带相互作用的随机流之质量分布的间歇现象

AndreyDorogovtsev[1], Alexander Weiß[2]

arXiv:2304.02571v1 [math.PR] 5 Apr 2023

1 引言

本文致力于研究带相互作用的随机微分方程的测度值解。此类方程由 [4] 提出，用于描述相互作用运动。方程形式如下：

$$\begin{cases} dx(u,t) & = a(x(u,t),\mu_t)\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x(u,t),\mu_t)\mathrm{d}B_k(t) \\ \forall u \in \mathbb{R}^d \quad x(u,0) & = u \\ \mu_t & = \mu_0 \circ x^{-1}(\cdot,t), \end{cases} \tag{1}$$

其中， μ_0 描述粒子的初始分布， μ_t 是系统 $x(\cdot\ t)$的推前测度。系数是可测函数 a : $\mathbb{R}^d \times \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$ 和b_k : $\mathbb{R}^d \times \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^{d\times d}$，其中 $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$表示$\mathbb{R}^d$上概率测度的空间。

对于具有勒贝格密度的初始测度，我们可以研究 μ_t的勒贝格密度的行为，其中 $t \to \infty$。本文将探讨此类密度中间歇现象的出现。间歇性是指稀有但显著的峰值的出现，这些峰值塑造了底层量的矩随$t \to \infty$变化的行为，即高阶矩相对于低阶矩显著增长。此类现象已在流体动力学湍流背景下得到研究（[13],[1] 等）。此外， [15] 还在随机介质中研究了间歇性，并利用矩刻画间歇现象。相关研究也结合抛物型安德森模型开展（[2],[8],[5],[3] 等），采用矩李雅普诺夫指数的方法来判定抛物型安德森模型中的间歇性。

本文将证明具有相互作用的随机微分方程的李雅普诺夫指数存在，并证明这类方程的刘维尔公式类比。最后，本文将证明主要结果：对于紧支撑的初始测度，质量分布具有间歇性。相应地，本文结构如下：第二章讨论具有相互作用的随机微分方程的概念，并着重讨论系统的微分同胚性质。

[1] 乌克兰国家科学院,andrey.dorogovtsev@gmail.com[2] 莱比锡大学, alexander.weiss@math.uni-leipzig.de

(1). 第三章致力于 μ_t的勒贝格密度的存在性，当 μ_0具有勒贝格密度时，并讨论其性质。在最后一章中我们定义间歇性，并证明在系数上施加的耗散条件下，每当初始测度 μ_0 具有紧支撑时，我们就能实现间歇性。

2 相互作用随机微分方程

研究的主要对象是 [4] 中引入的相互作用随机微分方程的解。在开始之前，我们将介绍一些涉及 $\mathbb{R}^d$ 上概率测度空间的记号，其中从现在起将固定 $d \geq 1$ 。令 $\mathfrak{M}(X)$表示 X 上所有概率测度的空间，其中 X 是一个拓扑空间，并配备相应的Borel σ-代数 $\mathrm{B}(X)$。为简单起见，我们将用 $\mathfrak{M}$ 表示 $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$，用B表示 $\mathrm{B}(\mathbb{R}^d)$。现在我们将介绍关于 $\mathfrak{M}$ 的可度量化性的记号。

定义2.1。 令 μ， $\nu \in \mathfrak{M}$ 则

$$C(\mu,\nu) := \{\kappa \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) | \kappa(\cdot \times \mathbb{R}^d) = \mu(\cdot), \kappa(\mathbb{R}^d \times \cdot) = \nu(\cdot)\}$$

被称为具有边缘分布 μ and ν 的耦合空间。

现在我们可以定义瓦瑟斯坦空间

定义 2.2. 定义

$$\begin{aligned} &\gamma : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R} \\ &\qquad (\mu,\nu) \mapsto \gamma(\mu,\nu) := \inf_{\kappa \in C(\mu,\nu)} \int\!\!\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|u-v|}{1+|u-v|} \kappa(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v) \end{aligned}$$

γ 称为瓦瑟斯坦距离。

定义 2.3. 空间 $(\mathfrak{M}, \gamma)$ 称为瓦瑟斯坦空间

注 2.4. 众所周知，$(\mathfrak{M}, \gamma)$ 是一个波兰空间（例如 [14]）。

定义 2.5 ([4])。 设 $(\Omega, \mathrm{F}\ \mathbb{P})$ 是一个完备概率空间，且 $(B_k)_{k\geq 0}$是d维布朗运动。此外，设 $a:\ \mathbb{R}^d \times \mathfrak{M} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ 和 $b_k : \mathbb{R}^d \times \mathfrak{M} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$ 是可测函数，且 $\mu_0 \in \mathfrak{M}$，则以下随机微分方程

$$\begin{cases} dx(u,t) & = a(x(u,t),\mu_t,t)\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x(u,t),\mu_t,t)\mathrm{d}B_k(t) \\ \forall u \in \mathbb{R}^d \quad x(u,0) & = u \\ \mu_t & = \mu_0 \circ x^{-1}(\cdot,t) \end{cases} \tag{2}$$

被称为带相互作用的随机微分方程。

与通常的随机微分方程相比，这里的关键区别和难点在于，解的值不仅取决于时间上的演化，还取决于空间中分布的演化。

为了讨论这类量的适定性，我们将首先定义带相互作用的随机微分方程的强解。

定义 2.6 ([4])。 考虑 (2) 中的 SDE 情形，一个映射

$$x : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$$
$$(u, t, \omega) \mapsto x(u, t)(\omega)$$

如果.....被称为带相互作用的随机微分方程（2）的唯一强解

i) x 关于 B $\times$ B($[0, t]$) $\times$ F$_t$ 可测，对每个区间 $[0, t]$上的所有 $t \geq 0$ 均成立。

ii) x 在积分形式下满足(2)即可。

iii) 设 $\tilde{x}$ 满足 $i)$ 且 $ii)$，则

$$\mathbb{P}(\forall u \in \mathbb{R}^d, t \geq 0, x(u, t) = \tilde{x}(u, t)) = 1$$

成立。

事实证明，在类似于无相互作用随机微分方程情形的假设下，我们可以得到适定性结果。

定理 2.7. [4] 考虑问题(2)，在定义 2.6 的意义下存在解，如果 a 和 $(b_k)_{k\geq 0}$ 联合连续，并且存在常数 $C > 0$，使得对所有 $u, v \in \mathbb{R}^d$,$\mu, \nu \in \mathfrak{M}$ 以及所有 $t \in [0, T]$ 其中 $T > 0$ 是任意的，使得

$$|a(u, \mu, t) - a(v, \nu, t)| + \left(\sum_{k=0}^{\infty} ||b_k(u, \mu, t) - b_k(v, \nu, t)||_{HS}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(|u - v| + \gamma(\mu, \nu))$$

其中 $||\cdot||_{HS}$ 表示希尔伯特–施密特范数，并且

$$|a(u, \mu, t)| + \left(\sum_{k=0}^{\infty} ||b_k(u, \mu, t)||_{HS}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(1 + |u|)$$

显然，如果解存在，x 就是一个系数为随机˜系数 $\tilde{a}(u, t) = a(u, \mu_t, t)$ 和 $b_k(u, t, p) = b_k(u, \mu_t, t, p)$ 的随机微分方程解，对所有 $t \geq 0$ 和 $k \geq 0$ 均成立。这里，$(\mu_t)_{t\geq 0}$ 是由带相互作用的随机微分方程的解所诱导的固定测度值过程。对于所有 $t \geq 0$，这些随机系数几乎必然满足利普希茨条件。

关于 $u \in \mathbb{R}^d$。因此，我们可以得出与通常的随机微分方程情形类似的性质

推论 2.8。 考虑定理 2.7 的情形，则有以下关系成立。

i) 存在常数 $C_T > 0$，使得对所有 $p \geq 1$

$$\forall u \in \mathbb{R}^d \quad \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(u,t)|^p) \leq C(1 + |u|^p)$$

成立。

ii) 存在一个常数 $C_T > 0$，使得对所有 $p \geq 1$

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^d \quad \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(u,t) - x(v,t)|^p) \leq C(|u - v|^p)$$

证明。这些断言的证明是格朗沃尔引理的一个直接推论。“*i)*”令 $t \leq T$。
Burkholder-Davis-Gundy不等式给出

$$\begin{aligned}
&E(\sup_{0 \leq s \leq t} |x(u,s)|^p) \\
\leq & Ct \left(|u|^p + \mathbb{E}(\int_0^t |a(x(u,s), \mu_s, s)|^p \, \mathrm{d}s) + \mathbb{E}(\int_0^t \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k(x(u,s,\mu_s,s))|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}s \right) \\
\leq & Ct \Big(|u|^p + \mathbb{E} \left(\int_0^t (1 + |x(u,s)|^p) \mathrm{d}s \right) \Big).
\end{aligned}$$

该结论通过将 Grönwall 引理应用于

$$g(t) = \mathbb{E}(\sup_{0 \leq s \leq t} |x(u,s)|^p).$$

因此我们得到

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(u,t)|^p) \leq C(1 + |u|^p)$$

对所有 $T \geq 0$，其中 C 依赖于 T。“ii）”的结果可完全通过相同方式得到。

□

例 2.9. 考虑一个 Lipschitz 有界函数 $f_l \colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{dl} \to \mathbb{R}^d$ 和 $l \geq 1$, 则

$$a(u,\mu) := \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} f_k(u, v_1, \ldots, v_k) \mu(\mathrm{d}v_1) \ldots \mu(\mathrm{d}v_k)$$

定理 2.7 中的 Lipschitz 性质即可。

证明。 为了简化记号，我们只证明函数 f_l对所有 $l \in \{0, \ldots, n\}$都独立于 s的情形。证明可以完全按照同样的方式进行

与下文相同。我们首先估计以下内容。

$$\begin{aligned}\Delta := &\sum_{k=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^d}\cdots\int_{\mathbb{R}^d} f_k(u_1,v_1,\dots v_k)\mu(\mathrm{d}v_1),\dots,\mu(\mathrm{d}v_k)\\ &-\int_{\mathbb{R}^d}\cdots\int_{\mathbb{R}^d} f_k(u_2,v_1,\dots v_k)\nu(\mathrm{d}v_1),\dots,\nu(\mathrm{d}v_k)\end{aligned}$$

对所有 $u_1,u_2\in\mathbb{R}^d,\mu,\nu\in\mathfrak{M}$，设 κ是定义在 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$上的一个耦合，其边际分布分别与 μ和 ν一致。记 $\varphi(r)=\frac{r}{1+r}$，对所有 $r\geq 0$均成立。于是

$$\begin{aligned}|\Delta|\leq &\sum_{k=1}^{n}\int\!\!\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\cdots\int\!\!\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|f_k(u_1;v_1,\dots,v_k)-f_k(u_1,v_1',\dots,v_k')|\\ &+\left|f_k(u_1;v_1',\dots,v_k')-f_k(u_2,v_1',\dots,v_k')\right|\kappa(\mathrm{d}v_1,v_1'),\dots,\kappa(\mathrm{d}v_k,v_k')\\ &\leq\sum_{k=1}^{n}\int\!\!\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\cdots\int\!\!\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|f_k(u_1;v_1,\dots,v_k)-f_k(u_1,v_1',\dots,v_k')|\\ &\kappa(\mathrm{d}v_1,v_1'),\dots,\kappa(\mathrm{d}v_k,v_k')+C\left|u_1-u_2\right|\\ &\overset{*}{\leq}\sum_{k=1}^{n}\tilde{C}\int\!\!\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\cdots\int\!\!\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\varphi(\sum_{l=1}^{k}|v_l-v\prime_l|)\kappa(\mathrm{d}v_1,v_1'),\dots,\kappa(\mathrm{d}v_k,v_k')\\ &+C\left|u_1-u_2\right|\\ &\leq\sum_{k=1}^{n}\tilde{C}\sum_{l=1}^{k}\int\!\!\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\cdots\int\!\!\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\varphi(|v_l-v_l'|)\kappa(\mathrm{d}v_1,v_1'),\dots,\kappa(\mathrm{d}v_k,v_k')\\ &+C\left|u_1-u_2\right|.\end{aligned}\tag{3}$$

这里的 $*$可按如下方式得到：考虑 $(v_1,\dots,v_k)$,$(v_1',\dots,v_k')\in\mathbb{R}^k$，对所有满足 $\sum_{l=1}^{k}|v_1-v_1'|>\varepsilon$ 的 $k\leq n$，其中 $\varepsilon>0$ 固定。有界性 f 和 φ的单调性意味着:

$$|f_l(u_1;v_1,\dots,v_k)-f_l(u_1,v_1',\dots,v_k')|\leq\underbrace{\frac{2\sup_{l=1,\dots,n;x\in\mathbb{R}^{k+1}}|f_l(x)|}{\varphi(\varepsilon)}}_{:=C_1}\varphi(\varepsilon)\leq C_1\varphi(\sum_{l=1}^{k}|v_l-v_l'|).$$

另一方面，对于所有满足$\sum_{l=1}^{k}|v_l-v_l'|\leq\varepsilon$的 $(v_1,\dots,v_k)$,$(v_1',\dots,v_k')\in\mathbb{R}^{dk}$，我们可以得出结论

$$|f(u_1;v_1,\dots,v_k)-f(u_1,v_1',\dots,v_k')|\leq C\sum_{l=1}^{k}|v_l-v_l'|\leq\underbrace{(1+\varepsilon)C}_{:=C_2}\varphi(\sum_{l=1}^{k}|v_l-v_l'|)$$

由 f 的利普希茨连续性可得。因此我们得到

$$|f(u_1;v_1,\dots,v_k)-f(u_1,v_1',\dots,v_k')|\leq\max\{C_1,C_2\}\varphi(\sum_{l=1}^{k}|v_l-v_l'|).$$

因此，(3) 最终给出

$$|\Delta| \leq K(|u_1 - u_2| + \gamma(\mu, \nu))$$

对于某个常数 $K > 0$，因为 κ 是任意的耦合。

□

既然相互作用随机微分方程的概念已经建立，我们希望进一步研究测度值过程 $(\mu_t)_{t\geq 0}$的性质。这里我们考虑以下问题。如果初始数据 μ_0 相对于 $\mathbb{R}^d$上的勒贝格测度是绝对连续的，那么 μ_t 相对于勒贝格测度也是绝对连续的吗? 为了回答这个问题，我们首先观察以下关系。设 x 是一个带相互作用的随机微分方程的解，并假设对于所有 $t \geq 0$ ， $x(\cdot\ t)$ 足够光滑，同时设 p_0 是 μ_0 的勒贝格密度。那么对于有界可测函数 $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，有以下关系:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(u)\mu_t(\mathrm{d}u) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x(u,t))\mu_0(\mathrm{d}u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x(u,t))p_0(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(u)p_0(x^{-1}(u,t))\det(Dx^{-1}(u,t))\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{4}$$

因此我们得到，如果 $x(\cdot\ t)$ 是微分同胚，则 μ_t 相对于勒贝格测度是绝对连续 对所有 $t \geq 0$ 几乎必然。此外密度，我们将记为 $(p_t)_{t\geq 0}$ 具有显式形式

$$p_t(u) = p_0(x^{-1}(u,t))\left|\det(Dx^{-1}(u,t))\right|$$

2.1 相互作用微分同胚随机流

本节将证明，对于问题 (2) 的解，所需的微分同胚性质成立。我们将运用随机流理论中的工具；该理论由 Hiroshi Kunita 在 [11] 中建立。

定义 2.10 ([11],第 114 页)。 一族随机映射 $(\varphi_{s,\ t})_{s\leq t\in[0,T]}$ 对于 $T \geq 0$ ，满足$\varphi_{s,\ t}: \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}^d$，称为 C^1-微分同胚前向随机流，若存在一个 $\mathbb{P}$-零测集 N，使得对所有 $\omega \in N^c$, 均有

i) $\varphi_{s,u}(\omega) \equiv \varphi_{t,u}(\omega) \circ \varphi_{s,t}(\omega)$ for all $s \leq u, t \leq u, s \leq t \in [0,T]$.

ii) 对所有 $u \in \mathbb{R}^d$ ，性质 $\varphi_{s,\ s}(u,\ \omega) = u$ 均对所有 $s \geq 0$成立。

iii) 映射 $\varphi_{s,t}(\omega): \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$是一个 C^1-微分同胚 对所有 $s \leq t \in [0,T]$.

我们希望将定理4.6.5 应用于 [11], ，该定理给出了一个版本的存在性，并使得对于解 x，此版本是一个微分同胚流。为此，我们必须将问题 (2) 转化为 Kunita ([11]) 的语言。

假设（A1）。系数 a 和 b_k 在 (2)中满足定理 2.7 的条件。考虑问题 (2)，现在我们可以固定由测度值过程$(\mu_t)_{t\geq 0}$ 诱导

来自带相互作用的随机微分方程的解。正如已经强调的，带相互作用的随机微分方程的解可以写成 Kunita 意义下具有随机系数的熟知随机微分方程的形式。即考虑半鞅

$$F(u,t) := \int_0^t a(u,\mu_t,t)\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t b_k(u,\mu_t,t)\mathrm{d}B_k.$$

我们将固定这个半鞅 F。根据定义，我们可以立即看出，方程 (2)的解 x 也是 Kunita 意义下的 SDE 解，即 [11] 也就是说

$$x(u,t) = u + \int_0^t F(x(u,t),\mathrm{d}t).$$

我们最后将应用定理4.5.6 [11], 以获得解的修正，它们是微分同胚。自然可以假设系数需要是可微的；一般来说，我们需要作出以下假设。

假设（A2）。系数 a 和 $(b_k)_{k\geq 0}$ 满足关于$C > 0$的以下性质

i) a 和（b_k）$_{k\geq 0}$ 关于 u 对所有 $\mu \in \mathfrak{M}$， $t \geq$均连续可微。 0.

ii) 存在 $0 < \delta \leq 1$ 使得对于所有 u， $v \in \mathbb{R}^d$， $\mu \in \mathfrak{M}$ 以及 $t \geq 0$

$$|Da(u,\mu,t) - Da(v,\mu,t)| + \left(\sum_{k=0}^{\infty} ||Db_k(u,\mu,t) - Db_k(v,\mu,t)||_{HS}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\,|u-v|^{\delta}$$

其中 $||\cdot||_{HS}$ 表示 $\mathbb{R}^{d\times d\times d}$中的希尔伯特–施密特范数。

iii) 对所有 $t \geq 0$ ，我们有

$$\forall \mu \in \mathfrak{M} \quad \sup_{u\in\mathbb{R}^d}\left(\sum_{k=0}^{\infty} ||Db_k(u,\mu,t)||_{HS}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C$$

在这些假设的基础上，我们得到了微分同胚的一个版本。

定理 2.11. 设系数 a 和 $(b_k)_{k\geq 0}$ 满足假设 (A1) 和 (A2)，则存在问题 (2) 的一个版本 $\tilde{x}$ 仍记为 x ，使得 $\varphi_{s,t} = x_s(u,t)$

其中

$$x_s(u,t) = u + \int_s^t F(x_s(u,t), \mathrm{d}t)$$

是一个微分同胚随机流

证明。 我们需要证明，$(F(\cdot\ t))_{t\geq 0}$ 满足 [11]中定理 4.5.6 的正则性条件。为此，我们将沿用第 3 章和第 4 章 [11] 中的确切记号。考虑定义在 m次连续可微有界函数空间 $C^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$ 上的（半）范数，其中 $e \geq 1$。首先注意，对于由非负整数组成的多重指标$\alpha = (\alpha_1, \cdots \alpha_d)$，我们将使用记号 D^α 或 D_u^α，其中

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x_d)^{\alpha_d}},$$

其中 $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$。我们定义

$$||f||_m = \sup_{u\in K} \frac{|f(u)|}{(1+|u|)} + \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} \sup_{u\in K} |D^\alpha f(u)|$$

对任意 $K \subset \mathbb{R}^d$。进一步，将空间 $\mathbf{C}^{m,\delta}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$ 定义为满足以下条件的函数 $f \in \mathbf{C}^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$: 对所有 $|\alpha| = m$, $D^\alpha f$ 均为 δ-赫尔德连续。然后定义

$$||f||_{m+\delta,K} = ||f||_{m,K} + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{u,v\in K, u\neq v} \frac{||D^\alpha f(u) - D^\alpha f(v)||_{HS}}{|u-v|^\delta}.$$

类似地，我们可以对函数 $g: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ 作相同定义:

$$||g||'_{m:K} = \sup_{u,v} \frac{|g(u,v)|}{(1+|u|)(1+|v|)} + \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} \sup_{u,v\in K} ||D_u^\alpha D_v^\alpha g(u,v)||_{HS}$$

and

$$||g||'_{m+\delta:K} = ||g||'_{m:k} + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{u_1,u_2,v_1,v_2\in K \\ u_1\neq u_2, v_1\neq v_2}} \frac{||D_u^\alpha D_v^\alpha \left(g(u_1,v_1) - g(u_2,v_1) - g(u_1,v_2) + g(u_2,v_2)\right)||_{HS}}{|u_1-u_2|^\delta |v_1-v_2|^\delta}.$$

现在考虑半鞅 $F(\cdot\ t)$，它可以分解为 $A(\cdot\ t) = \int_0^t a(\cdot\ \mu_s, s)\mathrm{d}s$和 $M(\cdot\ t) = \sum_{k=0}^\infty \int_0^t b_k(\cdot\ \mu_s, s)\mathrm{d}B_k(s)$。为了应用定理4.5.6. [11] 只需证明存在一个常数 $C > 0$ 使得几乎必然

i) 对于所有 $T > 0$

$$||a(\cdot, \mu_t, t)||_{1+\delta,\mathbb{R}^d} \leq C$$

对于所有 $t \in [0, T]$。

ii) 对于所有 $T > 0$，我们有，对于 $g(u,v,t) = \sum_{k=0}^\infty b_k(u,\mu_t,t)b_k^*(v,\mu_t,t)$，其中 $*$表示 th e

伴随。对于所有 $u, v \in \mathbb{R}^d$ 和 $t \in [0, T]$。

$$||g(\cdot, \cdot, t)||_{m+\delta:\mathbb{R}^d}$$

i) 是显然的，由假设 (A1) 和 (A2)， *ii)* 立即得出。首先观察到，由假设（A2）我们可以交换微分和求和。为此我们只需检查偏导数的和在某个紧集上一致收敛。设 $R > 0$ 并考虑半径为 R 的闭球 $\overline{B}_R(0)$。设 $\varepsilon > 0$ 任意，由紧致性我们可以找到 $u_1, \ldots, u_n \in \overline{B}_R(0)$ 使得 $\overline{B}_R(0) \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(u_i)$。现在可以找到 $N \in \mathbb{N}$ 对于所有 $i = 1, \ldots, n$ 和所有 $j, p, l = 1, \ldots, d$ 使得

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \frac{\partial b_k^{j,p}}{\partial u_l}(u_i, \mu, t) \right|^2 < \varepsilon$$

对于所有 $t \geq 0, \mu \in \mathfrak{M}$ 由假设（A2） *iii*）。因此我们得到对于所有 $u \in B_R(0)$，我们可以找到$i = 1, \ldots, n$ 使得 $|u - u_i| < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \left| \frac{\partial b^{j,p}}{\partial u_l}(u, \mu, t) \right|^2 \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \frac{\partial b^{j,p}}{\partial u_l}(u, \mu, t) - \frac{\partial b^{j,p}}{\partial u_l}(u_i, \mu, t) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \frac{\partial b^{j,p}}{\partial u_l}(u_i, \mu, t) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此级数一致收敛，从而我们可以按如下方式交换微分与求和:

$$D_u^\alpha D_v^\alpha g(u, v, t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_u^\alpha b_k(u, \mu_t, t) D_v^\alpha \left(b_k(v, \mu_t, t) \right)^*$$

其中 $*$ 表示伴随算子。对所有 $|\alpha| \leq 1$均成立。于是我们得到

$$|g(u, v, t)| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} ||b_k(v, \mu_t, t)||_{HS}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} ||b_k(u, \mu_t, t)||_{HS}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(1 + |u|)(1 + |v|),$$

此外

$$D_u^\alpha D_v^\alpha (g(u, v, t)) \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} ||D^\alpha b_k(v, \mu_t, t)||_{HS}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} ||D^\alpha b_k(u, \mu_t, t)||_{HS}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C$$

对所有 $u, v \in \mathbb{R}^d$ 以及所有 $t \geq 0$。最后，我们有

$$\begin{aligned}
&||D_u^\alpha D_v^\alpha \left(g(u_1, v_1) - g(u_2, v_1) - g(u_1, v_2) + g(u_2, v_2) \right)||_{HS} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} ||D_u^\alpha b_k(u_1, \mu_t) - D_u^\alpha b_k(u_2, \mu_t)||_{HS}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} ||D_v^\alpha b_k(v_1, \mu_t) - D_u^\alpha b_k(v_2, \mu_t)||_{HS}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$\leq C(|u_1 - u_2|^\delta |v_1 - v_2|^\delta)$.

因此我们得到

$$||\tilde{a}(\cdot,t)||_{1+\delta,\mathbb{R}^d} + ||g(\cdot,\cdot,t)||'_{1+\delta,\mathbb{R}^d} \leq C$$

对于某个常数 $C > 0$，以及所有 $t \leq T$，其中 $T \geq 0$。由此，根据[11], 中的定理 4.5.6, 存在 x 的一个版本，使得对于所有 $t \geq 0$, $x(\cdot\ t)$ 几乎必然是微分同胚。

□

[11] 中的定理 3.3.3 还表明，该导数满足一个带相互作用的线性随机微分方程。

推论 2.12. 导数 $Dx(u,t)$ 满足以下带相互作用的随机微分方程

$$dDx(u,t) = Da(x(u,t),\mu_t,t)Dx(u,t)\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^{\infty} Db_k(x(u,t),\mu_t,t)\mathrm{d}B_k(t)Dx(u,t)$$

$\forall u \in \mathbb{R}^d \quad Dx(u,0) = I_{d\times d}$

其中， $I_{d\times d}$ 表示 d 维单位矩阵。

3 带相互作用的随机流的质量分布

我们现在将注意力转回到主要研究对象上。即由带相互作用的随机微分方程(2) 诱导的测度值过程 $(\mu_t)_{t\geq 0}$。现在我们已经掌握了所需工具，因此可以证明$(\mu_t)_{t\geq 0}$ 对所有 $t \geq 0$ 几乎必然存在勒贝格密度。

定理 3.1. 考虑满足假设 (A1) 和 (A2) 的问题 (2)。假设初始测度 μ_0 相对于勒贝格测度是绝对连续的。那么，对于所有 $t \geq 0$，$(\mu_t)_{t\geq 0}$ 也几乎必然相对于勒贝格测度绝对连续。

该定理立即由 (4) 结合定理 2.11 得出，如果我们能证明 $\det(Dx^{-1}(u,t))$ 在勒贝格几乎处处不为零。因此，我们将通过证明确定性刘维尔公式的一个类似物来证明后者。

假设 (A3)。 从现在起，除非另有说明，我们将假设问题 (2) 的初始测度相对于勒贝格测度是绝对连续的。

记号3.2。我们今后将分别用 p_0 和 p_t 表示与 μ_0 和 μ_t 对应的勒贝格密度，对所有 $t \geq 0$ 均如此。

由 (4) 实际上可以得到勒贝格密度的具体形式 $(p_t)_{t\geq 0}$，即 $p_t = p_0(x^{-1}(\cdot\ t))\left|\det(Dx^{-1}(u, t))\right|$。我们实际上可以给出其中出现的行列式的显式形式。该行列式是一个多项式，而 $(Dx(u,\ t))_{u\in\mathbb{R}^d,\ t\geq 0}$ 是推论 2.12 所述某个线性方程的解。因此，我们可以应用伊藤公式来计算其具体形式。不过在此之前，需要先对行列式的偏导数作出良好表示。

引理 3.3。设 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 可逆，且 $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$，则有

i) 将行列式函数视为矩阵各分量（即矩阵的各个元素）的函数。令 $A = (A_{i,\ j})_{i,\ j=1,\ \ldots\ldots d}$ 和 $B = (B_{i,\ j})_{i,\ j=1,\ \ldots\ldots d}$。

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial A_{i,j}} = (-1)^{i+j} M_{i,j}(A)$$

其中 $M_{i,\ j}(A)$ 是删去 A 的第 i 行和第 j 列后得到的子矩阵的行列式。

ii)

$$\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial \det(A)}{\partial A_{i,j}} (BA)_{i,j} = \det(A)\operatorname{tr}(B)$$

iii) 有

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{d} \frac{\partial^2 \det(A)}{\partial A_{i,j}\partial A_{k,l}} (BA)_{i,j}(BA)_{k,l} = (\operatorname{Tr}(B)^2 - \operatorname{Tr}(B^2))\det(A)$$

证明。"*i*)"
我们用 $M_{i,\ k}(A)$ 表示矩阵 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 删去第 i 行和第 k 列后所得子矩阵的行列式，其中 $i,\ k = 1,\ \ldots\ldots,\ d$。于是，根据行列式的拉普拉斯展开，对于 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 和 $\pi_{i,\ k}(A) = A_{i,\ k}$，对所有 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \det(A)}{\partial A_{i,j}} &= \frac{\partial}{\partial A_{i,j}} \sum_{k=1}^{d} (-1)^{i+k} M_{i,k}(A)\pi_{i,k}(A) \\ &= \sum_{k=1}^{d} (-1)^{i+k} \frac{\partial \pi_{i,k}}{\partial A_{i,j}}(A) M_{i,k}(A) + A_{i,k}\frac{\partial M_{i,k}}{\partial A_{i,j}}(A) = (-1)^{i+j} M_{i,j}(A)\end{aligned}$$

成立。其中，最后一个等式可由以下结果推出。

$$\frac{\partial M_{i,k}}{\partial A_{i,j}}(A) = 0$$

由于$M_{i,\ k}$ 不依赖于 $A_{i,\ j}$ 因为第 i 行已被移除。此外，显然

$$\frac{\partial \pi_{i,k}}{\partial A_{i,j}}(A) = \delta_{k,j}$$

对所有 $i, j, k = 1, \ldots, d$，其中克罗内克δ $\delta_{k,j}$。

"*ii*)"
根据 *i*)，我们知道

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial \det(A)}{\partial A_{i,j}}(BA)_{i,j} &= \sum_{i,j=1}^{d} (-1)^{i+j} M_{i,j} \sum_{k=1}^{d} B_{i,k} A_{k,j} \\ &\overset{*}{=} \sum_{i,j=1}^{d} (-1)^{i+j} M_{i,j} B_{i,i} A_{i,j} = \operatorname{tr}(B) \det(A)\end{aligned} \tag{5}$$

其中通过考虑 $*$即可轻易得到

$$\sum_{j=1}^{d} (-1)^{i+j} M_{i,j}(A) A_{k,j} = 0 \tag{6}$$

对所有 $k \neq i$，因为 (6) 是矩阵 A 的行列式，其中第 i 行已替换为向量 $(A_{k,1}, \ldots, A_{k,d})$。这个行列式显然为 0，因为该矩阵的秩至多为 $d - 1$。

"*iii*)" 根据 *ii*)，通过观察可以推导出该公式。

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{d} \frac{\partial}{\partial A_{k,l}} \left(\frac{\partial \det(A)}{\partial A_{i,j}} (BA)_{i,j} (BA)_{k,l} \right) = \operatorname{Tr}(B) \sum_{k,l=1}^{d} \frac{\partial}{\partial A_{k,l}} \left(\det(A)(BA_{k,l}) \right) \tag{7}$$

我们首先计算左边。这里得到的是

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j,k,l=1}^{d} \frac{\partial}{\partial A_{k,l}} \left(\frac{\partial \det(A)}{\partial A_{i,j}} (BA)_{i,j} (BA)_{k,l} \right) = \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{d} \frac{\partial}{\partial A_{k,l}} \left(\frac{\partial \det(A)}{\partial A_{i,j}} B_{i,n} A_{n,j} B_{k,m} A_{m,l} \right) \\ &+ \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \frac{\partial^2 \det(A)}{\partial A_{i,j} \partial A_{k,l}} (BA)_{i,j} (BA)_{k,l} + \underbrace{\sum_{i,j,k,l,n,m=1}^{d} \frac{\partial \det(A)}{\partial A_{i,j}} B_{i,n} \frac{\partial \pi_{n,j}(A)}{\partial A_{k,l}} B_{k,m} A_{m,l}}_{:=C} \\ &+ \underbrace{\sum_{i,j,k,l,n,m=1}^{d} \frac{\partial \det(A)}{\partial A_{i,j}} B_{i,n} A_{n,j} B_{k,m} \frac{\partial \pi_{m,l}(A)}{\partial A_{k,l}}}_{:=D}\end{aligned}$$

对于第二项，我们得到

$$\begin{aligned}C &= \sum_{i,k,l,m=1}^{d} \frac{\partial \det(A)}{\partial A_{i,l}} B_{i,k} B_{k,m} A_{m,l} \overset{(*)}{=} \sum_{i,k=1}^{d} B_{i,k} B_{k,i} \sum_{l=1}^{d} \frac{\partial \det(A)}{\partial A_{i,l}} A_{i,l} \overset{(**)}{=} \det(A) \sum_{i,k=1}^{d} B_{i,k} B_{k_i} \\ &= \det(A) \operatorname{Tr}(B^2)\end{aligned}$$

其中 $(*)$ 完全以与 (5) 相同的方式推出，而 $(**)$ 由 *i*) 结合

行列式分解公式。对于第二项，我们得到

$$D = \sum_{i,j,k,l,n=1}^{d} \frac{\partial \det(A)}{\partial A_{i,j}} B_{i,n} A_{n,j} B_{k,k} \overset{(*)}{=} \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \frac{\partial \det(A)}{\partial A_{i,j}} B_{i,i} A_{i,j} B_{k,k}$$
$$\sum_{l=1}^{d} \sum_{i,k=1}^{d} B_{i,i} B_{k,k} \sum_{j=1}^{d} A_{i,j} \frac{\partial \det(A)}{\partial A_{i,j}} = d \operatorname{Tr}(B)^2 \det(A)$$

现在我们已经有了左边的表示，我们想要重写(7)的右边。考虑

$$\begin{aligned} &\operatorname{Tr}(B) \sum_{k,l=1}^{d} \frac{\partial}{\partial A_{k,l}} \left(\det(A)(BA_{k,l}) \right) \\ =& \operatorname{Tr}(B) \left(\sum_{k,l=1}^{d} \frac{\partial \det(A)}{\partial A_{k,l}} (BA_{k,l}) + \det(A) \sum_{n=1}^{d} B_{k,n} \frac{\partial \pi_{n,l}(A)}{\partial A_{k,l}} \right) \end{aligned}$$

第一个求和等于 $\operatorname{Tr}(B) \det(A)$，由 $ii)$ 然而，第二个求和等于

$$\sum_{k,l=1}^{d} \det(A) B_{k,k} = d \operatorname{Tr}(B) \det(A)$$

总之，由前面的所有计算以及（7）式，我们得到如下公式

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j,k,l=1}^{d} \frac{\partial^2 \det(A)}{\partial A_{i,j} \partial A_{k,l}} (BA)_{i,j} (BA)_{k,l} \\ &= \operatorname{Tr}(B)^2 \det(A) + d \operatorname{Tr}(B)^2 \det(A) - d \operatorname{Tr}(B)^2 \det(A) - \operatorname{Tr}(B^2) \det(A) \\ &= (\operatorname{Tr}(B)^2 - \operatorname{Tr}(B^2)) \det(A) \end{aligned}$$

□

借助这个引理，我们可以证明刘维尔定理的随机微分方程类比。在下文中，我们将用 $\operatorname{div}(g(\cdot))(v)$表示在 $v \in \mathbb{R}^d$ 处取值的 $g(\cdot)$ 的散度，微分 D 同理。

定理 3.4。 在假设 (A1) 和 (A2) 下，我们有

$$\begin{aligned} \det(Dx(u,t)) = \exp\Big(&\int_0^t \operatorname{div}(a(\cdot, \mu_s, s))(x(u,s)) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{d} \operatorname{Tr}\left(\left(Db_k^{\cdot,p}(x(u,s), \mu_s, s) \right)^2 \right) \mathrm{d}s \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{d} \int_0^t \operatorname{div}(b_k^{\cdot,p}(\cdot, \mu_t, t))(x(u,t)) \mathrm{d}B_k^p(t) \Big) \end{aligned}$$

证明。该定理由导数的表示式得到。应用伊藤公式，由引理 3.3 可得

$$
\begin{aligned}
\det(Dx(u,t))-1 &= \sum_{i,j=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial \det(Dx(u,s))}{\partial A_{i,j}}\mathrm{d}D^{i,j}x(u,s)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial^2 \det(Dx(u,s))}{\partial A_{i,j}\partial A_{k,l}}\mathrm{d}\left(D^{i,j}x(u,\cdot),D^{k,l}x(u,\cdot)\right)_s\\
&= \sum_{i,j=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial \det(Dx(u,s))}{\partial A_{i,j}}(Da(\cdot,\mu_s,s)(x(u,s))Dx(u,s))_{i,j}\mathrm{d}s\\
&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i,j,p=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial \det(Dx(u,s))}{\partial A_{i,j}}(Db_k^{\cdot,p}(\cdot,\mu_s,s)(x(u,s))Dx(u,s))_{i,j}\mathrm{d}B_k^p(s)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i,j,k,l,p=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial^2 \det(Dx(u,s))}{\partial A_{i,j}\partial A_{k,l}}\\
&\quad\times(Db_k^{\cdot,p}(\cdot,\mu_s,s)(x(u,s))Dx(u,s))_{i,j}(Db_k^{\cdot,p}(\cdot,\mu_s,s)(x(u,s))Dx(u,s))_{k,l}\mathrm{d}s\\
&= \int_0^t \mathrm{div}(a(\cdot,\mu_s,s))(x(u,s))\det(Dx(u,s))\mathrm{d}s\\
&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d}\int_0^t \mathrm{div}(b_k^{\cdot,p}(\cdot,\mu_s,s))\det(Dx(u,s))\mathrm{d}B_k^p(s)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t (\mathrm{Tr}(Db_k^{\cdot,p}(\cdot,\mu_s,s)(x(u,s)))^2-\mathrm{Tr}\left(\left(Db_k^{\cdot,p}(\cdot,\mu_s,s)(x(u,s))\right)^2\right)\det(Dx(u\,s))\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

几乎必然。因此，$(\det(Dx(u,t)))_{t\geq 0}$ 是一个一维线性方程的解，我们可以明确写出其解

$$
\begin{aligned}
\det(Dx(u,t)) = \exp\Bigg(&\int_0^t \mathrm{div}(a(\cdot,\mu_s,s))(x(u,s))-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d}\mathrm{Tr}\left(\left(Db_k^{\cdot,p}(x(u,s),\mu_s,s)\right)^2\right)\mathrm{d}t\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d}\int_0^t \mathrm{div}(b_k^{\cdot,p}(\cdot,\mu_t,t))(x(u,t))\mathrm{d}B_k^p(t)\Bigg)\quad \mathbb{P}\text{-a. s.}
\end{aligned}
$$

□

这一表示式使我们能够控制 $(p_t)_{t\geq 0}$ 关于初始数据的 $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$-矩。

引理 3.5。 在假设 (A1) 和 (A2) 下，我们有

$$
\sup_{u\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{1}{\det(Dx(u,t))}\right|^p\right)<\infty
$$

对于所有 $u\in\mathbb{R}^d$、 $T>0$ 和 $p\geq 1$。

证明。 该陈述基本上由定理 3.4 得出。由于我们有[1] $\det(Dx(u,s))$是以下线性随机微分方程的解

$$dZ(u,t) = -\left(\operatorname{div}(a(x(u,s),\mu_s,s)) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d}\left(\operatorname{Tr}(Db_k^{\cdot,p}(x(u,t),\mu_t,t))\right)^2 - \operatorname{Tr}(\left((Db_k^{\cdot,p}(x(u,t),\mu_t,t))^2\right)\right)$$
$$\times Z(u,t)\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{\infty}\operatorname{div}(b_k(\cdot,\mu_t,t))(x(u,t))Z(u,t)\mathrm{d}B_k$$

$Z(u,\ 0)\ = 1$

然后我们通过 BDG 不等式得到,

$$\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T}|Z(u,t)|^p) \le 3^{p-1}\Big(1 + \int_0^T \mathbb{E}(|g(x(u,t),\mu_t,t)|^p\,\mathrm{d}t\,|Z(u,t)|^p)\Big) \le C(1 + \int_0^T \mathbb{E}(|Z(u,t)|^p))\mathrm{d}t$$

其中

$$g(u,\mu,t) = \operatorname{div}(a(\cdot,\mu,t))(u) + \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d}\left(\operatorname{Tr}(Db_k^{\cdot,p}(\cdot,\mu,t)(u))\right)^2$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d}\operatorname{Tr}(\left((Db_k^{\cdot,p}(\cdot,\mu,t)(u))^2\right)$$

由假设（A2）可知，该函数有界。因此我们得到

$$\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T}|Z(u,t)|^p) \le C$$

对于所有 $u \in \mathbb{R}^d$ 和 $T > 0$，从而得出该结论。 □

有了这一结果，我们得到 $p_t \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$，几乎必然，对所有 $t \ge 0$ ，只要初始数据满足 $p_0 \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$。

定理 3.6. 假设 (A1)、(A2) 和 (A3)，则对于某个常数 $C > 0$

$$\left(\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^d} p_t(u)^p\mathrm{d}u\right)\right)^{\frac{1}{p}} \le C||p_0||_{\mathrm{L}^p}$$

对所有 $T > 0$ 和 $p \ge 1$ 均成立。

证明。 通过微分同胚 $x(\cdot\ t)$ 作变量替换，我们得到

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^d} p_t(u)^p\mathrm{d}u\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^d} p_0(u)^p\frac{1}{\det(Dx(u,t))^{p-1}}\mathrm{d}u\right)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}^d} p_0(u)^p \sup_{0\leq t\leq T} \frac{1}{\det(Dx(u,t))^{p-1}}\mathrm{d}u\right)$$
$$\leq \sup_{u\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \frac{1}{\det(Dx(u,t))^{p-1}}\right)\int_{\mathbb{R}^d} p_0(u)^p \mathrm{d}u = C||p_0||^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}$$

□

注 3.7. 勒贝格密度是福克–普朗克型随机偏微分方程的解。即对所有 $\varphi \in \mathrm{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(u)p_t(u)\mathrm{d}u &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x(u,t))p_0(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(u)p_0(u)\mathrm{d}u + \\
&= \sum_{i=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^t \partial_i\varphi(x(u,s))a^i(x(u,s),p_s,s)\mathrm{d}sp_0(u)\mathrm{d} \\
&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i,p=1}^{d}\int_0^t \partial_i\varphi(x(u,s))b_k^{i,p}(x(u,s),p_s,s)\mathrm{d}B_k^p(s) \\
&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t \partial_i\partial_j\varphi(x(u,s))b_k^{j,p}(x(u,s),p_s,s)b_k^{i,p}(x(u,s),p_s,s)\mathrm{d}sp_0(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(u)p_0(u)\mathrm{d}u \\
&+\sum_{i=1}^{d}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\partial_i\varphi(u)a^i(u,p_s,s)\mathrm{d}u\mathrm{d}s \\
&\sum_{i,p=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\partial_i\varphi(u)b_k^{i,p}(u,p_s,s)\mathrm{d}u\mathrm{d}B_k^p(s) \\
&\frac{1}{2}\sum_{i,j,p=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\partial_i\partial_j\varphi(u)b_k^{i,p}(u,p_s,s)b_k^{j,p}(u,p_s,s)\mathrm{d}u\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

实际上可以证明，在一些附加假设下，这是 SPDE 的唯一质量守恒正解（即对所有$t \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} p_t(u)\mathrm{d}u = 1$ and $p_t \geq 0$ ）。更多详情请参见 [6]，；关于此类随机偏微分方程的更多内容，请参见 [9]。

4 间歇性

既然我们已经收集了 $(p_t)_{t\geq 0}$ 最重要的性质，现在就可以用数学方式定义间歇性性质。

假设(A4)。初始条件 μ_0 的勒贝格密度 p_0 足以 $p_0 \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ 对所有 $p \geq 1$

定义 4.1 (间歇性)**.** 随机场 $(p_t)_{t\geq 0}$ 是间歇的，如果

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln(\int_{\mathbb{R}^d} p_t(u)^p\mathrm{d}u)}{t} := \lambda_p$$

存在且

$$\left(\frac{\lambda_p}{p}\right)_{p\geq 1}$$

严格递增。

间歇性性质的定义与 Khasminskii [7] 引入的矩李雅普诺夫指数有关。这些指数曾用于研究抛物型安德森模型的间歇现象（例如 [2], [8]）。这种行为意味着，数量 $(p_t)_{t\geq 0}$ 的高阶矩会随着 $t \to \infty$ 增大而支配低阶矩，即

$$\lim_{t\to\infty} \frac{||p_t||_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}}{||p_t||_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)}} = 0$$

当某个量收敛到一个在小集合上具有极高峰值的函数，或收敛到某个行为与 δ 狄拉克泛函接近的函数时，通常会出现这种行为。

例 4.2. 考虑以下带相互作用的线性随机微分方程

$$dx(u,t) = \int_{\mathbb{R}^d} A(v - x(u,t))\mu_t(\mathrm{d}v)\mathrm{d}t \sum_{p=1}^{d} \Sigma_p(v - x(u,t))\mu_t(\mathrm{d}v)\mathrm{d}B^p(t)$$
$$\forall u \in \mathbb{R}^d \quad x(u,0) = u$$

利用引理 3.4，我们可以立即计算 $x(\cdot\ t)$ 的导数的行列式

$$\det(Dx(u,t)) = \exp\left(t(\mathrm{Tr}(A) - \sum_{p=1}^{d}\mathrm{Tr}(\Sigma_p^2)) + \sum_{p=1}^{d}\mathrm{Tr}(\Sigma_p)B_p(t)\right)$$

因此，由微分同胚下的变换公式可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} p_t(u)^p \mathrm{d}u = \exp\left(-(p-1)\left(t(\mathrm{Tr}(A)\sum_{p=1}^{d}\mathrm{Tr}(\Sigma_p^2)) + \sum_{p=1}^{d}\mathrm{Tr}(\Sigma_p)B_p(t)\right)\right)||p_0||^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}.$$

因此，我们可以利用布朗运动的强大数定律进行计算。

$$\lambda_p = \lim_{t\to\infty} \frac{-(p-1)\left(t(\mathrm{Tr}(A)\sum_{p=1}^{d}\mathrm{Tr}(\Sigma_p^2)) + \sum_{p=1}^{d}\mathrm{Tr}(\Sigma_p)B_p(t)\right)}{t} = -(p-1)\left(\mathrm{Tr}(A) - \frac{1}{2}\sum_{p=1}\mathrm{Tr}(\Sigma_p^2)\right).$$

最后我们得出结论，在这种情况下，$(p_t)_{t\geq 0}$ 是间歇的，当且仅当

$$\mathrm{Tr}(A) - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{d}\mathrm{Tr}(\Sigma_p^2) < 0$$

该问题的结构表明，只需考察 $\det(Dx(\cdot\ t))$ 的渐近- 性即可。为此，自然需要研究李雅普诺夫指-

数。为了得到与例4.2类似的情形，我们将考虑李雅普诺夫指数

定义 4.3. 极限

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln(\det(Dx(u,t)))}{t}=\lambda(u)\quad \mathbb{P}\text{-a. s.}$$

称为李雅普诺夫指数。

注释 4.4。请注意，保证李雅普诺夫指数存在的主要困难在于，带相互作用的随机微分方程相对于$x(u,t)$是非自治的。因此，我们不能简单地应用随机动力系统理论中众所周知的技术。然而，即使$(x_\mu(\cdot\ t)\ \mu_t)$（其中 μ 中的下标表示初始测度）构成一个随机动力系统，也可以尝试对其应用随机动力系统方法。事实证明，这条路径并不像本文所介绍的方法那样成功。

李雅普诺夫指数为我们提供了

$$\det(Dx(u,t))\approx\exp(t\lambda(u)) \tag{8}$$

对于 $t\gg 1$。因此，采用最速下降法，我们得到

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left(\int_{\mathbb{R}^d}p_0(u)^p\exp(-(p-1)t\lambda(u))\right)}{t}=\sup_{u\in K}-\lambda(u)(p-1).$$

如果 $\text{pp}(p_0)\subset K$ 对于一个紧集 $K\subset\mathbb{R}^d$。我们首先在某个条件下证明 (8) s.
su

假设（A5）。令 a and $(b_k)_{k\geq 0}$ 使得存在函数 φ and $\alpha>0$满足

$$\left(u-v,\varphi(u)-\varphi(v)\right)\leq-\alpha\left|u-v\right|^2$$

对于所有 $u,v,\in\mathbb{R}^d$ 以及 $(b_k)_{k\geq 0}$ 满足 $2\alpha-B^2(4q-1)>0$ 其中 B 是 $(b_k)_{k\geq 0}$ 关于 l^2-范数的利普希茨常数，并且对于某个 $q>\max\{d,\delta\}$，如果 $(b_k)_{k\geq 0}$ 在 l^2-意义下无界，而 $2\alpha-B^2(2q-1)>0$ 如果 $(b_k)_{k\geq 0}$ 有界。此外，令

$$a(u,\mu)=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(u-v)\mu(\mathrm{d}v)$$

对于所有 $u\in\mathbb{R}^d,\mu\in\mathfrak{M}$，我们将进一步假设， φ 是可微的具有有界的,δ-赫尔德导数。

备注 4.5. 正如我们稍后将严格证明的，假设（A5）保证了，

$$\lim_{t\to\infty}|x(u,t)-x(v,t)|=0\quad \mathbb{P}\text{-a. s.}$$

对于所有 $u,v\in\mathbb{R}^d$。换句话说，来自两个不同起点的轨迹几乎必然相互靠近，当 $t\to\infty$。

我们不讨论$(b_k)_{k\geq 0}$ 有界的情形。由于这种情形区分仅与引理4.12的证明有关

引理 4.6。在假设 (A1) 和 (A5) 下，如果 $p\geq 1$ 满足

$$-2\alpha+B^2(2p-1)<0$$

则对于所有 $t\geq 0$ 和 $u,\ v\in\mathbb{R}^d$，我们得到

$$\mathbb{E}(|x(u,t)-x(v,t)|^{2p})\leq|u-v|^{2p}$$

证明。 首先注意，根据伊藤公式，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|x(u,t)-x(v,t)|^{2p})&=|u-v|^{2p}\\&+\mathbb{E}\Big(2p\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}|x(u,s)-x(v,s)|^{2p-2}\\&\int_{\mathbb{R}^d}(x(u,s)-x(v,s),\varphi(x(u,s)-x(r,s))-\varphi(x(v,s)-x(r,s)))\mu(\mathrm{d}r)\mathrm{d}s\Big)\\&+2p\int_0^t|x(u,s)-x(v,s)|^{2p-2}\sum_{k=0}^{\infty}||b_k(x(u,s),\mu_s)-b_k(x(v,s),\mu_s)||_{HS}^2\mathrm{d}s\\&+2p(p-1)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d}\int_0^t|x(u,s)-x(v,s)|^{2p-4}\\&\times(x(u,s)-x(v,s),b_k^{\cdot,l}(x(u,s),\mu_s)-b_k^{\cdot,l}(x(v,s),\mu_s))^2\mathrm{d}s\\&\leq|u-v|^{2p}+-2p\alpha+pB^2+2p(p-1)B^2\leq|u-v|^{2p}\end{aligned}$$

□

引理 4.7. 假设 (A1)、(A2) 和 (A5)。那么对所有 $u\in\mathbb{R}^d$，我们有：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln(\det(Dx(u,t)))}{t}<0\quad\mathbb{P}\text{-a. s.}$$

证明。我们首先证明，这些假设对所有 $u\in\mathbb{R}^d$ 和 $\mu\in\mathfrak{M}$均成立

$$\mathrm{div}(a(\cdot,\mu))(u)\leq-d\alpha.$$

设 $j=1,\dots,d$和 $u,v\in\mathbb{R}^d$使得 $u_j\neq v_j$。我们得到

$$\sum_{i=1}^{d}(u_i-v_i)(\varphi^i(u)-\varphi^i(v))\le-\alpha\sum_{i=1}^{d}(u_i-v_i)^2\le-\alpha(u_j-v_j)^2$$

令所有 $i\neq j$ 都有 $u_i\to v_i$，这意味着

$$\frac{\varphi^j(u)-\varphi^j(v)}{u_j-v_j}\le-\alpha$$

从而最终得到

$$\mathrm{div}(\varphi(\cdot))(u)\le-d\alpha$$

这意味着

$$\mathrm{div}(a(\cdot,\mu))(u)\le-d\alpha.$$

我们将继续证明

$$-\sum_{p=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{Tr}((Db_k^{\cdot,p})^2)\le dB^2.$$

首先，我们需要计算 $(b_k)_{k\ge0}$ 在 l^2意义下的最优 Lipschitz 常数。对于 $u,\ v\in\mathbb{R}^d$ 以及 $\mu\in\mathfrak{M}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty}\left|b_k^{\cdot,p}(u,\mu)-b_k^{\cdot,p}(v,\mu)\right|^2\\
=&\sum_{p=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int_0^1 Db_k^{\cdot,p}(u+t(v-u),\mu)\mathrm{d}t(u-v)\right|^2\\
\le&|u-v|^2\sum_{p=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty}||\int_0^1 Db_k^{\cdot,p}(u+t(v-u),\mu)\mathrm{d}t||_{OP}^2\\
\le&|u-v|^2\sup_{u,v\in\mathbb{R}^d}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d}||\int_0^1 Db_k^{\cdot,p}(u+t(v-u),\mu)\mathrm{d}t||_{OP}^2\\
=&|u-v|^2\sup_{u\in\mathbb{R}^d}\sum_{p=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty}||Db_k^{\cdot,p}(u,\mu)||_{OP}^2
\end{aligned}$$

其中 $||\cdot||_{OP}$ 表示算子范数。最后一个等式可以按如下方式证明，对于所有 $u\in\mathbb{R}^d$ 和 $\mu\in\mathfrak{M}$ 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d}||Db_k^{\cdot,p}(u,\mu)||_{OP}^2\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d}||\int_0^1 Db_k^{\cdot,p}(u+t(u-u),\mu)\mathrm{d}t||_{OP}^2
\end{aligned}$$

$$\leq \sup_{u,v\in\mathbb{R}^d} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d} || \int_0^1 Db_k^{\cdot,p}(u+t(u-v),\mu)\mathrm{d}t||_{OP}^2$$

因此 " $\geq$ " 成立，对于 " $\leq$ " 注意到对于所有 $u,v\in\mathbb{R}^d$ 和 $\mu\in\mathfrak{M}$ 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d} || \int_0^1 Db_k^{\cdot,p}(u+t(u-v),\mu)\mathrm{d}t||_{OP}^2 \\
\leq &\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d} \int_0^1 ||Db_k^{\cdot,p}(u+t(u-v),\mu)||_{OP}^2\mathrm{d}t \\
= &\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d} ||Db_k^{\cdot,p}(u+t(u-v),\mu)||_{OP}^2\mathrm{d}t \\
\leq &\sup_{u\in\mathbb{R}^d} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d} ||Db_k^{\cdot,p}(u,\mu)||^2.
\end{aligned}$$

因此，我们最终可以得出结论

$$B^2 = \sup_{u\in\mathbb{R}^d,\mu\in\mathfrak{M}} \sum_{p=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty} ||Db_k^{\cdot,p}(u,\mu)||_{OP}^2.$$

现在我们有，对于所有 $u\in\mathbb{R}^d,\mu\in\mathfrak{M}$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{p=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Tr}((Db_k^{\cdot,p}(u,\mu))^2)\right| \\
\leq &\left|\sum_{p=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i,j=d}^{d} \left(Db_k^{\cdot,p}(u,\mu)\right)_{i,j}\left(Db_k^{\cdot,p}(\cdot,\mu)(u)\right)_{j,i}\right| \\
\leq &\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d} ||Db_k^{\cdot,p}(\cdot,\mu)(u)||_{HS}^2 \\
\leq &dB^2
\end{aligned}$$

其中我们对所有 $A\in\mathbb{R}^{d\times d}$ 使用了 $||A||_{HS}\leq\sqrt{d}||A||_{OP}$。因此

$$-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\left(\left(Db_k^{\cdot,p}(u,\mu)\right)^2\right) \leq d\frac{B^2}{2}$$

对于所有 $u\in\mathbb{R}^d$， $\mu\in\mathfrak{M}$。最后我们得到

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln(\det Dx(u,t))}{t} \\
\leq &\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left(\mathrm{div}(a) - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Tr}((Db_k^{\cdot,p})^2)\right)(x(u,t),\mu_t) \\
+ &\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d} \int_0^t \mathrm{div}(b_k^{\cdot,p})(x(u,s),\mu_s)\mathrm{d}B_k^p(s)
\end{aligned}$$

$$\leq \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t d(-\alpha+\frac{B^2}{2})\mathrm{d}s < 0 \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}$$

其中我们在最后一个估计中使用了鞅强大数定律（定理 9，p.142 [12]）。这可以应用，因为

$$\int_0^\infty \frac{\sum_{k=0}^\infty \sum_{p=1}^d \left(\mathrm{div}(b_k^{\cdot,p}(\cdot,\mu_t))(x(u,t))\right)^2}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \leq C\int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t < \infty$$

因为第二项被 $\sup_{u,\in\mathbb{R}^d,\mu\in\mathfrak{M}} \sum_{p=1}^d \sum_{k=0}^\infty \mathrm{div}(b_{\cdot,k}^{\cdot\ p}(u,\mu))^2$ 所界，由 (A2) 知其有限。

□

注 4.8. 我们将在引理 4.11 中证明，由引理 4.7 得到的零测集不依赖于 $u\in\mathbb{R}^d$。

我们想证明李雅普诺夫指数在 $C(K)$ 中相对紧，几乎必然对所有 $K\subset\mathbb{R}^d$ 成立。

记号 4.9. 我们将记

$$\begin{aligned}\frac{\ln(\det(Dx(u,t))}{t} &= f_t(u) = \frac{BV_t(u)}{t} + \frac{M_t(u)}{t}\\ &= \frac{\int_0^t \mathrm{div}(a(\cdot,\mu_s))(x(u,s)) - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^d \mathrm{Tr}\left(\left(Db_k^{\cdot,p}(\cdot,\mu_s)(x(u,s))\right)^2\right)\mathrm{d}s}{t}\\ &+ \frac{\sum_{k=0}^\infty\sum_{p=1}^d \int_0^t \mathrm{div}(b_k^{\cdot,p}(\cdot,\mu_s))(x(u,s))\mathrm{d}B_k^p(s)}{t}\end{aligned}$$

其中 BV 表示有界变差部分，M 表示鞅部分。

引理 4.10. 在 (A2) 下，对所有 $u,v\in\mathbb{R}^d$ 我们有

$$\frac{|BV_t(u)-BV_t(v)|}{t} \leq C\frac{\int_0^t |x(u,s)-x(v,s)|^\delta \mathrm{d}s}{t} \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}.$$

证明。只需证明对于所有 $\mu\in\mathfrak{M}$，$\sum_{p=1}^d\sum_{k=0}^\infty \mathrm{Tr}((Db_{\cdot,\ k}^{\cdot\ p})^2)$ 是赫尔德连续的；结合 (A2)，根据 $t\geq 0$ 的 BV_t 定义即可立即得到结论。

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{p=1}^d\sum_{k=0}^\infty \mathrm{Tr}((Db_k^{\cdot,p})(u,\mu)^2) - \sum_{p=1}^d\sum_{k=0}^\infty \mathrm{Tr}((Db_k^{\cdot,p})(v,\mu)^2)\right|\\ &\leq \sum_{k=0}^\infty\sum_{p=1}^d\sum_{i,j=1}^d \left|\frac{\partial b_k^{i,p}}{\partial u_j}\frac{\partial b_k^{j,p}}{\partial u_i}(u,\mu) - \frac{\partial b_k^{i,p}}{\partial u_j}\frac{\partial b_k^{j,p}}{\partial u_i}(v,\mu)\right|\\ &\leq \sum_{k=0}^\infty\sum_{p=1}^d\sum_{i,j=1}^d \left|\frac{\partial b_k^{i,p}}{\partial u_j}(u,\mu) - \frac{\partial b_k^{i,p}}{\partial u_j}(v,\mu)\right|\left|\frac{\partial b_k^{j,p}}{\partial u_i}(u,\mu)\right|\\ &+ \sum_{k=0}^\infty\sum_{p=1}^d\sum_{i,j=1}^d \left|\frac{\partial b_k^{j,p}}{\partial u_i}(u,\mu) - \frac{\partial b_k^{j,p}}{\partial u_i}(v,\mu)\right|\left|\frac{\partial b_k^{i,p}}{\partial u_j}(v,\mu)\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2 \sup_{u \in \mathbb{R}^d} \left(\sum_{k=0}^{\infty} ||Db_k(u,\mu)||_{HS}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times 2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} ||Db_k(u,\mu) - Db_k(v,\mu)||_{HS}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left| u - v \right|^{\delta} \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}
\end{aligned}
$$

□

引理 4.11。 在假设 (A1)、(A2) 和 (A5) 下，我们得到

$$
\lim_{t \to \infty} \sup_{u \in K} \frac{M_t(u)}{t} = 0 \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}
$$

对所有紧集 $K \subset \mathbb{R}^d$。

证明。 不妨设 $K = [0,1]^d$。令 $0 < \delta \leq 1$ 为（A2）中的 Hölder常数。则对于所有 $T > 0$，根据 Burkholder-Davis-Gundy不等式，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(\frac{\sup_{0 \leq t \leq T} \left| M_t(u) - M_t(v) \right|}{T} \right)^{\frac{2q}{\delta}} \right) \\
\leq &\frac{1}{T^{\frac{p}{\delta}}} \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{d} \left(\int_0^T \left(\operatorname{div}(b_k^{\cdot,p})(x(u,s),\mu_s) - \operatorname{div}(b_k^{\cdot,p})(x(v,s),\mu_s) \right)^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{q}{\delta}} \right) \qquad (9) \\
&\leq C \frac{T^{\frac{q}{\delta}-1}}{T^{\frac{2q}{\delta}}} \int_0^T \mathbb{E}(|x(u,s) - x(v,s)|^{2q}) \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

为了估计最后一项，注意到引理 4.6

蕴含

$$
\mathbb{E}(|x(u,t) - x(v,t)|^{2q}) \leq |u - v|^{2q}
$$

根据 Hölder不等式，我们可以估计式（9）中的最后一项为

$$
\frac{C}{T^{\frac{q}{\delta}}} \left| u - v \right|^2 q
$$

对于所有 $u, v \in [0,1]^d$。因此，根据 [10], 中的引理 1.8.1 和引理 1.8.2，我们知道

$$
\mathbb{E}\left(\sup_{u \in [0,1]^d} \left(\frac{\sup_{0 \leq t \leq T} \left| M_t(u) - M_t(0) \right|}{T} \right)^{\frac{2q}{\delta}} \right) \leq C \mathbb{E}(L^{\frac{2q}{\delta}}) \sup_{u \in [0,1]^d} ||u||_{\infty}^{\beta} \leq C \frac{1}{T^{\frac{q}{\delta}}}
$$

此处 L是来自引理 1.8 的局部Hölder常数。1 [10] 以及 β 相应的Hölder指数。由此，不等式可以很容易地推广到 $[-n,n]^d$，对所有 $n \in \mathbb{N}$

仅通过改变常数 $C > 0$，即可证明该断言。此外，对于所有$T > 0$，我们有：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\left(\frac{\sup_{0\le t\le T}|M_t(0)|}{T}\right)^{\frac{2q}{\delta}})\\
\le& C\frac{1}{T^{\frac{2q}{\delta}}}\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d}(\mathrm{div}(b_k^{\cdot,p}(\cdot,\mu_t))(x(0,t)))^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{q}{\delta}}\right)\\
\le& C\frac{1}{T^{\frac{q}{\delta}}}
\end{aligned}$$

现在我们将证明几乎必然收敛。首先，不失一般性，我们可以假设 $0 \in K$，因为否则我们只需扩大 K。令 $\varepsilon > 0$ 并考虑对$n \in \mathbb{N}$

$$A_n := \left\{\left|\sup_{0\le t\le n}\sup_{u\in K} M_t(u)\right| > \varepsilon n\right\}$$

那么我们可以证明

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &\le (n\varepsilon)^{-\frac{2q}{\delta}}\mathbb{E}\left((\sup_{u\in K}\sup_{0\le t\le n}|M_t(u)|)^{\frac{2q}{\delta}}\right)\\
&\le C(n\varepsilon)^{-\frac{2q}{\delta}}\left(\mathbb{E}\left(\left(\sup_{u\in K}\sup_{0\le t\le n}|M_t(u)-M_t(v)|\right)^{\frac{2q}{\delta}}\right)+\mathbb{E}\left(\left(\sup_{0\le t\le n}|M_t(0)|\right)^{\frac{2q}{\delta}}\right)\right)\\
&\le C\frac{1}{n^{\frac{q}{\delta}}}.
\end{aligned}$$

通过对 q 的选择，我们得到了右侧的可求和性，因此根据 Borel-Cantelli引理， A_n 几乎必然只会对有限多个 $n \in N$ 发生。现在对于 $t \gg 1$，取满足 $n-1 \le t \le n$ 的 $n \in \mathbb{N}$，于是得到

$$\begin{aligned}
\frac{|\sup_{u\in K} M_t(u)|}{t} &= \frac{|\sup_{u\in K} M_t(u)|}{n}\frac{n}{t}\\
&\le \frac{|\sup_{u\in K} M_t(u)|}{n}\frac{n}{n-1} \le C\varepsilon \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}
\end{aligned}$$

其中 $C = \sup_{n\ge 2}\frac{n}{n-1}$。选取一个序列 $\varepsilon_n \searrow 0$，我们得到

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{|\sup_{u\in K} M_t(u)|}{t} = 0$$

几乎必然，从而得出该结论。 □

我们将通过处理有界变差部分来继续。

引理 4.12. 在假设 (A1)、(A2) 和 (A5) 下，对所有紧集 $K \subset \mathbb{R}^d$ 存在集合 N 使得 $\mathbb{P}(N) = 0$ 且对所有 $\omega \in \Omega \setminus N$ 存在某个 $T(\omega, K) > 0$ 使得

that

$$\left(\frac{BV_t(\omega)}{t}\right)_{t\geq T(\omega,K)}$$

在 C(K) 中相对紧。

证明。 注意到由伊藤公式，我们有对所有 $u,v\in\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
|x(u,t)-x(v,t)|^2 &= |u-v|^2 \\
&\quad +2\int_0^t (x(u,s)-x(v,s),\mathrm{d}x(u,s)-x(v,s)) \\
&\quad 2\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} ||b_k(u,\mu_s)-b_k(v,\mu_s)||_{HS}^2 \mathrm{d}\langle x(u,\cdot)-x(v,\cdot)\rangle_s \\
&\quad = |u-v|^2 \\
&\quad + 2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} (x(u,s)-x(v,s),\varphi(x(u,s)-x(r,s))-\varphi(x(v,s)-x(r,s)))\mu(\mathrm{d}r)\mathrm{d}s \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d} 2\int_0^t (x(u,s)-x(v,s),b_k^{\cdot,p}(x(u,s),\mu_s)-b_k^{\cdot,p}(x(v,s),\mu_s))\mathrm{d}B_k^p(s) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d} \int_0^t ||b_k(x(u,s),\mu_s)-b_k(x(v,s),\mu_s)||_{HS}^2 \mathrm{d}s. \\
&\quad \leq |u-v|^2 + (-2\alpha-B^2)\int_0^t |x(u,s)-x(v,s)|^2\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \sum_{p=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty} 2\int_0^t (x(u,s)-x(v,s),b_k^{\cdot,p}(x(u,s),\mu_s)-b_k^{\cdot,p}(x(v,s),\mu_s))\mathrm{d}B_k^p(s) \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}
\end{aligned}$$

注意这几乎必然对所有 $u,v\in\mathbb{R}^d$成立，因此对所有 $\omega\in\Omega\setminus N_1$成立，其中$N_1$ 是上述所有项在 $(t,u)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ 上不连续的零测集。格朗沃尔引理给出对所有

$$\begin{aligned}
|x(u,t)-x(v,t)|^2 \leq \exp(-(2\alpha-B^2)t)\times\Big(&|u-v|^2 \\
&+2\sup_{0\leq s\leq t}\sup_{u,v\in K}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d}\int_0^s (x(u,r)-x(v,r),b_k^{\cdot,p}(x(u,r),\mu_r)-b_k^{\cdot,p}(x(v,r),\mu_r))\mathrm{d}B_k^p(r)\Big).
\end{aligned} \tag{10}$$

几乎必然。现在设

$$Y_t=\sup_{u,v\in K} 2\sup_{0\leq s\leq t}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d}\int_0^s (x(u,r)-x(v,r),b_k^{\cdot,p}(x(u,s),\mu_s)-b_k^{\cdot,p}(x(v,s),\mu_s))\mathrm{d}B_k^p(r)$$

我们将以类似引理 4.11 的方式证明,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Y_t}{t}=0 \quad \mathbb{P}\text{-a. s.} \tag{11}$$

为此，考虑

$$Y_t =: \sup_{u,v\in K}\sup_{0\le s\le t} X_s(u,v)$$

我们将展示

$$\mathbb{E}\left(\left(\sup_{0\le r\le t}|X_r(u_1,u_2)-X_r(v_1,v_2)|\right)^{2q}\right)\le C(K,b,d)t^q\,|u-v|^{2q}$$

其中 $u=(u_1,\ u_2)$ $v=(v_1,\ v_2)\in K^2$，对于所有 $q\ge 1$。不失一般性，考虑 $K=[0,1]^d$。首先观察

$$\left|(x,y)-(v,w)\right|\le\left|(x-v,y)\right|+|v,y-w|\le|y|\,|x-v|+|v|\,|y-w|\,. \tag{12}$$

其中，此处 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $\mathbb{R}^d$上的内积。由 Burkholder-Davis-Gundy不等式我们现在得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(\sup_{0\le r\le t}|X_r(u_1,u_2)-X_r(v_1,v_2)|\right)^{2q}\right)\\
&\le\mathbb{E}\Bigg(\Bigg(2\sup_{0\le r\le t}\Big|\sum_{p=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^r(x(u_1,s)-x(u_2,s),b_k^{\cdot,p}(x(u_1,s),\mu_s)-b_k^{\cdot,p}(x(u_2,s),\mu_s))\\
&-(x(v_1,s)-x(v_2,s),b_k^{\cdot,p}(x(v_1),\mu_s)-b_k^{\cdot,p}(x(v_2,s),\mu_s))\mathrm{d}B_k^p(s)\Big|\Bigg)^{2q}\Bigg)\\
&\le\mathbb{E}\Bigg(2\Bigg(\int_0^t\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d}(x(u_1,s)-x(u_2,s),b_k^{\cdot,p}(x(u_1,s),\mu_s)-b_k^{\cdot,p}(x(u_2,s),\mu_s))\\
&-(x(v_1,s)-x(v_2,s),b_k^{\cdot,p}(x(v_1),\mu_s)-b_k^{\cdot,p}(x(v_2,s),\mu_s))\Big)^2\mathrm{d}s\Bigg)^q\Bigg)\\
&\le C(d,q)t^{q-1}\mathbb{E}\Bigg(\Big(\int_0^t(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d}(x(u_1,s)-x(u_2,s),b_k^{\cdot,p}(x(u_1,s),\mu_s)-b_k^{\cdot,p}(x(u_2,s),\mu_s))\\
&-(x(v_1,s)-x(v_2,s),b^{\cdot,p}(x(v_1),\mu_s)-b^{\cdot,p}(x(v_2,s),\mu_s))^2)^q\mathrm{d}s\Bigg)\Bigg)\\
&\overset{(12)}{\le} C(d,q)t^{q-1}\mathbb{E}\Bigg(\Big(\int_0^t|x(u_1,s)-x(v_1,s)-(x(u_2,s)-x(v_2,s))|^{2q}\\
&\times(\sum_{p=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty}|b_k^{\cdot,p}(x(u_1,s),\mu_s)-b_k^{\cdot,p}(x(v_1,s),\mu_s)|)^{2q}\\
&+|x(u_2,s)-x(v_2,s)|^{2q}\\
&\times(\sum_{p=1}^{d}\sum_{k=0}^{\infty}|b_k^{\cdot,p}(x(u_1,s),\mu_s)-b_k^{\cdot,p}(x(v_2,s),\mu_s)-(b_k^{\cdot,p}(x(u_1,s),\mu_s)-b_k^{\cdot,p}(x(v_1,s),\mu_s))|^2)^q\mathrm{d}s\Bigg)\Bigg)\\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz},(A1)}{\le} C(d,q)t^{q-1}\int_0^t\Big(\big(\mathbb{E}(|x(u_1,s)-x(v_1,s)|^{4q})+\mathbb{E}(|x(u_2,s)-x(v_2,s)|^{4q})\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \mathbb{E}(|x(u_1,s)-x(v_1,s)|^{4q})\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&+\Big(\mathbb{E}(|x(u_2,s)-x(v_2)|^{4q}) \\
&\times \Big(\mathbb{E}(|x(u_1,s)-x(v_1,s)|^{4q})+\mathbb{E}(|x(u_2,s)-x(v_2,s)|^{4q})\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s \\
&\overset{\text{Lemma}4.6}{\leq} C(d,q)t^{q-1} \\
&\times \int_0^t \Big(\Big(|u_1-v_1|^{4q}+|u_2-v_2|^{4q}\Big)|u_1-v_1|^{4q}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&+\Big(\Big(|u_1-v_1|^{4q}+|u_2-v_2|^{4q}\Big)|u_2-v_2|^{2q}\Big)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s \\
&\leq C(d,q,K)t^q(|u_1-v_1|^{2q}+|u_2-v_2|^{2q}) \\
&\leq C(d,q,K)t\,|(u_1,u_2)-(v_1,v_2)|^{2q}
\end{aligned}
$$

对于所有 $u_i, v_i \in K$ 其中 $i = 1,2$ 以及 $u = (u_1, u_2)$ $v = (v_1, v_2)$。注意，在$(b_k)_{k\geq 0}$ 有界的情况下，我们可以对指数 1 和∞使用 Hölder不等式，而不是 Cauchy-Schwarz不等式，从而得到相同的结果。请注意，每个不等式中出现的常数可能会发生变化。由于 $[0,1]^{2d} = [0,1]^d \times [0,1]^d$ 我们可以考虑

$$
Z_t(u) = X_t(u_1, u_2)
$$

从而得到

$$
\mathbb{E}\left(\left(\sup_{0\leq s\leq t}|Z_s(u)-Z_s(v)|\right)^{2q}\right) \leq C(d,q,K)t^q\,|u-v|^{2q}
$$

根据 [10], 中定理1.8.1 的证明，我们得到存在一个版本，我们也将其记作 $Z_t(u)$，满足 $t \geq 0$ 和 $u \in [0,1]^{2d}$，使得

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(\sup_{u\in[0,1]^{2d}}\sup_{0\leq t\leq T}|Z_t(u)|\right)^{2q}\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\sup_{u\in[0,1]^{2d}}\sup_{0\leq t\leq T}|Z_t(u)-Z_t(0)|\right)^{2q}\right) \\
&\leq C\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}\omega_k^{\beta}(Z)\right)^{2q}||u||^{\beta q}\right) \\
&\leq C(d,q,K)T^{2q}
\end{aligned}
$$

对所有 $T \geq 0$ 以及某个 $0 < \beta \leq 1$。最后一个不等式由注意到 [10]中的引理 1.8.2 得出

$$
\begin{aligned}
\omega_k(Z) &= \max_{u,v\in\Delta_k:||u-v||_\infty=2^{-k}}\sup_{0\leq t\leq T}|Z_t(u)-Z_t(v)| \\
\omega_k^{\beta}(Z) &= 2^{\beta k}\omega_k(Z)
\end{aligned}
$$

and Δ_k 被定义为 p. 上长度为 n 的所有二进有理数的集合。因此，b y

取 q 足够大，可以完全按照引理 4.11 中的方法证明

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Y_t}{t}=0 \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}$$

根据 q 的选取。现在令 N_2 为上述收敛不成立的集合 .

由引理 4.10 可得

$$\begin{aligned}\frac{|BV_t(u)-BV_t(v)|}{t} &\le \frac{\int_0^t |x(u,s)-x(v,s)|^\delta \,\mathrm{d}s}{t}\\ &\le \left(\frac{\int_0^t |x(u,s)-x(v,s)|^2 \,\mathrm{d}s}{t}\right)^{\frac{\delta}{2}}\\ &\overset{(10)}{\le} \left(\frac{\int_0^t \exp(-(2\alpha-B^2)s)(|u-v|^2+Y_t)\mathrm{d}s}{t}\right)^{\frac{\delta}{2}}\\ &= \left(\frac{(|u-v|^2+Y_t)(1-\exp(-(2\alpha-B^2t)))}{t}\right)^{\frac{\delta}{2}}\\ &\le \left(\frac{(|u-v|^2+Y_t)}{t}\right)^{\frac{\delta}{2}} \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}\end{aligned}$$

因此，对所有 $\omega\in\Omega\setminus(N_1\cup N_2)$，存在一个 $T(\omega)>0$，使得对所有 $t\ge T(\omega)$ 和 $\varepsilon>0$，都存在一个 $\gamma>0$，使得对所有 $u,\ v\in K$，有

$$|u-v|<\gamma \Rightarrow \frac{|BV_t(u)(\omega)-BV_t(v)(\omega)|}{t}<\varepsilon.$$

现在，由阿尔泽拉-阿斯科利定理即可得到所述结论，因为根据假设（A2），$\left(\frac{BV_t}{t}\right)_{t\ge1}$ 有界。 □

我们的初始目标是确保李雅普诺夫指数存在，即证明 $f_t(u)$ 的极限存在，其中 $t\to\infty$。此外，由于李雅普诺夫指数出现在积分号下，我们需要在某种意义上使其一致。在前面的引理中，我们已经证明了 $f_t(u)$ 具有良好的紧致性性质；现在我们将在某些条件下确定其极限。

引理 4.13。 假设 (A1)、(A2) 和 (A5)。此外，如果对于所有 $u\in\mathbb{R}^d$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d}\mathrm{Tr}\left(\left(Db_k^{\cdot,p}(u,\delta_u)\right)^2\right)=L$$

对于某个 $L\in\mathbb{R}$ 成立，且该函数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d}\mathrm{Tr}\left(\left(Db_k^{\cdot,p}(\cdot,\cdot)\right)^2\right)$$

在 $\mathbb{R}^d \times \mathfrak{M}$ 上联合连续。那么存在 $\lambda < 0$ 使得

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{u\in K} |f_t(u) - \lambda| = 0 \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}$$

对所有紧集 $K \subset \mathbb{R}^d$。

证明。 我们首先证明对于所有 $u,\ v \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{t\to\infty} |x(u,t) - x(v,t)| = 0 \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}$$

成立。沿用引理 4.12 的记号，根据引理 4.6，我们对所有 $u, v \in K$ 得到

$$\lim_{t\to\infty} |x(u,t) - x(v,t)|^2 \le \lim_{t\to\infty} \exp(-(2\alpha - B^2)t)(|u-v|^2 + Y_t^K) = 0 \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}.$$

其中 $K \subset \mathbb{R}^d$ 是紧集。这由引理 4.12 的证明可得，在该证明中我们已证明

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Y_t}{t} = 0 \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}.$$

由于我们可以用可数多个紧集（K_n）穷尽 $\mathbb{R}^d{}_{n\in\mathbb{N}}$，因此对所有$u, v \in \mathbb{R}^d$都可得到该结果。由此我们对所有 $v \in \mathbb{R}^d$ 得到

$$\lim_{t\to\infty} \gamma(\mu_t, \delta_{x(v,t)}) = 0 \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}.$$

由于

$$\lim_{t\to\infty} \gamma(\mu_t, \delta_{x(v,t)}) \le \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|x(u,t) - x(v,t)|}{1 + |x(u,t) - x(v,t)|} \mu_0(\mathrm{d}u) = 0 \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}.$$

因此我们得到 $u \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}(\varphi(\cdot))(x(u,t) - x(v,t))\mu_0(\mathrm{d}u) = \mathrm{div}(\varphi(\cdot))(0) \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}$$

and

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{d} \mathrm{Tr}\left(\left(D b_k^{\cdot,p}(x(u,t), \mu_t) \right)^2 \right) - L \right| \\
&= \lim_{t\to\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{d} \mathrm{Tr}\left(\left(D b_k^{\cdot,p}(x(u,t), \mu_t) \right)^2 \right) - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{d} \mathrm{Tr}\left(\left(D b_k^{\cdot,p}(x(0,t), \delta_{x(0,t)}) \right)^2 \right) \right| = 0 \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}
\end{aligned}$$

因此，根据洛必达法则，我们可以得到

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{BV_t(u)}{t} = &\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}(\varphi(\cdot))(x(u,t) - x(v,t))\mu_0(\mathrm{d}v) \\
&- \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \mathrm{Tr}\left(\left(D b_k^{\cdot,p}(x(u,t), \mu_t) \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

$$= \operatorname{div}(\varphi(0)) - \frac{1}{2}L \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}$$

对于我们在引理 4.11 中得到的鞅部分

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{u\in K} \frac{M_t(u)}{t} = 0 \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}.$$

因此，由引理 4.12，通过简单的子序列论证，我们得到

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{u\in K} \left| f_t(u) - \operatorname{div}(\varphi(0)) + \frac{1}{2}L \right| = 0 \quad \mathbb{P}\text{-a. s.}$$

对于所有紧集 $K \subset \mathbb{R}^d$。极限的负性源于引理 4.7 □

注 4.14。 $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{d} \mathrm{Tr}\left(\left(Db_k^{\cdot,p}(\cdot,\cdot)\right)^2\right)$ 的假设例如在 $b_k \equiv 0$ 对所有 $k \geq 1$ 且

$$b_0(u,\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \beta(u - v_1, \ldots, u - v_n)\mu(\mathrm{d}v_1), \ldots, \mu(\mathrm{d}v_n)$$

对于 $n \in \mathbb{N}$ 和具有有界且 δ-赫尔德导数的可微函数 β。

注 4.15。这里的主要难点在于保证李雅普诺夫指数逐点几乎必然存在。一旦实现这一点，便可得出引理 4.13 的结论。

借助这个引理，我们终于可以证明主要结果。

定理 4.16。 在假设(A1),(A2),(A3),(A4)和(A5)下，随机场 $(p_t)_{t\geq 0}$ 是间歇的，如果 p_0 具有紧支撑。

证明。 我们将$\overline{\mathrm{supp}(p_0)}$记为 $= K$。首先注意到，由于引理4.13，固定来自引理 4.13 的零测集N并固定 $\omega \in \Omega \setminus N$。现在，对于所有 $\varepsilon > 0$ 和所有$u \in K$，存在一个 $T(\omega, \varepsilon, K) > 0$，使得对于所有 $t \geq T(\omega, \varepsilon, K)$

$$\begin{aligned} &-\varepsilon + \lambda \leq f_t(u)(\omega) \leq \varepsilon + \lambda \\ \Rightarrow &\exp(-\varepsilon + \lambda t) \leq \det(Dx(u,t)(\omega)) \leq \exp(\varepsilon + \lambda t) \end{aligned}$$

其中 $\lambda < 0$。因此，对于所有 $t \geq T(\omega, \varepsilon, K)$，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{\ln(\int_{\mathbb{R}^d} p_t(u)^p(\omega)\mathrm{d}u)}{t} &= \frac{\ln(\int_K p_0(u)^p \frac{1}{(\det(Dx(u,t)))^{p-1}(\omega)}\mathrm{d}u)}{t} \\ &\leq \frac{\ln(\exp((p-1)(\varepsilon - \lambda t))\int_K p_0(u)^p \mathrm{d}u}{t}) \end{aligned}$$

类似地

$$\frac{\ln(\int_{\mathbb{R}^d} p_t(u)^p(\omega)\mathrm{d}u)}{t} \geq \frac{\ln(\exp((p-1)(-\varepsilon - \lambda t))\int_K p_0(u)^p \mathrm{d}u)}{t}.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的， λ_p 存在，且

$$\lambda_p = -\lambda(p-1)$$

因为 $\lambda < 0$ 我们得到

$$\left(\frac{\lambda_p}{p}\right)_{p\geq 1}$$

是严格递增的。 □

参考文献

[1] R. Bruno 等. “识别太阳风中的间歇性事件”。载于：行星与空间科学 49.12（2001），第 1201–1210 页。[2] R. A. Carmona 和 S. A. Molchanov. “平稳抛物Anderson模型与间歇性”。载于：概率论及相关领域 102.4（1995），第 433–453 页。[3] X. Chen. “具有 ($1+1$) 维时空白噪声的抛物Anderson方程的精确间歇性”。载于：*IHP*概率与统计年鉴。第 51 卷，第 4 期。2015，第 1486–1499 页。[4] A. Dorogovtsev. 带相互作用的随机流与随机测度（俄文）。乌克兰国家科学院，2007。[5] J. Gärtner 和 S. A. Molchanov. “Anderson模型的抛物问题：I. 间歇性及相关主题”。载于：数学物理通讯 132（1990），第 613–655 页。[6] B. Gess、R. S. Gvalani 和 V. Konarovskyi. 作为随机梯度下降波动平均场极限的守恒随机偏微分方程。2022。doi: 10.48550/ARXIV.2207.05705

网址： https://arxiv.org/abs/2207.05705.[7] R. Khasminskii.微分方程的随机稳定性。第66 卷。Springer科学与商业媒体，2011 年。[8] D.Khoshnevisan.随机偏微分方程分析。第 119 卷。美国数学学会，2014 年。[9] P.Kotelenez。随机常微分方程和随机偏微分方程：从从微观到宏观方程的过渡。Springer，2008 年。[10] H. Kunita。随机流和跳跃扩散。Springer，2019 年。[11] H.Kunita。随机流和随机微分方程。《剑桥高等数学研究》丛书。剑桥大学出版社，1997 年。[12] R. Liptser andA. N. Shiryayev。鞅理论。第 49卷。Springer科学与商业媒体，2012 年。[13] A. S. Monin andA. M. Yaglom。统计流体力学。1975 年。[14] CédricVillani 等。最优传输：旧与新。第 338 卷。Springer，2009 年。

[15] YA. B. Zel’Dovich 等人：《随机介质中的间歇性》。载于：苏联物理学进展30.5（1987），第 353 页。