arXiv:2304.02567v1 [math.GT] 5 Apr 2023

高亏格蜿蜒与 Masur–Veech 体积

Vincent Delecroix, ´伊莉丝 GOUJARD, Peter Zograf, 和 Anton Zorich

Abstract. 经典蜿蜒曲线由平面中的一条直线和一条与该直线横截相交的光滑闭曲线组成，其中这对曲线视为在保留直线的同伦变形下等价。具有 $2N$ 个交点的曲流数量 M(N) 随着 N 指数增长，但其渐近行为仍然只是猜想。

曲流定义了二维球面上一对横截相交的简单闭曲线。本文考察任意亏格 g的闭合定向曲面上一对横截相交的简单闭曲线。随着交点数增加，这类高亏格蜿蜒的数量仍然具有指数级上界和下界。固定两条曲线并集的补集中的双边形数量 n，我们计算了具有 n 个双边形且交点数至多为 $2N$ 个的亏格 g 曲流的精确渐近行为，并表明该渐近行为为 $polynomial$，在 N 中，当 $N \to \infty$时。对于亏格为 g的曲面上正向相交曲线对的数量，我们也得到了类似结果。我们还计算了在具有两个边界分支的亏格为 $g-1$ 的曲面上，从随机辫子得到曲流的渐近概率。

为了有效地计数曲线迷宫，我们将其与由阿贝尔微分和二次微分模空间中某些方格铺砌曲面表示的整数点对应起来，并利用这些模空间几何学的最新进展，以及 Witten–Kontsevich 复曲线模空间上二点关联函数的渐近性质。

Contents

1. 引言 2 1.1. 经典蜿蜒曲线 2 1.2. 高亏格蜿蜒 3 1.3. 证明技巧 4 1.4. 论文结构 5 2. 横截多曲线、曲流与弧系 6 2.1. 高亏格蜿蜒的计数 6 2.2. 从弧系得到曲流的渐近概率 8 2.3. 带尖点双曲曲面上简单闭测地线的计数 11 3. 方格铺砌曲面与 Masur–Veech 体积 12 3.1. 二次微分模空间的 Masur–Veech 体积 12 3.2. 方格铺砌曲面 13 3.3. 阿贝尔方格铺砌曲面 13 3.4. 单带方格铺砌曲面的计数 14 4. 方格铺砌曲面词典 16 5. 固定 g 和 n 18 值时主要结果的证明 6. 大 g 和 n 20 值时的渐近计数 6.1. 通过交数表示 Masur–Veech 体积的公式 20 6.2. 单带方格铺砌曲面的贡献 22 6.3. 大 n 24 值时的渐近计数 6.4. 高亏格蜿蜒线图的渐近计数 27 6.5. 定向弯曲线的高亏格渐近计数 29 附录 A. 特殊组合类型的曲流与弧系 30 附录 B. 有理函数在二项式系数上的求和 32 B.1. 二项式系数比值的求和 32 B.2. 一般情形 35 B.3. 二点关联函数的应用 36 参考文献 37

$Date$: 2023年4月4日。前两位作者的研究部分得到 ANR-19-CE40-0003 基金的支持。第三位作者的研究部分得到俄罗斯联邦科学与高等教育部的支持，协议编号为 075–15–2022–289。第 4 节的结果是在俄罗斯圣彼得堡国立大学（SPbU）获得的，得到了俄罗斯科学基金（RSF）基金 19-71-30002 的支持。

1. Introduction

1.1. 经典蜿蜒曲线。曲流是平面上一条定向直线与一条光滑简单闭曲线构成的拓扑构型；二者横截相交，并且在保持直线不变的平面同伦变形下视为等价。曲流可追溯至 H. Poincar´e [Po]，并自然出现在数学、理论物理学和计算生物学的诸多领域（尤其是，它们为聚合物折叠提供了一种模型 [DiGG1]）。

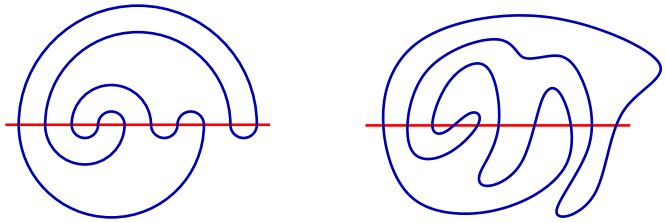


Figure 1. 具有10个交叉点的等价曲线迷宫

当 N 趋于无穷时，恰好具有 $2N$ 个交叉点的曲线迷宫数目M(N)的渐近计数，是曲线迷宫研究中最古老的未解问题之一。该问题由V. I. Arnold推广（见 [Arn] 中的问题1986-7以及同一本书中M. Kontsevich和S. Lando的后续评论）。S. Lando和A. Zvonkin在 [LZv1] 以及 [LZv2]中获得了该数目的指数上界和下界。他们猜想存在常数 $const$、 R、 α 使得

$$\mathrm{M}(N) \overset{?}{\sim} const \cdot R^{2N} \cdot N^{\alpha} \quad \text{as} \quad N \to \infty\,. \tag{1.1}$$

该猜想由P. Di Francesco、O. Golinelli、E. Guitter在 [DiGG1], [DiGG2], 中加以精确化，他们描述了蜿蜒曲线数M(N)的生成函数。他们在 [DiGG2] 中提出了一个猜想精确值 $\alpha = -\frac{29+\sqrt{145}}{12} \approx -3.42$ ，将其解释为中心荷为 $c = -4$ 的二维共形场论耦合引力中的相应临界指数 α 。I. Jensen通过计算机模拟在 [Jen] 中提出了猜想近似值 $R^2 \approx 12.26$ 。常数 R^2 目前已知的最佳严格界为 $11.380 \le R^2 \le 12.901$, 如 [AlP]中所证。然而，三十年前提出的这一猜想的所有要素至今仍未解决。

关于曲线迷宫的数学文献浩如烟海，研究范围从表示论，见 [DeKi],[DuYu], [ElJ], [D], ，以及偏微分方程理论 [FiRo] ，到理论物理学 [DiDGG] ，近来还涉及 Liouville量子引力曲面上的 Schramm–Loewner演化曲线 [BGS]。曲线迷宫是更一般的蜿蜒系统的特例，近期相关研究见 [CuKST], [FeT] [FuNe], [GnNP], [Kg]。如需了解更多详情和参考文献，我们推荐近期一篇关于曲线迷宫的精彩综述 [Zv] 。

可以将曲线迷宫分组，并逐组计数。例如，可以固定极小弧的数量（图 2 中以黑色标出），分别统计至多有 $2N$ 个交叉点、恰有 n 条极小弧，且有（或没有）极大弧的曲线迷宫数量 $\mathrm{M}_{0,\,n}^{+}(N)$（分别为 $\mathrm{M}_{0,\,n}^{-}(N)$）。

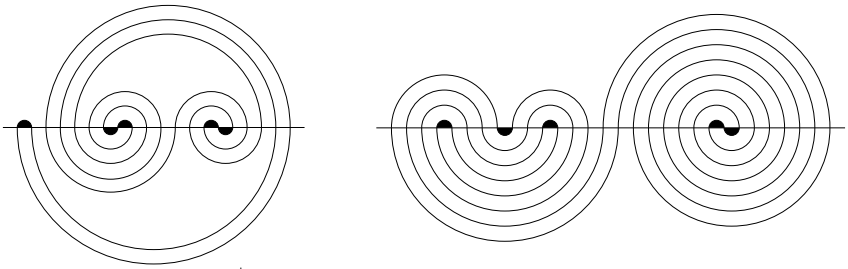


Figure 2. 有极大弧和无极大弧的曲流。两条曲流都有 5 条极小弧。

我们在 [DGZZ2] 中证明了计数函数 $\mathrm{M}_{0,n}^{+}(N)$ 和 $\mathrm{M}_{0,n}^{-}(N)$ 具有以下渐近性质，当 $N \to +\infty$:

$$\mathrm{M}_{0,n}^{+}(N) = \frac{2}{n!\,(n-3)!}\left(\frac{2}{\pi^2}\right)^{n-2} \cdot \binom{2n-2}{n-1}^2 \cdot \frac{N^{2n-4}}{4n-8} \;+\; o(N^{2n-4})\,.$$

$$\mathrm{M}_{0,n}^{-}(N) = \frac{4}{n!\,(n-4)!}\left(\frac{2}{\pi^2}\right)^{n-3} \cdot \binom{2n-4}{n-2}^2 \cdot \frac{N^{2n-5}}{4n-10} \;+\; o(N^{2n-5})\,.$$

这种受限计数对于$\mathrm{M}_{0,n}^{\pm}(N)$给出多项式渐近，而对于 $\mathrm{M}(N)$则给出指数渐近，这既不与猜想 (1.1)矛盾，也不能证实该猜想。具有 $2N$ 交叉点的曲流可以拥有从3 条到 $2N-1$条极小弧，因此 $\mathrm{M}(N) = \sum_{n=3}^{2N-1}\mathrm{M}_{0,n}^{+}(N) + \sum_{n=4}^{2N-2}\mathrm{M}_{0,n}^{-}(N)$。然而，上述关于$\mathrm{M}_{0,n}^{\pm}$的公式右侧渐近表达式之和与$\mathrm{M}(N)$毫无关系。问题在于，根据猜想，一个具有大量交叉点的典型曲流中，大约一半的弧是极小弧；而在关于$\mathrm{M}_{0,n}^{\pm}(N)$的渐近公式中，我们固定 n，然后才令 $N \to +\infty$，因此我们的渐近公式只有在 $n \ll N$的情形下才有意义。

具有 n 条极小弧的曲流与带有 n 个尖点的双曲球面上的简单闭测地线有关。当交点数 $2N$ 很大时，在这种对应关系中，该数可以合理地近似一条简单闭测地线的长度。M.Mirzakhani在 [Mi2] 中证明，长度不超过 L 的简单闭双曲测地线的数量相对于 L具有精确的多项式渐近行为；而根据 Delsarte、Huber和Selberg的经典结果，长度不超过 L 的闭测地线总数以 e^L/L指数增长。

1.2. 高亏格蜿蜒。曲流可以看作二维球面上简单闭曲线的有序对构成的配置，其中第一条曲线对应于直线，并带有一个与其和第二条曲线的交点不同的标记点。对球面应用适当的微分同胚，可将第一条曲线映射到圆球面上的一个大圆；再将该微分同胚与从标记点到平面的立体投影复合，便得到一条经典蜿蜒曲线。

本文对高亏格曲面上由横截相交的光滑简单闭曲线有序对表示的高亏格蜿蜒进行计数。与之前一样，如果存在曲面的保定向微分同胚（不一定与恒等映射同伦），将一对曲线映射到另一对曲线，且保持曲线的顺序不变，则认为这两对曲线等价。在高亏格情形下，我们不标记第一条曲线上的任何点。

将 $\mathcal{G}$ 是由曲面 S上的一对横截多重曲线所定义的嵌入图。 $\mathcal{G}$ 的顶点是这对多重曲线的交点。补集 $S-\mathcal{G}$ 的边界分支对应于由 $\mathcal{G}$的边形成的闭折线。

定义 1.1. 补集的边界分支 $S-\mathcal{G}$ 由两条边形成的 $\mathcal{G}$ 称为双边形。双边形当其界定一个拓扑圆盘时称为填充，否则称为非填充。

在零亏格情形中，双边形对应极小弧，并且总是填充的。在高亏格中，双边形可能围成 $S-\mathcal{G}$ 的一个具有非平凡拓扑的连通分支；它也可能仅表示 $S-\mathcal{G}$ 的某个连通分支的多个边界分支之一。不过，我们将在第 4 节看到，当双边形的数量固定而交点数量不断增加时，除去占比趋于零的一部分（以 $N \to +\infty$ 衡量）的曲线迷宫，其所有双边形都是填充的；更一般地，对于大多数曲线迷宫， $S-\mathcal{G}$ 的所有连通分支都是拓扑圆盘。

我们在两种情形下统计高亏格蜿蜒。第一种情形中，我们研究曲面亏格为 g、交叉点数不超过 $2N$ 的曲流数量 $\mathrm{M}_{g,n}(N)$ 的渐近行为，其中恰有 n 个双边形（推广了极小弧）；当交叉点数上限 $2N$ 趋于无穷时，考察其渐近行为。

第二种情形中，我们研究定向弯曲线数量 $\mathrm{M}_{g}^{+}(N)$ 的渐近行为；这类曲线带有定向，且只有正横截交点。球面上不存在定向弯曲线。在第二种情形中，我们只固定曲面的亏格 g，并令交叉点数上限 N 趋于无穷。

注 1.2. 注意，高亏格蜿蜒可能有奇数个交点（不同于球面弯曲线，其交点数总是偶数）。我们将看到，亏格为 g、交叉点数不超过 $2N-1$ 且有 n 个双边形的曲流数量，与 $\mathrm{M}_{g,n}(N)$ 具有相同的渐近行为；而交叉点数不超过 N 的曲流数量的渐近行为为 $2^{-(6g-6+2n)}\,\mathrm{M}_{g,n}(N)$。为涵盖零亏格情形，并使其与方格铺砌曲面的计数有更好的对应关系，我们沿用记号 $\mathrm{M}_{g,n}(N)$ 表示交叉点数不超过 $2N$（而非 N）的曲流数量。不过，在定向弯曲线的计数 $\mathrm{M}_{g}^{+}(N)$ 中，我们假定交叉点数上限为 N，而非 $2N$。

现在考虑北半球上的一组 k 互不相交的弧，以及南半球上数量相同的一组互不相交的弧。假设这些弧的端点在赤道上等距分布。记 n 两个半球上极小弧的总数（即端点在赤道上彼此相邻的弧）为。我们在 [DGZZ2] 中计算了渐近概率 $\mathrm{P}_{0,\,n}$：将上述一对随机弧以随机方式粘合，并满足 $k \le N$，得到一条曲流的概率，见图 3。如在

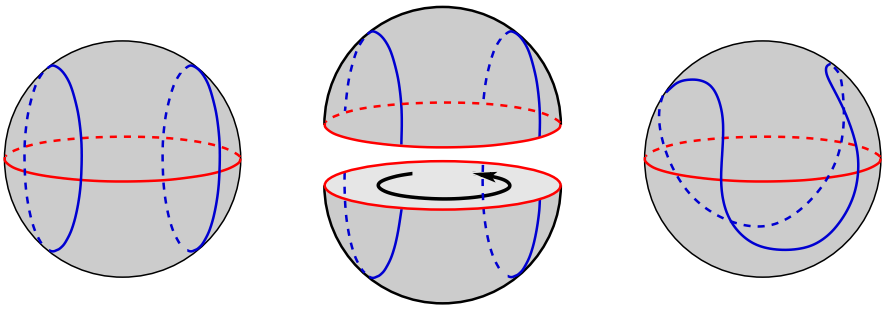


FIGURE 3. 将一对各自带有 k 互不相交的弧的半球沿共同的赤道识别起来，我们有时会得到一条曲流，有时则不会。

对于其他问题，渐近行为是在固定 n 并令 $N \to +\infty$的情况下计算的。在本文中，我们推导了如下一般公式：在亏格为 g 且具有两个边界分支的曲面上，对兼容的互不相交的弧的随机集合的端点进行类似识别时，得到曲流的概率。我们在各种设定和各种渐近范围下研究这一问题。

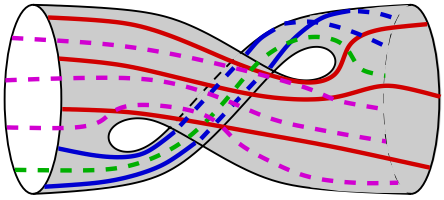


FIGURE 4. 连接亏格为 1 的曲面的两个边界连通分支的互不相交的弦的集合

我们还研究了亏格为 $g-1$ 且具有两个边界分支的连通曲面上的互不相交弦的随机集合。假设每条弦都从一个边界分支延伸到另一个边界分支，如图 4所示，我们计算渐近概率P_g^+：将两个边界分支随机粘合，并匹配弦的端点后，得到一条单一的连通闭曲线，或者换言之，一条定向曲折线。对于亏格为 $g = 1$ 的情形，带边界的亏格为 $g-1$ 的曲面是一个圆柱，而问题归结为计算这样的随机正整数 (k, m) 互素的渐近概率，其中 $m \le k$。在这种情况下，答案 $\mathrm{P}_1^+ = \frac{6}{\pi^2}$ 是初等的。然而，对于图 4 所示的亏格为 $g = 2$ 的情形，除了应用涉及阿贝尔微分模空间的 Masur–Veech体积$\mathrm{Vol}\,\mathcal{H}_2$ 的技术之外，我们尚不知道任何计算 $\mathrm{P}_2^+ = \frac{45}{2\pi^4}$ 的方法。这一技术使我们能够在数秒内给出直到 $g = 1000$ 的P_g^+的精确值列表。对于较大的 g，我们证明了渐近公式 $\mathrm{P}_g^+ = \frac{1}{4g}\left(1 + \frac{12+\pi^2}{24g} + O\left(\frac{1}{g^2}\right)\right)$。

Arnold提出的另一个公开问题是：随机“区间交换置换”分解为互不相交的循环后包含单个循环的概率是多少？该问题与对 P_g^+ 的计算密切相关。下面所发展的方法可以解决这一问题，但为避免使本文内容过于繁重，我们将其另行处理。

1.3. 证明的技术。我们从我们在亏格 0 中曲折线计数的工作 [DGZZ2] 中的一个想法开始，即将问题转化为方格铺砌曲面计数的语言，这与亚纯二次微分模空间的 Masur–Veech 体积的计算密切相关。然而，虽然在 [DGZZ2] 中这种转化基本上完成了问题的解决，但在当前论文中它只是作为一个起点。球面上图的组合学在某些方面比高亏格曲面上简单得多。特别是，单带方格铺砌曲面的计数仅在亏格 0 的情况下是简单的。此外，根据 J. Athreya、A. Eskin 和 A. Zorich [AEZ2] 的工作，亏格 0 中任何分层的 Masur–Veech 体积由一个简洁闭式公式给出，而在高亏格中，提供一般分层（不同于主层）显式体积的有效算法，除了维数为 12 的分层之外，目前尚不可知。（所有二次微分低维分层的体积由 E. Goujard [Gj] 基于 A. Eskin 和 A. Okounkov [EO2] 开发的一般算法进行了计算。）由于这些原因，当前论文的结果在 [DGZZ2] 撰写时是无法达到的。

为了研究高亏格蜿蜒，我们应用了计算阿贝尔微分和二次微分模空间 Masur–Veech 体积的最新技术。更具体地说，我们使用了 A. Aggarwal 在 [Ag1], [Ag2], 中以及 D. Chen、M. M¨oller、A. Sauvaget、D. Zagier 在 [CMSZ], [CMS], [Svg1], [Svg2] 中获得的 Masur–Veech 体积研究中的大多数惊人进展。我们还使用了 M. Kazarian [Kz] 以及 D. Yang、D. Zagier、Y. Zhang [YZZ] 对这些结果的发展；另见 J. Guo 和 D. Yang [GY] 的相关工作。最后，我们还积极使用了我们自己关于二次微分主层 Masur–Veech 体积 [DGZZ3], [DGZZ4] 以及方格铺砌曲面计数 [DGZZ1], 的近期结果，这些结果特别是为曲折线计数的应用而开发的。当前论文的主要技术工具之一是通过 [DGZZ3] 中获得的 Witten–Kontsevich 关联函数（ ψ-类的交数）来计数方格铺砌曲面。在蜿蜒的背景下，我们只需要 1-关联函数和二点关联函数。1-关联函数有一个闭式公式 [Wi], ，而二点关联函数有一个线性递推 [Zog1] 以及精确估计 [DGZZ3]。

虽然对于一般亏格曲线迷宫，我们只能获得对应于固定数量n 个双边形的受限计数，但对于定向弯曲线，我们完全解决了枚举问题。我们还获得了定向弯曲线的精确大亏格渐近计数。

注记 1.3. 通过 Witten–Kontsevich 关联函数对方格铺砌曲面的计数，在我们的论文 [DGZZ3], 中进行，与 M. Mirzakhani [Mi2] 对双曲曲面上简单闭测地线渐近频率的计数密切相关。作为亏格 g meanders 计数的副产品，我们在本文中比较了大亏格 g 带有 n 尖点的曲面上分离型简单闭测地线与非分离简单闭测地线的频率。许多负责大亏格 g 带有 n 尖点的双曲曲面几何的量对尖点数量的增长率与亏格增长率的比较非常敏感，参见 A. Aggarwal 关于 Witten–Kontsevich 关联函数的结果 [Ag2] 或 W. Hide [Hi], 、W. Hide 和 M. Magee [HiM], 、W. Hide 和 J. Thomas [HiT],、N. Anantharaman 和 L. Monk [AnMo], 、T. Budzinski、N. Curien、B. Petri [BCP], 、M. Lipnowski 和 A. Wright [LiWr], 、Yunhui Wu 和 Yuhao Xue [WuXue], 、Yang Shen 和 Yunhui Wu [ShWu], 以及 P. Zograf [Zog2] 关于大亏格带尖点双曲曲面的谱隙和 Cheeger 常数的结果。我们在本文中表明，分离型简单闭测地线与非分离简单闭测地线的频率在大亏格中对尖点数量的依赖性非常有限。

1.4. 论文结构。第 2 节给出高亏格曲流和弧系的准确定义，并介绍主要计数结果。所有结果均源于曲流与方格铺砌曲面之间的对应关系。后者表示二次微分或阿贝尔微分模空间中的整数点。第 3 节回顾方格铺砌曲面的计数所需的相关事实；第 4 节介绍上述对应关系。

建立这一计数后，我们便完成了第 2 节中关于固定亏格 g 和固定双边形数量 n 的那些结果的证明。

第6节致力于分析所得计数在两种互补渐近机制下的情况：当双边形数量 n 固定且亏格 g 增长时，以及当亏格固定且双边形数量 n 增长时。在此我们将上述提到的阿贝尔微分和二次微分模空间的Masur–Veech体积的渐近行为方面的最新进展转用到曲线迷宫的渐近计数。作为一个应用，我们计算随机简单闭测地线在亏格 g 带有 n 尖点的双曲曲面上是分离的渐近概率，在尖点数量 n 固定且亏格 g 趋于无穷的机制下，以及在亏格 g 固定而尖点数量 n 趋于无穷的机制下，如第2.3节所述。

我们通过两个附录完成本文。考虑由曲面上亏格为 g的曲流 $\mathcal{G}$ 形成的图。对于固定数量 n 的双边形，由6条及以上边形成的 $S-\mathcal{G}$ 的边界分支总数有上界 $4g-4+n$，且与曲流的交点数 $2N$ 无关。其余所有边界分支恰好由4条边界定。在附录 A中，我们对曲面上亏格为 g、交点数不超过 $2N$ 的曲流的渐近数量进行限制性计数：除了要求曲流在 $S-\mathcal{G}$中具有固定数量 n 的双边形外，还固定 6 边形、8 边形等的数量。

附录B 可能具有独立的研究价值，与曲线迷宫无关。具体而言，我们计算形如 $\sum_k \frac{\binom{a_1n+b_1}{c_1k+d_1}\cdots\binom{a_ln+b_l}{c_lk+d_l}}{\binom{s_1n+t_1}{u_1k+v_1}\cdots\binom{s_mn+t_m}{u_1k+v_m}}$ 的和，其假设为 $\frac{a_1}{c_1}=\cdots=\frac{a_l}{c_1}=\frac{s_1}{u_1}=\cdots=\frac{s_m}{u_m}$并且 $a_1+\cdots+a_l>s_1+\cdots+s_m$。该计算的特殊情况用于第6节。另一个特殊情况使我们能够推导出第6节中使用的Witten–Kontsevich 二点关联函数的和$\sum_{k=0}^{3g-1}\langle\tau_k\tau_{3g-1-k}\rangle_g$ 的大亏格渐近。

致谢。我们感谢 A.Aggarwal、C. McMullen、F. Petrov、A. Zvonkin 提出的有益问题和评论。我们感谢 L. Monk和B.Petri向我们澄清了在亏格或尖点数量增长的不同情形下，双曲曲面的性质所依赖的因素，参见注释 1.3。我们感谢 I. Ren 指出了手稿中的几处排版错误。

2. Transverse multicurves, meanders and arc systems

2.1. 高亏格蜿蜒的计数。在本文中，我们只考虑定向光滑曲面上的简单曲线，其中简单意味着曲线光滑嵌入曲面，即没有自交点、自相切或尖点。在本文中，我们不排除同伦于一点的闭曲线。我们将弧和弦的概念保留给拓扑线段。在我们所有的考虑中，闭曲线位于闭曲面上，而非闭曲线（即弧和弦）位于带边界曲面上，端点在边界分支上且与边界横截。按照惯例，弧的端点可以属于同一或不同的边界分支，而弦的端点必须属于不同的边界分支。多曲线是有限个两两不相交的简单闭曲线的集合。特别地，在本文中我们不使用整数权重来编码多曲线的自由同伦的连通分支。

定义2.1.如果一个有序的多重曲线对满足以下两个条件，我们就称其为连通横截对：多重曲线的所有连通分支对都横截地相交，并且作为两条多重曲线并集得到的图 $\mathcal{G}$ obtained是连通的。如果它将曲面切割成拓扑圆盘，或者等价地，如果图 $\mathcal{G}$ is 是一张地图，则称该对为填充的。

按照约定，连通横截多曲线对中的第一条多曲线称为水平多曲线，第二条称为垂直多重曲线。我们考虑横截多曲线对的自然等价类，其中的等价关系是在保持曲面定向以及水平多曲线和垂直多重曲线不变的微分同胚下定义的。

注记 2.2. 注意，说到“多曲线”时，通常假设多曲线的连通分支既不是可收缩的也不是外围的（即不自由同伦于边界分支）。给定定义 2.1 意义下的连通填充横截多曲线对，在每个双边形处做一个穿孔。我们将在第 4 节中看到，在所得带 puncture 的曲面上，水平（分别垂直）多曲线的每个连通分支既不是可收缩的也不是外围的，因此我们得到通常意义下的多曲线。

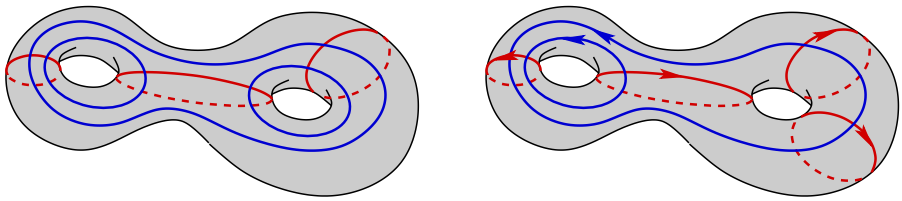


Figure 5. 两组连通的横截多曲线都是填充的，但左侧的一组是不可定向的，而右侧的一组是可定向的。

定义 2.3。若一对横截多曲线中的每条多曲线的每个连通分支都以如下方式定向：水平多重曲线的任意连通分支与垂直多重曲线的任意连通分支的任意单个交点都与曲面的定向一致，则称该横截多曲线对是正定向的（为简洁起见，也称为定向的）。换句话说，水平多重曲线的任意连-通分支与垂直多重曲线的任意连通分支的交数都与交点的朴素计数一致。若一对横截多曲线具有上述结构，则称其为可定向的，否则称其为不可定向的，示例见图 5。

定义 2.4.亏格为 g 的曲流是曲面上亏格为 g的横截简单闭曲线的一个连通对。类似地，亏格为 g 的可定向曲流是曲面上亏格为 g 的横截简单闭曲线的一个可定向连通对（示例见图 5）。固定一个可定向曲流的定向，我们得到一个可定向曲流。亏格为 $g > 0$ 的曲流称为高亏格蜿蜒。

一个可定向曲流允许两种不同的定向，除非存在曲面的微分同胚将曲流发送到自身并反转两条简单闭曲线中每一条的定向。亏格 0 中没有可定向曲线迷宫。

Following 球面上经典蜿蜒曲线数量的记号（这符合传统约定 ns
on count of 方格铺砌曲面在亚纯二次微分的分层中）我们将其记作$\mathrm{M}_{g,n}(N$)

亏格 g 曲线迷宫中交叉点数至多为 $2N$ 且双边形数恰好为 n 的数量，参见定义 (1.1)。将可定向亏格 g 曲线迷宫中交叉点数至多为 N（而不是 $2N$）的数量记为 $\mathrm{M}_g^+(N)$ 会很方便，示例见图 (6)。

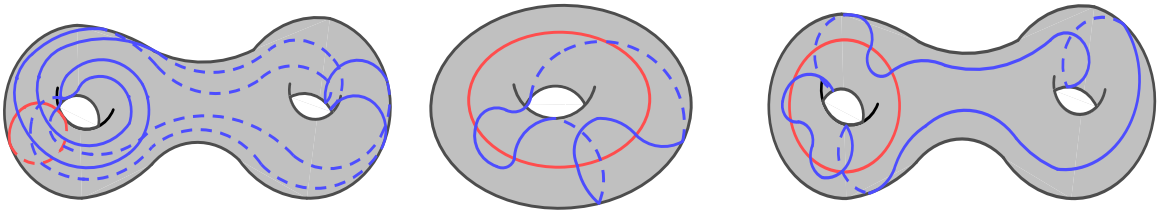


FIGURE 6. 左侧的曲流对 $\mathrm{M}_2^+(4)$ 有贡献；中间的对 $\mathrm{M}^{1,2}(2)$ 有贡献；右侧的对 $\mathrm{M}^{2,4}(3)$ 有贡献。

定理 2.5. 对于任意满足 $2g+n\geq 4$ 的非负数 g 和 n，亏格为 g 的曲面上恰好有 n 个双边形且交叉点至多为 $2N$ 的曲线迷宫的数量 $\mathrm{M}_{g,n}(N)$ 满足以下渐近行为：

$$\mathrm{M}_{g,n}(N)=C_{g,n}N^{6g-6+2n}+o(N^{6g-6+2n})\quad as\ N\to\infty\,, \tag{2.1}$$

with

$$C_{g,n}=\frac{cyl_{1,1}(\mathcal{Q}_{g,n})}{(4g-4+n)!\,n!\,(12g-12+4n)}\,. \tag{2.2}$$

Here

$$cyl_{1,1}(\mathcal{Q}_{g,n})=\frac{\big(cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n})\big)^2}{\mathrm{Vol}\,\mathcal{Q}_{g,n}} \tag{2.3}$$

是 $\pi^{-6g+6-2n}$ 的有理倍数，其中 $\mathrm{Vol}\mathcal{Q}_{g,n}$ 表示二次微分模空间的 Masur–Veech 体积，而 $cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n})$ 表示单带方格铺砌曲面对该体积的贡献。量 $\mathrm{Vol}\mathcal{Q}_{g,n}$ 和 $cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n})$ 分别通过公式 (6.6) 和 (6.20)–(6.24) 用 ψ-类的交数来表示。

如上所述的曲流迷宫中，除去渐近意义下可忽略的一部分，其余几乎全部都是不可定向的、填充的，且仅有双边形面、四边形面和六边形面。

对于任意固定的 g，有

$$C_{g,n}\sim\frac{1}{8\pi^2}\cdot\frac{a_g^2}{\kappa_g}\cdot\frac{1}{n^{\frac{5}{2}g-1}}\cdot\left(\frac{32\cdot e^2}{\pi^2\cdot n^2}\right)^n\ as\ n\to\infty\,; \tag{2.4}$$

其中 a_g 和 κ_g 分别由方程 (6.28) 和 (6.35) 给出。

对于任意固定的 n，有：

$$C_{g,n}\sim\frac{1}{32}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{4}{3g}\right)^{n-\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{2e}{3g}\right)^{4g}\ as\ g\to\infty\,. \tag{2.5}$$

多项式渐近式 (2.1) 以及首项系数由表达式 (2.2) 给出的事实，已在第 5 节中证明。渐近关系 (2.4) 在第 6.3 节末尾证明。渐近关系 (2.5) 在第 6.4 节末尾证明。

这一结果可与以下关于亏格为 g 的曲面上曲线迷宫数量的自然指数界进行比较，其中对双边形的数量没有任何限制：

引理2.6。在亏格为 g 的曲面上恰有 $2N$ 个交叉点的曲流数量 $M_g^{=N}$ 满足以下界：

$$C_N\leq M_0^{=N}\leq M_g^{=N}\leq 2N\cdot p_g(2N+1)\cdot C_{2N+1}\,(1+o(1))\quad as\ N\to+\infty\,,$$

其中，$C_N=\frac{1}{N+1}\binom{2N}{N}$ 是第 N 个卡特兰数，而 p_g 是一个次数为 $3g$ 的显式多项式。

Lemma 2.6 is proven in Section 5.

定理 2.7. 对于任意亏格 $g\geq 1$，至多有 N 个交叉点的定向弯曲线数量 $\mathrm{M}_g^+(N)$ 满足以下渐近行为：

$$\mathrm{M}_g^+(N)=C_g^+N^{4g-3}+o(N^{4g-3})\quad as\ N\to\infty\,, \tag{2.6}$$

其中

$$C_g^+ = \frac{cyl_{1,1}(\mathcal{H}_g)}{(2g-2)!(8g-6)}\,. \tag{2.7}$$

这里 $cyl_{1,1}(\mathcal{H}_g) = \underline{(cyl_1(\mathcal{H}_g))^2}\,\mathrm{Vol}\,\mathcal{H}_g$ 是 $\frac{1}{\pi^{2g}}$ 的有理倍数，其中 Vol $\mathcal{H}_g$ 表示阿贝尔微分模空间的 Masur–Veech 体积 $\mathcal{H}_g$ 并且

$$cyl_1(\mathcal{H}_g) = \frac{1}{2^{2g-4}(4g-2)}$$

是单带方格铺砌曲面对该体积的贡献。

此外， C_g^+ 满足以下渐近行为

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{g^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{e}{4g}\right)^{2g}\left(1+\frac{29+\pi^2}{24g}+O\left(\frac{1}{g^2}\right)\right) \quad as\ g\to\infty\,. \tag{2.8}$$

多项式渐近 (2.6) 以及首项系数由表达式 (2.7) 给出这一事实在第 5 节中得到证明。渐近关系 (2.8) 在第 6.5 节的推论 6.10 中得到证明。

利用曲线迷宫与平坦曲面之间的对应关系，我们对高亏格蜿蜒进行了更详细的计数，不仅固定双边形的数量 n ，还固定六边形、八边形等的数量。该详细计数见附录 A。然而，在最一般的非定向情形中，以目前对二次微分一般分层的 Masur–Veech 体积的了解，我们只能将公式转化为 g 和 n 的小值的实际有理数。

蜿蜒系统。传统上，多曲线表示为本原分量 $\gamma_1,\dots,\gamma_m$ 的加权和 $\gamma = h_1\gamma_1+\cdots+h_m\gamma_m$；这些本原分量在带 puncture 的曲面上两两不自由同伦（见注 2.2），而正整数权重 h_i 表示多曲线 γ 中与本原分量 γ_i 自由同伦的分量数，其中 $i=1,\dots,m$。

多曲线 $\gamma = h_1\gamma_1+\cdots+h_m\gamma_m$ 的连通分支数等于权重 $h = h_1+\cdots+h_m$ 之和，其中 m 为本原分量的数量。

允许垂直多重曲线包含多个连通分支，即可定义蜿蜒系统。近期， [CuKST], [FeT] [FuNe], [GnNP], [Kg] 研究了蜿蜒系统（更多参考文献见这些论文）。 [DGZZ4] 的结果给出了不含任何双边形的蜿蜒系统中本原分量数量 m 的大亏格渐近分布。关于固定双边形数量的零亏格情形， [AEZ1] 以略有不同的表述进行了研究。

The que大亏格中连通分支实际数量 h 的分布问题仍然悬而未决 n, some conjectures about this distribution will be presented in a subsequent paper.

2.2. 从弧系得到曲流的渐近概率。考虑一个横截多曲线对，使得水平多重曲线只是一条简单闭曲线。用这条水平曲线切割曲面，我们得到如图 7 所示的弧系。切割后的曲面有一个或两个连通分支，取决于该简单闭曲线是否分离。

定义2.8。亏格为 g 的平衡弧系是在具有两个边界分支的光滑定向曲面上（一个具有两个边界分支、亏格为 $g-1$ 的单一连通曲面，或两个亏格分别为 g_1、 g_2 且满足$g_1+g_2=g$的连通曲面，每个曲面都具有一个边界分支）的一组有限的光滑两两不相交线段（称为弧），满足以下所有条件：

- the endpoints of all segments are located at the boundary;
- each segment approaches the boundary transversally;
- 线段在一个边界分支上的端点数量与另一个边界分支上的相同（因此等于弧的数量）。

T弧系是填充的，当线段将曲面切割成一组拓扑圆盘时。

本文始终仅考虑平衡弧系，即使未明确说明这一点。

通过一个将弧的端点配对并将其排列成光滑曲线的微分同胚映射，对赋有平衡弧系的曲面的边界分支进行粘合，我们得到一对横截多曲线，其中水平的那条是连通的。我们只采用那些能够得到定向曲面的边界粘合。我们认为，以下问题值得探讨：通过这种构造得到曲流的概率是多少？对于这个问题，我们在平均意义下有如下答案。

在相差一个 沿边界分支的 Dehn 扭转意义下，至多有 k 种不同的粘合方式将这 e
两个边界 ary components of a surface endowed with a balanced arc system containing k arcs, matching g

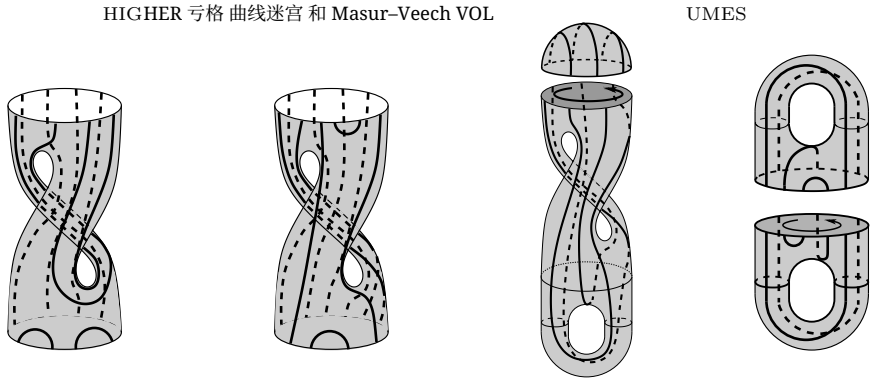


FIGURE 7. 将一个含有大量弧的随机平衡弧系统进行随机识别，会得到一个曲流；对于图中所示的四种弧系中的每一种，其渐近概率都相同且超过 $1/4$，参见例 2.11。

the endpoi弧的端点。（不同粘合的数量少于 k 当弧系统 m admits symmetries.)

固定亏格 g和双边形数量 n。我们总是假设 $2g+n \geq 4$。固定弧数量的上界N。用$\mathrm{AS}_{g,n}(N)$表示所有可能的配对（亏格为 g、含有 n 个双边形和 $k \leq N$ 条弧的平衡弧系；识别）的数量，按自然等价计。用 $\mathrm{MAS}_{g,n}(N)$ 表示其中能够产生曲流的配对数量。定义

$$\mathrm{P}_{g,n}(N) = \frac{\mathrm{MAS}_{g,n}(N)}{\mathrm{AS}_{g,n}(N)}\,.$$

回顾一下 ，按照约定， g 表示将这两条边界分支识别后得到的曲面的亏格 o 边界 分支。

定理 2.9. 在所有此类弧系中，具有 g 个 n 双边形并产生曲线迷宫的亏格为 g 的平衡弧系所占比例有一个极限值

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_{g,n}(N) = \mathrm{P}_{g,n}\,, \tag{2.9}$$

该极限值与单带方格铺砌曲面对 Masur– Veech 体积 $\mathrm{Vol}\mathcal{Q}_{g,n}$的相对贡献 $p_1(\mathcal{Q}_{g,n})$ 相同。该量

$$\mathrm{P}_{g,n} = p_1(\mathcal{Q}_{g,n}) = \frac{cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n})}{\mathrm{Vol}\,\mathcal{Q}_{g,n}} \tag{2.10}$$

是 $\pi^{-6g+6-2n}$ 的有理倍数，其中 $\mathrm{Vol}\mathcal{Q}_{g,n}$ 表示二次微分模空间的 Masur–Veech 体积，而 $cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n})$ 表示单带方格铺砌曲面对该体积的贡献。量 $\mathrm{Vol}\mathcal{Q}_{g,n}$ 和 $cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n})$ 分别由公式 (6.6) 和 (6.20)–(6.24) 表示为ψ-类的交数。

此外，对于 g 的任意固定值，我们有

$$p_1(\mathcal{Q}_{g,n}) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{a_g}{\kappa_g} \cdot n^{\frac{g-1}{2}} \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^n \quad as\ n \to \infty\,, \tag{2.11}$$

其中 a_g 和 κ_g 分别由方程 (6.28) 和 (6.35) 给出。

对于任意固定的 n:

$$p_1(\mathcal{Q}_{g,n}) \sim \frac{\sqrt{6\pi}}{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}}\,, \quad as\ g \to \infty\,. \tag{2.12}$$

极限 $\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_{g,n}(N)$ 的存在性及其取值的表达式 (2.10) 在第 5 节末尾得到证明。渐近关系 (2.11) 和 (2.12) 分别在推论 6.7 和 6.9 中得到证明。

公式 (6.6) 和 (6.20)–(6.24) 关于$\mathrm{Vol}\mathcal{Q}_{g,n}$ 以及 $cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n})$导出了任意固定亏格 g 关于 n的闭式表达式。例如，

$$p_1(\mathcal{Q}_{0,n}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi^2}\right)^{n-3}\binom{2n-4}{n-2},$$

$$p_1(\mathcal{Q}_{1,n}) = \frac{2}{\pi^{2n}} \cdot \frac{4\cdot\binom{2n-2}{n-1} + \frac{1}{48}\cdot\binom{2n-1}{n-2} - \frac{n^2-n+2}{96}}{\frac{n!}{(2n-1)!!} + \frac{2n}{(2n-1)2^n}}.$$

我们可以选择一种设置，在其中我们考虑如上所述的弧系子集，它们共享更受限的拓扑。即，当 g 严格为正时，我们可以分别考虑亏格为$g-1$ 且具有两个边界分支的曲面上的弧系，如图 7 中左侧两幅图所示。我们还可以固定将 n 极小弧分拆为 $n_1 \geq 0$ 条与第一边界分支相邻的弧和 $n_2 \geq 0$ 条与第二边界分支相邻的弧，其中 $n_1+n_2=n$。如果 $g=1$，我们假设 $n \geq 2$ 并且 $n_i \geq 1$ 对于$i=1$，2。固定如上所述的 g、n_1、n_2 以及弧数的界限 N，用 $\mathrm{AS}_{g,n_1,n_2}(N)$ 表示所有可能的对（在亏格为 $g-1$ 且具有两个边界分支的连通曲面上，具有至多 $k \leq N$ 条弧的平衡弧系，在第 i个边界分支处有 n_i 个双边形，其中$i=1$，2；识别）的数量，这些对在自然等价下考虑。用 $\mathrm{MAS}_{g,n_1,n_2}(N)$ 表示那些产生曲流的对的数量。定义

$$\mathrm{P}_{g,n_1,n_2}(N) = \frac{\mathrm{MAS}_{g,n_1,n_2}(N)}{\mathrm{AS}_{g,n_1,n_2}(N)}\,.$$

或者，我们可以选择任意非负整数 g_1, g_2 使得 $g_1+g_2=g$ 并考虑亏格分别为 g_1 和 g_2 的两个连通曲面，每个曲面都有一个单一边界分支，如图 7 右侧两幅图所示。我们也可以考虑将 n 分成非负整数有序和的任意分拆 $n_1+n_2=n$，满足以下条件：如果 $g_i=0$，对于 $i=1$ 中的任意一个，2，则 $n_i \geq 2$。用 $\mathrm{AS}_{g\ n_1,,}^{g_2\ n_2}(N)$ 表示所有可能的对（在具有亏格为 g_1 和 g_2 的两个连通分支的曲面上的平衡弧系，每个分支有一个单一边界分支，第一个分支上有 n_1 个双边形，第二个分支上有 n_2 个双边形，并有 $k \leq N$ 条弧；等同）的数目，在自然等价下考虑。用 $\mathrm{MAS}_{g\ n_1,,}^{g_2\ n_2}(N)$ 表示那些产生曲流的对的数目。定义

$$\mathrm{P}_{g_1,n_1}^{g_2,n_2}(N) = \frac{\mathrm{MAS}_{g,n_1}^{g_2,n_2}(N)}{\mathrm{AS}_{g,n_1}^{g_2,n_2}(N)}\,.$$

定理 2.10. 对于满足上述条件的任意 g, n, g_1, g_2, n_1, n_2，有

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_{g,n_1,n_2}(N) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_{g_1,n_1}^{g_2,n_2}(N) = \mathrm{P}_{g,n}\,, \tag{2.13}$$

定理 2.10 在第 5 节末证明。

例 2.11. 考虑图 7 中示意展示的四种类型之一的随机平衡弧系。实际上，弧的数量应远多于图中所示，但在这四种情形中，两个极小弧的位置应保持不变。定理 2.10 特别指出，随机识别这种弧系的边界分支后，我们得到曲流的渐近概率为

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_{2,2,0}(N) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_{2,1,1}(N) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_{1,1}^{1,1}(N) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_{0,2}^{2,0}(N)\,\mathrm{P}_{2,2} = \frac{9\,230\,760}{337\cdot\pi^{10}} \approx 0.292489$$

对于图 7 所示的四种弧系类型，情况均如此。由公式 (2.10) 给出的 $\mathrm{P}_{2,2}$ 的数值，使用了通过公式 (6.6) 计算得到的 $\mathrm{Vol}\,\mathcal{Q}_{2,\ 2} = \frac{337}{18144}\pi^{10}$ 的值，以及通过公式 (6.24) 计算得到的值$cyl_1(\mathcal{Q}_{2,\ 2}) = \frac{2035}{4}$。

定向弧系统（弦的集合）。考虑一个带有连通横截多曲线对的闭合定向曲面，其中水平多重曲线是一条简单闭曲线。沿水平曲线切开曲面，我们得到一个定向弧系统，或者等价地说，一组互不相交的弦；每条弦都连接两个边界分支，如图 4 所示。反过来，若有一个带两个边界分支的连通定向曲面，以及一组互不相交、横截地延伸至边界分支并连接它们的弦，我们可以将边界分支粘合起来，使弦的端点彼此对应，从而得到一个连通横截多曲线对，其中水平多重曲线是一条简单闭曲线。根据构造，所得横截多曲线对总是可定向的。选定水平曲线或任意一条弦的定向后，就能唯一确定所得多曲线对的定向。与前面一样，当有 k 条弦时，将两个边界分支粘合并使弧的端点对应，在模去沿边界分支的 Dehn 扭转后，至多有 k 种不同的粘合方式。如果弧系具有对称性，则不同粘合方式的数量小于 k。

固定具有两个边界分支的连通定向曲面的亏格 $g-1$，以及弦数的上界 N。记 $\mathrm{AS}_g^+(N)$ 为所有可能的配对数（亏格为 $g-1$ 的曲面上至多含 N 条弦的定向弧系统；按等价关系识别），记 $\mathrm{MAS}_g^+(N)$ 为上述配对中能够产生曲流的配对数。定义

$$\mathrm{P}_g^+(N) = \frac{\mathrm{MAS}_g^+(N)}{\mathrm{AS}_g^+(N)}\,.$$

定理 2.12. 在所有此类弧系中，能够产生定向曲流的亏格为 g 的定向弧系统所占比例满足

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_g^+(N) = \mathrm{P}_g^+ \,. \tag{2.14}$$

Here

$$\mathrm{P}_g^+ = p_1(\mathcal{H}_g) = \frac{cyl_1(\mathcal{H}_g)}{\operatorname{Vol}\mathcal{H}_g} \tag{2.15}$$

是 π^{-2g} 的有理倍数，其中 $\operatorname{Vol}\mathcal{H}_g$ 表示阿贝尔微分模空间的 Masur–Veech 体积，而 $cyl_1(\mathcal{H}_g) = \frac{1}{(2g-1)\cdot 2^{2g-3}}$ 表示单带方格铺砌曲面对该体积的贡献。

此外，

$$p_1(\mathcal{H}_g) = \frac{1}{4g}\left(1 + \frac{12+\pi^2}{24g} + O\left(\frac{1}{g^2}\right)\right) \quad as\ g \to +\infty\,. \tag{2.16}$$

极限 $\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_g^+(N)$ 的存在性及其取值的表达式 (2.15) 在第 5 节末尾得到证明。渐近关系 (2.16) 在第 6.5 节的推论 6.10 中得到证明。

2.3. 带尖点双曲曲面上的简单闭测地线计数。现在我们转向一个关于双曲曲面上闭测地线的不同问题；我们能够运用本文发展的技术解决这一问题。关于该问题与 Masur–Veech 体积计算之间关系的更多细节，请参见 [DGZZ3] 。

M. Mirzakhani 在 [Mi2] 中计数了亏格为 g 且有 n 个尖点的双曲曲面上简单闭测地线（更一般地，简单闭测地线多重曲线）的渐近频率。我们区分非分隔简单闭测地线和分离型简单闭测地线。在后一种情况下，我们计数所有分离型简单闭测地线，无论亏格为 g 且有 n 个尖点的曲面分解成亏格为 $g_1+g_2=g$ 的两个子曲面的结果如何，也无论尖点如何在两个子曲面之间分拆。记 $c_{g,n,\mathrm{sep}}$ 和 $c_{g,n,\mathrm{nonsep}}$ 为相应的 Mirzakhani 频率。

我们对曲线迷宫的渐近计数，在两个参数 g、n 中一个固定而另一个趋于无穷的情形下，蕴含以下两个关于简单闭双曲测地线渐近计数的结果（即定理 2.13 和 2.15）。

定理2.13。在亏格为 $g=1$ 、带有 n 个尖点的闭双曲曲面上，分离型简单闭测地线与非分离型简单闭测地线的频率比具有如下渐近行为：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{1,n,\mathrm{sep}}}{c_{1,n,\mathrm{nonsep}}} = \frac{1}{6}\,. \tag{2.17}$$

亏格为 $g\geq 2$ 、有 n 个尖点的闭双曲曲面上，分离型简单闭测地线与非分离型简单闭测地线的出现频率之比如下渐近：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{g,n,\mathrm{sep}}}{c_{g,n,\mathrm{nonsep}}} = \frac{1}{12^g\cdot g!\cdot \sum_{k=0}^{3g-4}\langle \tau_k\tau_{3g-4-k}\rangle_{g-1}}\,, \tag{2.18}$$

其中，$\langle \tau_k\tau_{3g-4-k}\rangle_{g-1}$ 是可通过公式 (6.12)–(6.14) 递归计算的 Witten–Kontsevich 关联函数。

注 2.14。M. Mirzakhani 证明了比值 $\frac{c_{g,n,\mathrm{sep}}}{c_{g,n,\mathrm{nonsep}}}$ 对所有亏格为g 且有 n 个尖点的双曲曲面都相同，见 [Mi2, 推论 1.4]。特别地，取一个非常对称的毛环面，其标记点位于你最喜欢的椭圆曲线的 n^2 挠点上，如 [Br, 第 5 节.3]中的例子；或者取任意其他随机选取的、具有非常多尖点的毛环面，一条随机简单闭测地线恰好是分离的，其渐近概率也相同，为 $\frac{1}{7}$。

g	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{882}$	$\frac{35}{28344}$	$\frac{7}{25218}$	$\frac{77}{1210716}$	$\frac{143}{9686190}$	$\frac{715}{206641008}$	$\frac{12155}{14878191186}$

TABLE 1. $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{g,n,\mathrm{sep}}}{c_{g,n,\mathrm{nonsep}}}$ 在 $g=1,\ldots,9$ 中的取值。

注意，尽管对于任意固定的 g，我们都能得到一个非零极限，但当 g 增大时，(2.18) 右端会迅速减小。表 1 给出了小亏格 g 时，(2.18) 右端表达式的精确值。

附录 B.3 中 (B.14) 计算得到的亏格 g 下二点关联函数之和的渐近值，蕴含了 (2.18) 右端表达式的以下渐近行为：

$$\frac{1}{12^g \cdot g! \cdot \sum_{k=0}^{3g-4} \langle \tau_k \tau_{3g-4-k} \rangle_{g-1}} \sim \frac{2}{\sqrt{3\pi g}} \cdot \frac{1}{4^g} \quad \text{as } g \to +\infty\,. \tag{2.19}$$

下述定理描述了比值 $c_{g,\overline{c_{g\ n}}^{\ n\ \mathrm{sep}},,,\mathrm{nonsep}}$ 在补集情形下的渐近行为，此时尖点的数量 n 固定且 $g \to +\infty$。

定理2.15。对于任意固定数量的 $n \geq 0$ 个尖点，在亏格为 g 的闭双曲曲面上，分离简单闭测地线与非分离简单闭测地线的频率之比具有如下渐近行为：

$$\frac{c_{g,n,\mathrm{sep}}}{c_{g,n,\mathrm{nonsep}}} \sim \sqrt{\frac{2}{3\pi g}} \cdot \frac{1}{4^g} \quad as\ g \to +\infty\,. \tag{2.20}$$

特别是，只要固定了 n，它就不依赖于 n。

定理 2.15 在第 6.4 节中得到证明。

从直观上说，渐近行为 (2.19) 表示比值 $c_{g,\overline{c_{g\ n}}^{\ n\ \mathrm{sep}},,,\mathrm{nonsep}}$ 在 $1 \ll g \ll n$ 的情形下，而渐近行为 (2.20) 表示比值 $c_{g,\overline{c_{g\ n}}^{\ n\ \mathrm{sep}},,,\mathrm{nonsep}}$ 在 $1 \ll n \ll g$的情形下。所得的渐近行为相差一个因子 $\sqrt{2}$。数值模拟表明，以下猜想性的统一渐近行为成立：

猜想 2.16.[1]在带有 n 个尖点的亏格为 g 的闭双曲曲面上，分离型简单闭测地线与非分离型简单闭测地线的频率比具有如下统一渐近行为：

$$\frac{c_{g,n,\mathrm{sep}}}{c_{g,n,\mathrm{nonsep}}} = \sqrt{\frac{2}{3\pi g}} \cdot \frac{1}{4^g} \cdot f\left(\frac{n}{g}\right)\left(1 + \varepsilon(g,n)\right), \tag{2.21}$$

其中函数 $f\colon [0;+\infty] \to \mathbb{R}$ 是连续的，并从 $f(0) = 1$ 单调增加至 $f(\infty) = \sqrt{2}$，且误差项 $\varepsilon(g,n)$ 在 $g \to +\infty$ 时关于 n一致趋于 0。

注 2.17。上述猜想声称，$c_{g,\overline{c_{g\ n}}^{\ n\ \mathrm{sep}},,,\mathrm{nonsep}}$ 对比值 $\frac{n}{g}$ 的依赖，对于任意大亏格双曲曲面而言都是适度的。简单闭测地线渐近频率的这种行为，是其拓扑性质的又一种体现，这与几何量形成对比；对于后者，$n^2 \ll g$ 和 $n^2 \gg g$ 这两种情形存在巨大差异。例如，根据A. Aggarwal [Ag2、定理1.5 以及注 1.6]，的结果，在情形 $n^2 \ll g$ 下，归一化的 Witten–Kontsevich关联函数与 1 统一接近，而在补集情形下可能呈指数级爆炸。类似地，根据YangShen 和Yunhui Wu [ShWu] 的结果，对于情形 $n^2 \gg g$ 下的 Weil–Petersson随机双曲曲面，谱隙消失（至少在额外技术假设下如此）。更多细节请参见注 1.3 中引用的结果。

3. Square-tiled surfaces and Masur–Veech volumes

在本节中，我们回顾有关方格铺砌曲面计数的相关信息。在下一节第4 节中，我们将用某些特殊方格铺砌曲面的计数来表示高亏格蜿蜒的计数，并推导出第 2节中宣布的那些结果；这些结果涉及当前章节结果中的任意固定 g and n 。

3.1. 二次微分模空间的 Masur–Veech 体积。考虑由 g 个亏格为 g 的复曲线以及带有 n 个互不相同的已标记标记点组成的模空间 $\mathcal{M}_{g,n}$ 。余切丛在 $\mathcal{M}_{g,n}$ 上的全空间 $\mathcal{Q}_{g,n}$ 可识别为由二元组 (C,q) 构成的模空间，其中 $C \in \mathcal{M}_{g,n}$ 是一条带有 n 个（已标记）标记点的光滑复曲线，而 q 是定义在 C 上的亚纯二次微分，在标记点处至多有简单极点，且无其他极点。当 $n = 0$ 时，二次微分 q 是全纯的。因此，二次微分模空间 $\mathcal{Q}_{g,n}$ 具有典范的实辛结构。由此诱导的 $\mathcal{Q}_{g,n}$ 上的体积元 $d\mathrm{Vol}$ 称为 Masur–Veech 体积元。

非零二次微分 q 属于 $\mathcal{Q}_{g,\ n}$ 在复曲线 C上定义了平坦度量 $|q|$ 。由此得到的度量在 q的零点和简单极点处具有锥形奇点。(C,q)的总面积

$$\mathrm{Area}(C,q) = \int_C |q|$$

[1]该猜想由 I. Ren [R] 在本文准备工作的最后阶段证明。I. Ren 和作者独立发现的函数具有形式 $f(t) = \sqrt{\frac{6+2t}{6+t}}$。

为正且有限。对于任意实数 $a > 0$，考虑 $\mathcal{Q}_{g,n}$ 中的以下子集：

$$\mathcal{Q}_{g,n}^{\mathrm{Area}\le a} := \{(C,q) \in \mathcal{Q}_{g,n} \mid \mathrm{Area}(C,q) \le a\}\ .$$

由于 $\mathrm{Area}(C,q)$ 是丛 $\mathcal{Q}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g,n}$ 每个纤维中的范数，集合 $\mathcal{Q}_{g\ n}^{\mathrm{Area}\le a}$,是 $\mathcal{M}_{g,n}$ 上的球丛。特别地，它是非紧的。然而，根据 H. Masur [Ma] 和 W. Veech [Ve], 的独立结果，$\mathcal{Q}_{g\ n}^{\mathrm{Area}\le a}$, 关于 Masur–Veech 体积元的总质量是有限的。

3.2.方格铺砌曲面。可以通过以下方式将相同的平面正方形拼接在一起，从而构造出一个离散的二次微分集合。取有限个定向的$1/2 \times 1/2$-正方形副本，其中选择一对相对的边作为水平边，并将剩下的两条边声明为垂直边。通过等距变换识别正方形的边对，使水平边与水平边粘合，垂直边与垂直边粘合。我们得到一个无边界的拓扑曲面 S。我们只考虑以这种方式得到的、连通且定向的曲面。总面积 $\mathrm{Area}(S,q)$ 是 $1\ 4$ 乘以正方形数量。我们将这样的曲面称为方格铺砌曲面。

考虑每个方格中的复坐标 z 以及一个二次微分 $(dz)^2$。容易验证，由此得到的方格铺砌曲面继承了复结构以及全局定义的亚纯二次微分 q，该微分在所有角度为 π 的锥形奇点处具有简单极点，且没有其他极点。因此，任何亏格为 g、具有 n 个角度为 π 的锥形奇点的方格铺砌曲面，都规范地定义了一个点 $(C,\ q) \in \mathcal{Q}_{g,\ n}$（在为锥形奇点编号之后）。将方格的大小固定下来，并考虑 $\mathcal{Q}_{g,\ n}$ 中所有由此得到的方格铺砌曲面，我们在 $\mathcal{Q}_{g,\ n}$ 中得到一个离散子集 $\mathcal{SL}_{g,\ n}$。

给定一个整数序列 $\mu = [\mu_1 \dots \mu_m, \mu_{m+1} \dots \mu_{m+n}]$，其中 $[\mu_1 \dots \mu_m]$ 是 $4g-4+n$ 和 $\mu_{m+1} = \dots = \mu_{n+m} = -1$的一个分拆，对应的二次微分分层 $\mathcal{Q}(\mu)$ 是由以下成对对象的等价类构成的空间：一条复曲线 C，带有 $m+n$ 个互不相同的标记点z_1，…，z_m，p_1，…，p_n 以及一个二次微分 q，其因子为 $\sum_{i=1}^m \mu_i z_i - \sum_{j=1}^n p_j$（$q$ 的零点和极点均被视为带有标记）。

对于满足 $2g+n>3$的任意一对非负整数(g,n)，至多具有简单极点的亚纯二次微分的主分层为 $\mathcal{Q}(1^{4g-4+n}, -1^n)$（即 $\mu = [1^{4g-4+n}, -1^n]$）。自然态射 $\mathcal{Q}(1^{4g-4+n}, -1^n) \to \mathcal{Q}_{g,n}$ 忘记了对 q 的零点进行标记，是其在 $\mathcal{Q}_{g,n}$ 中的像的一个 $(4g-4+n)!$-重分歧覆盖。此外，该像在 $\mathcal{Q}_{g,n}$ 中是开且稠密的。

将 $\mathcal{SL}_{g,n}(N) \subset \mathcal{SL}_{g,n}$ 定义为由至多 N 个相同正方形组成的、位于 $\mathcal{Q}_{g,n}$ 中的方格铺砌曲面子集。分层通过周期坐标获得了自然的局部线性结构。在每个分层中，方格铺砌曲面在周期坐标下构成一个格。将该格的基本域的体积归一化为1，便可由此格在分层中定义一个自然的体积元。对于主分层，所得体积元与从 $\mathcal{Q}_{g,n}$ 上的自然辛结构诱导的体积元相差一个仅取决于 g 和 n 的常数因子。这为以下关于 $\mathcal{Q}_{g,\ n}$ 的 Masur–Veech 体积的约定定义提供了依据（对于 $2g+n \ge 4$）：

$$\mathrm{Vol}\,\mathcal{Q}_{g,n} := \mathrm{Vol}\,\mathcal{Q}(1^{4g-4+n}, -1^n) = 2d \cdot \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathrm{card}\,(\mathcal{SL}_{g,n}(2N))}{N^d}\,, \tag{3.1}$$

where

$$d = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{g,n} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}(1^{4g-4+n}, -1^n) = 6g-6+2n\,. \tag{3.2}$$

我们强调，在上述公式中，我们假设方格铺砌曲面的所有锥形奇点都已标记。

$\mathcal{SL}_{g,n}(2N)$ 中方格铺砌曲面子集的基数，这些曲面属于不同于主分层的分层，当 $N \to +\infty$ 时可以忽略不计，因此将计数限制在主分层 $\mathcal{Q}(1^{4g-4+n}, -1^n)$ 中的方格铺砌曲面不会改变上述极限。我们用 $\mathcal{SL}(\mathcal{Q}(\mu)\ N) \subset \mathcal{SL}_{g,n}(N)$ 表示 $\mathcal{Q}(\mu) \subset \mathcal{Q}_{g,n}$ 用至多 N 个相同正方形铺砌的方格铺砌曲面子集。

我们承认，定义 (3.1) 中使用的某些约定可能显得出人意料。例如，$\mathcal{SL}_{g,n}(2N)$中的方格铺砌曲面由至多 $2N$ 个正方形组成，而我们将该集合的基数归一化为 N^d。此外，正如我们已经提到的，主分层 $\mathcal{Q}(1^{4g-4+n}, -1^n)$ 是一个 $(4g-4+n)!$ 重覆盖，覆盖 $\mathcal{Q}_{g,n}$ 中的一个开且稠密子空间。然而，(3.1) 中的归一化沿用了包括 [Ag2], [ADGZZ], [AEZ2], [CMS], [DGZZ3], [Gj] 在内的文献中的归一化方式。DGZZ2，附录 A] 中比较了各种自然的归一化方式。

3.3. 阿贝尔方格铺砌曲面。全空间 $\mathcal{H}_g$ Hodge丛在 $\mathcal{M}_g$ 上的可以等同于对(C,ω)的模空间，其中 $C \in \mathcal{M}_g$ 是亏格为 g 的光滑复曲线，而 ω 是 C上的全纯 1-形式（第一类阿贝尔微分）。与二次微分的情况一样，模空间 $\mathcal{H}_g$是分层的，每个分层 $\mathcal{H}(\mu)$，其中 μ 是 $2g-2$的分拆，具有由周期坐标定义的局部线性结构。

也可以构造阿贝尔方格铺砌曲面 $\mathcal{ST}_g^{Ab}$位于 $\mathcal{H}_g$中。这次我们考虑来自标准欧几里得平面正象限的单位正方形 $0 \leq x, y \leq 1$ 的副本。为了得到阿贝尔方格铺砌曲面，我们不仅将正方形的水平边与水平边、竖直边与竖直边粘合，而且还要尊重这些边从坐标轴(Ox)和(Oy)继承的定向。我们用 $\mathcal{ST}_g^{Ab}(N) \subset \mathcal{ST}_g^{Ab}$ 表示 $\mathcal{H}_g$中用至多 N个相同正方形铺砌的阿贝尔方格铺砌曲面子集，用 $\mathcal{ST}^{Ab}(\mathcal{H}(\mu)\ N)$表示分层 $\mathcal{H}(\mu)$中用至多 N 个相同单位正方形铺砌的阿贝尔方格铺砌曲面子集。按照惯例，我们总是标记所有阿贝尔微分的零点（从而标记方格铺砌曲面的所有圆锥点）。

与二次微分的情形一样，维数为 $d = \dim \mathcal{H}_g$ 的唯一分层（称为主分层）是仅含单零点的阿贝尔微分分层。我们有

$$\operatorname{card}(\mathcal{ST}_g^{Ab}(N)) - \operatorname{card}(\mathcal{ST}^{Ab}(\mathcal{H}(1^{2g-2}), N)) = o(N^d) \quad \text{as} \quad N \to +\infty\,,$$

其中 $d = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_g = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(1^{2g-2}) = 4g-3$。

与二次微分的情形一样，方格铺砌曲面在周期坐标中构成一个格。这个格为 Masur–Veech 体积元提供了规范归一化。Masur–Veech 体积 $\operatorname{Vol} \mathcal{H}_g$ 定义为

$$\operatorname{Vol} \mathcal{H}_g = 2d \cdot \lim_{N \to +\infty} \frac{\operatorname{card}(\mathcal{ST}_g^{Ab}(N))}{N^d}\,. \tag{3.3}$$

对于每个 $g \in \mathbb{N}$，式 (3.3) 中存在有限且严格为正的极限，这是一个非平凡结论，由 H. Masur [Ma] 和 W. Veech [Ve] 的独立研究得出。[Zor1] 通过计数方格铺砌曲面，计算了若干低维阿贝尔微分分层的 Masur–Veech 体积。A. Eskin 和 A. Okounkov 首次提出了计算阿贝尔微分分层的 Masur–Veech 体积的高效算法；他们在 [EO1] 中利用了相关生成函数的拟模性。

3.4. 单带方格铺砌曲面的计数。对于本文而言，我们区分以下类型的方格铺砌曲面。若奇异水平叶并集的补集是连通的，则称该方格铺砌曲面具有单个水平圆柱。显然，该补集是一个由正方形铺砌而成的平坦圆柱。我们特别区分这样一种情形：此外，这个单个水平圆柱由一条单独的水平正方形带组成。

我们在 [DGZZ1]–[DGZZ3] 中对 $k = 1,2,\ldots$的 k-圆柱方格铺砌曲面进行了计数。[DGZZ1] 详细讨论了阿贝尔情形下单圆柱方格铺砌曲面的计数，而 [DGZZ3] 则讨论了二次情形下的计数。下面总结相关结果。

定理 3.1（[DGZZ1]–[DGZZ3]）。模空间 $\mathcal{Q}_{g,n}$ 中带标记的零点和极点的方格铺砌曲面中，由至多 $2N$ 个正方形铺成且排列成单个水平正方形带的曲面数量 $\operatorname{card}\left(\mathcal{ST}_1(\mathcal{Q}_{g,n}, 2N)\right)$ 的渐近行为为

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{ST}_1(\mathcal{Q}_{g,n}, 2N)\right) = cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n}) \cdot \frac{N^d}{2d} + O(N^{d-1}) \quad as \quad N \to +\infty\,, \tag{3.4}$$

其中 $d =$维数$_{\mathbb{C}}\, \mathcal{Q}_{g,\ n} = 6g-6+2n$ 且系数 $cyl_1(\mathcal{Q}_{g,\ n})$ 是一个正有理数，可由 Witten–Kontsevich 二点关联函数通过公式 (6.17) 表示。

模空间 $\mathcal{Q}_{g,\ n}$ 中，铺有带标记的零点和极点、且由至多 $2N$ 个正方形组成单个水平圆柱的方格铺砌曲面的数量，其渐近行为为

$$c_1(\mathcal{Q}_{g,n}) \cdot \frac{N^d}{2d} + O(N^{d-1}) \quad as \quad N \to +\infty\,,$$

其中系数 $c_1(\mathcal{Q}_{g,\ n})$ 满足关系式

$$c_1(\mathcal{Q}_{g,n}) = \zeta(6g-6+2n) \cdot cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n})\,. \tag{3.5}$$

多项式渐近 (3.4) 的存在性已在 [DGZZ2 的推论 4.25] 中得到证明。系数 $cyl_1(\mathcal{Q}_{g,\ n})$ 是由公式 (6.17) 给出的正有理数，这一事实包含在 [DGZZ3] 中定理 4.2 和命题 4.4 的证明里。为完整起见，我们在第 6.2 节的引理 6.3 中给出该公式的显式证明。最后，关系式 (3.5) 是 [DGZZ3 的公式 (1.14) 和引理 1.32] 的直接推论。

定理 3.2 ([DGZZ1], [DGZZ2]). 模空间 $\mathcal{H}_g$ 中带标记零点的方格铺砌曲面的数量 $\operatorname{card}\left(\mathcal{ST}_1^{Ab}(\mathcal{H}_g, N)\right)$，这些曲面用至多 N 个正方形铺砌并组织成单个水平带

正方形具有渐近行为

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{ST}_1^{Ab}(\mathcal{H}_g,N)\right)=cyl_1\left(\mathcal{H}_g\right)\cdot\frac{N^d}{2d}+O(N^{d-1})\quad as\quad N\to+\infty\,, \tag{3.6}$$

其中 $d=\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_g=4g-3$ 且

$$cyl_1\left(\mathcal{H}_g\right)=\frac{1}{(2g-1)\cdot 2^{2g-3}}\,. \tag{3.7}$$

模空间 $\mathcal{H}_g$ 中带标记的零点、且用至多 N 个正方形铺砌并组织成单个水平圆柱的方格铺砌曲面的数量具有渐近行为

$$c_1(\mathcal{H}_g)\cdot\frac{N^d}{2d}+O(N^{d-1})\quad as\quad N\to+\infty\,,$$

其中系数 $c_1(\mathcal{H}_g)$ 满足关系

$$c_1(\mathcal{H}_g)=\zeta(4g-3)\cdot cyl_1(\mathcal{H}_g)\,. \tag{3.8}$$

多项式渐近 (3.6) 的存在性在 [DGZZ2, 推论 4.25] 中得到证明。系数 $cyl_1(\mathcal{H}_g)$ 是由公式 (3.7) 给出的正有理数这一事实以及关系 (3.8) 是 [DGZZ1, 推论 2.6] 中方程 (2.4) 与 [DGZZ1, 推论 2.6] 之前两段的结合。

与二次微分的情况一样，阿贝尔方格铺砌曲面的所有正方形组织成单个水平圆柱的条件等价于奇异水平叶的补集是连通的条件。通过对称性论证，我们得到相同的渐近行为 (3.4) 和 (3.6)，以及相同的常数，用于具有单个垂直（而非水平）正方形带的方格铺砌曲面的数量。

接下来的陈述给出了仅由一条水平正方形带和一条垂直正方形带组成的方格铺砌曲面的计数。

定理 3.3（[DGZZ2]）。考虑模空间 $\mathcal{Q}_{g,n}$ 中带有标记零点和极点的方格铺砌曲面 $\mathcal{ST}_{g,n}$。考虑其中由至多 $2N$ 个正方形铺砌，且同时仅由一条水平正方形带和一条垂直正方形带组成的方格铺砌曲面所构成的子集 $\mathcal{ST}_{1,1}(\mathcal{Q}_{g,n},2N)\subset\mathcal{ST}_{g,n}$。那么

$$\operatorname{card}(\mathcal{ST}_{1,1}(\mathcal{Q}_{g,n},2N))=cyl_{1,1}\left(\mathcal{Q}_{g,n}\right)\cdot\frac{N^d}{2d}+o\left(N^d\right)\ \ as\ N\to+\infty\,, \tag{3.9}$$

其中常数 $cyl_{1,1}(\mathcal{Q}_{g,n})$ 满足以下关系：

$$cyl_{1,1}\left(\mathcal{Q}_{g,n}\right)=\frac{\left(cyl_1\left(\mathcal{Q}_{g,n}\right)\right)^2}{\operatorname{Vol}\mathcal{Q}_{g,n}}\,, \tag{3.10}$$

常数 $cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n})$ 和 d 与定理 3.1 中的常数相同。

现在给出阿贝尔方格铺砌曲面的计数。

定理 3.4（[DGZZ2]）。考虑模空间 $\mathcal{H}_g$ 中带有标记零点的阿贝尔方格铺砌曲面 $\mathcal{ST}_g^{Ab}$。考虑其中由至多 N 个正方形铺砌，且同时仅由一条水平正方形带和一条垂直正方形带组成的阿贝尔方格铺砌曲面所构成的子集 $\mathcal{ST}_{1\,1}^{Ab}(\mathcal{H}_g,N)\subset\mathcal{ST}_{g,n}$。那么

$$\operatorname{card}(\mathcal{ST}_{1,1}^{Ab}(\mathcal{H}_g,N))=cyl_{1,1}\left(\mathcal{H}_g\right)\cdot\frac{N^d}{2d}+o\left(N^d\right)\ \ as\ N\to+\infty\,, \tag{3.11}$$

其中常数 $cyl_{1,1}(\mathcal{H}_g)$ 满足以下关系：

$$cyl_{1,1}\left(\mathcal{H}_g\right)=\frac{\left(cyl_1(\mathcal{H}_g)\right)^2}{\operatorname{Vol}\mathcal{H}_g}\,, \tag{3.12}$$

而常数 cyl_1（$\mathcal{H}_g$）和 d 是定理 3.2 中的那些常数。

定理 3.3 和定理 3.4 在 [DGZZ2, 推论 4.25] 中得到证明。

4. Dictionary of square-tiled surfaces

在本节中，我们将高亏格蜿蜒的计数简化为方块铺砌曲面的计数，并证明当交点数量变大时，非填充曲线极为罕见。

设 $\mathcal{G}$ 为由一个连通横截多曲线对之并所定义的图。图 $\mathcal{G}$ 嵌入曲面 S中。考虑 $\mathcal{G}$ 在 S中的一个充分小的闭管状邻域 G 。将拓扑圆盘粘贴到带边界曲面 G的所有边界分支上，所得闭曲面记为 S' 。根据定义，若初始横截多曲线对是填充的（即若 $\mathcal{G}$ 是一个地图），则得到原曲面：此时 S' 与 S同胚。否则，曲面 S' 的亏格严格较小。例如，如图8所示，亏格为六的曲面上的一对非填充简单闭曲线会得到一个亏格为二的曲面 S' 。

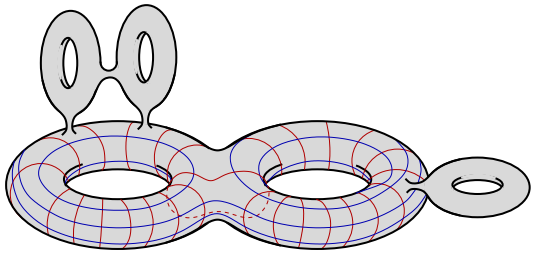


Figure 8. 非填充横截多曲线对。

根据构造， $\mathcal{G}$ 是 S'中的一张地图。 $\mathcal{G}$ 的顶点是多重曲线的交点，因此， $\mathcal{G}$ 的所有顶点的度都是4。因此， S' 中的对偶图 $\mathcal{G}^*$ 的所有面都是四边形。 $\mathcal{G}^*$ 中与 $\mathcal{G}$ 的水平边对偶的边将称为垂直边，而与 $\mathcal{G}$ 的垂直边对偶的边将称为水平边。根据构造， $\mathcal{G}^*$ 的任意一个面的任意两条相对边要么都是水平边，要么都是垂直边。将 $\mathcal{G}^*$ 的面实现为全同的度量正方形，我们就得到第 3 节意义下的方格铺砌曲面。

当横截多曲线对不是填充时，我们引入关联方格铺砌曲面的额外标记，以记录初始曲面的信息。我们必须标记不相交集合 $\{V_{1,1},\dots,V_{1,j_1}\}\sqcup\cdots\sqcup\{V_{k,1},\dots,V_{1,j_k}\}$of 铺砌的不相交顶点以及亏格 $g_1,\dots,g_k$of 分别具有 $j_1,\dots,j_k$边界分支的关联曲面。初始曲面的亏格 $g$of 和关联方格铺砌曲面的亏格 g' of 通过以下关系相关

$$g = g' + (g_1 + j_1 - 1) + \cdots + (g_k + j_k - 1)\,, \tag{4.1}$$

其中 $g_i + j_i - 1 > 0$ 对于 $i = 1$， ....., k。一个带有标记的方格铺砌曲面

$$(\{V_{1,1},\dots,V_{1,j_1}\}, g_1), \dots, (\{V_{k,1},\dots,V_{1,j_k}\}, g_k)$$

defines the 配备有序连通横截多曲线对的唯一原始曲面 ly up to a homeomorphism.

We can formalize the above constructions as the following statement.

命题4.1。在亏格 g 的曲面上，填充的连通横向多重曲线对与亏格 g 的方格铺砌曲面（带有未标记锥点）之间存在自然的一一对应关系，其中方格铺砌由图 $\mathcal{G}^*$ 给出，该图是与由两条多重曲线的并集形成的图 $\mathcal{G}$ 对偶的图。

这种对应关系扩展为非填充的相交多重曲线对与带标记的方格铺砌曲面（带有未标记锥点）之间的双射，其中标记满足公式 (4.1)。

将对应关系限制在填充横截连通对简单闭曲线上，我们得到与以下方格铺砌曲面子集之间的双射：这些曲面的亏格为 g （具有未标记锥点），并且只有一个水平正方形带和一个垂直正方形带。

方格铺砌曲面带有亚纯二次微分 q ，且至多有简单极点。该二次微分在每个方格的自然坐标下具有形式（dz）^{2} 。q 的简单极点对应于补集 $S - \mathcal{G}$ 的双边形（见定义 1.1）；次数为 m 的零点对应于（$4 + 2m$）边形。因此，将考察范围限制在亏格为 g的曲面 S 上的不可定向相交多重曲线连通对，并要求补集$S - \mathcal{G}$ 恰好有 n 个边数为 2 的边界分支，则当横截多重曲线对是填充的（即 $\mathcal{G}$ 构成一张地图）时，我们得到分层$\mathcal{Q}_{g,\ n}$ 中的二次微分；当该对不是填充的时，则得到分层$\mathcal{Q}_{g',\ n}$ 中的二次微分，其中 $g' < g$ 。指定补集 $S - \mathcal{G}$中边数分别为 6、8、10、.....、$4+2m$、.....的边界分支数量 μ_1、 μ_2、 μ_3、.....、 μ_m、....., 即可得到分层 $\mathcal{Q}(\mu, (-1)^n)$中的方格铺砌曲面。

从正向横截多重曲线对出发，并应用上述构造，我们得到一个带有阿贝尔微分 ω 的阿贝尔方格铺砌曲面，该微分在每个方格的自然坐标下具有形式 dz。这一次，从曲面中移去横截多重曲线对的并集后得到的连通区域，其边界分支的边数为 4、8、12、.....。指定补集 $S-\mathcal{G}$中边数分别为 8、12、.....、$4+4m$、.....的边界分支数量 μ_1、μ_2、μ_3、.....、μ_m、.....，即可得到分层 $\mathcal{H}(\mu)$中的方格铺砌曲面。下面的命题是命题 4.1 的一个类似结果。

命题4.2。在亏格为 g 的曲面上，填充的定向横截连通多曲线对与亏格为 g 的阿贝尔方格铺砌曲面（带有未标记锥点）之间存在自然的一一对应关系，其中方格铺砌由图 $\mathcal{G}^*$ 给出，该图是由两条多曲线的并集所形成的图 $\mathcal{G}$ 的对偶图。

这种对应关系延伸为非填充定向横截多重曲线对与带标记的阿贝尔方格铺砌曲面（带未标记锥点）之间的双射，其中标记满足公式 (4.1)。

将对应关系限制在由简单闭曲线组成的填充有向横截连通对上，我们得到与以下阿贝尔方格铺砌曲面子集的双射：这些曲面的亏格为 g （具有未标记锥点），并且只有一个水平正方形带和一个垂直正方形带。

We are ready now to present our first counting result.

命题 4.3. 对于任意固定的 g 和 n 满足 $2g+n\geq 4$ 考虑横截连通的多曲线对，其交叉点至多为 $2N$，位于亏格 g的曲面 S 上，使得相应的图 $\mathcal{G}$形成补集 $S-\mathcal{G}$的至多 n 个两边边界分支。

满足以下任一性质的上述配对总数：

(1) *the pair is not filling;*

(2) 该对是可定向的（仅当 $n=0$ 时才能发生）；

(3)补集 $S-\mathcal{G}$ 的至少一个边界分支拥有超过六条边；按 $N\to\infty$ 计，其阶数为 $o(N^{6g-6+2n})$。

不满足上述任何性质 (1)–(3) 的填充对的数量$\mathrm{G}_{g\,n}^{filling}(N)$ 具有如下渐近行为：

$$\mathrm{G}_{g,n}^{filling}(N)=\frac{\operatorname{Vol}\mathcal{Q}_{g,n}}{(4g-4+n)!\cdot n!\cdot(12g-12+4n)}\cdot N^{6g-6+2n}+o(N^{6g-6+2n})\quad as\ N\to\infty\,. \tag{4.2}$$

证明。假设上述的一对多重曲线不满足性质（1）–（3）中的任何一项。那么根据命题（4.1），$\mathrm{G}_{g\,n}^{\mathrm{filling}}(N)$计算的是分层 $\mathcal{Q}(1^{4g-4+n},(-1)^n)$中零点和极点未标记的方格铺砌曲面数量，其中的二次微分为亚纯二次微分。标记 $(4g-4+n)$ 个零点和 n 个极点有$(4g-4+n)!\cdot n!$ 种方式，因此由（3.1）可得方程（4.2）。

假设一对多重曲线是可定向的（这意味着 $n=0$）。这样的一对定义了一个阿贝尔方格铺砌曲面，它代表有限个分层 $\mathcal{H}_{g'}$之一中的一个点，其中$g'\leq g$。在任意给定分层 $\mathcal{H}(\mu)$中，由至多 $2N$ 个正方形铺砌的方格铺砌曲面数量，随着 $N\to\infty$趋于无穷而按 $const\cdot N^d$ 增长，其中 $d=\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}(\mu)$。亏格为$g'\leq g$ 的阿贝尔微分的任意分层，其维数都不超过 $\mathcal{H}_g$的维数 $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_g=4g-3$。不等式$2g+n\geq 4$ 意味着 $4g-3<6g-6+n$。这证明，与上文计算得出的不可定向填充对数量 $\mathrm{G}_{g\,n}^{\mathrm{filling}}(N)$ 按 $N\to\infty$增长相比，填充可定向对的数量可以忽略不计。

同样，如果该对是填充的、不可定向的，但至少有一个面具有多于六条边，那么相应的方格铺砌曲面属于 $\mathcal{Q}(\mu,(-1)^n)$中有限个亚纯二次微分分层之一，这些分层位于$\mathcal{Q}_{g,\,n}$，且不同于主分层。在分层 $\mathcal{Q}(\mu,(-1)^n)$中，以至多 $2N$个正方形铺砌的方格铺砌曲面数量按 $const\cdot N^d$ 随 $N\to\infty$增长，其中$d=$维数$_{\mathbb{C}}\,\mathcal{Q}(\mu,(-1)^n)$。$\mathcal{Q}_{g,\,n}$ 中任何不同于主分层的分层$\mathcal{Q}(1^{4g-4+n},(-1)^n)$的维数都严格小于维数$_{\mathbb{C}}\,\mathcal{Q}_{g,\,n}=6g-6+2n$。这证明，与上文计算出的不可定向填充对数量 $\mathrm{G}_{g\,n}^{\mathrm{filling}}(N)$相比，至少有一个面具有多于六条边的填充不可定向对数量可以忽略不计。

现在仍需证明上述非填充对的数量可以忽略不计。公式(4.1) 表明，参数 k and $g',g_1,j_1,\ldots,g_k,j_k$ 的选择只有有限种。因此，只需在假设所有这些参数均已固定的情况下证明该陈述；从现在起我们作此假设。上述维数论证允许我们将考察范围限制在以下情形：所得的方格铺砌曲面属于主分层 $\mathcal{Q}(1^{4g'-4+n},(-1)^n)$。

The total 数量 v 个顶点的任何亏格为 g'、恰有 k 个正方形的方格铺砌曲面所满足 es the Euler c特征关系 $k-2k+v=2-2g'$。因此，当正方形的数量至多为 $2N$,

任意$V_{i,j}$ 的选择数至多为 $2N+2$。因此，所有标记点的选择数的阶为 $const_1 \cdot N^J$，其中 $J = j_1 + \cdots + j_k$，当 $N \to \infty$时。分层 $\mathcal{Q}(1^{4g'-4+n}, (-1)^n)$ 中用至多 $2N$ 个正方形铺砌的方格铺砌曲面数量，当 $N \to \infty$时，增长为 $const_2 \cdot N^{6g'-6+2n}$。这意味着，用至多 $2N$ 个正方形铺砌的带标记的方格铺砌曲面总数，当 $N \to \infty$时，有界于 $const_3 \cdot N^{6g'-6+2n+J}$。

设 $G = g_1 + \cdots + g_k$。回顾公式 (4.1) 的各项满足条件 $g_i + j_i - 1 > 0$，其中 $i = 1$，...，k。由此可得 $G + J - k \geq k$。公式 (4.1) 意味着

$$6g - 6 + 2n = (6g' - 6 + 2n + J) + G - k + 5(G + J - k)\,.$$

由于 $G \geq 0$ 且根据假设 $k \geq 1$，我们得出

$$\begin{aligned}(6g' - 6 + 2n + J) &= 6g - 6 + 2n - (G - k + 5(G + J - k)) \\ &\leq 6g - 6 + 2n - (-k + 5k) \leq 6g - 6 + 2n - 4\,.\end{aligned}$$

结合我们已经证明的渐近关系 (4.2)，这就完成了命题 4.3 的证明。□

下面的陈述完全类似：

命题 在 4.4 中。对于任意固定的 $g \geq 1$，考虑横截相交的连通有向多曲线对 wi *th* 至多 N 在亏格为 g 的曲面 S 上有交叉点。

满足以下两个性质之一的上述多曲线对总数：

(1) 该多曲线对不是填充的；

(2) 补集 $S - \mathcal{G}$ 的至少一个边界分支有超过 8 条边；其阶为 $o(N^{4g-3})$，其中 $N \to \infty$。

如上所述且不满足任何性质 (1) 的填充对数量$\mathrm{G}_g^{+\ filling}$,(N) 具有如下渐近行为： *–(2)*

$$\mathrm{G}_g^{+,filling}(N) = \frac{\mathrm{Vol}\,\mathcal{H}_g}{(2g-2)! \cdot (8g-6)} \cdot N^{4g-3} + o(N^{4g-3}) \quad as\ N \to \infty\,. \tag{4.3}$$

5. Proofs of the main result for fixed values of g and n

本节中，我们根据第3节给出的计数结果，推导出第2节的部分主要结果。

定理2.5 中关系(2.1)和(2.2)的证明。根据命题 4.1，在一个亏格为 g 、至多有 $2N$ 个交点的曲面上的非定向填充弯曲线，其中恰好有 n 个双边形面且没有边数超过 6的面，与分层$\mathcal{Q}(1^{4g-4+n}, (-1)^n)$中的方格铺砌曲面存在自然的一一对应关系；这些方格铺砌曲面由至多 $2N$ 个正方形铺成，具有未标记的零点和极点，并且只有一个水平圆柱和一个垂直圆柱。具有标记零点和极点的这类方格铺砌曲面的数量由定理 3.3 中的公式 (3.9)给出。将 (3.9) 两边除以不同标记方式的数量 $(4g-4+n)! \cdot n!$，我们得到上述未标记方格铺砌曲面的数量，即具有 n 个双边形面和 $4g-4+n$ 个六边形面、且没有边数超过 6 的面的非定向填充弯曲线的数量 $\mathrm{M}_{g\ n}^{\mathrm{filling}}$,(N)

$$\mathrm{M}_{g,n}^{\mathrm{filling}}(N) = C_{g,n} N^{6g-6+2n} + o(N^{6g-6+2n}) \quad \text{as } N \to \infty\,,$$

其中$C_{g,\ n}$ 由方程(2.2) 给出。命题4.3 表明，除去可忽略的（当 $N \to +\infty$时）部分，上述曲线迷宫均为不可定向、填充的，并且仅具有双边形、四边形和六边形面，或者等价地，

$$\mathrm{M}_{g,n}(N) = \mathrm{M}_{g,n}^{\mathrm{filling}}(N) + o(N^{6g-6+2n}) \quad \text{as } N \to \infty\,.$$

这就完成了(2.1) 的证明。对于 $cyl_{1,\ 1}(\mathcal{Q}_{g,\ n})$，表达式 (2.3) 对应于定理 3.3 中的方程 (3.10)。□

Theorem 2.7 中涉及任意固定 g 的部分（即存在多项式渐近式 (2.6)，以及首项系数由表达式 (2.7) 给出的事实）的证明完全类似，并且基于定理 3.4 和命题 4.4。$cyl_{1,\ 1}(\mathcal{H}_g)$ 的值由公式 (3.10) 给出，$cyl_1(\mathcal{H}_g)$ 的值由公式 (3.7) 给出。

定理 2.9 的证明。将两个边界分支粘合起来，使平衡弧系的端点相匹配，我们得到一个连通横截多曲线对。水平多重曲线只有一个连通分支：它是一条由原边界分支表示的简单闭曲线，而垂直多重曲线可能有多个连通分支。所有这样的连通横截多曲线对都对应于零点未标号的方格铺砌曲面，并且

具有单个水平正方形带的极点。那些代表曲流迷宫的对象，对应于具有未标记零点和极点，且各有一个水平正方形带和一个垂直正方形带的正方形铺砌曲面。再次借助命题 4.2，我们可以将考察范围限制为这两种类型中不可定向、填充且没有边数超过 6 的面的多曲线对。这意味着

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_{g,n}(N) = \lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}(\mathcal{ST}_{1,1}^{unlabeled}(\mathcal{Q}(1^{4g-4+n},(-1)^n),2N))}{\operatorname{card}(\mathcal{ST}_{1}^{unlabeled}(\mathcal{Q}(1^{4g-4+n},(-1)^n),2N))}\,.$$

由于从未标记方格铺砌曲面的计数转到标记方格铺砌曲面的计数时，我们必须为分子和分母中的方格铺砌曲面标记相同数量的零点和极点，因此，类似的标记方格铺砌曲面数量之比具有相同的极限。结合方程 (3.4)、(3.9) 和 (3.10)，我们得到

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}(\mathcal{ST}_{1,1}^{labeled}(\mathcal{Q}(1^{4g-4+n},(-1)^n),2N))}{\operatorname{card}(\mathcal{ST}_{1}^{labeled}(\mathcal{Q}(1^{4g-4+n},(-1)^n),2N))} = \frac{cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n})}{\operatorname{Vol}\mathcal{Q}_{g,n}}\,,$$

这就证明了（2.9）和（2.10）。 □

定理2.12 中声称极限 (2.14) 存在并给出其值的表达式 (2.15) 的部分，也完全可以用类似的方法证明。

当 n 较大以及 g 较大时，相关常数的渐近行为见第6节中的推论6.7、推论6.9和推论 6.10。

定理 2.10 的证明。在被翻译成方格铺砌曲面的语言后，定理 2.10 成为命题 4.3 与来自 [DGZZ2] 的推论 4.24和4.25相结合的一个推论。为了完整性，我们在下面证明定理 2.10 中提到的所有填充不可定向弧系统的拓扑构型都是可实现的。

我们先考虑亏格为 $g-1$ 、具有两个边界分支的曲面情形。若 $g=1$，则对于任意一对 $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$，存在一个填充的不可定向弧系，使其在第一个边界分支上有 n_1 条极小弧，在第二个边界分支上有 n_2 条极小弧，这一点显然。因此，我们可以假设 $g \geq 2$。

引理 5.1. 任意亏格大于或等于一且恰有两个边界分支的可定向曲面，都存在一种不可定向填充平衡弧系，使其补集的所有面均为六边形。

我们给出该引理的一个等价表述，适用于 [DGZZ2] 中推论4.24和4.25的技巧。

引理5.2。对于任意 $g \geq 2$ ，分层 $\mathcal{Q}(1^{4g-4})$ 都存在一个奇异叶连通的单圆柱分界线图。

证明。可以使用来自 [Zor3、图 13] 的图示来表示 $g=2$ ，并使用来自 [Zor3、图 14]的图示来表示 $g \geq 3$ ，在两种情况下均令 $p=0$ （其中 p 在图中定义）。□

我们将需要以下观察。注意，在引理5.1中构造的原始弧系是不可定向的。这意味着它至少包含一条回到同一边界分支的弧。如果一个边界分支上有一条弧，那么由于该弧系是平衡的，另一个边界分支上应至少有一条弧的两个端点都位于该边界分支上。

构造出如引理5.1中所述的弧系后，我们可以在第一个边界分支处添加任意数量的 n_1极小弧，并在第二个边界分支处添加任意数量的 n_2 极小弧。如果 $n_1 \neq n_2$，所得的弧系并不平衡，但由于每个边界分支都有一条两个端点均位于该边界分支上的弧，对于端点不足的连通分支，取若干条这样的弧，我们便可得到一个平衡弧系。根据构造，它是不可定向且填充的。如果某些面拥有超过6条边，我们可以添加额外的弧将其分拆，从而只得到双边形、四边形和六边形。定理 2.10 中提到的具有两个边界分支的连通曲面上平衡弧系存在性的证明至此完成。定理 2.10 中提到的其余弧系存在性的证明是显然的。□

备注 5.3。上述证明中的技巧无需任何进一步修改即可应用于蜿蜒系统。蜿蜒系统对应于具有一定数量水平正方形带和一定数量垂直正方形带的方格铺砌曲面，更多详情请参见原论文 [DGZZ2] 的第 4 节。

引理 2.6 的证明。由球面上的一个具有 $2N$ 个交叉点的曲流，可以轻易构造出一个亏格为 g 、具有 $2N$ 个交叉点的曲流：将图$\mathcal{G}$ 中构成一个面的拓扑圆盘，替换为亏格为 g 且只有一个边界分支的拓扑曲面。这显然给出了 $M_g^{=N}$ 的一个下界 $M_0^{=N}$。数值 $M_0^{=N}$ 大于 C_N，见 [LZv1]（实际上，论文 [AlP], 给出了一个更精确的下界）。

对于上界，我们首先假设该曲流是填充的，正如上文所做的那样。沿构成该曲流的两条闭曲线中的一条进行切割，我们得到一个亏格为 g 、每个边界分支上有$2N$ 个端点的填充平衡弧系。我们首先考虑得到两个连通分支的情形，其亏格分别为 g_1 和 g_2，其中 $g_1 + g_2 = g$。每个连通分支上该弧系的对偶图 $\mathcal{G}^*$ 是一个具有 N 条边的单胞地图：唯一的面对应于切割后连通分支的边界。亏格为 g 的曲面上具有 N 条边的单胞地图数量 $\varepsilon_g(N)$ 是众所周知的（参见 [HrZa，定理 2] ，或 [CFF，定理 5 和命题 6]）：

$$\varepsilon_g(N) = C_N \cdot p_g(N)\,,$$

其中 p_g 是一个次数为 $3g$ 的显式多项式。在这种情况下，曲线迷宫的数量上界为$2N \sum_{g_1+g_2=g} \varepsilon_{g_1}(N)\varepsilon_{g_2}(N)$ $\le {C_N}^2 P_g(N)$，其中 $P_g(N) = 2N \sum_{g_1+g_2=g} p_{g_1}(N)p_{g_2}(N)$ 的次数为 $3g+1$，因子 $2N$ 考虑了 $2N$ 个可能不同的粘合。

在第二种情况下，我们得到一个具有两个边界分支的单一连通曲面。此时，弧系的对偶图 $\mathcal{G}^*$ 是一个亏格为 $g-1$ 、具有 $2N$ 条边的双面映射：图的两个面对应于曲面的两个边界分支。这类双面映射的数量 $\varepsilon_{g-1}^{[2]}(N)$ 有如下界：

$$\varepsilon_{g-1}^{[2]}(2N) \le \varepsilon_g(2N+1) = C_{2N+1} \cdot p_g(2N+1)\,,$$

参见 [HR，推论 1]。在该情况下，曲线迷宫的数量上界为 $2N \cdot p_g(2N+1) \cdot C_{2N+1}$，其中因子 $2N$ 计入了 $2N$ 可能不同的粘合。

By Stirling's approximation we have

$$(C_N)^2 \sim \frac{1}{\pi} \cdot N^{-3} \cdot 2^{4N}\,, \quad C_{2N+1} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot N^{-3/2} \cdot 2^{4N}\,.$$

回顾一下，多项式 $P_g(N)$ 的次数为 $3g+1$，而多项式 $p_g(2N+1)$ 的次数为 $3g$（在 N 中）。因此，量 $P_g(N) \cdot ({C_N})^2$ 相较于 $2N \cdot p_g(2N+1) \cdot C_{2N+1}$ 在 $N \to \infty$ 时可以忽略不计。

上述估计表明，非填充曲线的贡献与$2N \cdot p_g(2N+1) \cdot C_{2N+1}$相比可以忽略不计，因为相应的对偶映射具有更低的亏格。

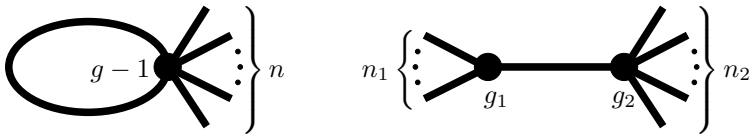
上述得到的粗略上界和下界可以通过更精细的论证加以改进。为避免使本文内容过于繁杂，我们在此不作讨论。
□

6. Asymptotic count for large values of g and n

6.1. 通过交数给出 Masur–Veech 体积的公式。我们在此回顾来自 [DGZZ3] 给出 Masur–Veech 体积 $\mathrm{Vol}\mathcal{Q}_{g,n}$ 的模空间 $\mathcal{Q}_{g,n}$ 的亚纯二次微分带有 n 简单极点在亏格为 g 的黎曼曲面上。

亏格为 g 、带有 n 个穿孔的曲面上的一条多曲线会将曲面切割成若干个连通分支，其中每个连通分支都有相应的亏格、边界分支数量和穿孔数量。我们将由这样一条多曲线得到的、附加了以下信息的对偶图称为稳定图：对于图中的每个顶点，我们赋予其对应连通分支的亏格；对于该连通分支上的每个穿孔，则在对应顶点处添加一条半边。这些图编码了一条多曲线的拓扑类型。利用与第4节中所述类似的对应关系，可以证明，这些图也编码了方格铺砌曲面分解为圆柱的类型。

我们尤其关注表示简单闭曲线（或等价地，单圆柱方格铺砌曲面）的稳定图。左侧图9中的稳定图 $\Gamma_1(g,n)$表示亏格为 g 、有 n 个穿孔的曲面上的非分离简单闭曲线。在考虑稳定图$\Gamma_1(g,n)$时，我们总是假设 $g \ge 1$ ，并且如果 $g = 1$，那么 $n \ge 1$ ，而不对此作明确说明。右侧图 9 中的稳定图 $\Gamma^{g_2,\ g_1\ n_2,}_{\ \ n_1,}$ 表示一条简单闭曲线，将曲面分成一个亏格为 g_1 、带有 n_1 个穿孔的子曲面和一个亏格为 g_2、带有 n_2 个穿孔的补子曲面。这里 $g = g_1 + g_2$ 且 $n = n_1 + n_2$。在考虑图 $\Gamma^{g_2,\ g_1\ n_2,}_{\ \ n_1}$ 时，我们总是假设对于 $i = 1,\ 2,$ 有 $2g_i + n_i \ge 3$ ，而不对此作明确说明。我们将所有对应于亏格为 g 、有 n 个穿孔的曲面的稳定图记作 $\mathcal{G}_{g,\ n}$。



$\Gamma_1(g,n)$ $\Gamma^{g_2,n_2}_{g_1,n_1}$

FIGURE 9. 代表非分离（左侧）和分离（右侧）简单闭曲线的稳定图。

设 g、n 为满足 $2g+n\geq 3$ 的非负整数。设 b_1、…、b_n 为形式变量。对于多重指标 $\boldsymbol{d}=(d_1,\dots,d_n)$，我们用 $b^{2\boldsymbol{d}}$ 表示乘积 $b_1^{2d_1}\cdot\dots\cdot b_n^{2d_n}$，用 $|\boldsymbol{d}|$ 表示总和 $d_1+\dots+d_n$，并用 $\boldsymbol{d}!$ 表示乘积 $d_1!\cdots d_n!$。

定义一个齐次多项式 $N_{g,n}(b_1,\dots,b_n)$，其次数为 $6g-6+2n$，变量为 $b_1,\dots,b_n$，如下

$$N_{g,n}(b_1,\dots,b_n)=\sum_{|\boldsymbol{d}|=3g-3+n} c_{\boldsymbol{d}}\,b^{2\boldsymbol{d}}, \tag{6.1}$$

其中

$$c_{\boldsymbol{d}}=\frac{1}{2^{5g-6+2n}\,\boldsymbol{d}!}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}}\psi_1^{d_1}\dots\psi_n^{d_n}.$$

这里 $\psi_1,\dots,\psi_n$ 是 Deligne–Mumford 紧化 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 上的 ψ-类。

我们还对上述交数（常称为 Witten–Kontsevich 相关函数）使用以下常用记号。给定将 $3g-3+n$ 分成非负整数之和的有序分拆 $d_1+\dots+d_n=3g-3+n$，我们定义

$$\langle\tau_{d_1}\dots\tau_{d_n}\rangle_g:=\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}}\psi_1^{d_1}\dots\psi_n^{d_n}\,.$$

多项式$N_{g,n}$ 隐式出现在 Kontsevich 对 Witten 猜想 [Wi] 的证明 [Kon] 中，以及 L. Chekhov 的模空间离散化模型中，见 [Ch1, Ch2]。它们表示 Norbury 拟多项式的最高齐次部分，这些拟多项式计数边长为整数的度量带状图 [Nb]。在归一化常数 2^{2g-3+n} 下，多项式 $N_{g,n}(b_1,\dots,b_n)$ 与 Mirzakhani 体积多项式 $V_{g,n}(b_1,\dots,b_n)$ 的最高齐次部分重合，后者给出带边界黎曼曲面模空间的 Weil–Petersson 体积 [Mi1]。

给定一个稳定图 Γ 记 $V(\Gamma)$ 为其顶点的集合，记 $E(\Gamma)$ 为其边的集合。对每个稳定图 $\Gamma\in\mathcal{G}_{g,n}$ 我们关联如下次数为 $6g-6+2n$ 的齐次多项式 P_Γ。对每条边 $e\in E(\Gamma)$ 我们指定一个形式变量 b_e。给定一个顶点 $v\in V(\Gamma)$ 记 g_v 为装饰 v 的整数，记 n_v 为 v 的价数，其中与 v 相邻的腿计入 v 的价数。取 Γ 中 v 的一个小邻域。我们对每个与 v 相邻的半边（边的“芽”）e 关联单项式 b_e；我们对每条腿关联 0。我们记 $\boldsymbol{b}_v$ 为大小为 n_v 的所得集合。如果某条边 e 是连接 v 到自身的环，则 b_e 会在 $\boldsymbol{b}_v$ 中出现两次；如果一条边 e 连接 v 到一个不同的顶点，则 b_e 会在 $\boldsymbol{b}_v$ 中出现一次；$\boldsymbol{b}_v$ 的所有其他条目对应于腿；它们由零点表示。对每个顶点 $v\in E(\Gamma)$ 我们关联多项式 $N_{g_v,n_v}(\boldsymbol{b}_v)$，其中 $N_{g,v}$ 在 (6.1) 中定义。我们对稳定图 Γ 关联由所有边 $e\in E(\Gamma)$ 上的乘积 $\prod b_e$ 乘以所有 $v\in V(\Gamma)$ 上的乘积 $\prod N_{g_v,n_v}(\boldsymbol{b}_v)$ 得到的多项式。我们如下定义 P_Γ：

$$P_\Gamma(\boldsymbol{b})=\frac{2^{6g-5+2n}\cdot(4g-4+n)!}{(6g-7+2n)!}\cdot\frac{1}{2^{|V(\Gamma)|-1}}\cdot\frac{1}{|\operatorname{Aut}(\Gamma)|}\cdot\prod_{e\in E(\Gamma)}b_e\cdot\prod_{v\in V(\Gamma)}N_{g_v,n_v}(\boldsymbol{b}_v)\,.$$

示例 6.1。使用上述规则，我们得到与图$\Gamma_1(g,n)$和 $\Gamma^{g_2,n_2}_{g_1,n_1}$ 来自图 9 的以下多项式。

$$P_{\Gamma_1(g,n)}(b)=\frac{2^{6g-5+2n}\cdot(4g-4+n)!}{(6g-7+2n)!}\cdot\frac{1}{2}\cdot b_1\cdot N_{g-1,n+2}(b_1,b_1,0,\dots,0)\,, \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}P_{\Gamma^{g_2,n_2}_{g_1,n_1}}(b_1)=&\frac{2^{6g-5+2n}\cdot(4g-4+n)!}{(6g-7+2n)!}\cdot\frac{1}{2|\operatorname{Aut}(\Gamma^{g_2,n_2}_{g_1,n_1})|}\\&\times b_1\cdot N_{g_1,n_1+1}(b_1,0,\dots,0)\cdot N_{g_2,n_2+1}(b_1,0,\dots,0)\,.\end{aligned} \tag{6.3}$$

这里我们使用了以下事实：$|\operatorname{Aut}(\Gamma_1(g,n))|=2$ 对于任意 g 和 n。我们有

$$|\operatorname{Aut}(\Gamma^{g_2,n_2}_{g_1,n_1})|=\begin{cases}2 & \text{when we have both } g_1=g_2 \text{ and } n_1=n_2\,;\\ 1 & \text{otherwise}\,.\end{cases} \tag{6.4}$$

现在我们定义一个作用于多项式的算子 $\mathcal{Z}$。它在单项式上的定义为

$$\mathcal{Z} \;:\; \prod_{i=1}^{k} b_i^{m_i} \longmapsto \prod_{i=1}^{k} \big(m_i! \cdot \zeta(m_i+1)\big)\,, \tag{6.5}$$

并通过线性性推广到任意多项式。在本文中处处 ζ 表示黎曼ζ函数

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}\,.$$

我们已在 [DGZZ3] 中证明了以下陈述。

定理（[DGZZ3，定理 1.5]）。亏格为 g 的复曲线上具有 n 简单极点的亚纯二次微分模空间的 Masur–Veech 体积 Vol$\mathcal{Q}_{g,n}$ 具有以下值:

$$\operatorname{Vol}\mathcal{Q}_{g,n} = \sum_{\Gamma\in\mathcal{G}_{g,n}} \operatorname{Vol}(\Gamma)\,, \tag{6.6}$$

其中单个稳定图 Γ 的贡献等于

$$\operatorname{Vol}(\Gamma) = \mathcal{Z}(P_\Gamma)\,. \tag{6.7}$$

6.2. 单带方格铺砌曲面的贡献。在本节中，我们分析表示具有单个水平圆柱的方格铺砌曲面的图对 Masur–Veech 体积 Vol$\mathcal{Q}_{g,n}$ 的贡献 Vol($\Gamma_1(g,n)$) 和 Vol($\Gamma^{g_2,g_1}{}^{n_2}_{n_1,}$)，该体积表示为方程 (6.6) 右侧的求和。我们从多项式 $P_{\Gamma_1(g,n)}$ 和 $P_{\Gamma^{g_2,g_1}{}^{n_2}_{n_1,}}$ 中涉及的 Witten–Kontsevich 关联函数的预备事实开始；分别参见方程 (6.2) 和 (6.3)。

Lem引理 6.2. 对于 $g\geq 1$、 $n\geq 0$、 $d_1\geq 0$，交数满足以下等式 :

$$\langle \tau_0^n \tau_{3g+n-2}\rangle_g = \langle \tau_{3g-2}\rangle_g = \frac{1}{24^g\cdot g!}\,. \tag{6.8}$$

$$\langle \tau_0^{n+2}\tau_n\rangle_0 = 1\,. \tag{6.9}$$

$$\langle \tau_0^n \tau_{d_1}\tau_{3g-1+n-d_1}\rangle_g = \sum_{i=\max(0,d_1-3g+1)}^{\min(d_1,n)} \binom{n}{i} \langle \tau_{d_1-i}\tau_{3g-1-d_1+i}\rangle_g\,. \tag{6.10}$$

$$\langle \tau_0^n \tau_{d_1}\tau_{n-1-d_1}\rangle_0 = \binom{n-1}{d_1}. \tag{6.11}$$

Proof. Applying repeatedly the string equation

$$\langle \tau_0\tau_{d_1}\dots\tau_{d_k}\rangle_g = \sum_{i=1}^{k}\langle \tau_{d_1}\dots\tau_{d_i-1}\dots\tau_{d_k}\rangle_g$$

我们消去 τ_0 从而证明了(6.8) 中的左等式和方程 (6.10)。(6.8)中的右等式归因于E.Witten [Wi]。其余等式涉及亏格 0 关联子，对于这些关联子，我们使用闭公式

$$\langle \prod_{i=1}^{n}\tau_{d_i}\rangle_0 = \frac{(n-3)!}{\prod_i d_i!}\,.$$

这也归功于 E. Witten [Wi，第 251 页，见方程 (2.26) 之后]。 □

二点关联函数的值 $\langle \tau_k\tau_{3g-1-k}\rangle_g$ 可以通过以下在 [Zog1] 中发现的递推关系，以特别高效的方式获得:

$$(6j+1)\langle \tau_{3j}\tau_{3g-1-3j}\rangle_g - (6j+1-6j)\langle \tau_{3j-1}\tau_{3g-3j}\rangle_g = \frac{1}{24^g\cdot g!}\binom{g}{j}\left(1-\frac{2j}{g}\right). \tag{6.12}$$

$$(6j+3)\langle \tau_{3j+1}\tau_{3g-2-3j}\rangle_g - (6j-1-6j)\langle \tau_{3j}\tau_{3g-1-3j}\rangle_g = -2\cdot\frac{1}{24^g\cdot g!}\binom{g-1}{j}. \tag{6.13}$$

$$(6j+5)\langle \tau_{3j+2}\tau_{3g-3-3j}\rangle_g - (6j-3-6j)\langle \tau_{3j+1}\tau_{3g-2-3j}\rangle_g = 2\cdot\frac{1}{24^g\cdot g!}\binom{g-1}{j}. \tag{6.14}$$

此处我们使用 $\langle \tau_0\tau_{3g-1}\rangle_g = \frac{1}{24^g\cdot g!}$ 的显式公式(6.8)作为递归的基础。在亏格1 和2 中，这给出 $\langle \tau_1\tau_1\rangle = \frac{1}{24}$和 $\langle \tau_1\tau_4\rangle = \frac{1}{384}$, $\langle \tau_2\tau_3\rangle = \frac{29}{5760}$。 $g=1$ 中剩余的关联函数，2，则通过对 $k=0,\dots,3g-1$ 的对称性 $\langle \tau_{3g-1-k}\tau_k\rangle_g = \langle \tau_k\tau_{3g-1-k}\rangle_g$ 得到。

我们用 $c_1(\Gamma)$ =Vol(Γ)表示与稳定图 Γto 相关联的方格铺砌曲面对 Masur–Veech 体积 Vol $\mathcal{Q}_{g,n}$ 的贡献，参见方程 (6.6)。图 $\Gamma_1(g,n)$ 和 $\Gamma^{g_2,g_1\ n_2,n_1}$ 如图 9 所示，是 $\mathcal{G}_{g,n}$ 中仅有一条边的唯一稳定图（我们将其与 n 腿区分开来）。换言之，这些是表示单圆柱方格铺砌曲面的唯一图。在与这些稳定图相关联的所有单圆柱方格铺砌曲面中，我们区分出这样的曲面：其中单个水平圆柱由单带方格构成；我们可以分别计算这类方格铺砌曲面对 Masur–Veech 体积 Vol$\mathcal{Q}_{g,n}$ 的贡献 $cyl_1(\Gamma)$。

引理 6.3. 单带方格铺砌曲面对主层体积的贡献$\mathcal{Q}_{g,n}$ 由以下给出

$$cyl_1(\Gamma_1(g,n)) = 2^{g+1}\frac{(4g-4+n)!}{(3g-4+n)!}\cdot\sum_{d_1=0}^{3g-4+n}\binom{3g-4+n}{d_1}\langle\tau_0^n\tau_{d_1}\tau_{3g-4+n-d_1}\rangle_{g-1} \tag{6.15}$$

$$cyl_1(\Gamma^{g_2,n_2}_{g_1,n_1}) = \frac{2^{g+2}}{|\operatorname{Aut}(\Gamma^{g_2,n_2}_{g_1,n_1})|}\cdot\frac{(4g-4+n)!}{(3g-4+n)!}\cdot\frac{1}{g!\cdot 24^g}\cdot\binom{g}{g_1}\cdot\binom{3g-4+n}{3g_1-2+n_1}, \tag{6.16}$$

其中 $g=g_1+g_2$ 和 $n=n_1+n_2$。

单带方格铺砌曲面对 $\mathcal{Q}_{g,n}$ 的体积的总贡献为

$$cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n}) = cyl_1(\Gamma_1(g,n)) + \frac{1}{2}\sum_{n_1=0}^{n}\binom{n}{n_1}\sum_{g_1=0}^{g}|\operatorname{Aut}(\Gamma^{g_2,n_2}_{g_1,n_1})|\cdot cyl_1(\Gamma^{g_2,n_2}_{g_1,n_1})\,. \tag{6.17}$$

证明。以下推广(3.5)的关系对于具有单条边的任意稳定图 Γ 以及任意 g 和 n均成立。

$$\operatorname{Vol}(\Gamma) = c_1(\Gamma) = cyl_1(\Gamma)\cdot\zeta(6g-6+2n)\,. \tag{6.18}$$

该关系是 [DGZZ3、公式(1.14)和引理1.32] 的直接推论。因此，为证明所需的表达式，只需将 (6.7) 给出的关系 Vol(Γ) $=\mathcal{Z}(P_\Gamma)$ 应用于所考虑的两个稳定图。多项式 $P_{\Gamma_1(g,n)}(b)$ 和 $P_{\Gamma^{g_2,g_1\ n_1^2}}(b_1)$ 由方程 (6.2) 和 (6.3)给出，其中，应用多项式$N_{g,n}$ 的一般定义 (6.1)，我们得到

$$N_{g-1,n+2}(b_1,b_2,0,\dots,0) = \frac{1}{2^{5g-7+2n}}\sum_{\substack{d_1+d_2=3g-4+n\\ d_1\ge 0,\ d_2\ge 0}}\frac{\langle\tau_0^n\tau_{d_1}\tau_{d_2}\rangle_{g-1}}{d_1!d_2!}b_1^{2d_1}b_2^{2d_2}\,,$$

$$N_{g_1,n_1+1}(b_1,0,\dots,0) = \frac{1}{2^{5g_1-4+2n_1}}\frac{\langle\tau_0^{n_1}\tau_{3g_1-2+n_1}\rangle_{g_1}}{(3g_1-2+n_1)!}b_1^{6g_1-4+2n_1}\,.$$

将由（6.5）定义的算子 $\mathcal{Z}$代入公式（6.7），并利用引理6.2 中的关系式（6.8）–（6.11）化简结果，我们得到方程（6.15）和（6.16）。

注意，$\Gamma^{g_2,\ g_1\ n_2,\ n_1}$ 和 $\Gamma^{g_1,\ g_2\ n_1,\ n_2}$ 定义了相同的稳定图。因此，稳定图 $\Gamma^{g_2,\ g_1\ n_2,\ n_1}$ 出现在求和式 (6.17) 中恰好一次，当且仅当条件 $g_1=g_2$ 和 $n_1=n_2$ 均得到满足。所有其他形如 $\Gamma^{g_2,\ g_1\ n_2,\ n_1}$ 的稳定图在求和式 (6.17) 中出现两次。考虑到方程 (6.4)，这证明了 (6.17)。引理 6.3 得证。 □

下面的组合命题 6.4分别简化了 $cyl_1(\Gamma_1(g,n))$ 和$cyl_1(\Gamma^{g_2,g_1\ n_1^2})$ 的表达式。

命题 6.4。假设 $g\ge 1$，并且如果 $g=1$，那么 $n\ge 2$。来自与稳定图 $\Gamma_1(g,n)$ 相对应的单带方格铺砌曲面的贡献，对主分层$\mathcal{Q}_{g,\ n}$ 的亚纯二次微分的 Masur–Veech 体积具有以下形式：

$$cyl_1(\Gamma_1(1,n)) = 4n\cdot\binom{2n-2}{n-1}\quad \textit{for } g=1\,; \tag{6.19}$$

$$cyl_1(\Gamma_1(g,n)) = 2^{g+1}\binom{4g-4+n}{g}\cdot g!\sum_{k=0}^{3g-4}\binom{3g-4+2n}{n+k}\langle\tau_k\tau_{3g-4-k}\rangle_{g-1}\quad \textit{for } g\ge 2\,. \tag{6.20}$$

来自主分层$\mathcal{Q}_{g,n}$ 亚纯二次微分中、对应于所有稳定图 $\Gamma^{g_2,g_1\ n_1^2}$的单带方格铺砌曲面对 Masur–Veech 体积的总贡献具有如下形式：

$$\frac{1}{2}\binom{n}{n_1}\sum_{\substack{g_1+g_2=g\\ n_1+n_2=n}}|\operatorname{Aut}(\Gamma^{g_2,n_2}_{g_1,n_1})|\cdot cyl_1(\Gamma^{g_2,n_2}_{g_1,n_1}) = 2^{g+1}\binom{4g-4+n}{g}\frac{1}{24^g}\sum_{g_1=0}^{g}\binom{g}{g_1}\binom{3g-4+2n}{3g_1-2+n}\,. \tag{6.21}$$

单带方格铺砌曲面对$\mathcal{Q}_{g,n}$ 体积的总贡献由下式给出

$$cyl_1(\mathcal{Q}_{0,n}) = 2\binom{2n-4}{n-2} \quad \textit{for } n \geq 4\,; \tag{6.22}$$

$$cyl_1(\mathcal{Q}_{1,n}) = 4n \cdot \binom{2n-2}{n-1} + \frac{n}{3} \cdot \binom{2n-1}{n-2} \quad \textit{for } n \geq 2\,; \tag{6.23}$$

$$\begin{aligned} cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n}) = 2^{g+1}\binom{4g-4+n}{g} \cdot \Bigg(g! \sum_{k=0}^{3g-4} \binom{3g-4+2n}{n+k} \langle \tau_k \tau_{3g-4-k} \rangle_{g-1} \\ + \frac{1}{24^g} \sum_{g_1=0}^{g} \binom{g}{g_1} \binom{3g-4+2n}{3g_1-2+n} \Bigg) \quad \textit{for } g \geq 2\,. \end{aligned} \tag{6.24}$$

证明。我们推导引理 6.3 中得到的公式。利用以下组合恒等式（见 [Gd, (3.20)]）：

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{x}{k+r} = \binom{n+x}{n+r}. \tag{6.25}$$

以及方程 (6.11)，我们得到 $g = 1$

$$\sum_{d_1=0}^{3g-4+n} \binom{3g-4+n}{d_1} \langle \tau_0^n \tau_{d_1} \tau_{3g-4+n-d_1} \rangle_{g-1} = \sum_{d_1=0}^{n-1} \binom{n-1}{d_1} \binom{n-1}{d_1} = \binom{2n-2}{n-1},$$

这简化了 $g = 1$ 情形下的 (6.15) 中的求和。

当 $g \geq 2$ 时，使用方程 (6.10) 并令 $k = d_1 - i$，得到：

$$\begin{aligned} &\sum_{d_1=0}^{3g-4+n} \binom{3g-4+n}{d_1} \langle \tau_0^n \tau_{d_1} \tau_{3g-4+n-d_1} \rangle_{g-1} \\ &\qquad = \sum_{d_1=0}^{3g-4+n} \sum_{i=\max(0,d_1-3g+4)}^{\min(d_1,n)} \binom{3g-4+n}{d_1} \binom{n}{i} \langle \tau_{d_1-i} \tau_{3g-4-d_1+i} \rangle_{g-1} = \\ &\qquad = \sum_{k=0}^{3g-4} \langle \tau_k \tau_{3g-4-k} \rangle_{g-1} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{3g-4+n}{i+k} = \sum_{k=0}^{3g-4} \langle \tau_k \tau_{3g-4-k} \rangle_{g-1} \binom{2n+3g-4}{n+k}, \end{aligned}$$

其中，我们再次使用恒等式（6.25）来证明最后一个方程。

最后，我们可以简化引理 6.3 中求和式（6.17）的第二项，该引理简化了表达式（6.20）对于 $cyl_1(\Gamma^{g_2,n_2}_{g_1,n_1})$，由本命题可得。我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{n_1=0}^{n} \binom{n}{n_1} \sum_{g_1=0}^{g} |\operatorname{Aut}(\Gamma^{g_2,n_2}_{g_1,n_1})| \cdot cyl_1(\Gamma^{g_2,n_2}_{g_1,n_1}) = \\ &\qquad = 2^{g+1} \cdot \frac{(4g-4+n)!}{(3g-4+n)!} \cdot \frac{1}{g!\, 24^g} \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{g_1=0}^{g} \binom{n}{n_1} \binom{g}{g_1} \binom{3g-4+n}{3g_1-2+n_1}. \end{aligned}$$

改变求和顺序并应用恒等式（6.25），我们可以将后一个和式简化为

$$\sum_{g_1=0}^{g} \binom{g}{g_1} \sum_{n_1=0}^{n} \binom{n}{n_1} \binom{3g-4+n}{3g_1-2+n_1} = \sum_{g_1=0}^{g} \binom{g}{g_1} \binom{3g-4+2n}{3g_1-2+n},$$

这就证明了（6.21）。 □

结合命题 6.4 与二点关联函数的递推公式（6.12）–（6.14），我们得到用 g 和 n 表示 $cyl_1(\mathcal{Q}_{g,\,n})$ 的显式表达式。在接下来的两节中，我们分析 $cyl_1(\mathcal{Q}_{g,\,n})$ 的两种情形：g 固定且 $n \to \infty$，以及 n 固定且 $g \to +\infty$ 的情形。

6.3. n取大值时的渐近计数。现在我们讨论数量Vol$\mathcal{Q}_{g,n}$,$cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n})$、 $c_1(\mathcal{Q}_{g,n})$的渐近行为，它们分别表示Masur–Veech体积、单带方格铺砌曲面对该体积的贡献，以及单圆柱方格铺砌曲面对该体积的贡献。在本节中，我们研究亏格 g 固定而极点数 n 趋于无穷的情形。这使我们能够在同一情形下推导数量 $cyl_{1,\,1}(\mathcal{Q}_{g,n})$ 和 $\mathrm{P}_1(\mathcal{Q}_{g,n})$ 的渐近行为，从而证明定理 2.5 中的公式（2.4）。

We start with the following simple Lemma:

引理 6.5. 对于任意正整数 $a \geq 2$ 以及任意整数 b 和 c，有以下渐近式：

$$\binom{an+b}{n+c} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{a^{an+b+\frac{1}{2}}}{(a-1)^{(a-1)n+b+\frac{1}{2}}} \quad as\ n \to +\infty\,. \tag{6.26}$$

证明。只需证明特定情形 $c=0$ 下的引理，因为对于任意的 c，我们将 $n+c$ 记为 m，并应用 $\binom{am+(b-ac)}{m}$ 的渐近公式。

对于 $c=0$，我们将斯特林公式应用于 $\binom{an+b}{n} = \frac{(an+b)!}{((a-1)n+b)!\cdot n!}$ 中的三个阶乘，并将所得表达式化简后，得到 (6.26)。□

推论 6.6. 对任意固定的亏格 $g \geq 0$，我们有以下渐近行为：

$$cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n}) \sim c_1(\mathcal{Q}_{g,n}) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot a_g \cdot n^{g-\frac{1}{2}} \cdot 4^n \quad as\ n \to \infty\,, \tag{6.27}$$

其中 $a_0 = \frac{1}{8}$、$a_1 = \frac{7}{6}$ 和

$$a_g = 2^{2g-3} \cdot \left(2^{2g} \sum_{k=0}^{3g-4} \langle \tau_k \tau_{3g-4-k} \rangle_{g-1} + \frac{1}{3^g g!} \right) \ for\ g \geq 2\,. \tag{6.28}$$

证明。$g=0$ 的计算基本上已在 [DGZZ2]中完成。具体而言，由 [DGZZ2] 中的公式 (1.5) 可得

$$p_1(\mathcal{Q}(1^{n-4},-1^n)) = \frac{cyl_1(\mathcal{Q}(1^{n-4},-1^n))}{\mathrm{Vol}\,\mathcal{Q}(1^{n-4},-1^n)}\,.$$

由于 $\mathcal{Q}(1^{n-4},-1^n)$是模空间$\mathcal{Q}_{0,n}$ 中维数最高的唯一分层，我们得到等式$cyl_1(\mathcal{Q}(1^{n-4},-1^n)) = cyl_1(\mathcal{Q}_{0,n})$，以及 $\mathrm{Vol}\ \mathcal{Q}(1^{n-4},-1^n) = \mathrm{Vol}\,\mathcal{Q}_{0,n}$。将 [DGZZ2] 中计算出的 $p_1(\mathcal{Q}(1^{n-4},-1^n))$ 的渐近表达式（见定理 1.3 上方的表达式）乘以 [AEZ2], 中得到的 $\mathrm{Vol}\mathcal{Q}_{0,n}$的精确值 (6.32)，即可得到 $cyl_1(\mathcal{Q}_{0,n})$所需的渐近表达式。

假设 $g \geq 2$（$g=1$ 的计算类似，但更简单）。我们先计算来自稳定图 $\Gamma_1(g,n)$的贡献，并证明对于任意固定的 g，有

$$\mathrm{Vol}\,\Gamma_1(g,n) \sim \frac{2^{4g-3}}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=0}^{3g-4} \langle \tau_k \tau_{3g-4-k} \rangle_{g-1} \right) n^{g-\frac{1}{2}} \cdot 4^n \text{ as } n \to \infty. \tag{6.29}$$

为了证明 (6.29)，我们首先应用 (6.26)，得到 (6.20) 中出现的二项式系数的如下渐近行为：

$$\binom{2n+3g-4}{n+k} \sim \frac{2^{2n+3g-4}}{\sqrt{\pi n}} \quad \text{as } n \to \infty\,. \tag{6.30}$$

请注意，对于任意固定的 g，(6.30)中二项式系数的渐近表达式在 n 取较大值时不再依赖于 k，因此可以将其从 (6.20) 的求和式中提出。

对于任意固定的 g，上面（6.20）式中的阶乘比在 n取较大值时具有如下渐近行为：

$$\frac{(4g-4+n)!}{(3g-4+n)!} = \underbrace{(n+3g-3)(n+3g-2)\cdots(n+4g-4)}_{g \text{ terms}} \sim n^g \quad \text{as } n \to \infty\,.$$

回顾一下，$\mathrm{Vol}\ \Gamma_1(g,n) = \zeta(6g-6+2n)\cdot cyl_1(\Gamma_1(g,n))$，并且我们有指数快速收敛$\zeta(6g-6+2n) \to 1$ 当 $n \to \infty$。结合上述三个渐近关系，我们得出，公式 (6.20)对于 $cyl_1(\Gamma_1(g,n))$ 的结论蕴含了 (6.29)。

现在我们证明，对于任意固定的 g，来自其余稳定图的渐近体积贡献具有如下形式：

$$\frac{1}{2} \sum_{n_1=0}^{n} \binom{n}{n_1} \sum_{g_1=0}^{g} |\,\mathrm{Aut}(\Gamma_{g_1,n_1}^{g_2,n_2})| \cdot \mathrm{Vol}\,\Gamma_{g_1,n_1}^{g_2,n_2} \sim \frac{2^{2g-3}}{\sqrt{\pi}\cdot 3^g \cdot g!} \cdot n^{g-\frac{1}{2}} \cdot 4^n \quad \text{as } n \to \infty\,. \tag{6.31}$$

为证明这一点，我们首先应用 (6.26)，得到 (6.24) 第二行中二项式系数的以下渐近行为：

$$\binom{2n+3g-4}{n+3g_1-2} \sim \frac{2^{2n+3g-4}}{\sqrt{\pi n}} \quad \text{as } n \to \infty\,.$$

我们得到与 (6.30) 中相同的表达式。对于任意固定的 g 以及范围为 $0 \le g_1 \le g$中的任意g_1 ，这个渐近等价是一致的。由于对于较大的 n ，它不再依赖于 g_1 ，因此可以将其从 (6.24) 的求和式中提取出来。剩余的和现在可以显式计算：

$$\sum_{g_1=0}^{g} \binom{g}{g_1} = 2^g \,.$$

其余计算与上文处理的 $\Gamma_1(g,n)$ 情形完全类似。 □

在得到 $cyl_1(\mathcal{Q}_{g,\,n})$ 的大 n 渐近行为后，我们回顾 $\mathrm{Vol}\mathcal{Q}_{g,\,n}$ 在极点数较大时的渐近行为。

M. Kontsevich 猜想了亏格 0 中至多具有简单极点的亚纯二次微分任意分层的 Masur–Veech 体积的显式公式；J. Athreya–A. Eskin–A. Zorich 在 [AEZ2] 中证明了该猜想。特别地，有

$$\mathrm{Vol}\,\mathcal{Q}_{0,n} = 4\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-3} \quad \text{for } n = 4, 5, \dots \,. \tag{6.32}$$

[CMS 的推论 1.5] 给出了 $\mathrm{Vol}\mathcal{Q}_{1,\,n}$ 的简洁闭式公式：

$$\mathrm{Vol}\,\mathcal{Q}_{1,n} = \pi^{2n} \cdot \frac{n!}{3(2n-1)!}\big((2n-3)!! + (2n-2)!!\big) \quad \text{for } n = 2, 3, \dots \,. \tag{6.33}$$

D. Chen、M. M¨oller 和 A. Sauvaget [CMS] 最近发现了一个用 Hodge 积分表示 $\mathrm{Vol}\mathcal{Q}_{g,\,n}$ 的表达式。基于这个公式，M. Kazarian 在 [Kz] 中，以及 D. Yang、D. Zagier 和 Y. Zhang 在 [YZZ] 中，分别独立证明了体积的二次递推关系。结合这些结果与公式 [CMS, (6)] ，可以推导出一个类似于 (6.33) 的 $\mathrm{Vol}\mathcal{Q}_{g,\,n}$ 的紧致表达式，适用于 g 的任意较小取值。

因此，对于固定亏格 g 和大量极点 n 的 Masur–Veech 体积的渐近行为现在已经完全明确。对于 g 较小的值，下面的公式 (6.34)（包括 κ_g的有理值）已在 [ABCDGLW, (5.12)] 中得到预测。

命题（ [YZZ]中的推论 4）。对于任意固定的亏格 $g \ge 0$，以下渐近行为成立：

$$\mathrm{Vol}\,\mathcal{Q}_{g,n} \sim \kappa_g n^{\frac{g}{2}} \left(\frac{\pi^2}{2}\right)^n \quad \textit{as } n \to \infty \,, \tag{6.34}$$

where

$$\kappa_g = \frac{64 \cdot \pi^{6g-\frac{11}{2}}}{384^g \cdot \Gamma\left(\frac{5g-1}{2}\right)} \cdot \tilde{\kappa}_g \,, \tag{6.35}$$

$$\tilde{\kappa}_0 = -1 \,, \quad \tilde{\kappa}_1 = 2 \,, \quad \tilde{\kappa}_2 = 98 \,, \quad \tilde{\kappa}_3 = 19600 \,,$$

and where $\tilde{\kappa}_g$ *is recursively defined by*

$$\tilde{\kappa}_g = 50(g-1)^2\tilde{\kappa}_{g-1} + \frac{1}{2}\sum_{h=2}^{g-2} \tilde{\kappa}_h\tilde{\kappa}_{g-h} \quad \textit{for } g \ge 4 \,.$$

Recall that for $g \in \mathbb{N}$ one has

$$\Gamma\left(\frac{5g-1}{2}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{5g-3}{2}\right)! & \text{for odd } g \\ \sqrt{\pi} \cdot \dfrac{(5g-3)!!}{2^{\frac{5g-2}{2}}} & \text{for even } g \end{cases} .$$

推论6.7. 对于任意固定的亏格 $g \ge 0$，以下渐近公式成立：

$$cyl_{1,1}(\mathcal{Q}_{g,n}) \sim \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a_g^2}{\kappa_g} \cdot n^{\frac{3g}{2}-1} \left(\frac{32}{\pi^2}\right)^n \qquad \textit{as } n \to \infty \,; \tag{6.36}$$

$$p_1(\mathcal{Q}_{g,n}) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{a_g}{\kappa_g} \cdot n^{\frac{g-1}{2}} \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^n \qquad \textit{as } n \to \infty \,, \tag{6.37}$$

其中， a_g 和 κ_g 分别由方程 (6.28) 和 (6.35) 给出。

证明。回想一下 $cyl_{1,1}(\mathcal{Q}_{g,n}) = \frac{cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n})^2}{\mathrm{Vol}\,\mathcal{Q}_{g,n}}$ 以及 $p_1(\mathcal{Q}_{g,n}) = \frac{cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n})}{\mathrm{Vol}\mathcal{Q}_{g,n}}$。将 $cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n})$ 的渐近表达式（6.27）和 $\mathrm{Vol}\mathcal{Q}_{g,n}$ 的渐近表达式（6.34）代入，即得所需关系。□

由定理 2.5 推导公式（2.4）。对（2.2）右侧表达式分母中的阶乘应用斯特林公式，得到

$$(4g-4+n)!\,n!\,(12g-12+4n)\sim n^{4g-4}(n!)^2 4n\sim 8\pi\cdot n^{4g-2}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\ \text{as } n\to+\infty\,.$$

将大 n 的 $cyl_{1,1}(\mathcal{Q}_{g,n})$ 的渐近行为表达式(6.36)代入 $C_{g,n}$ 的公式 (2.2) 并化简分数，我们得到所需的渐近行为 (2.4)。□

在得到如图 9 所示稳定图的大 n 体积贡献的渐近表达式 (6.29) 和 (6.31) 后，我们准备证明定理 2.13。

定理 2.13 的证明。由 [DGZZ3，定理 1.22] 对于任意 $g\geq 1$ 有

$$\frac{c_{g,n,\mathrm{sep}}}{c_{g,n,\mathrm{nonsep}}}=\frac{\frac{1}{2}\sum_{n_1=0}^{n}\binom{n}{n_1}\sum_{g_1=0}^{g}|\operatorname{Aut}(\Gamma_{g_1,n_1}^{g_2,n_2})|\operatorname{Vol}\Gamma_{g_1,n_1}^{g_2,n_2}}{\operatorname{Vol}(\Gamma_1(g,n))}. \tag{6.38}$$

利用上述方程右侧比值分子的渐近表达式 (6.31) 和该比值分母的渐近表达式 (6.29)，我们在一般情形 $g\geq 2$ 下得到 (2.18)。

还需考虑特殊情形 $g=1$。利用式(6.19)作为 (6.38)的分母，并在特殊情形 $g=1$ 下计算式 (6.21) 作为 (6.38) 的分子，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{c_{1,n,\mathrm{sep}}}{c_{1,n,\mathrm{nonsep}}}=\frac{4n\cdot\frac{1}{24}\cdot 2\cdot\binom{2n-1}{n-2}}{4n\cdot\binom{2n-2}{n-1}}&=\frac{1}{12}\cdot\frac{(2n-1)!\,(n-1)!\,(n-1)!}{(2n-2)!\,(n-2)!\,(n+1)!}\\&=\frac{1}{12}\cdot\frac{(2n-1)(n-1)}{n(n+1)}\sim\frac{1}{6}\quad\text{as } n\to+\infty\,.\end{aligned}$$

which completes the proof of (2.17). □

6.4. 高亏格蜿蜒线图的渐近计数。在本节中，我们研究以下量 $c_{g,n,\mathrm{sep}}$, $c_{g,n,\mathrm{nonsep}}$, $cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n})$，以及 $\mathrm{Vol}\mathcal{Q}_{g,n}$ 在 n 固定且 $g\to+\infty$ 的情形下的渐近行为。

回顾一下，$\zeta(m)\to 1$ 当 $m\to\infty$。因此，方程 (6.18) 意味着

$$cyl_1(\Gamma_1(g,n))\sim\operatorname{Vol}(\Gamma_1(g,n))\text{ and }cyl_1(\Gamma_{g_1,n_1}^{g_2,n_2})\sim\operatorname{Vol}(\Gamma_{g_1,n_1}^{g_2,n_2})\text{ as }g\to+\infty \tag{6.39}$$

关于 n、g_1、g_2、n_1、n_2 一致成立。

命题 6.8. 对于任意固定的 $n\geq 0$，以下渐近关系成立

$$\operatorname{Vol}(\Gamma_1(g,n))\sim\sqrt{\frac{2}{3\pi g}}\cdot\left(\frac{16}{3}\right)^{n}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{4g-4}\ as\ g\to+\infty\,; \tag{6.40}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n_1=0}^{n}\binom{n}{n_1}\sum_{g_1=0}^{g}\operatorname{Vol}(\Gamma_{g_1,n_1}^{g_2,n_2})\sim\frac{2}{3\pi g}\cdot\frac{1}{4^g}\cdot\left(\frac{16}{3}\right)^{n}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{4g-4}\ as\ g\to+\infty\,. \tag{6.41}$$

在特殊情形 $n=0$ 下，关系式 (6.40)和 (6.41) 分别在 [DGZZ3,(4.5)] 和 [DGZZ3, (4.15)] 中得到证明。在一般情形下，关系式 (6.40)由A. Aggarwal 在 [Ag2,(8.9)] 中证明。为求完整，下面给出这两个关系式的简短证明。

证明。结合 [DGZZ3、命题 4.1] 和 [DGZZ3、公式 (4.2)]，我们得到二点关联函数的大亏格渐近行为。

$$\langle\tau_k\tau_{3g-1-k}\rangle_g=\frac{1}{24^g\cdot g!}\cdot\frac{(6g-1)!!}{(2k+1)!!(6g-1-2k)!!}\left(1+O\left(\frac{1}{g}\right)\right)\quad\text{as } g\to+\infty\,,$$

其中误差项 $O\left(\frac{1}{g}\right)$ 在 $0\leq k\leq 3g-1$ 中是一致的。将双阶乘改写为阶乘后，我们将上述表达式重写为

$$\langle\tau_k\tau_{3g-1-k}\rangle_g\sim\frac{1}{24^g\cdot g!}\cdot\frac{1}{6g}\cdot\frac{\binom{6g}{2k+1}}{\binom{3g-1}{k}},$$

其中，渐近等价在 $0\leq k\leq 3g-1$ 上是一致的。将所得的二点关联函数渐近行为代入公式 (6.20) 中的求和，我们得到

$$\sum_{k=0}^{3g-1}\binom{3g-1+2n}{n+k}\langle\tau_k\tau_{3g-1-k}\rangle_g\sim\frac{1}{24^g\cdot g!}\cdot\frac{1}{6g}\sum_{k=0}^{3g-1}\frac{\binom{3g-1+2n}{n+k}\binom{6g}{2k+1}}{\binom{3g-1}{k}}.$$

将渐近公式 (B.8) 应用于上述求和，我们得到

$$\sum_{k=0}^{3g-1} \frac{\binom{3g-1+2n}{n+k}\binom{6g}{2k+1}}{\binom{3g-1}{k}} \sim 2^{6g+2n-1} \quad \text{as } g \to +\infty\,.$$

应用(6.39)，将上述渐近表达式代入公式 (6.20)，并将二项式 $\binom{4g+n}{g}$ 替换为 (6.26) 给出的等价渐近表达式，我们得到

$$\mathrm{Vol}(\Gamma_1(g+1,n)) = cyl_1(\Gamma_1(g+1,n)) = 2^{g+2}\frac{(4g+n)!}{(3g-1+n)!}\sum_{k=0}^{3g-1}\binom{3g-1+2n}{n+k}\langle\tau_k\tau_{3g-1-k}\rangle_g$$

$$\sim 2^{g+2}\cdot(3g+n)\cdot\binom{4g+n}{g}\cdot\frac{1}{24^g}\cdot\frac{1}{6g}\cdot 2^{6g+2n-1} \sim 2^{g+1}\cdot\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{4g+n}\cdot 3^{g-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi g}}\right)\cdot\frac{1}{3^g\cdot 2^{3g}}\cdot\cdot 2^{6g+2n-1}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3\pi g}}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{4g}\cdot\left(\frac{16}{3}\right)^{n} \text{ as } g\to+\infty\,.$$

将上述表达式调整为亏格 g 而非 $g+1$ 后，我们完成了（6.40）的证明。为了证明（6.41），我们应用（6.39），然后使用（6.21）：

$$\frac{1}{2}\sum_{n_1=0}^{n}\binom{n}{n_1}\sum_{g_1=0}^{g}|\operatorname{Aut}(\Gamma_{g_1,n_1}^{g_2,n_2})|\cdot\mathrm{Vol}(\Gamma_{g_1,n_1}^{g_2,n_2}) = \frac{1}{2}\sum_{n_1=0}^{n}\binom{n}{n_1}\sum_{g_1=0}^{g}|\operatorname{Aut}(\Gamma_{g_1,n_1}^{g_2,n_2})|\cdot cyl_1(\Gamma_{g_1,n_1}^{g_2,n_2})$$

$$= 2^{g+1}\cdot\binom{4g-4+n}{g}\cdot\frac{1}{24^g}\sum_{g_1=0}^{g}\binom{g}{g_1}\binom{3g-4+2n}{3g_1-2+n}.$$

将公式 (6.26) 应用于二项式系数$\binom{3g-4+2n}{3g_1-2+n}$，并将渐近等价 (B.8) 应用于二项式系数之和，我们得到上述表达式的以下渐近行为：

$$\frac{1}{2}\sum_{n_1=0}^{n}\binom{n}{n_1}\sum_{g_1=0}^{g}|\operatorname{Aut}(\Gamma_{g_1,n_1}^{g_2,n_2})|\cdot\mathrm{Vol}(\Gamma_{g_1,n_1}^{g_2,n_2}) \sim 2^{g+1}\cdot\frac{2^{8g-8+2n+\frac{1}{2}}}{3^{3g-4+n+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi g}}\cdot\frac{1}{2^{3g}\cdot 3^g}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\cdot 4\cdot 3\cdot g}}\cdot 2^{4g+2n-4}$$

$$= \frac{1}{\pi g}\cdot\frac{2^{10g+4n-11}}{3^{4g+n-3}} = \frac{2}{3\pi g}\cdot\frac{1}{4^g}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{4g-4}\cdot\left(\frac{16}{3}\right)^{n} \text{ as } g\to+\infty\,,$$

which completes the proof of (6.41). □

现在一切都已准备就绪，可以证明定理 2.15。

定理2.15 的证明。将右侧（6.38）中的分式的分子和分母分别替换为（6.41）和（6.40），我们得到所需的渐近行为（2.20）。□

现在我们回顾关于对于参数 n 的固定值的 Masur–Veech 体积Vol$\mathcal{Q}_{g,\,n}$ 的大亏格渐近行为的必要事实。全纯二次微分模空间的 Masur–Veech体积Vol $\mathcal{Q}_g$ 的大亏格渐近公式由 [DGZZ3]提出猜想。关于亚纯二次微分所有分层的统一大亏格渐近公式的更具雄心的猜想在 [ADGZZ] 中提出。这个一般猜想至今仍然远未解决。然而，主层的特殊情形，或者等价地说，对于任意固定 n 的 Vol$\mathcal{Q}_{g,\,n}$ 的大亏格渐近行为，已由A. Aggarwal 在 [Ag2] 中取得了惊人的证明。作为证明的一部分，他还计算了 Vol$\mathcal{Q}_{g,\,n}$ 的单圆柱贡献的渐近行为。

命题（定理 1.7. [Ag2]）。对于任意固定的 $n \geq 0$，以下渐近行为成立：

$$\mathrm{Vol}\,\mathcal{Q}_{g,n} \sim \frac{4}{\pi}\cdot\left(\frac{16}{3}\right)^{n}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{4g-4} \quad as\ g\to+\infty\,, \tag{6.42}$$

$$cyl_1(\mathcal{Q}_{g,n}) \sim \sqrt{\frac{2}{3\pi g}}\cdot\left(\frac{16}{3}\right)^{n}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{4g-4} \quad as\ g\to+\infty\,. \tag{6.43}$$

[Ag2] 的结果实际上强得多：他证明渐近行为 (6.42) 对所有满足 n 的 $20n \leq \log(g)$ 都一致成立。

在特殊情形 $n = 0$ 下，关系式(6.43) 在 [DGZZ3] 中被证明为 [DGZZ3,(4.5)] 和 [DGZZ3,(4.15)] 的组合。在一般情形下，关系式 (6.40)首先由A. Aggarwal 证明为 [Ag2, (8.9)] 和 [Ag2, 命题 1] 或 [Ag2,引理9.2]的组合。关系式 (6.43) 也可以作为命题 6.8 的直接推论得到。

推论 ary 6.9. 对于任意固定数量的极点 $n \geq 0$，以下渐近关系成立：

$$cyl_{1,1}(\mathcal{Q}_{g,n}) \sim \frac{1}{6g}\left(\frac{8}{3}\right)^{4g-4} \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^{n} \qquad \text{为 } g \to \infty; \tag{6.44}$$

$$p_1(\mathcal{Q}_{g,n}) \sim \frac{\sqrt{6\pi}}{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \qquad \text{为 } g \to \infty\,. \tag{6.45}$$

证明。只需将渐近表达式 (6.42) 和 (6.43) 代入定义 (2.3) 和 (2.10) 即可。□

注意，(6.45) 与 (2.12) 一致，因此定理 2.9 的证明完成。

由定理 2.5 推导公式 (2.5)。对 (2.2) 右侧表达式分母中的阶乘 $(4g-4+n)!$ 使用斯特林公式，我们得到

$$(4g-4+n)!\,n!\,(12g-12+4n) \sim n!(4g)^{n-4}\sqrt{8\pi g}\left(\frac{4g}{e}\right)^{4g} \cdot 12g \quad \text{as } g \to +\infty\,.$$

将大亏格渐近行为的表达式 (6.44) 代入关于 $C_{g,n}$的公式 (2.2)中，并化简分式，我们得到所需的渐近行为 (2.5)。□

6.5. 定向弯曲线的大亏格渐近计数。关于阿贝尔微分的大亏格体积渐近行为最初由 [EZor] 提出猜想。D. Chen–M. M¨oller– D. Zagier 在 [CMZ] 中证明了主分层 $\mathcal{H}(1^{2g-2})$ 的猜想，A. Sauvaget 在 [Svg1] 中证明了最小分层$\mathcal{H}(2g-2)$ 的猜想，最后 A. Aggarwal [Ag1] 证明了所有分层的猜想。A. Sauvaget 在 [Svg2] 中计算了体积渐近展开的下一项。D. Chen–M. M¨oller–A. Sauvaget–D. Zagier 在 [CMSZ, 定理 1.1] 中将体积解释为交数，并证明这些体积满足某种递推关系，参见 [CMSZ, 定理 3.1]。他们为 [EZor] 关于所有分层的大亏格体积渐近行为的猜想找到了另一种证明，甚至适用于阿贝尔微分所有分层的所有连通分支。

在我们的论文 [DGZZ1]中，我们计算了任意阿贝尔微分分层的任意连通分支的Masur–Veech体积中单圆柱方格铺砌曲面的贡献。通过除以 $\zeta(d)$，可以很容易地推导出高度为 1的单圆柱方格铺砌曲面的贡献，其中d 是该分层的维数；更多细节请参见（3.8）或 [DGZZ2，备注4.29]。现在我们回顾有关主分层中 $\operatorname{Vol}\mathcal{H}(1^{2g-2}) = \operatorname{Vol}\mathcal{H}_g$和$cyl_1(\mathcal{H}(1^{2g-2})) = cyl_1(\mathcal{H}_g)$ 的大亏格渐近的相关结果，并由此推导出 $cyl_{1,1}(\mathcal{H}_g)$、$p_1(\mathcal{H}_g)$ 以及 C_g^+ 的渐近行为。

命题 ([CMZ, 定理 19.3]). 以下渐近行为成立：

$$\operatorname{Vol}\mathcal{H}_g = \frac{1}{4^{g-2}}\left(1 - \frac{\pi^2}{24g} + O\left(\frac{1}{g^2}\right)\right) \quad as\ g \to \infty\,. \tag{6.46}$$

命题（[DGZZ1，推论 2.6 和 2.12]）。以下关系成立：

$$cyl_1(\mathcal{H}_g) = \frac{1}{(2g-1)\cdot 2^{2g-3}} = \frac{1}{g\cdot 4^{g-1}}\left(1 + \frac{1}{2g} + O\left(\frac{1}{g^2}\right)\right) \quad as\ g \to \infty\,. \tag{6.47}$$

推论 6.10。以下渐近行为成立。

$$p_1(\mathcal{H}_g) = \frac{1}{4g}\left(1 + \frac{12+\pi^2}{24g} + O\left(\frac{1}{g^2}\right)\right) \ as\ g \to +\infty\,, \tag{6.48}$$

$$cyl_{1,1}(\mathcal{H}_g) = \frac{1}{g^2\cdot 4^g}\left(1 + \frac{24+\pi^2}{24g} + O\left(\frac{1}{g^2}\right)\right) \ as\ g \to +\infty\,, \tag{6.49}$$

$$C_g^+ = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{g^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{e}{4g}\right)^{2g}\left(1 + \frac{29+\pi^2}{24g} + O\left(\frac{1}{g^2}\right)\right) \ as\ g \to +\infty\,. \tag{6.50}$$

证明。根据 (2.15)，我们有 $p_1(\mathcal{H}_g) = {}^{cyl_1(\mathcal{H}_g)\text{ 体积 }}\mathcal{H}_g$。根据 (2.3)，我们有 $cyl_{1,1}(\mathcal{H}(g)) = {}^{cyl_1(\mathcal{H}_g)^2\text{ 体积 }}\mathcal{H}_g$。应用(6.46) 和 (6.47)，我们得到 (6.48) 和 (6.49)。

最后，$C_g^+ = \frac{cyl_{1,1}(\mathcal{H}_g)\,(4g-4)!(8g-6)}{2g-2}$ 根据(2.7)。对于渐近展开 (6.50)，我们使用阶乘的渐近公式：

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \text{ as } n \to \infty,$$

so we get

$$\frac{1}{(2g-2)!} = \frac{2g(2g-1)}{(2g)!} = (2g)^2\left(1-\frac{1}{2g}\right)\frac{1}{(2g)!}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi g}}\cdot\frac{e^{2g}}{(2g)^{2g-2}}\left(1-\frac{13}{24g}+O\left(\frac{1}{g^2}\right)\right) \quad \text{as } g\to\infty\,.$$

将上面的表达式乘以 $\frac{1}{8g-6}$ 并乘以 (6.49)，我们得到所需的关系式 (6.50) . □

注意，A. Sauvaget [Svg2] 的结果允许计算任意阶的Vol $\mathcal{H}_g$ 的渐近展开：对于任意整数 $r\geq 1$，他通过显式递推定义了实系数 $(c_s)_{s=0..r}$，使得

$$\operatorname{Vol}\mathcal{H}_g = 2^{2g-2}\sum_{s=0}^{r}\frac{c_s}{g^s}+O\left(\frac{1}{g^{r+1}}\right) \quad \text{as } g\to+\infty\,.$$

因此，利用我们在 [DGZZ1 中计算得到的量 $cyl_1(\mathcal{H}_g)$的闭式表达式(6.47)，根据推论 2.6 和 2.12], ，可以将 $p_1(\mathcal{H}_g)$、$cyl_{1,\ 1}$ 和C_g^+的渐近展开 (6.48)–(6.50) 推广到$\frac{1}{g}$ 的任意阶。

Appendix A. Meanders and arc systems of special combinatorial types

如前所述，在曲面 S上有一个横截多曲线对，记 $\mathcal{G}$ 为由多重曲线的并得到的相关嵌入图。补集 $S\setminus\mathcal{G}$ 的边界分支可能只有偶数条边。具有两条边的边界分支称为双边形，参见定义 1.1。

本文所使用的所有技术都适用于在以下更严格的设定下对曲线迷宫和弧系进行计数。固定一个有限子集 F，其属于 $\mathbb{N}^*$，并固定一个地图 μ，其从 F 到 $\mathbb{N}^*$。我们引入以下记号：

$$|\mu| = \sum_{j\in F} j\cdot\mu(j)\,, \qquad \ell(\mu) = \sum_{j\in F}\mu(j)\,, \qquad \ell_{odd}(\mu) = \sum_{\substack{j\in F\\ j \text{ is odd}}}\mu(j)\,.$$

定义A.1.如果对于每个 $j\in F$，补集$S\setminus\mathcal{G}$ 恰好有 $\mu(j)$ 个具有 $2j+4$ 条边的边界分支，并且对于任意 $j\in\mathbb{N}^*\setminus F$，不存在具有 $2j+4$ 条边的边界分支，则称一对横截多曲线具有类型 μ。

注意，上文定义的类型 μ 既不限制四边形边界连通分支的数量，也不限制双边形的数量。

亏格为 g 的曲面上恰好有 n 个简单极点的亚纯二次微分的模空间，自然地由分层 $\mathcal{Q}(j^{\mu(j)},-1^n)$（为简洁起见也记为 $\mathcal{Q}(\mu,(-1)^n)$）分层，这些分层由具有规定零点阶数（$\mu(j)$个阶数为 j的零点，对于 $j=1$、2、.....）和 n 个简单极点的二次微分组成（参见例如 [Zor2] 中的参考文献），其中 $|\mu|=4g-4+n$。

我们称以下两组数据为例外：

(A.1) $\{g=2,n=0,\quad F=\{3,1\},\quad \mu(3)=\mu(1)=1\}$ and $\{g=2,n=0,\quad F=\{4\},\quad \mu(4)=1\}$.

所有其他满足上述条件 $\{g,n,F,\mu\}$ 以及条件 $g+2n\geq 4$ 和 $|\mu|=4g-4+n$ 的集合都称为非例外集合。

与例外集合 $\{g,n,F,\mu\}$ 对应的分层 $\mathcal{Q}(3,1)$ 和 $\mathcal{Q}(4)$ 为空，而与非例外集合对应的分层则非空，见 [MaSm]。

类似地，亏格为 g 的曲面上的阿贝尔微分模空间，自然地按分层 $\mathcal{H}(j^{\mu(j)})$ 划分（为简便起见，也记作 $\mathcal{H}(\mu)$）；这些分层由零点阶数给定的阿贝尔微分构成（$\mu(j)$ 个阶数为 j的零点，且 $j=1$，2，.....），其中 $|\mu|=2g-2$。请回忆，亏格为零时不存在阿贝尔微分；亏格为 $g=1$ 时唯一的分层是 $\mathcal{H}(0)$；对于 $g\geq 2$ 以及任何满足 $|\mu|=2g-2$ 的 μ，分层 $\mathcal{H}(\mu)$ 非空。

对于满足 $g+2n\geq 4$ 的任意一对非负整数 g 和 n，当且仅当存在一个非负整数 $g'\leq g$ 使得 $\{g',n,F,\mu\}$ 是非例外的，曲面亏格为 g 上存在一对类型为 μ 且具有 n 个双边形的不可定向横截多曲线对。该对是填充的，当且仅当 $g'=g$。曲面亏格为 $g=2$ 且没有双边形、并满足 $F=\{3,1\}$ 的横截多曲线对不存在。曲面亏格为 $g=2$ 且没有双边形、满足 $F=\{4\}$ 且$\mu(4)=1$ 的横截多曲线对确实存在，但它们必然是可定向的。当其中两条（或其中一条）多曲线为简单闭曲线时，所有这些性质仍然成立。

The cor多曲线对与方格铺砌曲面之间的对应关系在固定 typ e, 如详细所述 如下。为了简化表述，我们从现在起专注于多重曲线的填充对。Th e

定理 2.5 证明的论证可以很容易地适应于这个更受限的设置，以表明非填充对的贡献可以忽略不计。

回顾一下，与方格铺砌曲面$\mathcal{G}^*$ 相关的亚纯二次微分 q 的简单极点对应于 $\mathcal{G}$ 的双边形，而 q 的 $j \in \mathbb{N}$ 阶零点对应于（$2j+4$）边形。命题 4.1 在这一新背景下可表述如下。

命题 A.2. 对任意非例外数据 $\{g, n, F, \mu\}$，亏格为 g 的曲面上，恰有 n 个双边形的 μ 型多曲线填充横截连通对，与分层 $\mathcal{Q}(\mu, (-1)^n)$ 中亏格为 g （锥点未标记）的方格铺砌曲面之间存在自然的一一对应关系。方格铺砌由图 $\mathcal{G}$ （即两条多曲线之并所构成的图）的对偶图 $\mathcal{G}^*$ 给出。

仅考虑 μ 型简单闭曲线的填充横截连通对，可得到一个双射，其对应于 $\mathcal{Q}(\mu,(-1)^n)$ 中具有单一水平正方形带和单一垂直正方形带的方格铺砌曲面（锥点未标记）构成的子集。

将其替换为方程（3.1）时，定理 3.1、3.2、3.3、3.4 仍然成立。

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{g,n} \quad &\text{by} \quad \mathcal{Q}(\mu, (-1)^n) \\ d = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{g,n} = 6g-6+2n \quad &\text{by} \quad d = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}(\mu, (-1)^n) = 2g-2+\ell(\mu)+n \\ \mathcal{H}_g \quad &\text{by} \quad \mathcal{H}(\mu) \\ d = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_g = 4g-3 \quad &\text{by} \quad d = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(\mu) = 2g-1+\ell(\mu). \end{aligned}$$

逐步采用相同的论证，我们得到在此情形下曲线迷宫和弧系计数的以下结果。

定理 A.3. 对于任意非例外数据 $\{g, n, F, \mu\}$，类型为 μ、亏格为 g、交叉点不超过 $2N$ 个且双边形不超过 n 个的（填充）曲线迷宫数量 $\mathrm{M}_{g,n,\mu}(N)$ 在 $N \to \infty$ 时满足以下渐近行为：

$$\mathrm{M}_{g,n,\mu}(N) = C_{g,n,\mu} N^d + o(N^d)\,,$$

其中 $d = 2g-2+\ell(\mu)+n$ 以及

$$C_{g,n,\mu} = \frac{cyl_{1,1}(\mathcal{Q}(\mu, -1^n))}{n! \prod \mu(j)! \cdot 2d}\,.$$

注记 A.4. 我们可以选择一种设定，其中我们要求亏格为 g 的曲面上的一对填充横截简单闭曲线恰好有 n 个双边形，但至少有 $\mu'(1)$ 个六边形面，至少有 $\mu'(2)$ 个八边形面，等等，假设 $|\mu'| < 4g-4+n$。这为剩余非平凡面的数量和类型——即至少有 6 条边的那些——留出了一定的自由度。如第 4 节中的维数考虑所暗示的，满足这些约束的曲流的主要构型是具有欧拉示性数约束所允许的最大可能数量 $4g-4+n-|\mu'|$ 个度数为 6 的面，其余面（除了 n 个双边形）度数为 4。在此设定中，具有其他非平凡面集合的曲线迷宫在渐近计数中可忽略不计。

在定向情形下，对于任意 $g \geq 2$、$\mathbb{N}^*$ 的任意有限子集 F，以及满足 $|\mu| = 2g-2$ 的任意映射$\mu\colon F \to \mathbb{N}^*$，类似结果均成立。我们用 $\mathrm{M}^+_{g,\mu}(N)$ 表示亏格为g、交叉点不超过 N 个，且在 $j \in F$ 时恰有 $\mu(j)$ 个价数为 4 的面$(j+1)$，而在 $j \in \mathbb{N}^* \setminus F$ 时没有价数为 4 的面$(j+1)$的定向曲折线的数量。我们称这类曲线迷宫为类型 μ 的定向曲线迷宫。

定理 A.5. 对于任意亏格 $g \geq 2$、$\mathbb{N}^*$ 的任意有限子集 F，以及满足$|\mu| = 2g-2$的任意映射 $\mu\colon F \to \mathbb{N}^*$，类型为 μ、亏格为 g 且交叉点不超过 N 个的定向曲折线数量 $\mathrm{M}^+_{g,\mu}(N)$ 满足以下渐近行为：

$$\mathrm{M}^+_{g,\mu}(N) = C^+_{g,\mu} N^d + o(N^d) \quad as\ N \to \infty\,,$$

其中 $d = 2g-1+\ell(\mu)$，且

$$C^+_{g,\mu} = \frac{cyl_{1,1}(\mathcal{H}(\mu))}{\prod \mu(i)! \cdot 2d}$$

是 π^{-2g} 的有理倍数。

类似地，对于任意非例外数据 $\{g, n, F, \mu\}$，我们定义类型为 μ 的弧系。固定弧的数量上界 N。记 $\mathrm{AS}_{g,\ n,\ \mu}(N)$ 为所有可能的配对数（亏格为 g、具有 $k \leq N$ 条弧和 n 个双边形的类型为 μ 的平衡弧系；识别），其中配对视自然等价。记 $\mathrm{MAS}_{g,\ n,\ \mu}(N)$ 为能够产生曲流的配对数。定义

$$\mathrm{P}_{g,n,\mu}(N) = \frac{\mathrm{MAS}_{g,n}(N)}{\mathrm{AS}_{g,n,\mu}(N)}\,.$$

回顾一下，按照约定，g 表示将两个边界分支粘合后得到的曲面的亏格。

定理 A.6. 在所有此类弧系中，类型为 μ、亏格为 g 且含有 n 个双边形、能够产生曲线迷宫的弧系所占比例满足

$$\lim_{N\to\infty} P_{g,n,\mu}(N) = p_1(\mathcal{Q}(\mu,-1^n))\,,$$

where

$$p_1(\mu,(-1)^n) = \frac{cyl_1(\mathcal{Q}(\mu,(-1)^n))}{\mathrm{Vol}_1\,\mathcal{Q}(\mu,(-1)^n)}\,.$$

注记 A.7. 在[DGZZ2] 中证明了

$$cyl_{1,1}\left(\mathcal{Q}(\mu,(-1)^n)\right) = \frac{\left(cyl_1\left(\mathcal{Q}(\mu,(-1)^n)\right)\right)^2}{\mathrm{Vol}\,\mathcal{Q}(\mu,(-1)^n)}\,,$$

其中 $cyl_1\left(\mathcal{Q}(\mu,(-1)^n)\right) \in \mathbb{Q}$。回顾一下，对于亏格为 g 的黎曼曲面 S 上的每个二次微分 q，都存在一个典范双重覆盖 $p:\ S\to S$，使得 p^*q 是全局定义的全纯 1-形式的平方。记 $\hat{g}$ 为覆盖曲面 S 的亏格，并记 g_{eff} 为定义为 $\hat{g}-g$ 的有效亏格。可知 $2g_{eff} = 2+|\mu|+\ell_{odd}(\mu)$，例如参见 [EKZ]。

据猜想，$\mathrm{Vol}_1\,\mathcal{Q}(\mu,(-1)^n)$ 是 $\pi^{2g_{eff}}$ 的有理倍数。由 [AEZ2] 中给出的亏格 0 中任意分层的 Masur–Veech 体积的精确公式可知，这个猜想对亏格 0 中的所有分层都成立。对于维数至多为 12 的所有分层，该猜想也成立：其体积已在 [Gj] 中利用 [EO2] 的方法明确计算出来。最后，当零点的阶数均为奇数时，该猜想最近已在 [KN] 中得到证明，也可由 D. Chen、M. M¨oller 和 A. Sauvaget 的结果推出。然而，当存在偶数阶的零点时，这个猜想仍未解决。

类似地，我们定义类型为 μ 的定向弧系统，并按照之前的方式定义比例 $P^+_{g,\,\mu}$。

定理 A.8. 在所有此类弧系中，类型为 μ 且亏格为 g、能够生成定向弯曲线的定向弧系统所占比例满足

$$\lim_{N\to\infty} P^+_{g,\mu}(N) = p_1(\mathcal{H}(\mu))\,,$$

其中

$$p_1(\mathcal{H}(\mu)) = \frac{cyl_1(\mathcal{H}(\mu))}{\mathrm{Vol}_1\,\mathcal{H}(\mu)}$$

是 π^{-2g} 的一个有理倍数。此外，我们有

$$\lim_{g\to+\infty} p_1(\mathcal{H}(\mu))\cdot(2g+\ell(\mu)) = 1$$

对所有满足 $|\mu| = 2g-2$ 的分拆 μ，该结论一致成立。

后一个极限在 [DGZZ1 的推论 2.12]，中得到证明，该证明采用了 [EZor] 提出的、并由 [Ag1] 和 [CMSZ] 独立证明的 $\mathrm{Vol}_1\,\mathcal{H}(\mu)$ 关于大亏格的一致渐近公式。

Appendix B. Sum of a rational function over binomial coefficients

B.1. 二项式系数比值之和。我们关注当 $n\to\infty$ 时形如

$$\sum_k \frac{\binom{an+b}{ck+d}}{\binom{sn+t}{uk+v}}\,,$$

其中求和遍历满足 $0\le ck+d\le an+b$ 和 $0\le uk+v\le sn+t$ 的整数 k。这里 (a,b,c,d,s,t,u,v) 是整数参数，且 a,c,s,u 为正数。在B.2节中，我们考察类似的更一般求和的渐近行为。当 $a/c = s/u$ 时，渐近行为呈现出特别优美的形式。

定理 B.1. 设 (a,b,c,d,s,t,u,v) 为整数，使得 a,c,s,u 为严格正整数，$a/c = s/u$，且 $a>s$。设 $\alpha = a/c = s/u$。假设 $\alpha>1$。以下渐近行为成立

$$\sum_k \frac{\binom{an+b}{ck+d}}{\binom{sn+t}{uk+v}} \sim 2^{(a-s)n+(b-t)}\cdot\alpha\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2(a-s)}\frac{s}{a}}\cdot\sqrt{n} \qquad as\ n\to\infty\,, \tag{B.1}$$

其中求和遍及满足以下所有条件的整数 k：$0\le ck+d\le an+b$ 以及 $0\le uk+v\le sn+t$。

上述结果直接推论自局部极限定理 B.2，以及提供尾部估计的定理 B.4。我们用 Γ 函数表述二项式系数插值的局部极限定理。具体而言，对于实数 $0 \le x \le y$，令

$$\binom{y}{x} := \frac{\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+1)\cdot\Gamma(y-x+1)}\,.$$

定理 B.2。考虑满足定理 B.1 假设的 (a,b,c,d,s,t,u,v) 和 α。令 $0<\delta<1/4$，并令 $k(x,n)$ $=\frac{\alpha n}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$，其中 $-n^{1/4-\delta} \le x \le n^{1/4-\delta}$。

For any δ as above the following asymptotic equivalence holds

$$\frac{\binom{an+b}{ck(x,n)+d}}{\binom{sn+t}{uk(x,n)+v}} \sim 2^{(a-s)n+(b-t)} \exp\left(-\frac{(a-s)x^2}{2}\right)\sqrt{\frac{s}{a}} \qquad as\ n\to\infty \tag{B.2}$$

对 $x \in [-n^{1/4-\delta}, n^{1/4-\delta}]$ 一致地。

Furthermore, for any $0<\varepsilon<1$ we have

$$\frac{\binom{an+b}{ck(x,n)+d}}{\binom{sn+t}{uk(x,n)+v}} \le 2^{(a-s)n+(b-t)} \exp\left(-\frac{(a-s)x^2}{2}\right)\sqrt{\frac{s}{a}} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{B.3}$$

在 $x \in [-(1-\varepsilon)\sqrt{n}$ 中一致地，$(1-\varepsilon)\sqrt{n}]$。

注 B.3。请注意，渐近表达式 (B.1)、(B.2) 和 (B.3) 的右侧不依赖于 d 和 v。

定理B.2仅在尾部 $x \in \left[-\sqrt{n}, -(1-\varepsilon)\sqrt{n}\right) \cup \left((1-\varepsilon)\sqrt{n}, \sqrt{n}\right]$ 之外为 (B.3)左端的表达式提供上界，对于这些尾部，定理B.2 的证明中的某些近似会失效。然而，我们可以对这些尾部应用较宽松的大偏差估计，从而证明尾部对总和 (B.1) 的贡献是指数级低阶的。

Theorem B.4. 令 $H(p) = -p\log(p) - (1-p)\log(1-p)$，其中 $0<p<1$。对于任意 $\varepsilon \in (0,1]$ 我们有 e

$$\sum_{|k-\frac{\alpha n}{2}| \ge \frac{\alpha}{2}(1-\varepsilon)n} \frac{\binom{an+b}{ck+d}}{\binom{sn+t}{uk+v}} = O(\varepsilon\cdot a\cdot n\cdot \exp(a\cdot n\cdot H(1-\varepsilon/2))) \quad as\ n\to+\infty\,. \tag{B.4}$$

函数 $H(p)$ 可通过连续性延拓至 $p=0$ 和 $p=1$，此时 $H(0) = H(1) = 0$。

注B.5。定理 B.4 仅提供了一个粗略的大偏差上界。我们预计，右侧带有指数 $n(a-e)H(1-\varepsilon/2)$ 的更精细估计应当成立。然而，由于这种改进对我们的目的并非必要，我们没有寻求最优上界。

定理 B.2 的证明紧密遵循棣莫弗-拉普拉斯定理对于二项式系数的证明。研究二项分布的比率而非单个二项式并不会引入太多困难。

在开始证明定理B.2和定理B.4之前，我们在引理B.6、B.8 和 B.9 中回顾关于二项式系数的众所周知事实。

Lemma B.6. *We have*

$$\binom{n}{pn} = e^{nH(p)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\ \pi\ p\ (1-p)\ n}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad as\ n\to\infty \tag{B.5}$$

uniformly in p restricted to compact subsets of $(0,1)$.

注 B.7。实际上，表达式 (B.5) 可以加强为以下明确界：

$$1 - \frac{1-p\ (1-p)}{12\cdot p\cdot(1-p)}\cdot\frac{1}{n} < \frac{\binom{n}{pn}}{e^{nH(p)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\ \pi\ p\ (1-p)\ n}}} < 1 \tag{B.6}$$

对任意 $p \in (0,1)$ 均成立。我们将限制在一个足以满足我们需求的较弱版本上。

引理 B.6 的证明。由于 n、pn 和 $(1-p)n$ 都趋于 $+\infty$，我们可以对 $\binom{n}{pn} = \frac{n!}{(pn)!((1-p)n)!}$ 中的三个阶乘（或者更一般地，三个 Γ 函数）应用斯特林渐近公式。于是得到

$$\binom{n}{np} = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\cdot\pi\cdot n}}{\left(\frac{pn}{e}\right)^{pn}\sqrt{2\cdot\pi\cdot p\cdot n}\ \left(\frac{(1-p)n}{e}\right)^{(1-p)n}\sqrt{2\cdot\pi\cdot(1-p)\cdot n}}\ \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

上述方程的右侧可化简为 (B.5)。 □

引理 B.8. 设 $H(p) = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$ 如定理B.4 中所述。则，对于任意 $x \in (-1, 1)$，我们有

$$H\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) = \log(2) - \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}.$$

特别地，对于任意 $x \in (-1, 1)$，我们有

$$H\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) \leq \log(2) - \frac{x^2}{2}$$

and for small x

$$H\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) = \log(2) - \frac{x^2}{2} + O(x^4).$$

证明。函数 H 在 $[0, 1]$上是解析的。以 $p = 1/2$为中心，收敛半径为 $1/2$ ，我们得到公式。□

最后，在定理 B.4 的证明中，我们将使用以下针对二项分布的大偏差版本。

引理 B.9（[ArrGor，定理 1]）。对于任意 $s \in]1/2、 1[$ ，我们有

$$\sum_{k\geq sn} \binom{n}{k} \leq e^{nH(s)}.$$

(In notat离子化 [ArrGor] 必须令 $p = 1/2$ 并把类似关系的两边相乘 by 2^n.) The paper[ArrGor] 还提供了更精细的渐近等价。

现在我们可以开始证明定理 B.4 和定理 B.2 了。

定理 B.4的证明。左侧 (B.4)中的分母 $\binom{sn+t}{uk+v}$ 至少为1，因此左侧 (B.4) 的求和中的每一项都不超过分子 $\binom{an+b}{ck+d}$。

现在我们使用引理 B.9 对分子进行估计。对于满足 $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$ 的任意 $\varepsilon', \varepsilon$ ，我们有

$$\sum_{k\geq \alpha(1-\varepsilon/2)n} \binom{an+b}{ck+d} = \sum_{ck\geq (1-\varepsilon/2)n} \binom{an+b}{ck+d} \lesssim \sum_{(ck+d)\geq (1-\varepsilon'/2)(an+b)} \binom{an+b}{ck+d}$$
$$\leq e^{(an+b)H(1-\varepsilon'/2)} = O(\exp(a\cdot n\cdot H(1-\varepsilon'/2))) \text{ as } g\to\infty.$$

$k \leq (\varepsilon/2)\cdot\alpha\cdot n$ 的情形是对称的。 □

定理B.2 的证明。回顾一下，根据假设 $\alpha = a/c = s/u \geq 1$。我们的参数 k 满足 $0 \leq ck + d \leq an + b$ 和 $0 \leq uk + v \leq sn + t$。换句话说

$$\max\left(-\frac{d}{c}, -\frac{v}{u}\right) \leq k \leq \alpha n + \min\left(\frac{b-d}{c}, \frac{t-v}{u}\right).$$

我们令 $k = \frac{\alpha n}{2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)$， 其中 $x \in (-\sqrt{n}, \sqrt{n})$。

By Lemma B.6 we have

$$\frac{\binom{an+b}{ck+d}}{\binom{sn+t}{uk+v}} \sim \exp\left((an+b)H(f_1(x,n)) - (sn+t)H(f_2(x,n))\right)\cdot\sqrt{R(x,n)}\,, \tag{B.7}$$

其中 $R(x,n) = \frac{f_2(x,n)\cdot(1-f_2(x,n))\cdot(sn+t)}{f_1(x,n)\cdot(1-f_1(x,n))\cdot(an+b)}$， $f_1(x,n) = \frac{ck+d}{an+b}$和 $f_2(x,n) = \frac{uk+v}{sn+t}$.

首先，我们来分析 $f_1(x,n)$ 和 $f_2(x,n)$。等式 $\alpha = a/c = s/u$ 允许将这些函数改写为

$$f_1(x,n) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{n}} + \frac{d}{a}\frac{1}{n}}{1 + \frac{b}{a}\frac{1}{n}} \quad \text{and} \quad f_2(x,n) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{n}} + \frac{v}{s}\frac{1}{n}}{1 + \frac{t}{s}\frac{1}{n}}.$$

由于 $x/\sqrt{n} = O(1)$，关于 $x \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ 一致地，我们有 f_1 和 f_2 同阶

$$f_1(x,n) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{and} \quad f_2(x,n) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

By Lemma B.8, we get

$$(an+b)H(f_1(x,n)) - (sn+t)H(f_2(x,n)) = ((a-s)n + (b-t))\left(H\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

对于 x 内部的 $[-(1-\varepsilon)\sqrt{n},(1-\varepsilon)\sqrt{n}]$ 一致地。特别是，

$$(an+b)H(f_1(x,n))-(sn+t)H(f_2(x,n))\le((a-s)n+(b-t))\left(\log(2)-\frac{x^2}{2n}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

对位于 $[-(1-\varepsilon)\sqrt{n},(1-\varepsilon)\sqrt{n}]$ 内的 x 一致成立。

我们现在分析靠近 $x=0$ 的行为。让我们固定较小的 $0<\delta<1/2$，并考虑满足 $x\in[-n^{1/4-\delta},n^{1/4-\delta}]$ 的 $k=\frac{\alpha n}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$。下面所有的 $O(\cdot)$-估计均与该区间中的 x 无关，但依赖于 δ 的选择。我们得到

$$(an+b)\ H(f_1(x,n))=(an+b)\left(\log(2)-\frac{x^2}{2\cdot n}+O\left(\frac{x^4}{n^2}\right)\right)=(an+b)\log(2)-\frac{ax^2}{2}+O\left(n^{-4\delta}\right).$$

对 $f_2(x,n)$ 同样的分析成立，我们得到

$$(an+b)H(f_1(x,n))-(sn+t)H(f_2(x,n))=((a-s)n+(b-t))\log(2)-\frac{(a-s)x^2}{2}+O\left(n^{-4\delta}\right).$$

对于剩余项，我们有

$$R(x,n)=\frac{s}{a}+\frac{at-bs}{a^2}\frac{1}{n}+O\left(\frac{x}{n^{3/2}}\right)=\frac{s}{a}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

对 $x\in[-\sqrt{n},\sqrt{n}]$ 一致成立，我们得到 (B.2) 和 (B.3)。 □

我们现在可以由定理 B.4 和定理 B.2 推出定理 B.1。

定理 B.1 的证明。定理 B.2 和定理 B.4 表明，和式 (B.1) 的主要贡献来自满足 $x\in[-n^{1/4-\delta},n^{1/4-\delta}]$ 的项 $k=k(x)=\frac{\alpha n}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$。这里可以任选满足 $0<\delta<1/4$ 的 δ。

当 k 取遍整数时，x 的值以 $\frac{2}{\alpha\sqrt{n}}$ 为间隔依次变化，并且 hen ce

$$\sum_k\frac{\binom{an+b}{ck+d}}{\binom{sn+t}{ek+f}}\sim 2^{(a-s)n+(b-t)}\cdot\sqrt{\frac{s}{a}}\cdot\frac{\alpha\cdot\sqrt{n}}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(a-s)x^2}{2}\right)dx.$$

积分的值为 $\sqrt{\pi\cdot\frac{2}{a-s}}$，我们得到 (B.1)。

□

B.2. 一般情形。定理 B.1 可作如下直接推广。

定理 B.10. 设 (a_i,b_i,c_i,d_i)，其中 $i=1,\ldots,l$，以及 (s_j,t_j,u_j,v_j)，其中 $j=1,\ldots,m$，为整数的集合。记 $a=a_1+\cdots+a_l$，$b=b_1+\cdots+b_l$，$s=s_1+\cdots+s_m$，$t=t_1+\cdots+t_m$，$A=a_1\cdots a_l$，$S=s_1\cdots s_m$。

假设所有 a_i,c_i,s_j,u_j 均严格为正。假设对于 $i=1,\ldots,l$，有 $\frac{a_i}{c_i}=\frac{s_j}{u_j}=\alpha\ge1$；对于 $j=1,\ldots,m$，也有相应条件。假设 $a>s$。那么

$$\text{(B.8)}\quad\sum_k\frac{\binom{a_1n+b_1}{c_1k+d_1}\cdots\binom{a_ln+b_l}{c_lk+d_l}}{\binom{s_1n+t_1}{u_1k+v_1}\cdots\binom{s_mn+t_m}{u_1k+v_m}}\sim\alpha\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{m-l+1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{(a-s)}\frac{S}{A}}\cdot n^{\frac{m-l+1}{2}}\cdot2^{(a-s)n+(b-t)}\quad as\ n\to+\infty,$$

其中求和遍历所有满足以下条件的整数 k：对于所有 $i=1,\ldots,l$，$0\le c_ik+d_i\le a_in+b_i$；对于所有 $j=1,\ldots,m$，$0\le u_jk+v_j\le s_jn+t_j$。

当 $m=0$ 时，令 $s=t=0$ 和 $S=1$。

证明。该证明逐行遵循定理 B.1 的证明。渐近表达式中唯一的细微差别来自类似于表达式 (B.7) 中因子 $R(x,n)$ 的形式。即，现在我们有

$$\text{(B.9)}\quad\frac{\binom{a_1n+b_1}{c_1k+d_1}\cdots\binom{a_ln+b_l}{c_lk+d_l}}{\binom{s_1n+t_1}{u_1k+v_1}\cdots\binom{s_mn+t_m}{u_1k+v_m}}\sim\exp\Big((a_1n+b_1)H(f_{1,1}(x,n))+\cdots+(a_ln+b_l)H(f_{1,l}(x,n))\Big)$$
$$\times\exp\Big(-(s_1n+t_1)H(f_{2,1}(x,n))-\cdots-(s_mn+t_m)H(f_{2,m}(x,n))\Big)\cdot\sqrt{R(x,n)},$$

where

$$f_{1,i}(x,n)=\frac{c_ik+d_i}{a_in+b_i},\quad i=1,\dots,l;$$
$$f_{2,j}(x,n)=\frac{u_jk+v_j}{s_jn+t_j},\quad j=1,\dots,m;$$
$$R(x,n)=\frac{\prod_{j=1}^m f_{2,j}(x,n)\cdot(1-f_{2,j}(x,n))\cdot(s_jn+t_j)}{\prod_{j=1}^m f_{1,i}(x,n)\cdot(1-f_{1,i}(x,n))\cdot(a_in+b_i)}.$$

将 $R(x,n)$ 限制到 $x\in[-(1-\varepsilon)\sqrt{n},\ (1-\varepsilon)\sqrt{n}]$，我们得到

$$\begin{aligned}R(x,n)&=\frac{\prod_{j=1}^m\left(2\pi\cdot f_{2,j}(x,n)\cdot(1-f_{2,j}(x,n))\cdot(s_jn+t_j)\right)}{\prod_{j=1}^l\left(2\pi\cdot f_{1,i}(x,n)\cdot(1-f_{1,i}(x,n))\cdot(a_in+b_i)\right)}\\&=(2\pi)^{m-l}\cdot\frac{\prod_{j=1}^m\left(\frac14-\frac{x^2}{4n}+O\left(\frac1n\right)\right)}{\prod_{j=1}^l\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\cdot x^2}{2n}+O\left(\frac1n\right)\right)}\cdot\frac{\prod_{j=1}^m(s_jn+t_j)}{\prod_{i=1}^l(a_in+b_i)}\\&=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x^2}{2n}\right)^{m-l}\cdot\frac{S}{A}\cdot n^{m-l}\cdot\left(1+O\left(\frac1n\right)\right),\end{aligned}$$

其中 $A=\prod_{i=1}^l a_i$ 和 $S=\prod_{j=1}^m s_j$。这个表达式产生因子 $\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-l}\cdot\frac{S}{A}\cdot n^{m-l}}$，它推广了因子 $\sqrt{\frac{s}{a}}$；在由定理 B.1 中公式 (B.1) 表示的特殊情形 $m=l=1$ 下，我们得到该因子。□

示例 B.11。公式 (B.8) 提供了渐近行为的另一种证明

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{3n-4}{3k-2}\sim\frac{1}{\sqrt{6\pi n}}\cdot2^{4n-4}\quad\text{as } n\to+\infty$$

from Lemma 4.6 in [DGZZ3].

示例B.12。Dixon 和 $S_n(p,x)$ 定义为

$$S_n(p,x):=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}^p x^k,\quad n=1,2,\dots,$$

见 [Dix]。仅有少数 $S_n(p,x)$ 的精确值已知，见 [Is]。对于任意固定的 $p\in\mathbb{N}$ 公式 (B.8) 给出了以下关于 $S_n(p,1)$ 的渐近表达式：

$$S_n(p,1)\sim\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{p-1}{2}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{p-1}{2}}}\cdot2^{pn}\quad\text{as } n\to+\infty.\tag{B.10}$$

B.3. 二点关联函数的应用。表 2 给出了小亏格 g 时二点关联函数之和的精确值，而下文命题 B.13 描述了该和的大亏格渐近行为。

1	2	3	4	5	6	7
$\frac{1}{8}$	$\frac{49}{2880}$	$\frac{1181}{725760}$	$\frac{467}{3870720}$	$\frac{33631}{4598415360}$	$\frac{322873}{860823355392}$	$\frac{205001}{12297476505600}$

TABLE 2. 二关联子的求和 $\sum_{k=0}^{3g-1}\langle\tau_k\tau_{3g-1-k}\rangle_g$ 对于 $g=1,\dots,7$.

命题 B.13。以下渐近公式成立：

$$\sum_{k=0}^{3g-1}\langle\tau_k\tau_{3g-1-k}\rangle_g\sim\frac{\sqrt3}{3}\cdot\left(\frac23\right)^g\cdot\frac{1}{(2g+1)!!}\sim\frac{1}{2\sqrt6}\cdot\frac1g\cdot\left(\frac{e}{3g}\right)^g\quad as\ g\to+\infty.\tag{B.11}$$

Proof. 考虑以下二点关联函数 $\langle\tau_k\tau_{3g-1-k}\rangle_g$ 归一化，该归一化由 [Zog1] 引入：

$$a_{g,k}=\frac{(2k+1)!!\cdot(6g-1-2k)!!}{(6g-1)!!}\cdot24^g\cdot g!\cdot\langle\tau_k\tau_{3g-1-k}\rangle_g.$$

(B.11) 的左侧在此记号下可改写为

$$\sum_{k=0}^{3g-1}\langle\tau_k\tau_{3g-1-k}\rangle_g = \frac{(6g-1)!!}{24^g\cdot g!}\cdot\sum_{k=0}^{3g-1}\frac{a_{g,k}}{(2k+1)!!\cdot(6g-1-2k)!!}\,. \tag{B.12}$$

根据 [DGZZ3，命题 4.1] 对于所有 $g\in\mathbb{N}$ 以及范围 $\{2,3,\dots,3g-3\}$ 内的所有整数 k，以下界成立：

$$1-\frac{2}{6g-1} = a_{g,1} = a_{g,3g-2} < a_{g,k} < a_{g,0} = a_{g,3g-1} = 1\,.$$

These bounds combined with (B.12) imply

$$\sum_{k=0}^{3g-1}\langle\tau_k\tau_{3g-1-k}\rangle_g = \frac{(6g-1)!!}{24^g\cdot g!}\sum_{k=0}^{3g-1}\frac{1}{(2k+1)!!\cdot(6g-1-2k)!!}\cdot\big(1+o(1)\big)\quad\text{as } g\to+\infty\,. \tag{B.13}$$

将双阶乘转换为阶乘，合并2 和3的幂，并转换为二项式系数后，我们可以将上述关系右侧的表达式改写为

$$\begin{aligned}\frac{(6g-1)!!}{24^g\cdot g!}\sum_{k=0}^{3g-1}\frac{1}{(2k+1)!!\cdot(6g-1-2k)!!} &= \frac{1}{24^g\cdot g!}\cdot\frac{(6g)!}{2^{3g}\cdot(3g)!}\sum_{k=0}^{3g-1}\frac{2^k\cdot k!}{(2k+1)!}\cdot\frac{2^{3g-1-k}\cdot(3g-1-k)!}{(6g-1-2k)!}\\ &= \frac{1}{3^g}\cdot\frac{1}{2^{3g+1}}\cdot\frac{(6g)!}{g!\cdot(3g)!}\cdot\frac{(3g-1)!}{(6g)!}\sum_{k=0}^{3g-1}\frac{k!\cdot(3g-1-k)!}{(3g-1)!}\cdot\frac{(6g)!}{(2k+1)!\cdot(6g-1-2k)!}\\ &= \frac{1}{3^g}\cdot\frac{1}{2^{3g+1}}\cdot\frac{1}{g!\cdot 3g}\sum_{k=0}^{3g-1}\frac{\binom{6g}{2k+1}}{\binom{3g-1}{k}}\,.\end{aligned}$$

F从 定理 B.1 用 $a=6$, $b=0$, $c=2$, $d=1$, $s=3$, $t=-1$, $u=1$ 和 $v=0$ 我们得到

$$\sum_{k=0}^{3g-1}\frac{\binom{6g}{2k+1}}{\binom{3g-1}{k}}\sim 2^{3g+1}\cdot 3\cdot\sqrt{\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{g}\sim\frac{(g!)^2}{(2g)!}\cdot 2^{5g}\cdot\sqrt{3} \tag{B.14}$$

where the second equivalence is obtained by Stirling's formula.

结合上述等式，我们可以将 (B.13) 改写为

$$\sum_{k=0}^{3g-1}\langle\tau_k\tau_{3g-1-k}\rangle_g \sim \frac{1}{3^g}\cdot\frac{1}{2^{3g+1}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi g}}\cdot\left(\frac{e}{g}\right)^g\right)\cdot\frac{1}{3g}\cdot\left(2^{3g+1}\cdot 3\cdot\sqrt{\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{g}\right)\sim\left(\frac{e}{3g}\right)^g\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{g}$$

and also as

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3g-1}\langle\tau_k\tau_{3g-1-k}\rangle_g &= \frac{1}{3^g}\cdot\frac{1}{2^{3g+1}}\cdot\frac{1}{g!\cdot 3g}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot 2^{5g}\cdot(g!)^2}{(2g)!}\cdot\big(1+o(1)\big)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^g\cdot\frac{1}{2g}\cdot\frac{2^g\cdot g!}{(2g)!}\cdot\frac{2g}{2g+1}\big(1+o(1)\big) = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^g\cdot\frac{1}{(2g+1)!!}\cdot\big(1+o(1)\big)\quad\text{as } g\to+\infty\,.\end{aligned}$$

□

References

[Ag1] A. Aggarwal, *Large Genus Asymptotics for Volumes of Strata of Abelian Differentials*, 《美国数学会杂志》33（2020年），941–989。[Ag2] A. Aggarwal, *Large Genus Asymptotics for Intersection Numbers and Principal Strata Volumes of Quadratic Differentials* **226** 2021 3, 897 1010 , 《数学发明》（），第 – 期。[ADGZZ] A. Aggarwal、V. Delecroix、E. Goujard、P. Zograf、A. Zorich, *Conjectural large genus asymptotics of Masur–Veech volumes and of area Siegel-Veech constants of strata of quadratic differentials* , 《Arnold 数学杂志》（），第 2 期，149–161。[AnMo] N. Anantharaman 和 L. Monk，准备中。[ABCDGLW] *Topological recursion for Masur–Veech volumes* J. E. Andersen、**107 1** 2023 254 332 G. Borot、S. Charbonnier、V. Delecroix、A. Giacchetto、D. Lewanski、C. Wheeler, , 《伦敦数学会杂志》, : （），–。[AlP] M. H. Albert 和 M. S. Paterson。 *Bounds for the growth rate of meander numbers*, 《组合论杂志 A 辑》112:2（2005年），250–262。[Arn] V. I. Arnold, 《阿诺德问题》，施普林格出版社，柏林、海德堡，2005年。[ArrGor] R. Arratia、L. Gordon, *Tutorial on large deviations for the binomial distribution*, 《数学生物学通报》51:1（1989年），125–131。[AEZ1] J. Athreya、A. Eskin 和 A. Zorich, *Counting generalized Jenkins–Strebel differentials*, 《献给几何学》170:1（2014年），195–217。

[AEZ2] J. Athreya、A. Eskin 和 A. Zorich, *Right-angled billiards and volumes of moduli spaces of quadratic d!fferentials on* $\mathbb{C}^1$, 4` ´ **49** 2016 1307 1381 P《高等师范学院科学年刊》，第 eme 辑， （），–。[BGS] J. Borga、E. Gwynne、Xin Sun, *Permutons, meanders, and SLE-decorated Liouville quantum gravity*, （2022年）arXiv:2207.02319v2。[BCP] T. Budzinski、N. Curien、B. Petri *On Cheeger constants of hyperbolic surfaces*, （2022年） arXiv:2207.00469。[Br] P. Buser, 《紧黎曼曲面的几何与谱》。数学进展丛书第106卷。Birkh¨auser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，1992年。[CFF] G. Chapuy、V. F´eray、E. Fusy, *A simple model of trees for unicellular maps*。《组合论杂志 A 辑》120:8（2013年），2064–2092。[Ch1] L. Chekhov, *Matrix model for discretized moduli space*, 《几何与物理杂志》12（1993年），153–164。[Ch2] L. Chekhov, *Matrix Model Tools and Geometry of Moduli Spaces* **48**, 33 90, , 《应用数学学报》–。[1997 CMS] D. Chen、M. M ¨ *Masur–Veech volumes and intersection theory: the principal strata of quadratic differentials* oller、A. Sauvaget，附录由 G. Borot、A. Giacchetto、D. Lewanski 撰写，，即将发表于杜克数学杂志，arXiv:1912.02267 （2019年）。[CMZ] D. Chen、M. M¨oller、D. Zagier, *Quasimodularity and large genus limits of Siegel-Veech constants*, 《美国数学会杂志》31（2018年），第4期，1059–1163。[CMSZ] D. Chen、M. M ¨ *Masur–Veech volumes and intersection theory on moduli spaces of* oller、A. Sauvaget、*Abelian differentials* **222** 2020 1, 283 373 D. Zagier, ，《数学发明》（），第 – 期。[CuKST] N. Curien、G. Kozma、V. Sidoravicius 和 L. Tournier, *Uniqueness of the infinite noodle*, 《亨利·庞加莱研究所年刊 D 辑》6:2（2019年），221–238。[D] V. Delecroix, *Asymptotics of lieanders with fixed composition sizes*（2018年）， arXiv:1812.03912。[DGZZ1] V. Delecroix、E. Goujard、P. Zograf、A. Zorich, *Contribution of one-cylinder square-tiled surfaces to Masur–Veech volumes* ，附录由 P. Engel 撰写，《Asterisque》第（），–。[DGZZ2] V. Delecroix、E. Goujard、P. Zograf、A. Zorich, ´ **415** 1 2020 223 274 *Enumeration of meanders and Masur–Veech volumes*, Forum Math. Pi 8（2020年），第 e4 期。[DGZZ3] V. Delecroix、E. Goujard、P. Zograf、A. Zorich, *Masur–Veech volumes, frequencies of simple closed geodesics and intersection numbers of moduli spaces of curves* **170** 12 2021 2633 2718 ，杜克数学杂志，第 No 期（）。–。[DGZZ4] V. Delecroix、E. Goujard、P. Zograf、A. Zorich, *Large genus asymptotic geometry of random square-tiled surfaces and of random multicurves* **230** 2022 1, 123 224 ，《数学发明》（），第 – 期。[DeKi] V. Dergachev 、 A. Kirillov, *Index of Lie algebras of seaweed type*, 《李理论杂志》10:2 （ 2000 年） 331–343。[DiGG1] P. Di Francesco、O. Golinelli、E. Guitter, *Meander, folding, and arch statistics*, 《数学与计算机建模》26 No 8–10（1997年）97–147。[DiGG2] P. Di Francesco、O. Golinelli、E. Guitter, *Meanders: exact asymptotics* **570** 2000 3, , 《核物理B辑》（），699 712 第 – 期。[DiDGG] P. Di Francesco、B. Duplantier、O. Golinelli、E. Guitter, *Exponents for Hamiltonian paths on random bicubic maps and KPZ* arXiv:2210.08887 2022 ，（）。[Dix] A. C. Dixon, *On the sum of cubes of the coefficients in a certain expansion by the binomial theorem*, 《数学信使》20（1891年）79–80。[DuYu] M. Duflo、R. Yu, *On compositions associated to Frobenius parabolic and seaweed subalgebras of sln(k)*, 《李理论杂志》25:4,（2015年）1191–1213。[ElJ] A. Elashvili、M. Jibladze, *Combinatorics of biparabolic Lie subalgebras of the* A_n *series*, 预印本。[EKZ] A. Eskin、M. Kontsevich、A. Zorich, *Sum of Lyapunov exponents of the Hodge bundle with respect to the Teichmüller geodesic flow* **120 1** 2014 207 333 ，《高等科学研究所出版物》，：（），–。[EO1] A. Eskin、A. Okounkov, *Asymptotics of numbers of branched coverings of a torus and volumes of moduli spaces of holomorphic differentials* **145** 2001 1, 59 103 ，《数学发明》（），第 – 期。[EO2] A. Eskin 、 A. Okounkov。 *Pillowcases and quasimodular forms*, 《代数几何与数论》，数学进展丛书 253 （ 2006 年），1–25。[EZor] A. Eskin、A. Zorich, *Volumes of strata of Abelian differentials and Siegel–Veech constants in large genera*, Arnold数学杂志，1:4（2015年），481–488。[FeT] V. F´eray 和 P. Th´evenin, *Components in meandric systems and the infinite noodle*, （2022年），arXiv:2201.11572。[FiRo] B. Fiedler 和 C. Rocha, *Design of Sturm global attractors 1: Meanders with three noses, and reversibility*, arXiv:2302.12531 2023 （）。[FuNe] M. Fukuda 和 I. Nechita, *Enumerating meandric systems with large number of loops*, 《亨利·庞加莱研究所年刊 D 辑》，6:4（2019年），607–640。[Gj] E. Goujard, *Volumes of strata of moduli spaces of quadratic differentials: getting explicit values*, 《傅里叶研究所年刊》66年第6期（2016年），2203–2251。[Gd] H. W. Gould, 《组合恒等式：列有500个二项式系数求和的标准化表集》。修订版（英文），摩根敦（1972年）。[GnNP] I. P. Goulden、A. Nica 和 D. Puder, *Asymptotics for a class of meandric systems via the Hasse diagram of* NC_n, （）。国际数学研究通知，（），–。[GY] Jindong Guo、Di Yang, *On the large genus asymptotics of* ψ*-class intersection numbers*, **4** 2020 983 1034 arXiv:2110.06774 （2021年）。[HR] H. S. W. Han、C. M. Reidys, *A bijection between unicellular and bicellular maps*, （2013年）， arXiv:1301.7177。[HrZa] J. Harer、D. Zagier, *The Euler characteristic of the moduli space of curves.*《数学发明》85:3（1986年），457–485。[Hi] W. Hide, *Spectral gap for Weil-Petersson random surfaces with cusps*, https://doi.org/10.1093/imrn/rnac293, 国际数学研究通知（2022年）；arXiv:2107.14555。[HiM] W. Hide、M. Magee, *Near optimal spectral gaps for hyperbolic surfaces*, arXiv:2107.05292 （2021年）。[HiT] W. Hide、J. Thomas, *Short geodesics and small eigenvalues on random hyperbolic punctured spheres*, （2022年）；arXiv:2209.15568。[Is] M. E. H. Ismail, *Sums of products of binomial coefficients*, 《组合学艺术》101（2011年）187–192。

[Jen] I. Jensen,
A transfer matrix approach to the enumeration of plane meanders **33** 2000 34, ,《物理学杂志 A》() , 第 – 期。[Kg] V. Kargin, *Cycles in random meander systems*,《统计物理学杂志》181（2020年）, 第 6 期, 2322–2345。[Kz] M. Kazarian, *Recursion for Masur–Veech volumes of moduli spaces of quadratic differentials*, Jour. I nst. Math. Jussieu 21:4（2021年）, 1471–1476。[Kon] M. Kontsevich,
Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function,《数学物理通讯》147（1992年）, 1–23。[KN] V. Koziarz 和 D.-M. Nguyen, *Variation of Hodge structure and enumerating tilings of surfaces by triangles andsquares*, Jour. de l' ´Ecole Polytechnique, Math´ematiques, 8 （ 2021 年）, 第 831–857 页。[LZv1] S. K. Lando, A. K. Zvonkin,
Meanders, Selecta Math. Sov,. 11:2（1992年）, 117–144。[LZv2] S. K. Lando, A. K. Zvonkin,
Plane and projective meanders,《理论计算机科学》117（1993年）, 227–241。[LiWr] M. Lipnowski 和 A. Wright,
Towards optimal spectral gaps in large genus （2021年）, *arXiv:2103.07496*。[Ma] H. Masur,
Interval exchange transformations and measured foliations, Ann. of Math., 115（1982年）, 169–200。[MaSm] H. Masur, J. Smillie, *Quadratic differentials with prescribed singularities and pseudo-Anosov diffeomorphisms*, Comment. Math. Helvetici 68（1993年）, 289–307。[Mi1] M. Mirzakhani,
Simple geodesics and Weil–Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces,《数学发明》167（2007年）, 第 1 期, 179–222。[Mi2] M. Mirzakhani, *Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces*, Annals of Math. (2) 168（2008年）, 第 1 期, 97–125。[Nb] P. Norbury, *Counting lattice points in the moduli space of curves*, Math. Res. Lett. 17（2010年）, 第 3 期, 467–481。[Po] H. Poincar´e, *Sur un théorème de géométrie*, Rend. del Circ. Mat. Palermo 33 (1912年) 375–407 (Oeuvres, T VI 499–538) , [R] L Ren,
M irzakhani's frequencies of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces of large genus and with large number of cusps , 正在编写中。[Svg1] A. Sauvaget, *Volumes and Siegel–Veech constants of $\mathcal{H}(2g-2)$ and Hodge integrals*, Geom. Funct. Anal. 28（2018年）, 第 6 期, 1756–1779。, [Svg2] A. Sauvaget, *The Large genus asymptotic expansion of Masur–Veech volumes*, Internat. Math. Research Notices, Int. Math. Res. Not. 20 （ 2021 年）, 15894–15910。[ShWu] Yang Shen 和 Yunhi Wu,
Arbitrarily small spectral gaps for random hyperbolic surfaces with many cusps,（2023年）, arXiv:2203:15681。[Ve] W. Veech, *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps*, Annals of Math., 115（1982年）, 201–242。[Wi] E. Witten, *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space*, 收录于《微分几何综述》（马萨诸塞州剑桥, 1990年）, 243–310, Lehigh Univ., 宾夕法尼亚州伯利恒, 1991年。[WuXue] Yunhui Wu 和 Yuhao Xue,
Random hyperbolic surfaces of large genus have first eigenvalues greater than $\frac{3}{16}$, Geom. Funct. Anal., 32(2), 340–410, 2022年。[YZZ] D. Yang, D. Zagier, Y. Zhang, *Masur–Veech volumes of quadratic differentials and their asymptotics*, Jour. Geom. Phys. 158（2020年）, 103870, 共 12 页。[Zog1] P. G. Zograf, *An Explicit Formula for Witten's 2-Correlators*, Jour. Math Sci 240（2019年）, 535–538。[Zog2] P. G. Zograf,
Small eigenvalues of automorphic Laplacians in spaces of parabolic forms **36**, , J. Soviet Math. – () 106 114 1987。[Zor1] A. Zorich,
Square-tiled surfaces and Teichmüller volumes of the moduli spaces of abelian differentials.《动力系统与几何中的刚性》（剑桥, 2000年）, 459–471, Springer, 柏林, 2002年。[Zor2] A. Zorich, *Flat surfaces.*《数论、物理与几何前沿》第一卷, 437–583, Springer, 柏林, 2006年。[Zor3] A. Zorich,
Explicit Jenkins-Strebel representatives of all strata of Abelian and quadratic differentials, J. Mod. Dyn. 2（2008年）, 第 1 期, 139–185。[Zv] A. Zvonkin. *Meanders: a Personal Perspective.* （ 2021 年）, 即将发表于《欧洲组合数学杂志》; 纪念 Pierre Rosenstiehl 的专刊。

LaBRI, Domaine universitaire, 351 cours de la Libération, 33405 Talence, FRANCE
Email address: 20100.delecroix@gmail.com

IMB, Univ. de Bordeaux, 351 cours de la Libération, 33405 Talence,
FRANCE et Institut Universitaire deFrance*Email address*: elise.goujard@gmail.com

St. Petersburg Department, Steklov Math. Institute, Fontanka 27, St. Petersburg 191023, and Chebyshev Laboratory, St. Petersburg State University, 14th Line V.O. 29B, St.Petersburg 199178 Russia
Email address: zograf@pdmi.ras.ru

Institut de Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche, Case 7012, 8 Place Aurélie Nemours, 75205 PARIS Cedex 13, France
Email address: anton.zorich@gmail.com