrow \quad \searrow^{\varphi_{\boldsymbol{i}'}} & \nearrow_{\Phi_{\mathcal{Q}'}} & \downarrow{\scriptstyle \Psi} \\ \mathcal{A}_t(\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}}, \Lambda_{\boldsymbol{i}}) & \xrightarrow[\eta_{\boldsymbol{i}}]{} & \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathcal{Q}}). \end{array} \qquad \mathcal{A}_t[N_-]$$

我们知道图表 (6.2) 中的所有 4 个小三角形都交换，这要感谢推论 3.4，§5.6 中的讨论以及定理 6.1 (1)。因此，(6.2) 中的大正方形也交换，这证明了 (1)。

接下来，我们将证明（2）。注意到 $\boldsymbol{i} = \partial_+^{\ell}\boldsymbol{i}^*$ 其中 $\boldsymbol{i}^* = (\iota_u^*)_{u\in\mathbb{N}}$。由于 $\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}} = \widetilde{B}_{\boldsymbol{i}^*}$ 且 $\Lambda_{\boldsymbol{i}} = \Lambda_{\boldsymbol{i}^*}$，存在显然的同构 $\nu\colon \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}^*} \simeq \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$ 将 X_u 对所有 $u \in \mathbb{N}$。于是，我们有恒等式

$$\eta_{\boldsymbol{i}} \circ \nu \circ (\partial_+^*)^{\ell} = \mathfrak{D}_t^{-1} \circ \eta_{\boldsymbol{i}} \tag{6.3}$$

其将同态 $(\partial_+^*)^{\ell}\colon \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}} \to \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}^*}$ 和 $\mathfrak{D}_t^{-1}\colon \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\le\xi}) \to \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\le\xi})$。事实上，根据引理 2.16 & 5.17 和命题 5.1，我们看到簇变量

$$\eta_{\boldsymbol{i}}^{-1}\mathfrak{D}_t^{-1}F_t(Y_{i,p}) \quad \text{and} \quad \nu(\partial_+^*)^{\ell}\eta_{\boldsymbol{i}}^{-1}F_t(Y_{i,p})$$

$\widehat{\ }$具有相同的次数，因此它们对所有 $(i,\ p) \in I_{\le\xi}$ 都相等（见定理A.8）。由于元素 $\{F_t(Y_{i,\ p})\}_{(i,p)\in\widehat{I}_{\le\xi}}$ 生成 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\le\xi})$，我们得到（6.3）。同理，对于 $\boldsymbol{i}'$，我们也有类似的恒等式。此外，对于任意次数属于锥 $x \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'}$的簇单项式 $C_{\boldsymbol{i}'}$（其定义见（2.5）），我们有

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}^*\nu(\partial_+^*)^{\ell}x = \nu(\partial_+^*)^{\ell}\hat{\boldsymbol{\tau}}^*x. \tag{6.4}$$

事实上，等式两边的次数6.4由引理2.16 & 2.17 以及 $\widehat{\ }$的定义$\boldsymbol{\tau}^*$相同。现在，我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathfrak{D}_t^{-1}F_t(Y_{i,p}) &= \eta_{\boldsymbol{i}}\hat{\boldsymbol{\tau}}^*\eta_{\boldsymbol{i}'}^{-1}\mathfrak{D}_t'^{-1}F_t(Y_{i,p}) \\ &= \eta_{\boldsymbol{i}}\hat{\boldsymbol{\tau}}^*\nu(\partial_+^*)^{\ell}\eta_{\boldsymbol{i}'}^{-1}F_t(Y_{i,p}) && \text{by (6.3) for } \boldsymbol{i}' \\ &= \eta_{\boldsymbol{i}}\nu(\partial_+^*)^{\ell}\hat{\boldsymbol{\tau}}^*\eta_{\boldsymbol{i}'}^{-1}F_t(Y_{i,p}) && \text{by (6.4)} \\ &= \mathfrak{D}_t^{-1}\eta_{\boldsymbol{i}}\hat{\boldsymbol{\tau}}^*\eta_{\boldsymbol{i}'}^{-1}F_t(Y_{i,p}) && \text{by (6.3) for } \boldsymbol{i} \\ &= \mathfrak{D}_t^{-1}\mathbf{T}F_t(Y_{i,p}) \end{aligned}$$

对于任意 $(i,p) \in \widehat{I}_{\le\xi'}$。由于元素 $\{F_t(Y_{i,p})\}_{(i,p)\in\widehat{I}_{\le\xi}}$ 生成 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数$\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\le\xi})$，我们得到断言 (2)。□

推论 6.4. 设 $\mathcal{Q} = (\Delta, \sigma, \xi)$ 和 $\mathcal{Q}' = (\Delta', \sigma', \xi')$ 是两个 QP-数据，满足 $\Delta = \Delta'$如上。对于分别适配于 $\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{Q}'$ 的任意序列 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{i}' \in \Delta_0^{\mathbb{N}}$，$\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数同构 $\eta_{\boldsymbol{i}}^{-1}\circ\Psi(\mathcal{Q},\mathcal{Q}')\circ\eta_{\boldsymbol{i}'}$ 在 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'}$ 中的量子簇单项式集合与 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$ 中的量子簇单项式集合之间诱导出一个双射。

证明。 鉴于命题 2.6、引理 5.4 以及例 5.5，只需证明当 i 和 i' 均满足条件（5.1）时的断言。在此情况下，由定理6.3立即可得。 □

6.3. 单项范畴化定理的量子化。设 $\mathcal{Q} = (\Delta, \sigma, \xi)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个 Q-数据，且 $i \in \Delta_0^{\mathbb{N}}$ 为适应于 $\mathcal{Q}$ 的序列。设 $\bar{\mathcal{A}}_i := \bar{\mathcal{A}}(\widetilde{B}_i)$ 表示与 B_i 相关联的（经典）
~ ¯簇代数，它带有求值映射 $\mathrm{ev}_{t=1}$: $\mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_i$。将 t 特化为 1，在定理 5.16 中，我们得到交换代数的同构 $\bar{\eta}_i$: $\mathcal{A}_i \to K(\mathscr{C}_{\le\xi})$。例如，这是范畴 $\mathscr{C}^-$ 的 [HL16] 的同构。精确地说，我们定义 $\bar{\eta}_i$ 为使下列图表交换的唯一同构：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}_i & \xrightarrow{\eta_i} & K_t(\mathscr{C}_{\le\xi}) & \hookrightarrow & \mathcal{Y}_t \\ {\scriptstyle \mathrm{ev}_{t=1}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_{t=1}} \\ \bar{\mathcal{A}}_i & \xrightarrow{\bar{\eta}_i} & K(\mathscr{C}_{\le\xi}) & \xrightarrow{\chi_q} & \mathcal{Y}. \end{array} \tag{6.5}$$

这里，我们回顾由 Kashi- wara、Kim、Park 和第三位署名作者所确立的重要幺半范畴化定理。

定理 6.5 ([KKOP21b，§8])。 该同构 $\bar{\eta}_i$ 将¯簇代数 $\mathcal{A}_i$ 中的每个簇单项式映射为范畴 $\mathscr{C}_{\le\xi}$的一个单对象。

Now, we shall prove a quantum analog of this result.

定理 6.6. 同构 η_i 将量子簇代数 $\mathcal{A}_i$ 的每个量子簇单项式映射为量子 Grothendieck 环$\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\le\xi})$ 的典范基 $\mathbf{L}_{t,\le\xi}$ 中的一个元素。更准确地说，对于任意量子簇单项式 $x \in \mathcal{A}_i$，我们有 $\eta_i(x) = L_t(m)$，其中 $m \in \mathcal{M}_{\le\xi}$ 是唯一的主导单项式，满足 $\bar{\eta}_i(\mathrm{ev}_{t=1}(x)) = [L(m)]$。

证明。我们的证明分为两个主要步骤：首先证明单边类型的结果，然后利用基于上述所讨论的新要素的（解）折叠论证来处理一般类型。由于第一步也直接适用于 B 型，因此一并包含在内。

首先，我们讨论 $\mathfrak{g}$ 属于 ABDE 型的情形。在这种情况下，我们知道猜想 4.4 & 4.8 成立。特别地，由此可知，对于任意 m_1, $m_2 \in \mathcal{M}$张量积模 $L(m_1) \otimes L(m_2)$ 是单模，当且仅当我们有

$$L_t(m_1)L_t(m_2) = t^a L_t(m_1 m_2)$$

在 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 对某个 $a \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ (参见 [HL15，推论 5。5], [FHOO22，引理 11。5])。由于这一事实，只需证明 $\eta_i(x) \in \mathbf{L}_{t,\le\xi}$ 对于每个量子簇变量 $x \in \mathcal{A}_i$(而不是 单项式)。我们通过对其与初始簇之间的距离进行归纳来证明这一点。当 x 是一个初始量子簇变量时，这是因为 ABDE 型的猜想 4.8 成立。假设 x 是通过交换关系得到的量子簇变量

$$xx' = t^{a_1} y_1 + t^{a_2} y_2, \tag{6.6}$$

其中 x' 是另一个量子簇变量， y_1、 y_2 是量子簇单项式，而a_1、 $a_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$。令 m、 m'、 m_1、$m_2 \in \mathcal{M}_{\le\xi}$为满足条件的唯一主导单项式。

$$\bar{\eta}_i(\mathrm{ev}_{t=1}(x)) = [L(m)], \quad \bar{\eta}_i(\mathrm{ev}_{t=1}(x')) = [L(m')], \quad \bar{\eta}_i(\mathrm{ev}_{t=1}(y_k)) = [L(m_k)]$$

对于 $k = 1$, 2. 我们注意到，关系式（6.6）变为

$$\chi_q(L(m))\chi_q(L(m')) = \chi_q(L(m_1)) + \chi_q(L(m_2)) \tag{6.7}$$

在同态 $\chi_q \circ \bar{\eta}_{\boldsymbol{i}} \circ \mathrm{ev}_{t=1}$ 下。根据归纳法，我们假设

$$\eta_{\boldsymbol{i}}(x') = L_t(m'), \quad \eta_{\boldsymbol{i}}(y_k) = L_t(m_k)$$

对于 $k = 1, 2$。于是，由关系式（6.6），可知元素 $\eta_{\boldsymbol{i}}(x)$ 被刻画为具有以下形式的唯一条不变元

$$(t^{a_1} L_t(m_1) + t^{a_2} L_t(m_2))\, L_t(m')^{-1} \quad \text{for some } a_1, a_2 \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z} \tag{6.8}$$

在分式域 $\mathbb{F}(\mathcal{Y}_t)$ 中。另一方面，在 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq \xi})$ 中，我们有

$$L_t(m) L_t(m') = \sum_{m'' \in \mathcal{M}_{\leq \xi}} c_{m''}(t) L_t(m'') \tag{6.9}$$

其中某个 $c_{m''}(t) \in \mathbb{N}_0[t^{\pm 1/2}]$ 对于 $m'' \in \mathcal{M}_{\leq \xi}$ 由定理 4.5得出。由于猜想 4.4 对 ABDE 型成立，我们可以比较（6.9）在 $t = 1$ 处的特化与关系式（6.7）。于是，正性迫使

$$c_{m''}(t) = \begin{cases} t^{b_k} \text{ for some } b_k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} & \text{if } m'' = m_k,\ k \in \{1, 2\}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这意味着元素 $L_t(m)$ 也是$\mathbb{F}(\mathcal{Y}_t)$ 中具有（6.8）形式的条不变元。因此，我们得到 $\eta_{\boldsymbol{i}}(x) = L_t(m)$，从而完成了 ABDE 型的证明。

接下来，我们考虑另一种情形，即 $\mathfrak{g}$ 为 CFG 型。设 $x \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$ 是任意一个量子簇单项式，$m \in \mathcal{M}_{\leq \xi}$ 是满足 $\bar{\eta}_{\boldsymbol{i}}(\mathrm{ev}_{t=1}(x)) = [L(m)]$的主导单项式。设 $\mathcal{Q}' = (\Delta, \mathrm{id}, \xi')$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Q-数据，其中 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图为 Δ。取一个适配于 $\mathcal{Q}'$ 的序列 $\boldsymbol{i}' \in \Delta_0^{\mathbb{N}}$，并令 $x' := \eta_{\boldsymbol{i}'}^{-1} \Psi(\mathcal{Q}', \mathcal{Q}) \eta_{\boldsymbol{i}}(x) \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{i}'}$。由推论 6.4，这个 x' 是一个量子簇单项式。由于我们已经知道该定理的断言对单边型成立，因此有 $\eta_{\boldsymbol{i}'}(x') \in \mathrm{L}_{t, \leq \xi'}$。由于 $\Psi(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}')$ 保持典范基（定理 6.1），因此有 $\eta_{\boldsymbol{i}}(x) = \Psi(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}')(\eta_{\boldsymbol{i}'}(x')) \in \mathrm{L}_{t, \leq \xi}$。换言之，存在一个主导单项式 $m' \in \mathcal{M}_{\leq \xi}$，使得 $\eta_{\boldsymbol{i}}(x) = L_t(m')$。由 (6.5) 的交换性可得 $\mathrm{ev}_{t=1} L_t(m') = \chi_q(L(m))$。比较 (4.3) 和 (4.5)，可知 $m' = m$。□

让我们考虑以下可达单模的概念，即与簇单项式对应的单模。

定义 6.7。我们称单模 $L(m)$是可达的，如果存在一个 $\mathcal{Q}$-数据 $\mathcal{Q} = (\Delta, \sigma, \xi)$，对于 $\mathfrak{g}$ 使得 $m \in \mathcal{M}_{\leq \xi}$ 且 $\bar{\eta}_{\boldsymbol{i}}^{-1}[L(m)]$ 是 $\bar{\mathcal{A}}_{\boldsymbol{i}}$ 中的簇单项式，其中某个（或任意）适配于 $\mathcal{Q}$ 的序列 $\boldsymbol{i} \in \Delta_0^{\mathbb{N}}$。

注 6.8。根据上面的定理 6.6，$L(m)$ 当且仅当存在一个 $\mathcal{Q}$-数据 $\mathcal{Q} = (\Delta, \sigma, \xi)$，使得 $\mathfrak{g}$ 满足 $m \in \mathcal{M}_{\leq \xi}$ 且 $\eta_{\boldsymbol{i}}^{-1} L_t(m)$ 是 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$ 中的量子簇单项式，其中序列 $\boldsymbol{i} \in \Delta_0^{\mathbb{N}}$ 适配于 $\mathcal{Q}$。

推论 6.9。同构 $\Psi\colon \mathcal{K}_t(\mathscr{C}'_{\mathbb{Z}}) \to \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 在定理 6.1 中，在以下各组之间诱导出一个双射：(q, t)-字符的集合以及可达模的字符集合。

Proof. This is immediate from Corollary 6.4. □

6.4. 推论。我们解释主要结果的若干应用。推论 6.10、 6.11、 6.12 在 ADE 型 [Nak04] 和 B 型 [FHOO22] 中已知，但对于一般类型而言是新的。

我们首先陈述 Kazhdan–Lusztig型猜想（= 猜想 4.4 （1））关于可达模。注意，可达模包括 KR 模；当 $\mathfrak{g}$ 属于 CFG 型时，以下结果即使对于 KR 模也是新的。

推论6.10.如果 $L(m)$是可达的，我们有$\mathrm{ev}_{t=1}(L_t(m)) = \chi_q(L(m))$。

证明。 注意到图表（6.5）的交换性，这是定理的直接推论6.6。 □

Then we establish Conjecture 4.8 for any $\mathfrak{g}$.

推论 6.11。如果 $L(m)$ 是一个 KR 模，则有 $F_t(m) = L_t(m)$。

证明。 假设 $L(m)$ 是一个KR 模。定理 5.16 & 6.6 告诉我们 $F_t(m) \in \mathbf{L}_t$。因此，存在 $m' \in \mathcal{M}$ 使得 $F_t(m) = L_t(m'$。定理 $F_t(m)$ 中的刻画以及方程（4.2 和方程（4.5）迫使 $m' = m$，这就证明了该断言。 □

我们还得到了简单模的（q， t-特征标的系数的正性，也就是说，我们证明了猜想 4.4 (2)，对于任意 $\mathfrak{g}$均成立。该猜想大约 20 年前在 [Her04]中针对非单边类型提出。对于 CFG 型，该结论此前仅对基本表示已知，并且是由 [Her05] 中的计算机计算推导得到的。因此，我们为这些计算结果提供了解释，并将该结论进行了大幅推广。

推论 6.12。 单模的 (q,t)-特征的系数为正。确切地说，对于任意 $m \in \mathcal{M}$ 和 $m' \in \mathcal{M}^*$ (满足 $m' < m$)，我们有 $a_t[m;\ m'] \in \mathbb{N}_0[t^{\pm 1/2}]$ 在记号 (4.5)下。

证明。证明的思路是利用推论 $a_t[m;\ m']$ 将系数识别为量子 Grothendieck 环关于典范基 $\mathbf{L}_t$ 的结构常数，利用 6.11和引理 4.9。然后，所需的 $a_t[m;\ m']$ 正性由结构常数的正性（定理 4.5）推出。由于这与证明 [FHOO22，定理11。7], 所使用的是同一论证，我们省略细节。 □

6.5. 簇结构在 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$。 在本小节中，作为前几小节结果的应用，我们简要讨论如何将格罗滕迪克环上的簇代数结构 $K(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 的整个范畴 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 充分研究由 [KKOP21b], 提升到量子 Grothendieck 环 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$。

首先，我们回顾 $K(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$ 上的簇代数结构。在原始论文 [KKOP21b], 中，它由一种称为 i-boxes 的可容许链的组合工具来描述。这里，让我们用一种等价但稍有不同的术语来解释它，以使事情更适合我们的记号。设 $\mathcal{Q} = (\Delta, \sigma, \xi)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个 Q-数据。回顾来自 §4.3 的集合 $\Delta_{\leq \xi} \subset \widehat{\Delta}_{[\xi]} \subset \Delta_0 \times \mathbb{Z}$ 以及来自 §5.1 的 $\Delta_{[\xi]}$ 上的偏序 $\preceq$。令 $\widehat{\Delta}_{>\xi} := \Delta_{[\xi]} \setminus \widehat{\Delta}_{\leq \xi}$。我们称双射 $\mathfrak{e}\colon \mathbb{N} \to \Delta_{[\xi]}$ 是一个 $\mathcal{Q}$-适配枚举，如果其逆 $\mathfrak{e}^{-1}$ 对子集 $\widehat{\Delta}_{\leq \xi}$ 和 $\widehat{\Delta}_{>\xi}$ 的限制分别给出偏序集之间的态射 $(\widehat{\Delta}_{\leq \xi}, \preceq) \to (\mathbb{N}, \leq)$ 和 $(\widehat{\Delta}_{>\xi}, \preceq^{\mathrm{op}}) \to (\mathbb{N}, \leq)$（参见引理 5.3）。给定这样一个 $\mathcal{Q}$-适配枚举 $\mathfrak{e}$，对于每个 $u \in \mathbb{N}$，我们写 $\mathfrak{e}(u) = (\imath_u, p_u) \in \Delta_0 \times \mathbb{Z}$ 并定义

$$u^\star := \max(\{v \in [1,u] \mid \imath_u = \imath_v, \mathrm{sgn}(u) \neq \mathrm{sgn}(v)\} \cup \{0\}),$$

其中

$$\operatorname{sgn}(u) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{if } \mathfrak{e}(u) \in \widehat{\Delta}_{>\xi}, \\ -1 & \text{if } \mathfrak{e}(u) \in \widehat{\Delta}_{\leq\xi}. \end{cases}$$

用此记号，我们有一族 $\{L(m_u^{\mathfrak{e}})\}_{u\in\mathbb{N}}$ 由 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 中的 KR 模组成，给出如下

$$m_u^{\mathfrak{e}} \coloneqq \begin{cases} m^{(\imath_u)}[p_u, p_{u^\star}] & \text{if } \operatorname{sgn}(u) = -1 \text{ and } u^\star \neq 0, \\ m^{(\imath_u)}[p_u, \xi_{\imath_u}] & \text{if } \operatorname{sgn}(u) = -1 \text{ and } u^\star = 0, \\ m^{(\imath_u)}[p_{u^\star}, p_u] & \text{if } \operatorname{sgn}(u) = 1 \text{ and } u^\star \neq 0, \\ m^{(\imath_u)}(\xi_{\imath_u}, p_u] & \text{if } \operatorname{sgn}(u) = 1 \text{ and } u^\star = 0. \end{cases} \tag{6.10}$$

根据 [KKOP21b，定理 5。5], 族 $\{L(m_u^{\mathfrak{e}})\}_{u\in\mathbb{N}}$ 构成一个由实单模组成的可交换族，即对于任意 u, $v \in \mathbb{N}$，我们有

$$L(m_u^{\mathfrak{e}}) \otimes L(m_v^{\mathfrak{e}}) \simeq L(m_u^{\mathfrak{e}} \cdot m_v^{\mathfrak{e}}).$$

现在，我们定义一个斜对称矩阵 $\Lambda^{\mathfrak{e}} = (\Lambda_{u,\,v}^{\mathfrak{e}})_{u,\,v\in\mathbb{N}}$ 如下

$$\Lambda_{u,v}^{\mathfrak{e}} \coloneqq \mathscr{N}(m_u^{\mathfrak{e}}, m_v^{\mathfrak{e}}).$$

定理 6.13 （[KKOP21b，定理 8.1]）。设 $\mathcal{Q} = (\Delta, \sigma, \xi)$ 是 $\mathfrak{g}$的一个 Q-数据。对于任意 $\widehat{\sim}\mathcal{Q}$-适应枚举 $\mathfrak{e}\colon \mathbb{N} \to \Delta$，存在唯一的交换矩阵 $B^{\mathfrak{e}} = (b_{u,\,v}^{\mathfrak{e}})_{u,\,v\in\mathbb{N}}$ 使得 $\sum_{k\in\mathbb{N}} b_{ku}^{\mathfrak{e}} \Lambda_{kv}^{\mathfrak{e}} = 2\delta_{u,\,v}$ 对于所有 u、$v \in \mathbb{N}$。此外，我们有一个环同构

$$\bar{\eta}_{\mathfrak{e}}\colon \mathcal{A}(\widetilde{B}^{\mathfrak{e}}) \simeq K(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$$

其中初始簇变量 X_u 对应于 $[L(m_u^{\mathfrak{e}})]$ 对任意 $u \in \mathbb{N}$均成立，并且每个簇单项式都对应于一个单模的类。

示例见附录B。

命题 6.14 ([KKOP21b，§8])。定理 $\bar{\eta}_{\mathfrak{e}}$ 6.13 中的同构诱导出一个双射$\widetilde{\ }$，它建立了 $\mathcal{A}(B^{\mathfrak{e}})$ 中的簇单项式与按照定义 *6.7*意义下的可达模的类之间的对应。

$\widetilde{\ }$证明。设 x 是 $\mathcal{A}(B^{\mathfrak{e}})$中的任意一个簇单项式。于是，[KKOP21b 的定理 8.1] 的证明中的讨论隐含地告诉我们，对于任意满足 $\bar{\eta}_{\mathfrak{e}}(x) \in K(\mathscr{C}_{\leq\xi})$的 Q-数据 $\mathcal{Q} = (\Delta, \sigma, \xi)$，元素 $\bar{\eta}_{\boldsymbol{i}}^{-1}\bar{\eta}_{\mathfrak{e}}(x)$对于任意适配于 $\mathcal{Q}$的序列 $\boldsymbol{i} \in \Delta_0^{\mathbb{N}}$都是 $\bar{\mathcal{A}}_{\boldsymbol{i}}$ 中的一个簇单项式。因此，$\bar{\eta}_{\mathfrak{e}}(x)$是可达的。类似地，对于任意可达的 $L(m)$，我们看到元素 $\bar{\eta}_{\mathfrak{e}}^{-1}([L(m)])$是 $\mathcal{A}(\widetilde{B}^{\mathfrak{e}})$中的一个簇单项式。□

现在，我们将证明定理 6.13的量子类比。

定理6.15。设 $\mathcal{Q} = (\Delta, \sigma, \xi)$是 $\mathfrak{g}$的 Q-数据。对于任意 $\mathcal{Q}$-适配的枚举$\mathfrak{e}\colon \mathbb{N} \to \widehat{\Delta}_{[\xi]}$，我们有一个 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数的同构

$$\eta_{\mathfrak{e}}\colon \mathcal{A}_t(\Lambda^{\mathfrak{e}}, \widetilde{B}^{\mathfrak{e}}) \simeq \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$$

在此条件下，初始量子簇变量 X_u 对应于 $L_t(m_u^{\mathfrak{e}})$ 对于任意 $u \in \mathbb{N}$，$\widetilde{\ }$并且每个簇单项式都对应于单模的 $(q,\ t)$-特征。此处 $B^{\mathfrak{e}}$是定理 *6.13* 中唯一的交换矩阵。

证明。证明与定理 6.6证明的前半部分类似。根据定理 4.5 和推论 6.10，对于任意一对彼此交换的可达模$L(m)$和 $L(m')$，我们有

$$L_t(m)L_t(m') = t^{\mathscr{N}(m,m')/2} L_t(mm').$$

特别地，我们有一个斜域在 $\mathbb{Q}(t^{1/2})$ 上的嵌入 $\eta_\epsilon\colon \mathbb{F}(\mathcal{T}(\Lambda^\epsilon)) \hookrightarrow \mathbb{F}(\mathcal{Y}_t)$，其由 $\eta_\epsilon(X_u) = L_t(m_u^\epsilon)$ 给出，对所有 $u \in \mathbb{N}$ 均成立。通过与定理 6.6 的证明类似的论证，利用定理 4.5 、推论 6.10 和命题 6.14，我们可以证明，对于 $\widetilde{\ }$ $\mathcal{A}_t(\Lambda^\epsilon, B^\epsilon)$ 中的任意量子簇变量 X ，都有 $\eta_\epsilon(X) = L_t(m)$ 成立，其中 $m \in \mathcal{M}$ 是上文定理 6.13 的记号中满足 $\bar{\eta}_\epsilon(\mathrm{ev}_{t=1}(X)) = [L(m)]$ 的主导单项式。因此，在嵌入 η_ϵ 下，$\sim\mathcal{A}_t(\Lambda^\epsilon, B^\epsilon)$ 的像包含于 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_\mathbb{Z})$ 中。由于每个基本模$\widetilde{\ }$都是可达的，上述讨论还表明，对于任意 $(i,p) \in \widehat{I}$，都有 $L_t(Y_{i,p}) = F_t(Y_{i,p}) \in \eta_\epsilon(\mathcal{A}_t(\Lambda^\epsilon, B^\epsilon))$。由于集合 $\{F_t(Y_{i,p})\}_{(i,p)\in\widehat{I}}$ 生成了 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_\mathbb{Z})$，我们$\widetilde{\ }$得出结论：$\eta_\epsilon(\mathcal{A}_t(\Lambda^\epsilon, B^\epsilon)) = \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_\mathbb{Z})$。□

7. Substitution formulas

在定理 6.3 中，我们给出了 $\Psi|_{\mathcal{K}_t(\mathscr{C}'_{\leq\xi'})}$的簇理论解释。作为其应用，我们在本节中证明，$\Psi$ 来源于 $\mathcal{Y}_t$ 和 $\mathcal{Y}'_t$ 中变量之间的一个显式双有理变换，我们称之为代换公式。它揭示了在 Ψ下相互关联的单模的 (q,t)-特征之间的非平凡关系。

让我们更精确地陈述本节的主要结果。我们回到第 6.1 节和 6.2 节中的假设与记号。回顾一下，我们有

$$\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_\mathbb{Z}) \subset \mathcal{Y}_t \subset \mathbb{F}(\mathcal{Y}_t), \qquad \mathcal{K}_t(\mathscr{C}'_\mathbb{Z}) \subset \mathcal{Y}'_t \subset \mathbb{F}(\mathcal{Y}'_t),$$

其中， $\mathbb{F}(\mathcal{Y}_t)$ 和 $\mathbb{F}(\mathcal{Y}'_t)$ 分别表示 $\mathcal{Y}_t$ 和 $\mathcal{Y}'_t$ 的分式斜域。本节的主要定理如下：

定理 7.1（代换公式）。在上述假设下，存在一个斜域的同构

$$\widetilde{\Psi} \equiv \widetilde{\Psi}(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}')\colon \mathbb{F}(\mathcal{Y}'_t) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}(\mathcal{Y}_t),$$

such that

$\widetilde{\ }$(1) $\mathfrak{D}_t \circ \Psi = \Psi \circ \mathfrak{D}'_t$,

$\widehat{\ }$(2) $\Psi(Y_{i,p}) \in \mathbb{F}(\mathcal{Y}_{t,\mathfrak{D}^k\mathcal{Q}})$ ~~对于~~ $k \in \mathbb{Z}$ 和 $(i,p) \in I'_{\mathfrak{D}'^k\mathcal{Q}'}$，（3）以下图表交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}(\mathcal{Y}'_t) & \xrightarrow{\widetilde{\Psi}} & \mathbb{F}(\mathcal{Y}_t) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{K}_t(\mathscr{C}'_\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_\mathbb{Z}) \end{array}$$

特别地，在 $\mathcal{Y}'_t$ 中的变量与在 $\mathcal{Y}_t$ 中的变量之间存在一个双有理变换，它将 $\mathscr{C}'_\mathbb{Z}$ 中单模的 (q,t)-特征变为 $\mathscr{C}_\mathbb{Z}$ 中的相应特征。

我们对定理 7.1 的证明在 $t = 1$ 的设定下成立。因此，通过相同的证明，我们在 $t = 1$ 处得到平行结果。令 $\mathbb{F}(\mathcal{Y})$ （分别为 $\mathbb{F}(\mathcal{Y}')$ ）为 $\mathcal{Y}$ （分别为 $\mathcal{Y}'$ ）的分式域。记 $\Psi_{t=1}$ 为使下列图表交换的 $\mathbb{Z}$-代数同构：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_t(\mathscr{C}'_\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\sim]{\Psi} & \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_\mathbb{Z}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_{t=1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_{t=1}} \\ \chi_q(K(\mathscr{C}'_\mathbb{Z})) & \xrightarrow[\sim]{\Psi_{t=1}} & \chi_q(K(\mathscr{C}_\mathbb{Z})) \end{array}$$

我们将单模的 (q,t)-特征在 $\mathsf{ev}_{t=1}$ 下的像称为单模的 $(q,1)$-特征。

定理 7.2（ $t=1$处的代换公式）。在上述假设下，存在一个域同构

$$\widetilde{\Psi}_{t=1} \equiv \widetilde{\Psi}(\mathcal{Q},\mathcal{Q}')_{t=1} \colon \mathbb{F}(\mathcal{Y}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}(\mathcal{Y}),$$

such that

(1) $\mathfrak{D} \circ \Psi_{t=1} = \Psi_{t=1} \circ \mathfrak{D}'$,

(2) $\Psi_{t=1}(Y_{i,p}) \in \mathbb{F}(\mathcal{Y}_{\mathfrak{D}^k\mathcal{Q}})$ 对于 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $(i,p) \in I'_{\mathfrak{D}'^k\mathcal{Q}'}$, (3) 下图交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}(\mathcal{Y}') & \xrightarrow{\widetilde{\Psi}_{t=1}} & \mathbb{F}(\mathcal{Y}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \chi_q(K(\mathscr{C}'_{\mathbb{Z}})) & \xrightarrow{\Psi_{t=1}} & \chi_q(K(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})). \end{array}$$

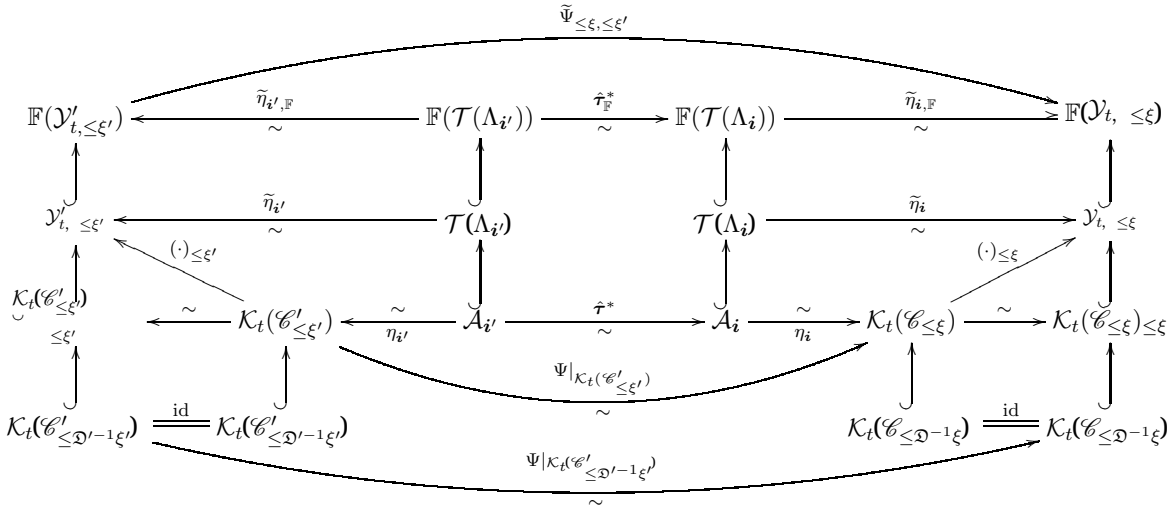
特别地，存在一个双有理变换介于 $\mathcal{Y}'$ 中的变量和 $\mathcal{Y}$中的变量之间，它将 $\mathscr{C}'_{\mathbb{Z}}$ 中单模的$(q,1)$-特征标变成 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$中的那些。

注 7.3。我们可以通过追踪特定的变异序列来明确计算 Ψ 和 $\Psi_{t=1}$。参见附录 C。

（q,1）-特征与 q-特征在许多情形下的一致性如今已为人所知。参见猜想 4.4、推论 6.10及其附近的论述。因此， $t=1$处的代换公式揭示了 q-特征之间的若干非平凡关系，这些单模在 $\Psi_{t=1}$下彼此相关。

本节其余部分致力于证明定理 7.1。我们考虑以下交换图：

(7.1)



这里态射 $\widetilde{\eta}_{i,\mathbb{F}}, \widetilde{\eta}_{i',\mathbb{F}}, \hat{\tau}^*_{\mathbb{F}}$，以及 $\Psi_{\le\xi,\le\xi'}$ 被唯一确定以使图表成为交换的。钩箭头表示包含映射。注意，$(\cdot)_{\le\xi}$ (分别 $(\cdot)_{\le\xi'}$) 到 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\le\mathfrak{D}^{-1}\xi})$ (分别 $\mathcal{K}_t(\mathscr{C}'_{\le\mathfrak{D}'^{-1}\xi'})$) 是恒等映射，由引理 4.6。

~定理 7.1 的证明的关键步骤是证明 $\Psi_{\leq\xi,\leq\xi'}$ 与对偶运算的相容性，即 $\mathfrak{D}_t^{-1}\circ\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}=\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}\circ\mathfrak{D}_t'^{-1}$在 $\mathbb{F}(\mathcal{Y}'_{t,\leq\xi'})$ 上的相容性（引理 7.4 (1)）。一旦~我们确立了这一点，就可以利用对偶运算将 $\Psi_{\leq\xi,\leq\xi'}$ 延拓到 Ψ。注意，由于截断映射 $(\cdot)_{\leq\xi}\colon \mathcal{K}_t(\mathscr{C}_{\leq\xi})\hookrightarrow\mathcal{Y}_{t,\leq\xi}$ 不与 $\mathfrak{D}_t^{-1}$交换，我们无法~直接从定理 6.3推出 $\Psi_{\leq\xi,\leq\xi'}$ 与对偶运算的相容性。

Lemma 7.4.

(1) $\mathfrak{D}_t^{-1}\big|_{\mathbb{F}(\mathcal{Y}_{t,\leq\xi})}\circ\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}=\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}\circ\mathfrak{D}_t'^{-1}\big|_{\mathbb{F}(\mathcal{Y}'_{t,\leq\xi'})}$.

(2) *For* $k\in\mathbb{N}_0$ *and* $(i,p)\in\widehat{I}'_{\mathfrak{D}'^{-k}\mathcal{Q}'}$, *we have* $\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\underline{Y_{i,p}})\in\mathbb{F}(\mathcal{Y}_{t,\mathfrak{D}^{-k}\mathcal{Q}})$.

~证明。由于根据 $\Psi_{\leq\xi,\leq\xi'}$ 的构造，有 $\Psi_{\leq\xi,\leq\xi'}(\mathbb{F}(\mathcal{Y}'_{t,\mathcal{Q}'}))\subset_\sim\mathbb{F}(\mathcal{Y}_{t,\mathcal{Q}})$，故结论 (2) 由 (1) 立即推出。因此，我们将证明 (1)。

Let us define the homomorphisms of skew fields as

$$\widetilde{\Sigma}:=\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}^{-1}\circ\mathfrak{D}_t^{-1}\circ\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}\colon\mathbb{F}(\mathcal{T}(\Lambda_{\boldsymbol{i}}))\to\mathbb{F}(\mathcal{T}(\Lambda_{\boldsymbol{i}})),$$
$$\widetilde{\Sigma}':=\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}^{-1}\circ\mathfrak{D}_t'^{-1}\circ\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}\colon\mathbb{F}(\mathcal{T}(\Lambda_{\boldsymbol{i}'}))\to\mathbb{F}(\mathcal{T}(\Lambda_{\boldsymbol{i}'})).$$

设 Σ、$\widetilde{\Sigma}$：$\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}\to\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ 是由以下内容确定的 $\mathbb{Z}$-模同态

$$\Sigma(\boldsymbol{e}_u)=\boldsymbol{e}_{u+\ell},\qquad\widetilde{\Sigma}(\boldsymbol{e}_u)=\boldsymbol{e}_{u+\ell}-\boldsymbol{e}_{(\ell+1)^-_{\boldsymbol{i}}(\imath^*_u)}\qquad\text{for all } u\in\mathbb{N}.$$

Note that we have

$$\widetilde{\Sigma}(\boldsymbol{a})=\Sigma(\boldsymbol{a})-\sum_{\imath\in\Delta_0}\mathsf{p}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{a};\imath)\boldsymbol{e}_{(\ell+1)^-_{\boldsymbol{i}}(\imath^*)}\tag{7.2}$$

对于 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ 通过 (2.7) 中定义的记号。回忆 $\rho_{\boldsymbol{i}}\colon\mathbb{N}\to\widehat{\Delta}_{\leq\xi}$ 定义于第 5.1节。然后，对于 $u\in\mathbb{N}$ 满足 $\rho_{\boldsymbol{i}}(u)=(\imath,p)$, 我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\Sigma}(X_u)&=\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}^{-1}(\mathfrak{D}_t^{-1}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(X_u)))\\&=\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}^{-1}(\mathfrak{D}_t^{-1}(\underline{m^{(\imath)}[p,\xi_\imath]}))\\&=\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}^{-1}(\underline{m^{(\imath^*)}[p-rh^\vee,\xi_\imath-rh^\vee]})\\&=\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}^{-1}(\underline{m^{(\imath^*)}[p-rh^\vee,\xi_{\imath^*}]m^{(\imath^*)}((\mathfrak{D}^{-1}\xi)_{\imath^*},\xi_{\imath^*}])^{-1}})\\&=X^{\widetilde{\Sigma}(\boldsymbol{e}_u)}\end{aligned}\tag{7.3}$$

由条件（5.1）可知。因此，我们有 $\widetilde{\Sigma}(X^{\boldsymbol{a}})=X^{\widetilde{\Sigma}(\boldsymbol{a})}$ 对 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$成立。此外，采用命题 5.14中的记号，我们有

$$\widetilde{\Sigma}(X^{\boldsymbol{b}_u})=\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}^{-1}(\mathfrak{D}_t^{-1}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(X^{\boldsymbol{b}_u})))=\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}^{-1}(\mathfrak{D}_t^{-1}(\underline{A^{-1}_{\imath,p-d_\imath}}))=\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}^{-1}(\underline{A^{-1}_{\imath^*,p-rh^\vee-d_{\imath^*}}})=X^{\boldsymbol{b}_{u+\ell}}\tag{7.4}$$

对于 $u\in\mathbb{N}$，其中 $\bar{\rho}_{\boldsymbol{i}}(u)=(\imath,p)$ 根据命题 5.14 以及条件（5.1）。

对于 $u\in\mathbb{N}$，令 $Z_u:=\hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_u)$。那么，根据 $\hat{\boldsymbol{\tau}}^*$ 的定义，Z_u 是 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{i}}$ 中的一个量子簇变量。因此，根据 [Tra11，定理 5.3]，，存在 $c_{u,\boldsymbol{n}}\in\mathbb{Z}[t^{\pm1/2}]$，其中 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}_0^{\oplus\mathbb{N}}\setminus\{0\}$ 和 $\boldsymbol{g}_u\in\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ 使得

$$Z_u=X^{\boldsymbol{g}_u}\left(1+\sum_{\boldsymbol{n}=(n_k)_k\in\mathbb{N}_0^{\oplus\mathbb{N}}\setminus\{0\}}c_{u,\boldsymbol{n}}X^{\sum_{k\in\mathbb{N}}n_k\boldsymbol{b}_k}\right).$$

For $k \in \mathbb{N}_0$, set

$$\widehat{\Delta}^{\mathrm{fr}}_{\mathfrak{D}^{-k}\mathcal{Q}} := \{(\imath, (\mathfrak{D}^{-(k+1)}\xi)_\imath + 2d_{\bar{\imath}}) \mid \imath \in \Delta_0\},$$
$$\widehat{\Delta}^{\mathrm{uf}}_{\mathfrak{D}^{-k}\mathcal{Q}} := \widehat{\Delta}_{\mathfrak{D}^{-k}\mathcal{Q}} \setminus \widehat{\Delta}^{\mathrm{fr}}_{\mathfrak{D}^{-k}\mathcal{Q}}.$$

对于 $u \in \mathbb{N}$，存在 $k \in \mathbb{N}_0$，使得量子簇变量 Z_u 可由初始簇 $\{X_s \mid s \in \mathbb{N}\}$ 仅通过在标记为 $\widehat{\Delta}^{\mathrm{uf}}_{\mathfrak{D}^{-k}\mathcal{Q}}$的顶点处进行突变获得。参见第$\boldsymbol{\tau}^*$ 节中$\widehat{\boldsymbol{\tau}}^*$ 的构造，并回忆以下事实：
$\varepsilon_1^*\varepsilon_2^* = \varepsilon_2^*\varepsilon_1^*$ 只要$\varepsilon_i \in \{\gamma_{k+n_i\ell}\}_{k\in[1,\ell-1]} \cup \{\beta_{k+n_i\ell}\}_{k\in[1,\ell-2]}$ 且 $n_1 \neq n_2$。（如果 Z_u 属于初始簇，那么我们可以任取 $k \in \mathbb{N}_0$。）

此外，如果 Z_u 是通过变异序列 $\mu_{k_{s_u}^{(u)}} \cdots \mu_{k_1^{(u)}}$ 对于 $k_1^{(u)}$，……，$k_{s_u}^{(u)} \in \rho_{\boldsymbol{i}}^{-1}(\widehat{\Delta}^{\mathrm{uf}}_{\mathfrak{D}^{-k}\mathcal{Q}})$从初始簇得到的，那么 $Z_{u+\ell}$则是根据$\widehat{\mu}_{k_{s_u}^{(u)}+\ell} \cdots \mu_{k_1^{(u)}+\ell}$的构造，通过变异序列$\boldsymbol{\tau}^*$得到的。由于 $c_u, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$和 $\boldsymbol{g}_u$ 仅由 $\widetilde{B}_{\boldsymbol{i}}$ 以及序列 $k_1^{(u)}$，……，$k_{s_u}^{(u)}$ [Tra11，定理 5.3]，这一周期性$\widetilde{}$与 $B_{\boldsymbol{i}}$ 的周期性共同（条件 5.1）所得到的周期性一起意味着

$$\boldsymbol{g}_{u+\ell} \begin{cases} = \Sigma(\boldsymbol{g}_u) \\ \in \Sigma(\boldsymbol{g}_u) + \sum_{\imath\in\Delta_0} \mathbb{Z}\boldsymbol{e}_{(\ell+1)_{\boldsymbol{i}}^-(\imath)} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{若 } u > \ell \text{ 或 } u = (\ell+1)_{\boldsymbol{i}'}^-(\imath)\text{，则对 } \imath \in \Delta_0, \\ \text{否则，} \end{array} \tag{7.5}$$

and

$$c_{u+\ell,\boldsymbol{n}} = \begin{cases} c_{u,\Sigma^{-1}(\boldsymbol{n})} & \text{if } \boldsymbol{n} \in \Sigma(\mathbb{N}_0^{\oplus\mathbb{N}}), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{7.6}$$

对 $u \in \mathbb{N}$成立。（此处关于 $\boldsymbol{g}_{u+\ell}$ 的陈述分情况讨论，因为 $\widehat{\Delta}^{\mathrm{uf}}_{\mathcal{Q}}$ 中的顶点在 $\Gamma_{\boldsymbol{i}}$中没有与 $\widehat{\Delta}^{\mathrm{fr}}_{\mathfrak{D}\mathcal{Q}}$ 对应的邻域。）注意，$Z_{(\ell+1)_{\boldsymbol{i}'}^-(\imath)} = X_{(\ell+1)_{\boldsymbol{i}}^-(\imath)}$ 和$Z_{(\ell+1)_{\boldsymbol{i}'}^-(\imath)+\ell} = X_{(\ell+1)_{\boldsymbol{i}}^-(\imath)+\ell_\circ}$

因此，对于 $u \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned} \widetilde{\Sigma}(Z_u) &= X^{\widetilde{\Sigma}(\boldsymbol{g}_u)} \left(1 + \sum_{\boldsymbol{n}=(n_k)_k \in \mathbb{N}_0^{\oplus\mathbb{N}}\setminus\{0\}} c_{u,\boldsymbol{n}} X^{\sum_{k\in\mathbb{N}} n_k \boldsymbol{b}_{k+\ell}}\right) && \text{by (7.4)} \\ &= X^{\widetilde{\Sigma}(\boldsymbol{g}_u)} \left(1 + \sum_{\boldsymbol{n}=(n_k)_k \in \mathbb{N}_0^{\oplus\mathbb{N}}\setminus\{0\}} c_{u+\ell,\Sigma(\boldsymbol{n})} X^{\sum_{k\in\mathbb{N}} n_k \boldsymbol{b}_{k+\ell}}\right) && \text{by (7.6)} \\ &= X^{\widetilde{\Sigma}(\boldsymbol{g}_u)} \left(1 + \sum_{\boldsymbol{n}=(n_k)_k \in \mathbb{N}_0^{\oplus\mathbb{N}}\setminus\{0\}} c_{u+\ell,\boldsymbol{n}} X^{\sum_{k\in\mathbb{N}} n_k \boldsymbol{b}_{k}}\right) && \text{by (7.6)} \\ &\simeq X^{\widetilde{\Sigma}(\boldsymbol{g}_u)-\boldsymbol{g}_{u+\ell}} Z_{u+\ell} \end{aligned} \tag{7.7}$$

在此，$\simeq$ 表示相差乘以某个 $t^{a/2}$ 的等式，其中 $a \in \mathbb{Z}$为某个元素。（在本证明中，我们始终使用这一记号。）注意，根据（7.2）和（7.5），$\Sigma(\boldsymbol{g}_u) - \boldsymbol{g}_{u+\ell} \in \sum_{\imath\in\Delta_0} \mathbb{Z}\boldsymbol{e}_{(\ell+1)_{\boldsymbol{i}}^-(\imath)}$，并且每个 Z_s $(s \in \mathbb{N})$ t-交换于 $X^{\widetilde{\Sigma}(\boldsymbol{g}_u)-\boldsymbol{g}_{u+\ell}}$，因为对于 $\imath \in \Delta_0$，$\rho_{\boldsymbol{i}}((\ell+1)_{\boldsymbol{i}}^-(\imath)) \in \widehat{\Delta}^{\mathrm{fr}}_{\mathcal{Q}}$。

为了证明陈述 (1)，只需证明

$$\mathfrak{D}_t^{-1}(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\underline{Y_{i,p}})) = \widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\mathfrak{D}_t'^{-1}(\underline{Y_{i,p}})) \tag{7.8}$$

对所有 $(i,p) \in I'_{\le \xi'^{\circ}}$ 首先，我们证明等式 (7.8) 对于 $(i,p) \in I'_{\le \mathfrak{D}'^{-1}\xi'^{\circ}}$ 设 $(i,p) \in I'_{\le \mathfrak{D}'^{-1}\xi'}$和 $u := \bar{\rho}_{\boldsymbol{i}'}^{-1}((i,p)) \in \mathbb{N}_{\circ}$ 则 $u^- := u_{\boldsymbol{i}'}^- \in \mathbb{N}$，且

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_t^{-1}(\widetilde{\Psi}_{\le\xi,\le\xi'}(\underline{Y_{i,p}})) &= \mathfrak{D}_t^{-1}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbb{F}}^*(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}^{-1}(\underline{Y_{i,p}}))))\\
&= \mathfrak{D}_t^{-1}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbb{F}}^*(X^{\boldsymbol{\prime e}_u-\boldsymbol{e}_{u^-}})))\\
&\simeq \mathfrak{D}_t^{-1}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(Z_{u^-}^{-1}Z_u))\\
&= \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(\widetilde{\Sigma}(Z_{u^-}^{-1}Z_u))\\
&\simeq \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(X^{\widetilde{\Sigma}(\boldsymbol{g}_u)-\boldsymbol{g}_{u+\ell}-\widetilde{\Sigma}(\boldsymbol{g}_{u^-})+\boldsymbol{g}_{u^-+\ell}}Z_{u^-+\ell}^{-1}Z_{u+\ell}),\\
\widetilde{\Psi}_{\le\xi,\le\xi'}(\mathfrak{D}_t'^{-1}(\underline{Y_{i,p}})) &= \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbb{F}}^*(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}^{-1}(\mathfrak{D}_t'^{-1}(\underline{Y_{i,p}}))))\\
&= \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbb{F}}^*(\widetilde{\Sigma}'(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}^{-1}(\underline{Y_{i,p}}))))\\
&= \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbb{F}}^*(\widetilde{\Sigma}'(X^{\boldsymbol{\prime e}_u-\boldsymbol{e}_{u^-}})))\\
&= \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbb{F}}^*(X^{\boldsymbol{\prime e}_{u+\ell}-\boldsymbol{e}_{u^-+\ell}})) \quad \text{by the argument parallel to (7.3)},\\
&\simeq \widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(Z_{u^-+\ell}^{-1}Z_{u+\ell}).
\end{aligned}$$

Let us show that

$$\widetilde{\Sigma}(\boldsymbol{g}_u) - \boldsymbol{g}_{u+\ell} - \widetilde{\Sigma}(\boldsymbol{g}_{u^-}) + \boldsymbol{g}_{u^-+\ell} = 0$$

对所有 $u > \ell$。通过反复应用引理 2.4、2.11和 2.18，我们得到

$$\mathsf{p}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{g}_u;\imath) = \mathsf{p}_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{e}_u;\imath) = \delta_{\imath'_u,\imath} \quad \text{and} \quad \mathsf{p}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{g}_{u^-};\imath) = \mathsf{p}_{\boldsymbol{i}'}(\boldsymbol{e}_{u^-};\imath) = \delta_{\imath'_{u^-},\imath} = \delta_{\imath'_u,\imath}.$$

注意，在应用引理 2.18时，我们使用了以下事实： s-阶分量 $\boldsymbol{g}_u$ 和$\boldsymbol{g}_{u^-}$对于所有 $s \in \rho_{\boldsymbol{i}}^{-1}(\widehat{\Delta}_{\mathcal{Q}}^{\mathrm{uf}})$ 均为零，这是根据 $\hat{\boldsymbol{\tau}}^*$的定义以及我们关于 u的假设。因此，由（7.2）和（7.5），我们得到

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Sigma}(\boldsymbol{g}_u) - \boldsymbol{g}_{u+\ell} - \widetilde{\Sigma}(\boldsymbol{g}_{u^-}) + \boldsymbol{g}_{u^-+\ell}\\
&= \Sigma(\boldsymbol{g}_u) - \boldsymbol{e}_{(\ell+1)_{\boldsymbol{i}}^-((\imath'_u)^*)} - \boldsymbol{g}_{u+\ell} - \Sigma(\boldsymbol{g}_{u^-}) + \boldsymbol{e}_{(\ell+1)_{\boldsymbol{i}}^-((\imath'_u)^*)} + \boldsymbol{g}_{u^-+\ell}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Then we have

$$\mathfrak{D}_t^{-1}(\widetilde{\Psi}_{\le\xi,\le\xi'}(\underline{Y_{i,p}})) \simeq \widetilde{\Psi}_{\le\xi,\le\xi'}(\mathfrak{D}_t'^{-1}(\underline{Y_{i,p}})).$$

由于 $\mathfrak{D}_t$、 $\mathfrak{D}'_t$和$\widetilde{\Psi}_{\le\xi,\ \le\xi'}$与条形对合相容， $\mathfrak{D}_t^{-1}(\widetilde{\Psi}_{\le\xi,\ \le\xi'}(Y_{i,\ p}))$和$\widetilde{\Psi}_{\le\xi,\ \le\xi'}(\mathfrak{D}_t'^{-1}(\underline{Y_{i,\ p}}))$ 在条形对合下不变。因此，我们有

$$\mathfrak{D}_t^{-1}(\widetilde{\Psi}_{\le\xi,\le\xi'}(\underline{Y_{i,p}})) = \widetilde{\Psi}_{\le\xi,\le\xi'}(\mathfrak{D}_t'^{-1}(\underline{Y_{i,p}})),$$

从而完成了（7.8）对（i， p） $\in I'_{\le \mathfrak{D}'^{-1}\xi'}$的证明。

接下来，我们证明等式（7.8）对于（i， p） $\in I'_{\mathcal{Q}'}$成立。对于 $u \in \mathbb{N}$，设

$$F_u := \left(1 + \sum_{\boldsymbol{n}=(n_k)_k \in \mathbb{N}_0^{\oplus\mathbb{N}}\setminus\{0\}} c_{u,\boldsymbol{n}} X^{\sum_{k\in\mathbb{N}} n_k \boldsymbol{b}_k}\right).$$

那么计算在 (7.7) 表明

$$\widetilde{\Sigma}(F_u) = F_{u+\ell}$$

对于 $u\in\mathbb{N}$。我们准备以下断言。

Claim. *For* $(i,p)\in \widehat{I}'_{\leq \mathfrak{D}'^{-2}\xi'}$, $\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\underline{Y_{i,p}})\in\mathbb{F}(\mathcal{Y}_{t,\leq\mathfrak{D}^{-2}\xi})$.

断言的证明。设 $u:=\bar{\rho}_{\boldsymbol{i}'}^{-1}((i,p))$ 和 $u^-:=u_{\boldsymbol{i}'}^-$。那么,

$$\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\underline{Y_{i,p}})=\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(\hat{\tau}_{\mathbb{F}}^*(X'^{\boldsymbol{e}_u-\boldsymbol{e}_{u^-}}))\simeq\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(Z_{u^-}^{-1}Z_u)\simeq\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(F_{u^-}^{-1}X^{\boldsymbol{g}_u-\boldsymbol{g}_{u^-}}F_u).$$

根据命题 5.14 和 (7.6)，可得

$$\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(F_{u^-}^{-1}),\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(F_u)\in\mathbb{F}(\mathcal{Y}_{t,\leq\mathfrak{D}^{-2}\xi}).$$

因此，只需证明 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(X^{\boldsymbol{g}_u-\boldsymbol{g}_{u^-}})\in\mathbb{F}(\mathcal{Y}_{t,\leq\mathfrak{D}^{-2}\xi})$。由于我们已经证明了 (7.8) 对于 $(i,p)\in\widehat{I}'_{\leq\mathfrak{D}'^{-1}\xi'}$成立，因此可得

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\mathbb{F}(\mathcal{Y}'_{t,\leq\mathfrak{D}'^{-2}\xi'}))&=\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\mathfrak{D}_t'^{-1}(\mathbb{F}(\mathcal{Y}'_{t,\leq\mathfrak{D}'^{-1}\xi'})))\\&=\mathfrak{D}_t^{-1}(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\mathbb{F}(\mathcal{Y}'_{t,\leq\mathfrak{D}'^{-1}\xi'})))\subset\mathbb{F}(\mathcal{Y}_{t,\leq\mathfrak{D}^{-1}\xi}).\end{aligned}$$

因此，$\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(F_{u^-}^{-1}X^{\boldsymbol{g}_u-\boldsymbol{g}_{u^-}}F_u)=\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\underline{Y_{i,p}})\in\mathbb{F}(\mathcal{Y}_{t,\leq\mathfrak{D}^{-1}\xi})$，由此可得

$$\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(X^{\boldsymbol{g}_u-\boldsymbol{g}_{u^-}})\in\mathbb{F}(\mathcal{Y}_{t,\leq\mathfrak{D}^{-1}\xi}).\tag{7.9}$$

性质 (7.5) 表明，$\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(X^{\boldsymbol{g}_u-\boldsymbol{g}_{u^-}})$ 是变量 $\{m^{(\imath)}[p,\xi_\imath]^{\pm1}$ 的一个单项式 $p\leq(\mathfrak{D}^{-2}\xi)_\imath+2d_{\bar{\imath}},\imath\in\Delta_0\}$。因此，我们可以将单项式 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(X^{\boldsymbol{g}_u-\boldsymbol{g}_{u^-}})$ 写为

$$\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(X^{\boldsymbol{g}_u-\boldsymbol{g}_{u^-}})=\underline{M\cdot\prod\nolimits_{\imath\in\Delta_0}m^{(\imath)}[(\mathfrak{D}^{-2}\xi)_\imath+2d_{\bar{\imath}},\xi_\imath]^{k_\imath}}$$

对于某个 $k_\imath\in\mathbb{Z}$ 以及 $\mathcal{Y}_{\leq\mathfrak{D}^{-2}\xi}$ 中的一个单项式 M。这里性质 (7.9) 意味着 $k_\imath=0$ 对所有 $\imath\in\Delta_{0\circ}$ 因此，$\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(X^{\boldsymbol{g}_u-\boldsymbol{g}_{u^-}})\in\mathbb{F}(\mathcal{Y}_{t,\leq\mathfrak{D}^{-2}\xi})$。□

假设 $1\leq u\leq\ell$。由于我们已经证明了 (7.8) 对于 $u>\ell$，只需证明

$$\mathfrak{D}_t^{-2}(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'_u)))=\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\mathfrak{D}_t'^{-2}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'_u))).$$

实际上，由于 $\mathfrak{D}_t'^{-1}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'_u))\in\mathcal{Y}'_{t,\leq\mathfrak{D}'^{-1}\xi'}$，该等式意味着

$$\mathfrak{D}_t^{-2}(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'_u)))=\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\mathfrak{D}_t'^{-2}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'_u)))=\mathfrak{D}_t^{-1}(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\mathfrak{D}_t'^{-1}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'_u)))),$$

这等价于 $\mathfrak{D}_t^{-1}(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'_u)))=\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\mathfrak{D}_t'^{-1}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'_u)))$。

记 $f:=(2\ell+1)_{\boldsymbol{i}}^-(\imath_u)$ 和 $f':=(2\ell+1)_{\boldsymbol{i}'}^-(\imath_u)$。注意，$X_f=Z_{f'}$。于是

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_t^{-2}(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'_u)))&=\mathfrak{D}_t^{-2}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(Z_u))\\&=\mathfrak{D}_t^{-2}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(X^{\boldsymbol{g}_u}F_u))\\&=\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(\widetilde{\Sigma}^2(X^{\boldsymbol{g}_u}F_u))\\&=\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(X^{\widetilde{\Sigma}^2(\boldsymbol{g}_u)}F_{u+2\ell}).\\\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\mathfrak{D}_t'^{-2}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'_u)))&=\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(\widetilde{\Sigma}'^2(X'_u)))\\&=\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'^{\boldsymbol{e}_{u+2\ell}-\boldsymbol{e}_{f'}}))\\&\simeq\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(X_f^{-1}Z_{u+2\ell})\\&\simeq\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(X^{\boldsymbol{g}_{u+2\ell}-\boldsymbol{e}_f}F_{u+2\ell}).\end{aligned}$$

根据断言，我们有

$$\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(X^{\widetilde{\Sigma}^2(\boldsymbol{g}_u)-\boldsymbol{g}_{u+2\ell}+\boldsymbol{e}_f}) \\ \simeq \mathfrak{D}_t^{-2}(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'_u)))\left(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\mathfrak{D}_t'^{-2}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'_u)))\right)^{-1} \in \mathbb{F}(\mathcal{Y}_{t,\leq\mathfrak{D}^{-2}\xi}).$$

另一方面，由 (7.5),

$$\widetilde{\Sigma}^2(\boldsymbol{g}_u)-\boldsymbol{g}_{u+2\ell}+\boldsymbol{e}_f \in \sum_{\imath\in\Delta_0}\mathbb{Z}\boldsymbol{e}_{(2\ell+1)^-_{\boldsymbol{i}}(\imath)}+\sum_{\imath\in\Delta_0}\mathbb{Z}\boldsymbol{e}_{(\ell+1)^-_{\boldsymbol{i}}(\imath)}.$$

因此 $\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(X^{\widetilde{\Sigma}^2(\boldsymbol{g}_u)-\boldsymbol{g}_{u+2\ell}+\boldsymbol{e}_f})$ 是变量 $\underline{Y^{\pm1}_{j\,s}}$,中的单项式，对于 $(j,s) \in \widehat{I}_{\mathcal{Q}} \cup \widehat{I}_{\mathfrak{D}^{-1}\mathcal{Q}}$。因此，

$$\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i},\mathbb{F}}(X^{\widetilde{\Sigma}^2(\boldsymbol{g}_u)-\boldsymbol{g}_{u+2\ell}+\boldsymbol{e}_f})=1,$$

这意味着 $\widetilde{\Sigma}^2(\boldsymbol{g}_u)=\boldsymbol{g}_{u+2\ell}-\boldsymbol{e}_f$。因此，

$$\mathfrak{D}_t^{-2}(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'_u))) \simeq \widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\mathfrak{D}_t^{-2}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'_u))).$$

然后，再次考虑条形不变性，我们得到

$$\mathfrak{D}_t^{-2}(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'_u)))=\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(\mathfrak{D}_t^{-2}(\widetilde{\eta}_{\boldsymbol{i}',\mathbb{F}}(X'_u))),$$

这就完成了证明。 □

~我们现在可以定义 Ψ 在定理7.1中。定义映射 $\Psi\colon \mathbb{F}(\mathcal{Y}'_t) \to \mathbb{F}(\mathcal{Y}_t)$如下。对于 $y\in\mathbb{F}(\mathcal{Y}'_t)$，存在 $k\in\mathbb{N}_0$ 使得 $\mathfrak{D}_t'^{-k}(y) \in \mathbb{F}(\mathcal{Y}'_{t,\leq\xi'})$。然后我们设定

$$\widetilde{\Psi}(y) \coloneqq \mathfrak{D}_t^k\left(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}\left(\mathfrak{D}_t'^{-k}(y)\right)\right).$$

我们来检查 $\widetilde{\Psi}$的良定义性。如果 $k,\ k'\in\mathbb{Z}_{\geq0}$满足 $k<k'$的 $\mathfrak{D}_t'^{-k}(y)\ \ \mathfrak{D}_t'^{-k'}(y) \in \mathbb{F}(\mathcal{Y}'_{t,\leq\xi'})$，那么根据引理7.4 (1)，

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_t^{k'}\left(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}\left(\mathfrak{D}_t'^{-k'}(y)\right)\right)&=\mathfrak{D}_t^{k'}\left(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}\left(\mathfrak{D}_t'^{-(k'-k)}\left(\mathfrak{D}_t'^{-k}(y)\right)\right)\right)\\&=\mathfrak{D}_t^{k'}\left(\mathfrak{D}_t^{-(k'-k)}\left(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}\left(\mathfrak{D}_t'^{-k}(y)\right)\right)\right)\\&=\mathfrak{D}_t^{k}\left(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}\left(\mathfrak{D}_t'^{-k}(y)\right)\right),\end{aligned}$$

which shows the well-definedness of $\widetilde{\Psi}$.

~定理（1）中的性质7.1 直接由 Ψ的定义得到。定理7.1 中的性质（2）由引理7.4 （2）得到。

令 y_1、$y_2\in\mathbb{F}(\mathcal{Y}'_t)$，并选择 $k\in\mathbb{Z}_{\geq0}$ 满足 $\mathfrak{D}_t'^{-k}(y_1)\ \mathfrak{D}_t'^{-k}(y_2) \in \mathbb{F}(\mathcal{Y}'_{t,\leq\xi'})$。则$\mathfrak{D}_t'^{-k}(y_1y_2) \in \mathbb{F}(\mathcal{Y}'_{t,\leq\xi'})$，且我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}(y_1y_2)&=\mathfrak{D}_t^k\left(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}\left(\mathfrak{D}_t'^{-k}(y_1y_2)\right)\right)\\&=\mathfrak{D}_t^k\left(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}\left(\mathfrak{D}_t'^{-k}(y_1)\right)\right)\mathfrak{D}_t^k\left(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}\left(\mathfrak{D}_t'^{-k}(y_2)\right)\right)\\&=\widetilde{\Psi}(y_1)\widetilde{\Psi}(y_2).\end{aligned}$$

~我们可以用同样的方式证明 Ψ 的线性性。因此， Ψ 是一个斜域同态。

此外，对于 $x \in \mathcal{K}_t(\mathscr{C}'_{\mathbb{Z}})$，我们可以取 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使其满足 $\mathfrak{D}_t^{-k}(x) \in \mathcal{K}_t(\mathscr{C}'_{\leq \mathfrak{D}'^{-1}\xi'})(\subset \mathbb{F}(\mathcal{Y}'_{t,\leq \xi'}))$. 然后，由图表（7.1）的交换性以及定理 6.1 (2),

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}(x) &= \mathfrak{D}_t^k\left(\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}\left(\mathfrak{D}_t'^{-k}(x)\right)\right)\\ &= \mathfrak{D}_t^k\left(\Psi\left(\mathfrak{D}_t'^{-k}(x)\right)\right) = \mathfrak{D}_t^k\left(\mathfrak{D}_t^{-k}\left(\Psi(x)\right)\right) = \Psi(x).\end{aligned}$$

因此 $\widetilde{\Psi}$ 满足定理 7.1 （3）中的性质。

最后，通过交换 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}'$的角色，我们可以构造一个斜域同态$\widetilde{\Psi}'\colon \mathbb{F}(\mathcal{Y}_t) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}(\mathcal{Y}'_t)$ 它给出了 $\widetilde{\Psi}$的逆。因此 $\widetilde{\Psi}$ 是一个同构，从而完成了定理7.1.

We provide some explicit examples of substitution formulas in Appendix C.

Appendix A. Quantum cluster algebras

在本附录中，我们约定量子簇代数相关的记号。

A.1.量子环面。令 t 为带有形式平方根 $t^{1/2}$的可逆不定元。令 J 为一个（可能是可数无限的）集合。对于一个 $\mathbb{Z}$值的斜对称 $J \times J$矩阵$\Lambda = (\Lambda_{ij})_{i,\ j\in J}$，我们将量子环面 $\mathcal{T}(\Lambda)$定义为由生成元集合 $\{X_j^{\pm 1} \mid j \in J\}$ 及以下关系给出的 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$代数:

- $X_j X_j^{-1} = X_j^{-1} X_j = 1$ for $j \in J$,
- $X_i X_j = t^{\Lambda_{ij}} X_j X_i$ for $i, j \in J$.

我们将 $\mathcal{T}(\Lambda)$ 的 $\mathbb{Z}$-代数反自反（$\cdot$）定义为

$$\overline{t^{1/2}} := t^{-1/2}, \qquad \overline{X_j} := X_j$$

对于所有 $j \in J$。这称为 $\mathcal{T}(\Lambda)$的条形对合。对于 $\boldsymbol{a} = (a_j)_{j\in J} \in \mathbb{Z}^{\oplus J}$，我们定义交换单项式

$$X^{\boldsymbol{a}} := t^{-\frac{1}{2}\sum_{i<j} a_i a_j \Lambda_{ij}} \prod_{j\in J}^{\rightarrow} X_j^{a_j},$$

其中我们固定了集合 J 的任意一个全序 $<$。注意，所得元素$X^{\boldsymbol{a}} \in \mathcal{T}(\Lambda)$ 与全序 $<$的选择无关，并且在条形对合下保持不变。集合 $\{X^{\boldsymbol{a}} \mid \boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^{\oplus J}\}$ 构成了 $\mathcal{T}(\Lambda)$ 的一个自由 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-基。由于 $\mathcal{T}(\Lambda)$ 是一个 Ore 整环，它嵌入到分式斜域 $\mathbb{F}(\mathcal{T}(\Lambda))$ 中。

A.2. 量子簇代数。设 $J_f \subset J$ 为一个子集，并令 $J_e := J \setminus J_f$。令$\sim B = (b_{ij})_{i\in J, j\in J_e}$为一个取值于 $\mathbb{Z}$的 $J \times J_e$矩阵，其主部 $B = (b_{ij})_{i,j\in J_e}$是可反对称化的，也就是说，存在一个对角矩阵 D，其元素均为正整数，使得乘积 DB 是斜对称的。我们假设，对于所有 $\sim j \in J$，集合 $\{i \in J \mid b_{ij} \neq 0\}$ 都是有限的。这样的矩阵 B称为交换矩阵。若一对 (Λ, B) 满足

$$\sum_{k\in J} b_{ki}\Lambda_{kj} = \mathsf{d}_i \delta_{i,j} \quad (i \in J_e, j \in J)$$

对于某个正整数 d_i。在这种情况下，B 可由对角矩阵$D = \mathrm{diag}(\mathsf{d}_i \mid i \in J_e)$可反对称化。

给定一个相容对（Λ，B）和一个元素 $k \in J_e$，我们定义一个新的对

$$\mu_k(\Lambda, \widetilde{B}) = (\mu_k\Lambda, \mu_k\widetilde{B}) := (E^T\Lambda E, E\widetilde{B}F),$$

其中矩阵 $E = (e_{ij})_{i,j\in J}$ 和 $F = (f_{ij})_{i,j\in J_e}$ 由下式给出

$$e_{ij} := \begin{cases} \delta_{i,j} & \text{if } j \neq k, \\ -1 & \text{if } i = j = k, \\ \max(0, -b_{ik}) & \text{if } i \neq j = k, \end{cases} \qquad f_{ij} := \begin{cases} \delta_{i,j} & \text{if } i \neq k, \\ -1 & \text{if } i = j = k, \\ \max(0, -b_{ik}) & \text{if } i = k \neq j. \end{cases} \tag{A.1}$$

~这对 $\mu_k(\Lambda, B)$再次构成一个相容对。运算 μ_k 称为在 k处的变异~ ~，并且它是对合的，即我们有 $\mu_k(\mu_k(\Lambda, B)) = (\Lambda, B)$。此外，我们定义一个 $\mathbb{Q}(t^{1/2})$-代数的同构 μ_k^*: $\mathbb{F}(\mathcal{T}(\mu_k\Lambda)) \cong \mathbb{F}(\mathcal{T}(\Lambda))$，如下：

$$\mu_k^*(X_j) := \begin{cases} X^{\boldsymbol{a}'} + X^{\boldsymbol{a}''} & \text{if } j = k, \\ X_j & \text{if } j \neq k, \end{cases} \tag{A.2}$$

其中 $\boldsymbol{a}' = (a'_j)_{j\in J}$和 $\boldsymbol{a}' = (a''_j)_{j\in J}$由下式给出

$$a'_j := \begin{cases} -1 & \text{if } i = k, \\ \max(0, b_{ik}) & \text{if } i \neq k, \end{cases} \qquad a''_j := \begin{cases} -1 & \text{if } i = k, \\ \max(0, -b_{ik}) & \text{if } i \neq k. \end{cases}$$

~注意 μ_k^* 的定义确实依赖于交换矩阵 B。同构 μ_k^* 通常称为在 k处的簇变换。我们有 $\mu_k^* \circ \mu_k^* = \mathrm{id}_{\mathbb{F}(\mathcal{T}(\Lambda))}$和 $\mu_k^* \circ (\cdot) = (\cdot) \circ \mu_k^*$.

~定义 A.1. 设 (Λ, B) 是一个相容对。如果 $\mathbb{F}(\mathcal{T}(\Lambda))$ 中的一个元素可写为

$$\mu_{k_1}^*\mu_{k_2}^* \cdots \mu_{k_n}^*(X_j) \quad (\text{resp. } \mu_{k_1}^*\mu_{k_2}^* \cdots \mu_{k_n}^*(X^{\boldsymbol{a}})),$$

对于 J_e 中的某个有限序列 $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$，则称该元素为量子簇变量（分别称为量子簇单项式，若其属于 $j \in J$（分别为 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}_0^{\oplus J}$）。量子簇代数 $\mathcal{A}_t(\Lambda, \widetilde{B})$ 定义为由所有量子簇变量生成的 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-子代数，且该子代数包含于 $\mathbb{F}(\mathcal{T}(\Lambda))$。

注意，每个量子簇单项式在条形对合下保持不变 .

定理 A.2 (量子 Laurent 现象 [BZ05，推论 5。2])。 量子~簇代数 $\mathcal{A}_t(\Lambda, B)$ 包含于量子环面 $\mathcal{T}(\Lambda)$。

根据定义，在 $k \in J_e$ 处的簇变换给出一个 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数同构

$$\mu_k^*\colon \mathcal{A}_t(\mu_k(\Lambda, \widetilde{B})) \cong \mathcal{A}_t(\Lambda, \widetilde{B}),$$

which induces a bijection between the sets of quantum cluster monomials.

A.3. 置换。设 π 是指标集 J 的一个置换，满足 $\pi(J_f) \subset J_f$。给定上述的一个相容对 (Λ, B)，我们可以考虑另一个相容对 $\pi(\Lambda, B) = (\pi\Lambda, \pi B)$， ~其中 $\pi\Lambda := (\Lambda_{\pi^{-1}(i)\,\pi^{-1}(j)})_i$， $_{j\in J}$ 且 $\pi B :=(b_{\pi^{-1}(i)\,\pi^{-1}(j)})_{i\in J}$， $_{j\in J_e}$。于是我们得到 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$-代数的同构】【。

$$\pi^*\colon \mathcal{A}_t(\pi(\Lambda, \widetilde{B})) \cong \mathcal{A}_t(\Lambda, \widetilde{B}) \qquad \text{given by } \pi^*(X_j) = X_{\pi^{-1}(j)} \text{ for all } j \in J.$$

显然，这个同构 π^* 在量子簇单项式集合之间诱导出一个双射。

~A.4. 经典极限。 令 B 为如上所述的交换矩阵。考虑 Laurent 多项式环（交换的） $\mathbb{Z}[X_j^{\pm 1} \mid j \in J]$ 并令 $\mathbb{Q}(X_j \mid j \in J)$ 为其分式域。对于每个 $k \in J_e$，我们都有一个代数对合 μ_k^*，它作用于 $\mathbb{Q}(X_j \mid j \in J)$，其定义公式与（A.2）相同。

~定义A.3.设 B 是一个交换矩阵。 $\mathbb{Q}(X_j \mid j \in J)$ 中的一个元素称为簇变量（分别称为簇单项式），如果它可写成

$$\mu_{k_1}^* \mu_{k_2}^* \cdots \mu_{k_n}^*(X_j) \quad (\text{resp. } \mu_{k_1}^* \mu_{k_2}^* \cdots \mu_{k_n}^*(X^{\boldsymbol{a}})),$$

对于 J_e 和 $j \in J$（分别为 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}_0^{\oplus J}$）中的某个有限序列（$k_1$、$k_2$、.. .、$k_n$）。簇代数~$\mathcal{A}(B)$ 定义为由所有簇变量生成的 $\mathbb{Q}(X_j \mid j \in J)$ 的 $\mathbb{Z}$-子代数。

现在，令（$\Lambda, \widetilde{B}$）为一个相容对。通过将 $t^{1/2}$ 特殊化为 1，我们得到满射代数同态ev $_{t=1}$：$\mathcal{T}(\Lambda) \to \mathbb{Z}[X_j^{\pm 1} \mid j \in J]$。根据定义，它诱导出满射

$$\mathrm{ev}_{t=1} \colon \mathcal{A}_t(\Lambda, \widetilde{B}) \to \mathcal{A}(\widetilde{B}).$$

在该映射下，量子簇单项式映射为簇单项式。参见[GLS20，引理 3。3]。

引理 A.4 (参见[BZ05])。 同态 $\mathrm{ev}_{t=1}$ 在以下集合之间给出一个双射：

~~~中的量子簇单项式 $\mathcal{A}_t(\Lambda, B)$ 与以下集合中的簇单项式 $\mathcal{A}(B)$。

证明。满射性由定义显然可得。单射性可由与 [BZ05定理 6 的证明1]类似的论证得到。□

~A.5. 次数。设 (Λ, B) 是一个相容对。我们称量子环面 $\mathcal{T}(\Lambda)$ 中的元素 x 是尖的，如果它写成如下形式

$$x = X^{\boldsymbol{g}} + \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0^{\oplus J_e} \setminus \{0\}} c_{\boldsymbol{n}} X^{\boldsymbol{g} + \widetilde{B}\boldsymbol{n}}$$

对于某些 $\boldsymbol{g} \in \mathbb{Z}^{\oplus J}$ 和 $c_{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$。在这种情况下，我们将其记为 $\deg x = \boldsymbol{g}$，并称之为 ~x 的次数。请注意，这个次数的概念确实取决于交换矩阵 B，而不只是量子环面 $\mathcal{T}(\Lambda)$。

~众所周知，每个量子簇单项式 x 在 $\mathcal{A}_t(\Lambda, B)$ 中是指向的 [Tra11, 定理 5.3]. 它的次数通常被称为 g-向量 的 x.

~定理 A.5（[FZ07, (7.18)], [DWZ10], [GHKK18]）。设 (Λ, B) 是一个相容对，且 ~~$k \in J_e$。设 $x \in \mathcal{A}_t(\Lambda, B)$ 和 $x' \in \mathcal{A}_t(\mu_k(\Lambda, B))$ 是量子簇单项式，其g-向量分别为 $\boldsymbol{g} = (g_j)_{j \in J}$和 $\boldsymbol{g}' = (g'_j)_{j \in J}$。若 $\mu_k^*(x') = x$，则有

$$g_j = \begin{cases} -g'_k & \text{if } j = k, \\ g'_j + \max(b'_{jk}, 0) g'_k & \text{if } j \neq k \text{ and } g'_k \geq 0, \\ g'_j - \min(b'_{jk}, 0) g'_k & \text{if } j \neq k \text{ and } g'_k \leq 0. \end{cases}$$

~这里 $\mu_k B = (b'_{ij})_{i \in J,\ j \in J_{e\circ}}$

注 A.6。特别地，在定理 A.5 的假设下，若 $\boldsymbol{g} = E\boldsymbol{g}'$ ~$g'_k \geq 0$，则有。这里 $E = (e_{ij})_{i,\ j \in J}$ 是由 (A.1) 给出的矩阵，其中 $B = (b_{ij})_{i \in J,\ j \in J_{e\circ}}$

注 A.7. 令 $\pi \in \mathfrak{S}_J$ 为置换，使得 $\pi(J_f) \subset J_f$ 如第 A.3 节中所述。根据定义，显然有 度$(\pi^* x)$ $= (g_{\pi(j)})_{j \in J}$ 若 度 $x = (g_j)_{j \in J}$。
~~~

~定理 A.8 ([FZ07, 猜想 7.10(1)], [DWZ10], [GHKK18]). 设 (Λ, B) 是一个相容~对且 x, $x' \in \mathcal{A}_t(\Lambda, B)$ 是两个簇单项式。如果 $\deg x = \deg x'$，则有 $x = x'$.

~证明。注意，对于经典簇代数 $\mathcal{A}(B)$ [FZ07]，我们也有类似的次数概念；并且根据 [Tra11,~定理 5.3(2)]，对于任意量子簇单项式 x，都有 $\deg x = \deg \mathrm{ev}_{t=1}(x)$。对于经典簇代数 $\mathcal{A}(B)$，当 B 为斜对称时，该断言由 [DWZ10]证明；一般情形则由 [GHKK18] 证明。因此，根据引理 A.4，关于~量子簇代数 $\mathcal{A}_t(\Lambda, B)$ 的断言也随之成立。□

注 A.9。 在本文正文中，我们只考虑斜对称量子簇代数的次数。因此，我们实际上并不需要[GHKK18]的结果。

Appendix B. Cluster structure on $K(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$

我们给出定理6.13的例子。

例 B.1（A型）。令 $\mathcal{Q} = (\Delta_{\mathrm{A}_n}, \mathrm{id}\ \xi)$ 为一个 A 型$_n$ 的 Q-数据，使得

$$\xi_\imath = \begin{cases} 0 & \text{if } \imath \equiv 1 \pmod 2, \\ -1 & \text{if } \imath \equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

and take a $\mathcal{Q}$-adapted sequence

$$\boldsymbol{i} = (\imath_u)_{u \in \mathbb{N}} := \begin{cases} (1, 3, \dots, n, 2, 4, \dots, n-1, 1, 3, \dots, n, 2, 4, \dots, n-1, \dots) & \text{if } n \equiv 1 \pmod 2, \\ (1, 3, \dots, n-1, 2, 4, \dots, n, 1, 3, \dots, n-1, 2, 4, \dots, n, \dots) & \text{if } n \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

^该映射 $\mathfrak{c}$定义如下，是一个 $\mathcal{Q}$-适配的 $\Delta_{[\xi]}$枚举：对于 $u = kn + s$满足 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$且 $0 < s \leq n$，令

$$\mathfrak{c}(u) := \begin{cases} (\imath_s, \xi_{\imath_s} + k) & \text{(i) } k \equiv 0 \pmod 2 \text{ and } 0 < s \leq \lceil n/2 \rceil, \\ (\imath_s, \xi_{\imath_s} - k) & \text{(ii) } k \equiv 0 \pmod 2 \text{ and } \lceil n/2 \rceil < s \leq n, \\ (\imath_s, \xi_{\imath_s} - (k+1)) & \text{(iii) } k \equiv 1 \pmod 2 \text{ and } 0 < s \leq \lceil n/2 \rceil, \\ (\imath_s, \xi_{\imath_s} + k + 1) & \text{(iv) } k \equiv 1 \pmod 2 \text{ and } \lceil n/2 \rceil < s \leq n. \end{cases}$$

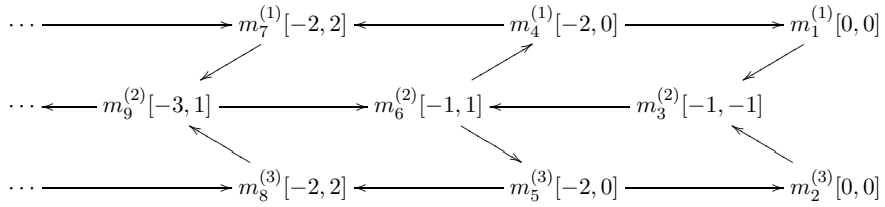
Then each $m_u^{\mathfrak{c}}$ in (6.10) becomes

$$m_u^{\mathfrak{c}} := \begin{cases} m^{(\imath_s)}[\xi_{\imath_s} - k, \xi_{\imath_s} + k] & \text{(i)}, \\ m^{(\imath_s)}[\xi_{\imath_s} - k, \xi_{\imath_s} + k] & \text{(ii)}, \\ m^{(\imath_s)}[\xi_{\imath_s} - (k+1), \xi_{\imath_s} + k - 1] & \text{(iii)}, \\ m^{(\imath_s)}[\xi_{\imath_s} - k + 1, \xi_{\imath_s} + k + 1] & \text{(iv)}, \end{cases}$$

~以及交换矩阵 $B^{\mathfrak{c}}$ 如下给出（参见 [KKOP22，定理 6。14]）：

$$(\widetilde{B}^{\mathfrak{c}})_{u,v} := \begin{cases} 1 & \text{if (a) } u - v = \pm n \text{ and } u \text{ satisfies (i) or (iv)}, \\ & \quad \text{or (b) } |u - v| < n,\ \imath_u \sim \imath_v \text{ and } u \text{ satisfies (iii) or (ii)}, \\ -1 & \text{if (c) } u - v = \pm n \text{ and } u \text{ satisfies (iii) or (ii)}, \\ & \quad \text{or (d) } |u - v| < n,\ \imath_u \sim \imath_v \text{ and } u \text{ satisfies (i) or (iv)}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

~使用 $\{m_u^{\mathfrak{e}}\}_{u\in\mathbb{N}}$ 作为相应箭图的顶点 $\Gamma_{\widetilde{B}^{\mathfrak{e}}}$ 的 $B^{\mathfrak{e}}$， $\Gamma_{\widetilde{B}^{\mathfrak{e}}}$ 同构于 A 型源汇 Dynkin 箭图的乘积∞ 和A 型$_n$，通常记作→ →A$_\infty \otimes$ A$_n$ （参见 [Kel13，§3。3]）。例如， $\Gamma_{\widetilde{B}^{\mathfrak{e}}}$ 对于 $n = 3$ 可以绘制如下：



此处 $m_u^{(\imath)}[p,s]$ 表示 $m_u^{\mathfrak{e}} = m^{(\imath)}[p,s]$。

Exa例 B.2（B 型）。设 $\mathcal{Q} = (\Delta_{\mathrm{A}_{2n-1}}, \vee, \xi)$ 是一个 B$_n$ 型的 Q-数据，使得其中 a t

$$\xi_{n-s} = \begin{cases} \xi_n + 1 & \text{if } n-s \equiv 0 \pmod 2, \\ \xi_n + 3 & \text{if } n-s \equiv 1 \pmod 2, \end{cases} \qquad \xi_{2n-s} = \xi_s - 2 \ \text{ for } 1 \le s \le n-1,$$

and take $\mathcal{Q}$-adapted sequence

$$\boldsymbol{\imath} := (\imath_1, \imath_2, \dots, \imath_n, \imath_{n+1}, \imath_{n+2}, \imath_{2n-1}, \imath_{2n}, \imath_{2n+1}, \dots)$$

使得 **(1)** $\imath_k = \imath_{k-2n}$ 对于任意 $k > 2n$， **(2)** $\{\imath_1, \dots, \imath_n\} = \{1, \dots, n\}$， **(3)** $\imath_n = n$， **(4)** $\imath_{n+k} = \vee(\imath_k)$ 对于 $1 \le k \le n-1$ 以及 **(5)**$\xi_{\imath_1} \ge \xi_{\imath_2} \ge \cdots \ge \xi_{\imath_n}$ （回顾第 5.3 小节）。则下述定义的 ^映射 $\mathfrak{e}$ 是一个 $\mathcal{Q}$-适应的枚举 $\Delta_{[\xi]}$：对于 $u = 2kn + s \in \mathbb{N}$ 满足 $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$且 $0 < s < n$，置

$$\mathfrak{e}(u) := \begin{cases} (\imath_s, \xi_{\imath_s} - 2k) & \text{(i) } k \equiv 0 \pmod 2 \text{ and } \xi_n - \xi_{\imath_s} \equiv 3 \pmod 4, \\ (\imath_s, \xi_{\imath_s} + 2k) & \text{(ii) } k \equiv 0 \pmod 2 \text{ and } \xi_n - \xi_{\imath_s} \equiv 1 \pmod 4, \\ (\imath_s, \xi_{\imath_s} + 2(k+1)) & \text{(iii) } k \equiv 1 \pmod 2 \text{ and } \xi_n - \xi_{\imath_s} \equiv 3 \pmod 4, \\ (\imath_s, \xi_{\imath_s} - 2(k+1)) & \text{(iv) } k \equiv 1 \pmod 2 \text{ and } \xi_n - \xi_{\imath_s} \equiv 1 \pmod 4, \end{cases}$$

并且，对于 $u = tn \in \mathbb{N}$ 与 $t \in \mathbb{N}$，令

$$\mathfrak{e}(u) := \begin{cases} (n, \xi_n + t) & \text{(v) } t \equiv 0 \pmod 2, \\ (n, \xi_n - (t-1)) & \text{(vi) } t \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Then each $m_u^{\mathfrak{e}}$ in (6.10) becomes as follows:

$$m_u^{\mathfrak{e}} := \begin{cases} m^{(\imath_s)}[\xi_{\imath_s} - 2k, \xi_{\imath_s} + 2k] & \text{(i) or (ii)}, \\ m^{(\imath_s)}[\xi_{\imath_s} - 2(k-1), \xi_{\imath_s} + 2(k+1)] & \text{(iii)}, \\ m^{(\imath_s)}[\xi_{\imath_s} - 2(k+1), \xi_{\imath_s} + 2(k-1)] & \text{(iv)}, \\ m^{(n)}[\xi_{\imath_n} - (t-2), \xi_n + t] & \text{(v)}, \\ m^{(n)}[\xi_{\imath_n} - (t-1), \xi_n + t] & \text{(vi)}. \end{cases}$$

~在这种情况下，可以证明下面的反对称矩阵是 $B^{\mathfrak{c}}$ 定理6.13：对于 u， $v \in \mathbb{N}$ 使得 $\{\imath_u, \imath_v\} \neq \{n, n \pm 1\}$,

$$(\widetilde{B}^{\mathfrak{c}})_{u,v} \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{if (a) } u - v = \pm 2\mathsf{d}_{\bar{\imath}_u} n \text{ and } u \text{ satisfies (ii), (iii) or (v),} \\ & \quad \text{or (b) } |u - v| < 2\mathsf{d}_{\bar{\imath}_u} n,\ \imath_u \sim \imath_v \text{ and } u \text{ satisfies (i), (iv) or (vi),} \\ -1 & \text{if (c) } u - v = \pm 2\mathsf{d}_{\bar{\imath}_u} n \text{ and } u \text{ satisfies (i), (iv) or (vi),} \\ & \quad \text{or (d) } |u - v| < 2\mathsf{d}_{\bar{\imath}_u} n,\ \imath_u \sim \imath_v \text{ and } u \text{ satisfies (ii), (iii) or (v),} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

以及其余条目 $-(B^{\mathfrak{c}})_{v,u} = (B^{\mathfrak{c}})_{u,}$对于 $\imath_u = n \pm 1$ 和 $\imath_v = n$ 如下给出：

$$(\widetilde{B}^{\mathfrak{c}})_{u,v} \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{if (g) } |u - v| < n, \text{ and } v \text{ satisfies (v),} \\ -1 & \text{if (e) } |u - v| < 3n,\ \imath_u = n - 1,\ u \text{ satisfies (ii) and } v \text{ satsifies (vi),} \\ & \quad \text{or (f) } |u - v| < 3n,\ \imath_u = n + 1,\ u \text{ satisfies (iv) and } v \text{ satsifies (vi),} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

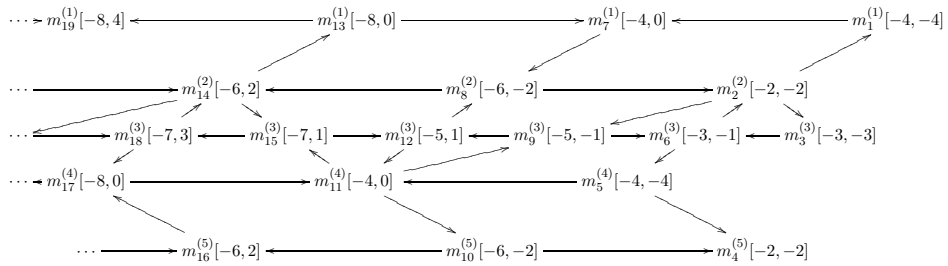
~有趣的是，该箭图 $\Gamma_{\widetilde{B}^{\mathfrak{c}}}$ 对应于 $B^{\mathfrak{c}}$ 在上述中同构于该箭图 $Q_\infty(\mathrm{B}n)$ 在 [IIK+13a，图 1] 这与簇代数的周期性有关。

让我们来看 $n = 3$ 的具体例子。在这种情况下，我们可以取 $\xi_3 = -3$ and

$$\boldsymbol{i} = (1, 2, 3, 5, 4, 3, 1, 2, 3, 5, 4, 3, \ldots).$$

~使用 $\{m_u^{\mathfrak{c}}\}_{u \in \mathbb{N}}$ 作为对应箭图 $\Gamma_{\widetilde{B}^{\mathfrak{c}}}$ 的顶点集合， $B^{\mathfrak{c}}$, $\Gamma_{\widetilde{B}^{\mathfrak{c}}}$ 可以如下绘出：

(B.1)



注B.3. 如例B.1 所示，存在 $\imath$-盒的可容许链和带有→ →$\sigma = \mathrm{id}$的 Q-数据，其对应的箭图分别同构于 [Kel13], 中单边类型 $\mathfrak{g}$的乘积箭quiver$\mathrm{A}_\infty \otimes \mathrm{D}n$ $(n \geq 4)$→ → 和$\mathrm{A}_\infty \otimes \mathrm{E}n$ ($n = 6, 7, 8$)。类似于例B.2，对于非单边类型 $\mathfrak{g}$，存在i-盒的可容许链和带有 $\sigma \neq \mathrm{id}$的 Q-数据，其对应的箭图同构于[IIK+13a、IIK+13b] 中的 $Q_\infty(\mathfrak{g})$。

Appendix C. Example of substitution formulas

在本附录中，我们展示代换公式的一些示例。我们主要考虑~ ~为简单起见的情形，即态射 $\Psi_{t=1}$。其量子类比 Ψ可以用类似的方式计算。

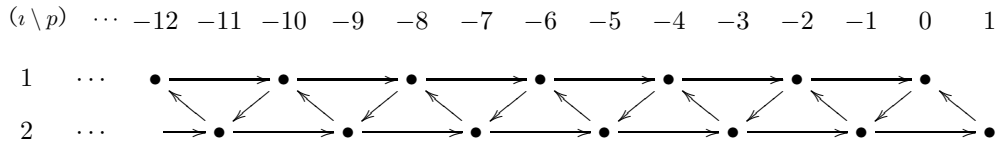
例 C.1. 让我们明确计算由辫子变换产生的从 A_2 型到其自身的 A_2 型的代换公式。考虑如下给出的高度函数 ξ', ξ：

$$(\xi'_1, \xi'_2) = (0, -1), \qquad (\xi_1, \xi_2) = (0, 1).$$

那么，以下无限序列 $\boldsymbol{i}' = (\imath'_u)_{u\in\mathbb{N}}$，$\boldsymbol{i} = (\imath_u)_{u\in\mathbb{N}} \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$ 满足例 5.1 中的条件 (5.5)：

$$\boldsymbol{i}' = (\underbrace{1,2,1}_{\text{reduced word for } w_\circ}, \underbrace{2,1,2}, \underbrace{1,2,1}, \dots), \qquad \boldsymbol{i} = (\underbrace{2,1,2}_{\text{reduced word for } w_\circ}, \underbrace{1,2,1}, \underbrace{2,1,2}, \dots).$$

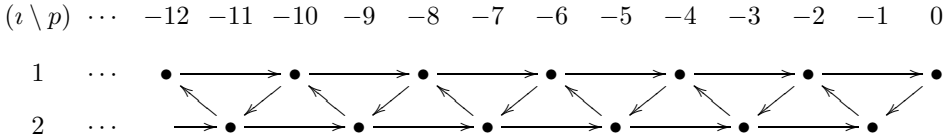
The quiver $\Gamma_{\boldsymbol{i}}$ corresponding to $\boldsymbol{i}$ can be depicted as



无限序列 $\boldsymbol{i}$ 可以由 $\boldsymbol{i}'$ 通过应用辫子变换得到，反之亦然。因此，在以下顶点处进行变异。

$$(2,1),(1,-2),(2,-5),(1,-8),(2,-11),\dots \tag{C.1}$$

we obtain the quiver $\Gamma_{\boldsymbol{i}'}$.



Here the correspondence of the labelling of vertices is given by

$$\begin{aligned}
&(2,1-6m)\mapsto(1,-6m), && (1,-6m)\mapsto(1,-2-6m),\\
&(2,-1-6m)\mapsto(2,-1-6m), && (1,-2-6m)\mapsto(2,-3-6m),\\
&(2,-3-6m)\mapsto(2,-5-6m), && (1,-4-6m)\mapsto(1,-4-6m).
\end{aligned} \tag{C.2}$$

By the exchange relation of cluster algebra and (C.2), we have

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_{1,-6m}) &= \frac{X_{2,3-6m}X_{1,-6m}+X_{1,2-6m}X_{2,-1-6m}}{X_{2,1-6m}},\\
\hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_{1,-2-6m}) &= X_{1,-6m},\\
\hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_{1,-4-6m}) &= X_{1,-4-6m},\\
\hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_{2,-1-6m}) &= X_{2,-1-6m},\\
\hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_{2,-3-6m}) &= \frac{X_{1,-6m}X_{2,-3-6m}+X_{2,-1-6m}X_{1,-4-6m}}{X_{1,-2-6m}},\\
\hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_{2,-5-6m}) &= X_{2,-3-6m}.
\end{aligned}$$

这里 $X_{2,3} = X_{1,2} := 1$. 因此,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Psi}_{\le\xi,\le\xi'}(m^{(\imath)}[p,\xi'_\imath])\\
&= \begin{cases}
(Y^{-1}_{2,1-6m}Y_{1,-6m}+Y_{2,-1-6m})m^{(1)}[2-6m,0] & \text{if } (\imath,p)=(1,-6m),\\
m^{(1)}[-6m,0] & \text{if } (\imath,p)=(1,-2-6m),\\
m^{(1)}[-4-6m,0] & \text{if } (\imath,p)=(1,-4-6m),\\
m^{(2)}[-1-6m,1] & \text{if } (\imath,p)=(2,-1-6m),\\
(Y^{-1}_{1,-2-6m}Y_{2,-3-6m}+Y_{1,-4-6m})m^{(2)}[-1-6m,1] & \text{if } (\imath,p)=(2,-3-6m),\\
m^{(2)}[-3-6m,1] & \text{if } (\imath,p)=(2,-5-6m).
\end{cases}
\end{aligned}$$

这里 $m^{(1)}[2,0] := 1$。这个计算意味着，对于 $(\imath,p) \in \widehat{I}'_{\leq \xi'}$，

$$\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(Y_{\imath,p}) = \widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(m^{(\imath)}[p,\xi'_\imath])\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(m^{(\imath)}[p+2,\xi'_\imath])^{-1}$$
$$= \begin{cases} Y_{2,1-6m}^{-1}Y_{1,-6m} + Y_{2,-1-6m} & \text{if } (\imath,p) = (1,-6m), \\ \dfrac{1}{Y_{2,1-6m}^{-1} + Y_{2,-1-6m}Y_{1,-6m}^{-1}} & \text{if } (\imath,p) = (1,-2-6m), \\ Y_{1,-4-6m}Y_{1,-2-6m} & \text{if } (\imath,p) = (1,-4-6m), \\ Y_{2,-1-6m}Y_{2,1-6m} & \text{if } (\imath,p) = (2,-1-6m), \\ Y_{1,-2-6m}^{-1}Y_{2,-3-6m} + Y_{1,-4-6m} & \text{if } (\imath,p) = (2,-3-6m), \\ \dfrac{1}{Y_{1,-2-6m}^{-1} + Y_{1,-4-6m}Y_{2,-3-6m}^{-1}} & \text{if } (\imath,p) = (2,-5-6m). \end{cases}$$

Therefore, for $(\imath,p) \in \widehat{I}'$,

$$\widetilde{\Psi}_{t=1}(Y_{\imath,p}) = \begin{cases} Y_{2,1-6m}^{-1}Y_{1,-6m} + Y_{2,-1-6m} & \text{if } (\imath,p) = (1,-6m), \\ \dfrac{1}{Y_{2,1-6m}^{-1} + Y_{2,-1-6m}Y_{1,-6m}^{-1}} & \text{if } (\imath,p) = (1,-2-6m), \\ Y_{1,-4-6m}Y_{1,-2-6m} & \text{if } (\imath,p) = (1,-4-6m), \\ Y_{2,-1-6m}Y_{2,1-6m} & \text{if } (\imath,p) = (2,-1-6m), \\ Y_{1,-2-6m}^{-1}Y_{2,-3-6m} + Y_{1,-4-6m} & \text{if } (\imath,p) = (2,-3-6m), \\ \dfrac{1}{Y_{1,-2-6m}^{-1} + Y_{1,-4-6m}Y_{2,-3-6m}^{-1}} & \text{if } (\imath,p) = (2,-5-6m). \end{cases}$$

This is the substitution formula from A_2 to itself.

For an instance, we have

$$\chi_q(L(Y_{2,-7})) = Y_{2,-7} + Y_{1,-6}Y_{2,-5}^{-1} + Y_{1,-4}^{-1}.$$

By applying the above formula, we have

$$Y_{2,-7}Y_{2,-5} + Y_{2,-5}^{-1}Y_{1,-6}Y_{1,-2}^{-1} + Y_{2,-7}Y_{1,-2}^{-1} + Y_{2,-5}^{-1}Y_{1,-6}Y_{1,-4}Y_{2,-3}^{-1} + Y_{2,-7}Y_{1,-4}Y_{2,-3}^{-1} + Y_{1,-4}^{-1}Y_{1,-2}^{-1} = \chi_q(L(Y_{2,-7}Y_{2,-5})).$$

我们在此指出，同构 $\Psi_{t=1}$ 由自函子分类化 $\mathscr{S}_2$ 在 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z},\mathfrak{sl}_3}$ 在[KKOP21a]（另见命题 6.2）。

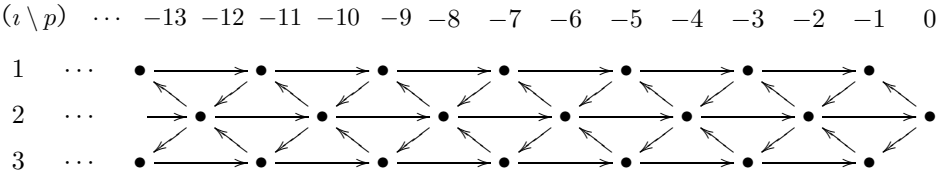
例 C.2. 我们用一个从 B 型$_2$ 到 A 型$_3$的例子来说明我们的代换公式。考虑如下给出的 B 型$_2$ 高度函数 ξ' 和 A 型$_2$ 高度函数 ξ：

$$(\xi'_1,\xi'_2,\xi'_3) = (-3,0,-1), \qquad (\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (-1,0,-1).$$

以下是满足示例 $\boldsymbol{i}' = (\imath'_u)_{u\in\mathbb{N}}$、$\boldsymbol{i} = (\imath_u)_{u\in\mathbb{N}} \in \{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ 中条件（5.1）的无限序列，见示例 5.5：

$$\boldsymbol{i}' = (\underbrace{2,3,2,1,2,3}_{\text{reduced word for } w_\circ}, \underbrace{2,1,2,3,2,1}, \underbrace{2,3,2,1,2,3}, \dots),$$
$$\boldsymbol{i} = (\underbrace{2,3,1,2,1,3}_{\text{reduced word for } w_\circ}, \underbrace{2,1,3,2,3,1}, \underbrace{2,3,1,2,1,3}, \dots).$$

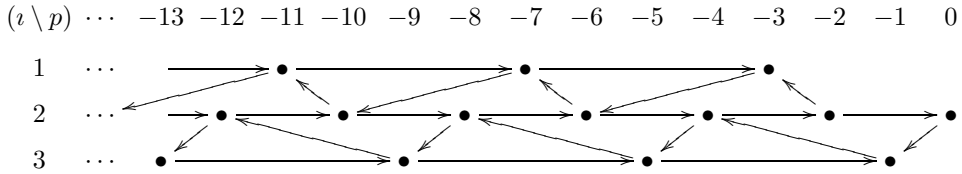
The quiver $\Gamma_{\boldsymbol{i}}$ corresponding to $\boldsymbol{i}$ can be depicted as



无限序列 $\boldsymbol{i}$ 可以通过对上方 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{i}'$ 的红色部分应用辫子变换从 $\boldsymbol{i}'$ 获得，反之亦然。因此，通过对以下顶点进行变异

$$(1,-1),(3,-5),(1,-9),(3,-13),\dots,(1,-1-8m),(3,-5-8m),\dots \tag{C.3}$$

we obtain the quiver $\Gamma_{\boldsymbol{i}'}$.



Here the correspondence of the labelling of vertices is given by

$$\begin{aligned}
&(1,-1-8m)\mapsto(2,-2-12m), && (1,-3-8m)\mapsto(1,-3-12m),\\
&(1,-5-8m)\mapsto(1,-7-12m), && (1,-7-8m)\mapsto(1,-11-12m),\\
&(2,-4m)\mapsto(2,-6m), && (2,-2-4m)\mapsto(2,-4-6m),\\
&(3,-1-8m)\mapsto(3,-1-12m), && (3,-3-8m)\mapsto(3,-5-12m),\\
&(3,-5-8m)\mapsto(2,-8-12m), && (3,-7-8m)\mapsto(3,-9-12m),
\end{aligned} \tag{C.4}$$

对于 $m\in\mathbb{N}_0$。注意，8 和 12 分别是 $2rh^\vee$ A 型$_3$ 和 B 型$_2$ 的编号。根据簇代数的交换关系和（C.4），我们有

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_{1,-3-12m})&=X_{1,-3-8m}, & \hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_{1,-7-12m})&=X_{1,-5-8m},\\
\hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_{1,-11-12m})&=X_{1,-7-8m}, & \hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_{2,-6m})&=X_{2,-4m}\\
\hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_{2,-2-12m})&=\frac{X_{2,-2-8m}X_{1,1-8m}+X_{1,-3-8m}X_{2,-8m}}{X_{1,-1-8m}}\\
\hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_{2,-4-6m})&=X_{2,-2-4m}, & \hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_{3,-1-12m})&=X_{3,-1-8m},\\
\hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_{3,-5-12m})&=X_{3,-3-8m}, & \hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_{3,-9-12m})&=X_{3,-7-8m},\\
\hat{\boldsymbol{\tau}}^*(X'_{2,-8-12m})&=\frac{X_{3,-7-8m}X_{2,-4-8m}+X_{2,-6-8m}X_{3,-3-8m}}{X_{3,-5-8m}}.
\end{aligned}$$

Here $X_{1,1}:=1$. Hence,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}_{\le\xi,\le\xi'}(m^{(1)}[-3-12m,-3])&=m^{(1)}[-3-8m,-1],\\
\widetilde{\Psi}_{\le\xi,\le\xi'}(m^{(1)}[-7-12m,-3])&=m^{(1)}[-5-8m,-1],\\
\widetilde{\Psi}_{\le\xi,\le\xi'}(m^{(1)}[-11-12m,-3])&=m^{(1)}[-7-8m,-1],\\
\widetilde{\Psi}_{\le\xi,\le\xi'}(m^{(2)}[-6m,0])&=m^{(2)}[-4m,0],\\
\widetilde{\Psi}_{\le\xi,\le\xi'}(m^{(2)}[-2-12m,0])&=(Y_{2,-2-8m}Y^{-1}_{1,-1-8m}+Y_{1,-3-8m})m^{(2)}[-8m,0],\\
\widetilde{\Psi}_{\le\xi,\le\xi'}(m^{(2)}[-4-6m,0])&=m^{(2)}[-2-4m,0],
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(m^{(3)}[-1-12m,-1]) = m^{(3)}[-1-8m,-1],$$
$$\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(m^{(3)}[-5-12m,-1]) = m^{(3)}[-3-8m,-1],$$
$$\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(m^{(3)}[-9-12m,-1]) = m^{(1)}[-7-8m,-1],$$
$$\widetilde{\Psi}_{\leq\xi,\leq\xi'}(m^{(2)}[-8-12m,0]) = (Y_{3,-7-8m}+Y_{2,-6-8m}Y_{3,-5-8m}^{-1})m^{(2)}[-4-8m,0].$$

Therefore, for $(i,p)\in\widehat{I}'$,

$$\widetilde{\Psi}_{t=1}(Y_{i,p}) = \begin{cases} Y_{1,-3-8m}Y_{1,-1-8m} & \text{if } (i,p)=(1,-3-12m),\\ Y_{1,-5-8m} & \text{if } (i,p)=(1,-7-12m),\\ Y_{1,-7-8m} & \text{if } (i,p)=(1,-11-12m),\\ Y_{2,-8m} & \text{if } (i,p)=(2,-12m),\\ Y_{2,-2-8m}Y_{1,-1-8m}^{-1}+Y_{1,-3-8m} & \text{if } (i,p)=(2,-2-12m),\\ \dfrac{1}{Y_{1,-1-8m}^{-1}+Y_{2,-2-8m}^{-1}Y_{1,-3-8m}} & \text{if } (i,p)=(2,-4-12m),\\ Y_{2,-4-8m} & \text{if } (i,p)=(2,-6-12m),\\ Y_{3,-7-8m}+Y_{2,-6-8m}Y_{3,-5-8m}^{-1} & \text{if } (i,p)=(2,-8-12m),\\ \dfrac{1}{Y_{2,-6-8m}^{-1}Y_{3,-7-8m}+Y_{3,-5-8m}^{-1}} & \text{if } (i,p)=(2,-10-12m),\\ Y_{3,-1-8m} & \text{if } (i,p)=(1,-1-12m),\\ Y_{3,-3-8m} & \text{if } (i,p)=(1,-5-12m),\\ Y_{3,-7-8m}Y_{3,-5-8m} & \text{if } (i,p)=(1,-9-12m), \end{cases}$$

对于某个 $m\in\mathbb{Z}$，如例 C.1。这是从 B 型到 A 型的代换公式[2 3]。例如，我们有

$$\chi_q(L^{\mathrm{B}_2}(Y_{1,-7})) = Y_{1,-7}+Y_{2,-6}Y_{2,-4}Y_{1,-3}^{-1}+Y_{2,-6}Y_{2,-2}^{-1}+Y_{1,-5}Y_{2,-4}^{-1}Y_{2,-2}^{-1}+Y_{1,-1}^{-1}.$$

By applying the above formulas, we have

$$\begin{aligned} &Y_{1,-5}+\frac{Y_{2,-4}}{(Y_{1,-1}^{-1}+Y_{2,-2}^{-1}Y_{1,-3})Y_{1,-3}Y_{1,-1}}+\frac{Y_{2,-4}}{Y_{2,-2}Y_{1,-1}^{-1}+Y_{1,-3}}\\ &\qquad+\frac{Y_{3,-3}(Y_{1,-1}^{-1}+Y_{2,-2}^{-1}Y_{1,-3})}{Y_{2,-2}Y_{1,-1}^{-1}+Y_{1,-3}}+Y_{3,-1}^{-1}\\ &=Y_{1,-5}+Y_{2,-4}\frac{Y_{1,-3}^{-1}Y_{1,-1}^{-1}+Y_{2,-2}^{-1}}{Y_{1,-1}^{-1}+Y_{2,-2}^{-1}Y_{1,-3}}+Y_{3,-3}Y_{2,-2}^{-1}+Y_{3,-1}^{-1}\\ &=Y_{1,-5}+Y_{2,-4}Y_{1,-3}^{-1}+Y_{3,-3}Y_{2,-2}^{-1}+Y_{3,-1}^{-1}=\chi_q(L^{\mathrm{A}_3}(Y_{1,-5})). \end{aligned}$$

References

[Bit21] L´ea Bittmann. 一种通过量子簇代数研究单边量子仿射代数表示的方法。 *Math. Z.*，298(3-4):1449–1485，2021年。

[BZ05] Ark ady Berenstein and Andrei Zelevinsky. Quantum cluster algebras. *Adv. Math.*，195(2): 405–45 55，200

[CP94] Vyjayanthi Chari 和 Andrew Pressley。 *A guide to quantum groups*。剑桥大学出版社，剑桥，1994。[CP95] Vyjayanthi Chari 和 Andrew Pressley。量子仿射代数及其表示。见 *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*，第 16 卷， *CMS Conf. Proc.*，第 59–78 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1995。

[DWZ10] Harm Derksen、Jerzy Weyman 和 Andrei Zelevinsky。带势箭图及其表示 II：簇代数中的应用。 *J. Amer. Math. Soc.*，23(3):749–790，2010年。[FHOO22] Ryo Fujita、David Hernandez、Se-jin Oh 和 Hironori Oya。量子 Grothendieck 环之间的同构与正性传播。 *J. Reine Angew. Math.*，785:117–185，2022年。[FM01] Edward Frenkel 和 Evgeny Mukhin。量子仿射代数有限维表示的 q-特征的组合学。 *Comm. Math. Phys.*，216(1):23–57，2001年。[FO21] Ryo Fujita 和 Se-jin Oh。非扭量子仿射代数的 Q-数据与表示论。*Comm. Math. Phys.*，384(2):1351–1407，2021年。[FR99] Edward Frenkel 和 Nicolai Reshetikhin。量子仿射代数表示的 q-特征与 *Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998)* 248 *Contemp. Math.* 163 205 -代数的变形。载于，卷，页码 – 。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999年。[FZ07] Sergey Fomin 和 Andrei Zelevinsky。簇代数。IV. 系数。 *Compos. Math.*，143 1 112 164，2007 ( ): – 。[GHKK18] Mark Gross、Paul Hacking、Sean Keel 和 Maxim Kontsevich。簇代数的典范基。 *J. Amer. Math. Soc.*，31(2):497–608，2018年。[GLS13] C. Geiß、B. Leclerc 和 J. Schr ¨ *Selecta Math.* oer。量子坐标环上的簇结构。，( ): – 。[GLS20] Christof Geiss、Bernard Leclerc 和 Jan Schr¨oer。量子簇代数及其特化。 *J. Algebra*，558:411–422，2020年。[GY17] K. R. Goodearl 和 M. T. Yakimov。量子幂零代数上的量子簇代数结构。 *Mem. Amer. Math. Soc.*，247(1169):vii+119，2017年。[Her04] David Hernandez。 q、t-特征的代数方法。 *Adv. Math.*，187(1):1–52，2004年。[Her05] David Hernandez。非单键量子仿射化的 q 及 q、t-特征的单项式。*Math. Z.*，250(2):443–473，2005年。[Her06] David Hernandez。Kirillov-Reshetikhin猜想与 T 系统的解。 *J. Reine Angew. Math.* 596 63 87, 2006 ，：– 。[HL10] David Hernandez 和 Bernard Leclerc。簇代数与量子仿射代数。 *Duke Math.*，( ): – 。[*J.* 154 2 265 341, 2010 HL15] David Hernandez 和 Bernard Leclerc。量子 Grothendieck 环与导出霍尔代数。 *J. Reine Angew. Math.*，701:77–126，2015年。[HL16] David Hernandez 和 Bernard Leclerc。Kirillov-Reshetikhin 模的 q-特征的簇代数方法。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，18(5):1113–1159，2016年。[HO19] David Hernandez 和 Hironori Oya。量子 Grothendieck 环同构、簇代数与 Kazhdan-Lusztig算法。 *Adv. Math.*，347:192–272，2019年。[IIK+13a] Rei Inoue、Osamu Iyama、Bernhard Keller、Atsuo Kuniba 和 Tomoki Nakanishi。t 系统和 Y系统的周期性、二对数恒等式与簇代数 I：类型 B_r *Publications* 。，( ): – 。[*of the Research Institute for Mathematical Sciences* 49 1 1 42, 2013 IIK+13b] Rei Inoue、Osamu Iyama、Bernhard Keller、Atsuo Kuniba 和 Tomoki Nakanishi。t 系统和 Y系统的周期性、二对数恒等式与簇代数 II：类型 C_r、F_4 和 G_2。 *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*，49(1):43–85，2013年。[Kel13] Bernhard Keller。Dynkin 图对的周期性猜想。 *Annals of Mathematics*，页码 111–170，2013年。[KK19] Masaki Kashiwara 和 Myungho Kim。箭图Hecke代数中单模的 Laurent现象。 *Compos. Math.*，155(12):2263–2295，2019年。[KKKO18] Seok-Jin Kang、Masaki Kashiwara、Myungho Kim 和 Se-jin Oh。簇代数的幺半范畴化。 *J. Amer. Math. Soc.*，31(2):349–426，2018年。[KKOP21a] Masaki Kashiwara、Myungho Kim、Se-jin Oh 和 Euiyong Park。量子仿射代数模范畴上的辫群作用。 *Proceedings of the Japan Academy Mathematical Sciences* 97 3 13 18, 2021 、 *Ser. A*，，( ): – 。[KKOP21b] Masaki Kashiwara、Myungho Kim、Se-jin Oh 和 Euiyong Park。幺半范畴化与量子仿射代数 II。预印本，arXiv:2103.10067v3，2021年。[KKOP22] Masaki Kashiwara、Myungho Kim、Se-jin Oh 和 Euiyong Park。量子仿射代数上模范畴的簇代数结构。 *Proceedings of the London Mathematical Society*，124 3 301 372，2022 ( ): – 。

[KO23] Masaki Kashiwara 和 Se-jin Oh. 在 $q = 1$ 处特化的 (q, t)-Cartan 矩阵及其应用. *Math. Z.*, 303(2):Paper No. 42, 49, 2023年. [Lus93] 乔治·卢斯蒂格. *Introduction to quantum groups*, *Progress in Mathematics* 第 110 卷. Birkh¨auser Boston, Inc., 美国马萨诸塞州波士顿, 1993年. [Nak] 中岛启. 量子化库仑分支的模 . 准备中 . [Nak01] 中岛启 . 箭图簇与量子仿射代数的有限维表示 . *J. Amer. Math. Soc.*, 14(1):145–238, 2001年. [Nak03] 中岛启. 量子仿射代数的 Kirillov-Reshetikhin 模的 t-类似 q-特征标. *Represent. Theory*, 7:259–274 (电子版), 2003年. [Nak04] 中岛启. 箭图簇与量子仿射代数的 t q *Ann.* -类似 -特征 *of Math. (2)* 160 3 1057 1097, 2004 标. , ( ): – . [NW23] 中岛启和 Alex Weekes. 带对称化子的箭图规范理论的库仑分支. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 25(1):203–230, 2023年. [Qin17] 秦帆. 量子簇代数中的三角基与幺半范畴化猜想. *Duke Math. J.*, 166(12):2337–2442, 2017年. [Tra11] Thao Tran. 量子簇代数中的 F-多项式. *Algebr. Represent. Theory*, 14(6):1025– 1061, 2011年. [VV03] M. Varagnolo 和 E. Vasserot. 反常层与量子 Grothendieck 环. 载于 *Studies in memory of Issai Schur (Chevaleret/Rehovot, 2000)* 210 *Progr. Math.* 345 365 , 卷, 页 – . Birkh¨auser Boston, 美国马萨诸塞州波士顿, 2003年.

(R. Fujita) Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Oiwake-Kitashirakawa , Sakyo, Kyoto, 606-8502, Japan & Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, Université Paris Cité, F-75013, Paris, France*Email address*: rfujita@kurims.kyoto-u.ac.jp (D. HERNANDEZ)Université Paris Cité and Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG, IUF, F-75013,Paris, France*Email address*: david.hernandez@imj-prg.fr (S.-j.Oh) Ewha Womans University Seoul, 52 Ewhayeodae-gil, Daehyeon-dong, Seodaemun-gu,Seoul, South Korea*Email address*: sejin092@gmail.com (H. OYA) Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama,Meguro-ku, Tokyo, 152-8551, Japan*Email address*: hoya@math.titech.ac.jp