arXiv:2304.02580v1 [math.CO] 5 Apr 2023

不友好划分：避开有限度顶点时

Leandro Fiorini Aurichi* Lucas Silva Sinzato Real*

2023年4月

摘要

图 $G = (V, E)$ 的不友好划分是一个函数 $c\colon V \to 2$，满足 $|\{x \in N(v)\colon c(x) \neq c(v)\}| \geq |\{x \in N(v)\colon c(x) = c(v)\}|$ 对每个顶点 $v \in V$ 都成立，其中 $N(v)$ 表示其邻域。Cowen and Emerson 曾猜想 [2] 每个图都有不友好划分，但 Milner and Shelah 在 [5] 通过分析具有不可数多个顶点的图，找到了该猜想的反例。值得注意的是，他们的图都不含有限度顶点。因此，作为一种自然的研究方向，本文探寻具有这一性质且不允许不友好划分的图的最小基数。事实上，作为若干其他独立性结果之一，我们得出结论：这一规模无法由通常的集合论公理确定。

1 引言与问题背景：

给定图 $G = (V, E)$，顶点 $v \in V$ 的邻域记为 $N(v) = \{u \in V\colon uv \in E\}$，因此其度为基数 $|N(v)|$。此外，函数 $c\colon D \to 2$ 称为该图的部分着色，其中 $2 = \{0, 1\}$ 是一个包含两个元素的集合（称为颜色），而 $D \subset V$ 是任意子集。本文称部分着色 $c\colon D \to 2$ 在顶点 $v \in D$ 处是不友好的，如果 $|\{x \in N(v) \cap D\colon c(x) \neq c(v)\}| \geq |\{x \in N(v) \cap D\colon c(x) = c(v)\} \cup (D \setminus N(v))|$。于是，如果部分着色 c 在其定义域的所有顶点处都不友好，就称其为不友好部分着色。根据这一定义可直接得出，c 的任意延拓 $c'\colon D' \to 2$ 在满足 c 不友好的顶点 $v \in D$ 处也是不友好的。最后，不友好划分是定义在整个图上的不友好着色 $c\colon D \to 2$，也就是说，$D = V$。

在这些术语下，我们首先强调，每个有限图都存在一个不友好划分。这是因为，如果 $G = (V, E)$ 是这样的图，那么可以取一个使基数 $|\{uv \in E\colon c(u) \neq c(v)\}|$ 最大化的着色$c\colon V \to 2$ 作为不友好划分。因此，通过紧致性论证可知，每个局部有限图（即其顶点的度均有限的图）也存在一个不友好划分。事实上，正如 Aharoni、Milner 和 Prikry 在 [1], 中所证明的，只有有限个顶点具有无限度的每个图都存在一个不友好划分。

基于这些观察，自然会问是否每个图都有不友好划分，正如Cowen and Emerson在 [2]中所做的那样。1990年，Milner and Shelah在 [5] 中通过展示一族不可数图否定地回答了该问题，在这些图中无法找到这些着色。除了是已知唯一没有不友好划分的图之外，他们的反例还有一些其他特点。例如，该族中最小的成员有 $\mathfrak{c}^{+\omega}$个顶点，均无有限度。在该记号下，$\mathfrak{c}^{+\omega}$ 指的是大于 $\mathfrak{c}$的第一个极限基数。

*圣保罗大学数学与计算机科学研究所，圣卡洛斯，圣保罗州，巴西

特别地，即使假定连续统假设（CH），也需要 $\aleph_\omega$ 个顶点才能描述已知最小的没有不友好划分的图。实际上，Milner and Shelah还在 [5] 中验证了，在连续统没有固定大小的一些理论中可以获得这个数量。另一方面，根据我们将在第2节中回顾的文献中的先前结果，当禁止有限度顶点时，无法构造少于 $\aleph_\omega$ 个顶点的反例。因此，在本文中我们研究ZFC是否确实证明了 $\aleph_\omega$ 是最小的基数$\varkappa$ ，使得存在图 $G = (V, E)$具有 $\varkappa$ 个顶点，全部为无限度，且没有不友好划分。

此外，我们在 ZFC $+ \aleph_\omega < \mathfrak{c}$ 下讨论命题 $\varkappa = \aleph_\omega$ 和$\varkappa = \mathfrak{c}^{+\omega}$ 是否成立。在这一更强的理论中，我们发现基数 $\aleph_\omega$ 和 $\mathfrak{c}^{+\omega}$ 并不相同。即便如此，我们仍证明了以下独立性结论，作为本文的主要结果：

定理 1.1. 设 $\varkappa$ 是最小的基数，使得存在一个图 $G = (V, E)$，它没有有限度顶点，满足 $|V| = \varkappa$，且不存在不友好划分。那么，以下命题独立于 ZFC $+ \aleph_\omega < \mathfrak{c}$：

1. $\varkappa = \aleph_\omega$。
2. $\varkappa = \mathfrak{c}^{+\omega}$，其中，如前所述， $\mathfrak{c}^{+\omega}$ 是大于 $\mathfrak{c}$的最小极限基数。

特别是，这些命题独立于通常的集合论公理。

因此，定理 1.1 是一个源于无限图相关问题的独立性结果。本文处于图论与集合论的交汇领域，因而尽可能详尽地阐述论证，力求让来自这两个领域（但不限于这两个领域）的读者都能独立阅读。因此，考虑到这一点，第 2 节中的一些证明可能比必要的篇幅更长。

无论如何， $\varkappa$ 远非 $\aleph_0$，因此不友好划分猜想现在变成了是否每个可数图都有不友好划分的问题。然而，即使 $\aleph_0 < \kappa < \aleph_\omega$或 $\kappa = \mathfrak{c}$，大小为 κ 的反例也未知。顺便根据定理 1.1，这样的图 G必须至少有 $\min\{|N(v)| : \ v \in V(G) \ |N(v)| \geq \aleph_0\}$ 个有限度顶点。

2 $\varkappa$的可能取值

在本节中，我们给出定理 1.1 的相容性结果，这些结果与没有有限度顶点的图中不友好划分的存在性有关。正如引言中所指出的，这是由 Milner and Shelah 在 [5] 中构造的仅有的已知没有不友好划分的图所激发的。下面，我们恢复这些图的性质：

定理 2.1（[5], 定理 2）。给定一个无限基数 λ，设 α 为满足 $|\wp(\lambda)| = 2^\lambda = \aleph_\alpha$的序数。那么，存在一个没有有限度顶点的图 $G = (V, E)$，它没有不友好划分，并且满足 $|V| = (2^\lambda)^{+\omega}$，其中$(2^\lambda)^{+\omega} = \aleph_{\alpha+\omega}$。

特别地，在上面的定理中取 $\lambda = \omega$，我们可以得出：若排除有限度顶点，则至少需要 $(2^\omega)^{+\omega} = \mathfrak{c}^{+\omega}$ 个顶点，才能找到一个没有不友好划分的图。鉴于 $\aleph_\omega \leq \mathfrak{c}^{+\omega}$，如此多的顶点数量相当令人惊讶。因此，我们将研究满足以下性质的最小基数 $\varkappa$：存在一个图，具有 $\varkappa$ 个顶点，且所有顶点的度都为无限度，但该图不存在不友好划分。关于不友好划分的现有文献很容易给出其取值的第一个下界：

定理 2.2（[1], 定理 2）。设 $\kappa_0 < \kappa_1 < \cdots < \kappa_n$ 是一个由无限基数组成的有限集合，且对所有 $1 \leq i \leq n$， κ_i 都是正则的。设 $G = (V, E)$ 是一个图，满足： $|\{v \in V\colon\ |N(v)| \text{ 是有限的}\}| < \kappa_0$，并且对每个度为无限度的顶点 $v \in V$，都有 $|N(v)| \in \{\kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_n\}$。那么， G 存在一个不友好划分。

推论 2.3. $\aleph_\omega \leq \varkappa$。

证明。举例来说，假设 $\varkappa < \aleph_{\omega}$。那么，存在一个图 $G = (V, E)$，满足 $|V| < \aleph_\omega$，其顶点的度均为无限，且没有不友好划分。固定 $n \in \mathbb{N}$，使得 $|V| = \aleph_n$。由于 G 没有有限度顶点， $|N(v)| \in \{\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_n\}$。注意到每个后继基数都是正则的， G 满足定理 2.2 的假设。因此，与其选择相矛盾的是，G 有一个不友好划分。 □

同样不难验证，上述不等式是紧的。这是因为在连续统假设（CH）下，$\mathfrak{c}^{+\omega} = \aleph_\omega$，因此 Milner and Shelah 在定理 2.1 中给出的构造表明 $\varkappa \leq \aleph_{\omega}$。另一方面，作为一个不那么直接的结论，我们将证明等式 $\varkappa = \aleph_\omega$ 实际上独立于 ZFC $+ \aleph_\omega < \mathfrak{c}$；在该理论中，基数 $\aleph_\omega$ 和 $\mathfrak{c}^{+\omega}$ 彼此不同。特别是，这一命题独立于通常的集合论公理。为此，我们重述 Milner and Shelah 在 [5] 中的另一个定理：

定理 2.4（[5], 定理 3）。假设存在一个由大小为 $\aleph_1$ 的族生成的 $p-$ 点。那么，存在一个图 $G =$（V， E），满足 $|V| = \aleph_\omega$，且没有不友好划分，并且其所有顶点的度都是无限度。

这个结果很方便，因为其假设与 $\mathcal{ZFC} + \aleph_\omega < \mathfrak{c}$ 相容（例如参见 [3], 的定理 8.0 (b)）。因此，结合推论 2.3 和定理 2.4，可以得出命题 $\varkappa = \aleph_\omega$ 与 $ZFC + \aleph_\omega < \mathfrak{c}$ 相容。我们的目标现在是证明，这个等式实际上独立于这些公理。

为了介绍我们将用于证明的主要工具，设（$\mathbb{P}$， $\leq$）为任意一个偏序集。我们称非空子集 $F \subset \mathbb{P}$ 为滤子；粗略地说，它是 $\mathbb{P}$ 中较大元素的集合。更准确地说，若满足以下性质，它就是一个滤子：

- $F \neq \emptyset$。
- F 是向上封闭的，也就是说，给定 $p \in \mathbb{P}, p \in F$，若 $p \geq s$，则对某个 $s \in F$成立。
- 对于任意一对 $s, t \in F$，都存在 $p \in F$，使得 $p \leq s$ 且 $p \leq t$。

如果不存在 $r \in \mathbb{P}$ 使得 $r \leq p$且 $r \leq q$，我们也称两个元素 $p, q \in \mathbb{P}$ 不相容。另一方面，若对于每个 $p \in \mathbb{P}$，都存在$d \in D$ 使得 $d \leq p$，则称 $D \subset \mathbb{P}$ 是 $\mathbb{P}$ 中的稠密子集。最后，若 $\mathbb{P}$ 中任意一族两两不相容元素都是可数的，就称 $\mathbb{P}$ 满足可数链条件。根据这些术语，马丁公理表述如下：

马丁公理（MA）：固定一个满足可数链条件的偏序集 $(\mathbb{P}, \leq)$。若 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{P}$ 的一族稠密子集，且 $|\mathcal{D}| < \mathfrak{c}$，则存在 $\mathbb{P}$ 的一个滤子 F，使得对每个 $D \in \mathcal{D}$ 都有 $F \cap D \neq \emptyset$。

对我们的研究而言，马丁公理与 ZFC $+ \aleph_\omega < \mathfrak{c}$相互独立。此外，在 MA 成立的理论中， $\mathfrak{c}$ 是一个正则基数。利用 [4], 中可以查阅到的一些其他性质，例如，我们现在可以证明以下命题：

命题 2.5. 假设马丁公理成立。那么，每个图 $G=(V,E)$，只要其所有顶点的度都是无限的，并且满足 $|V|<\mathfrak{c}$，就存在一个不友好划分。

证明。我们将研究经典偏序 $(\mathbb{P},\leq)$，其中 $\mathbb{P}=\{c:\ D\to 2 \mid D\subset V \text{是有限的}\}$，而 $\leq$ 由以下规则描述：$c\leq c'$ 当且仅当 c 是 c'的一个延伸。用 $\mathrm{dom}(c)$ 表示部分着色 $c\in\mathbb{P}$ 的定义域。众所周知，$(\mathbb{P},\leq)$ 满足可数链条件。此外，很容易验证下列各项定义了 $\mathbb{P}$中的稠密集：

1. 对每个 $v\in V$，定义 $D_v=\{c\in\mathbb{P}:\ v\in\mathrm{dom}(c)\}$。

2. 若 $v\in V$ 是一个度为正则基数 κ_v 的顶点，固定其邻域的一个枚举 $\{v_\alpha\}_{\alpha<\kappa_v}$。现在，对每个 $\alpha<\kappa_v$，定义集合

$$R_v^\alpha=\{c\in\mathbb{P}:\ \text{there are } \beta_0,\beta_1>\alpha \text{ such that } c(v_{\beta_0})=0 \text{ and } c(v_{\beta_1})=1\}$$

3. 与上一项类似，若 v 是一个度为奇异基数 κ_v 的顶点，固定$\{v_\alpha\}_{\alpha<\kappa_v}$ 其邻域的一个枚举，并$\{\gamma_\xi\}_{\xi<cf(\kappa_v)}$ 在 κ_v 中取一个正则基数的共尾序列。给定$\alpha<\kappa_v$，令 $\xi<cf(\kappa_v)$ 为满足 $\gamma_\xi\leq\alpha<\gamma_{\xi+1}$ 的指标。于是定义

$$S_v^\alpha=\{c\in\mathbb{P}:\ \text{there are } \alpha<\beta_0,\beta_1<\gamma_{\xi+1} \text{ such that } c(v_{\beta_0})=0 \text{ and } c(v_{\beta_1})=1\}$$

因此，集合 $\mathcal{D}=\{D_v:\ v\in V\}$, $\mathcal{R}=\{R_v^\alpha:\ v\in V$的正则度为 $\kappa_v,\alpha<\kappa_v\}$，而$\mathcal{S}=\{S_v^\alpha:\ v\in V$的奇异度为 $\kappa_v,\alpha<\kappa_v\}$，它们是 $\mathbb{P}$中的稠密集族。鉴于$|\mathcal{D}|=|V|<\mathfrak{c}$, $|\mathcal{R}|\leq|V|\cdot|V|=|V|<\mathfrak{c}$ 和 $|\mathcal{S}|\leq|V|\cdot|V|=|V|<\mathfrak{c}$，马丁公理保证存在一个滤子 $F\subset\mathbb{P}$，它与 $\mathcal{D}\cup\mathcal{R}\cup\mathcal{S}$中的每个稠密集都有交集。

我们声称函数 $c=\bigcup f$ 定义良好，且其定义域为 V。事实上，对于$f\in F$中的每个 $v\in V$，一旦 $F\cap D_v\neq\emptyset$，就存在 $f\in F$，使得 $v\in\mathrm{dom}(f)$。此外，如果 $g\in F$是另一个满足 $v\in\mathrm{dom}(g)$ 的着色，则存在满足 $h\leq f$的 $h\in F$，g，因为 F 是一个滤子。因此，$f(v)=h(v)=g(v)$，由此得出 c定义良好。

现在，我们将验证 c 是一个不友好划分。为此，任取一个顶点 $v\in V$，并将其度记为 κ_v。若 κ_v 是正则的，令 $\{v_\alpha\}_{\alpha<\kappa_v}$ 为按上述第 2 项所固定的其邻域的枚举。根据 F 的选取，对每个 $\alpha<\kappa_v$，都存在 $f\in F\cap R_v^\alpha$。于是，根据 c 的定义，$c(v_{\beta_0})=f(v_{\beta_0})=0$，且对于某些序数 β_0、$\beta_1>\alpha$，有 $c(v_{\beta_1})=f(v_{\beta_1})=1$。这证明 $\sup\{\alpha<\kappa_v:\ c(v_\alpha)=0\}=\sup\{\alpha<\kappa_v:\ c(v_\alpha)=1\}=\kappa_v$。由于 κ_v 是正则基数，可知在 c 中，v 有 κ_v 个颜色为 0 的邻居，且有 κ_v 个颜色为 1 的邻居。因此，c 在 v 中是不友好的。

最后，假设 v 是一个奇异基数。与上面第 3 项的做法相同，令 $\{v_\alpha\}_{\alpha<\kappa_v}$ 为其邻域的一个枚举，并考虑此前固定的（由正则基数组成的）共尾序列 $\{\gamma_\xi\}_{\xi<cf(\kappa_v}$。那么，给定 $\xi<cf(\kappa_v)$ 和 $\gamma_\xi\leq\alpha<\gamma_{\xi+1}$，再次通过选择 F，可保证存在 $f\in F\cap S_v^\alpha$。这意味着，对于某些 $\alpha<\beta_0$、$\beta_1<\gamma_{\xi+1}$，有 $c(v_{\beta_0})=f(\beta_0)=0$，且 $c(v_{\beta_1})=f(v_{\beta_1})=1$。换言之，$\sup\{\gamma_\xi\leq\alpha<\gamma_{\xi+1}:\ c(v_\alpha)=0\}=\sup\{\gamma_\xi\leq\alpha<\gamma_{\xi+1}:\ c(v_\alpha)=1\}=\gamma_{\xi+1}$，由 $\gamma_{\xi+1}$ 是正则基数可知，这意味着 $|\{\gamma_\xi\leq\alpha<\gamma_{\xi+1}:\ c(v_\alpha)=0\}|=|\{\gamma_\xi\leq\alpha<\gamma_{\xi+1}:\ c(v_\alpha)=1\}|=\gamma_{\xi+1}$。于是我们证明了，在 c 中，对于每个 $\xi<cf(\kappa_v)$，v 至少有 $\gamma_{\xi+1}$ 个颜色为 0 的邻居，且至少有 $\gamma_{\xi+1}$ 个颜色为 1 的邻居。因此，它每种颜色的邻居数都为 $\sup\{\gamma_{\xi+1}:\ \xi<cf(\kappa_v)\}=\kappa_v$。特别地，$c$ 在 v 中是不友好的。

□

推论 2.6. 该陈述 $\varkappa=\aleph_\omega$ 独立于 ZFC $+\aleph_\omega<\mathfrak{c}$。

证明。我们已经论证，$\varkappa = \aleph_\omega$ 与 ZFC $+ \aleph_\omega < \mathfrak{c}$相容。为验证其否定命题的一致性，我们注意到，在 $\varkappa \neq \aleph_\omega$ ZFC $+$ MA $+ \aleph_\omega < \mathfrak{c}$ 下。事实上，若 $G = (V, E)$ 是一个没有有限度顶点的图，且 $|V| = \aleph_\omega < \mathfrak{c}$，那么根据命题 2.5，$G$ 存在一个不友好划分。因此，根据 $\varkappa$ 的定义，$\varkappa \neq \aleph_\omega$。□

现在，我们将在 ZFC$+\aleph_\omega <\mathfrak{c}$下研究命题 $\varkappa = \mathfrak{c}^{+\omega}$及其否定的一致性。假设 $\aleph_\omega < \mathfrak{c}$时的 $\mathfrak{c}^{+\omega} \neq \aleph_\omega$ 情形很有趣。在这项研究中，我们重新审视 Aharoni、Milner 和 Prikry 提出的定理 2.2，并给出一个略作改写的证明，以便得到更方便的表述。

在此之前，给定一个图 $G = (V, E)$ 的部分着色 $c\colon\ D \to 2$，且该图没有有限度顶点，将该函数以不友好的方式扩展到整个图会很方便，也就是说，使其在 $V \setminus D$ 剩余顶点的集合上是不友好的。为此，c 的闭包是按如下方式递归定义的函数 $\overline{c}$：

1. 首先，对每个 $c \in D$，考虑 $\overline{c}(v) = c(v)$，从而 $\overline{c}$ 将是 c的扩展。令$D_0 = \{v \in V \setminus D : |N(v) \setminus D| < |N(v)|\}$ 表示 $V \setminus D$ 中未着色邻居数小于其度的那些顶点。特别地，对于每个顶点 $v \in D_0$，存在一种颜色 $\overline{c}(v) \in 2$，使得在 D 内，v 有 $|N(v)|$ 个颜色为 $1 - \overline{c}(v)$ 的邻居。对所有$v \in D$写作 $\overline{c}(v) = c(v)$，这将$\overline{c}$ 扩展为着色 $\overline{c}$：在 D_0 的所有顶点上均不友好，其中$W_0 := D \cup D_0$。

2. 对每个序数 $\alpha > 0$，考虑对每个满足 $\beta < \alpha$ 的 $v \in W_\beta$，W_β 和 $\overline{c}$（v）均已定义。与处理 D_0 时一样，令

$$D_\alpha = \left\{ v \in V \setminus \left(\bigcup_{\beta<\alpha} W_\beta \right) : \left| N(v) \setminus \left(\bigcup_{\beta<\alpha} W_\beta \right) \right| < |N(v)| \right\}$$

$\overline{c}$ 为几乎所有邻居都已着色的无限度未着色顶点集合。于是，对每个 $v \in D_\alpha$，存在一种颜色 $\overline{c}$（v）$\in 2$，使得其邻居中 $|N$（v）$|$ 的顶点具有颜色$1 - \overline{c}$（v）。如前所述，这定义了一个在 D_α 中不友好的部分着色 $\overline{c}$，其定义域现在记为 $W_\alpha = D_\alpha \cup \bigcup_{\beta<\alpha} W_\beta$.

3. 若 Γ 是满足 $D_\Gamma = \emptyset$ 的最小序数，则此过程定义了一个着色$\overline{c}$: $\bigcup W_\alpha \to 2_{\alpha<\Gamma}$

它扩展了 c，并且对每个 $\alpha < \Gamma$，在 $W_\alpha \setminus D$ 的所有顶点上都不友好。将其定义域记为 $\overline{D}$，注意到根据 Γ 的选取，对于所有 $v \in V \setminus \overline{D}$，$|N$（$v$）$\cap$（$V \setminus \overline{D}$）$| = |N$（$v$）$|$。特别地，$\overline{c} = \overline{c}$。

受到 $\overline{c} = \overline{c}$ 这一事实的启发，我们称部分着色 $c\colon\ D \to 2$ 是闭的，如果 $\overline{c} = c$。考虑到这个定义，我们准备证明下面的陈述：

定理 2.7（[1], 定理 2）。设 $\mathcal{K}$ 是一个无限基数族，使得以下性质成立：

每个其顶点的度为 $\mathcal{K}$ 中某个基数的图都有一个不友好划分。

然后，如果 κ 是一个大于 $\mathcal{K}$中每个成员的正则基数，则每个顶点的度作为 $\mathcal{K} \cup \{\kappa\}$ 的基数的图都存在一个不友好划分。

证明。设 $G=(V,E)$是一个图，满足对每个 $v \in V$有 $|N(v)| \in \mathcal{K} \cup \{\kappa\}$。为了更好地应用我们的假设，设 $M \subset V$为度为 κ 的顶点集， $N = V \setminus M$ 为度在 $\mathcal{K}$中的顶点集。对于任意子集 $X \subset V$，我们将写 $N(X) = \bigcup_{v \in X} N(v)$。然后，以下断言成立：

断言： $|N(C)| < \kappa$对于 $G[N]$的每个连通分量 $C=(V_C, E_C)$。

断言的证明。固定一个顶点 $v \in N(C)$，并对每个 $i \in \mathbb{N}$，记 $N^i(v)$ 为 $= \{x \in N$: 存在一条长度为 i 的路径，从 v 到 x，且该路径包含在 $G[N]\}$ 中； $G[N]\}$ 是由一条含有 i 个 $G[N]$ 的路径与 v 相连的顶点集合。因此，根据连通分量的定义可知，$V_C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} N^i(v)$。此外， $N^1(v) = N(v)$ 的顶点数小于 κ，因为 $v \in N$，且对每个 $i \in \mathbb{N}$，都有 $N^{i+1}(v) \subset \bigcup_{x \in N^i(v)} N^i(x)$。假设 $|N^i(v)| < \kappa$，则可得 $|N^{i+1}(v)| < \kappa$，因为 κ 是正则基数。换言之，对 i 作数学归纳法，我们证明了对每个 $i \in \mathbb{N}$，都有 $|N^i(v)| < \kappa$；随后再次利用 κ 是正则基数这一事实，可得 $|V_C| < \kappa$。

鉴于 $|N(v)| < \kappa$ 对每个 $v \in V_C \subset N$ 都成立，且 $N(C) = \bigcup_{v \in V_C} N(v)$，可得 $|N(C)| < \kappa$，再次利用 κ 是正则基数这一事实。 □

为简化起见，在本证明余下部分中，我们也用 C表示连通分量C 的顶点集 V_C。为了适当地给 G中的一些顶点着色，若两个（不相交的）集合$F_0 \subset M$ 和 $F_1 \subset N$ 满足：对每个 $v \in F_0$ 和 $u \in F_1$，都有$|N(v) \cap F_1| = |N(v)| = \kappa$且 $|N(u) \cap F_0| = |N(u)| < \kappa$，则称它们构成一个二部对（$F_0, F_1$）。换言之，对于 $i \in \{0,1\}$， F_i 中的每个元素在 F_{1-i}中的邻居数都等于其度。注意，该性质对并集封闭，因为如果（F_0', F_1'）是另一个二部对，那么 $F_i \cup F_i'$中的每个元素在 $F_{1-i} \cup F_{1-i}'$中的邻居数都等于其度。于是，我们将由并集 $F_0 = \bigcup F_0'$ 和 $F_1 = \bigcup F_1'$，所描述的极大二部对（F_0, F_1）记作，其中 $\mathbb{BP}$ 是（F_0', F_1'）$\in \mathbb{BP}$（F_0', F_1'）$\in \mathbb{BP}$的所有二部对构成的集合。

G.

该记号诱导出一个自然的不友好部分染色 c': $F_0 \cup F_1 \to 2$，其定义为对每个 $v \in F_0$ 和 $u \in F_1$，都有 $c'(v) = 0$且 $c'(u) = 1$。将其闭包记为 $\overline{c}'$: $\overline{D} \to 2$，可知 $\overline{c}'$ 也是一个不友好部分染色，并且对每个 $v \in V \setminus \overline{D}$，都有 $|N(v) \setminus \overline{D}| = |N(v)|$。因此，只需找到一个从 c: $V \setminus \overline{D} \to 2$ 到 $G[V \setminus \overline{D}]$的不友好部分染色，这样 $c \cup \overline{c}'$ 就是所需的不友好划分。为此，对对 (F_0, F_1) 的选择保证了以下性质：

Claim: Let $S \subset M \setminus \overline{D}$ be any set with $|S| < \kappa$. Then, the set $T = \{u \in N \setminus \overline{D} : |N(u) \cap S| = |N(u)|\}$ has fewer than κ vertices.

断言的证明。定义集合 $A = \{v \in S$: $|N(v) \cap T| < |N(v)| = \kappa\}$ 和 $B = \{u \in T$: $u \in N(x)$，其中 $x \in A\} = \bigcup (N(x) \cap T)$。一旦 $A \subset S$，我们就有 $|A| < \kappa$。于是，根据 A 的定义以及 κ 的正则性， $|B| < \kappa$ by$_{x \in A}$。注意到 $(S \setminus A, T \setminus B)$ 是一个二部对，由于极大二部对 (F_0, F_1) 已经着色，我们得出 $T \setminus B = \emptyset$。因此，$|T| = |B| < \kappa$。

□

为了构造所需的 $G[V \setminus \overline{D}]$着色，固定一个 $M \setminus \overline{D}$的非单射枚举 $\{v_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$，使得每个元素都恰好出现 κ 次，即对每个$v \in M \setminus \overline{D}$，都有 $|\{\alpha < \kappa : \ v_\alpha = v\}| = \kappa$。

然后，我们将根据以下算法递归定义一个不友好划分 c： $V \setminus \overline{D} \to 2$：

1. 我们首先定义 $c(v_0) = 0$。如果 v_0 有一个邻居 $v \in M \setminus \overline{D}$，我们就定义 $c(v) = 1$。否则，一旦 $|N(v_0) \setminus \overline{D}| = |N(v_0)| = \kappa$，就存在 C的一个连通分量，其中 v_0有一个邻居 v。对于每个 $u \in N(C) \cap M \setminus (\overline{D} \cup \{v_0\})$，我们令 $c(u) = 0$。通过将 c 缝合起来，作为$G[C \cup N(C) \setminus \overline{D}]$中定义的着色，我们通过取其闭包将其扩展到一些顶点 $\overline{C} \subset C$。然后，一个顶点$u \in C \setminus \overline{C}$满足 $|N(u) \cap (C \setminus \overline{C})| = |N(u)| \in \mathcal{K}$。因此，根据假设，我们可以通过将$G[C \setminus \overline{C}]$的不友好划分并入，将 c扩展到整个连通分量 C。在对 $(C \cup N(C)) \setminus (\overline{D} \cup \{v_0\})$ 的所有顶点的颜色作相应调整后，我们可以假设 $c(v) = 1$。至此，算法的第一次迭代完成。注意，除了$\overline{D}$中的那些顶点外，我们还为 $G[N \setminus \overline{D}]$ 的一个连通分量以及 M中少于 κ 个顶点着了色，正如第一条断言所保证的那样。

2. 对于某个序数 $\alpha > 0$，记 $S_\alpha \subset M \setminus \overline{D}$ 为 $V \setminus \overline{D}$ 中度为 κ 且截至目前已由此算法着色的顶点。由于 $\alpha < \kappa$，且 κ 是正则基数，根据超限归纳法，我们可以假设 $|S_\alpha| < \kappa$。首先考虑 $c(v_\alpha)$ 已定义的情形。若 v_α 有一个邻居 $v \in M \setminus (\overline{D} \cup S_\alpha)$，则定义 $c(v) = 1 - c(v_\alpha)$。否则， v_α 有 κ 个邻居，它们是 $N \setminus \overline{D}$的元素。此外，一旦 $G[N \setminus \overline{D}]$ 的每个连通分量的基数都小于 κ， v 就有邻居落在其中彼此不同的 κ 个连通分量中。鉴于截至目前着色的此类连通分量少于 κ 个，根据上一条断言，我们可以找到 $G[N \setminus \overline{D}]$ 的一个连通分量 C，使得对于 C中的每个顶点 u，都有 $|N(u) \cap S_\alpha| < |N(u)|$。换言之， C的每个元素在 $V \setminus \overline{D}$中的邻居数与在 D_α 中的邻居数相同：$= V \setminus (\overline{D} \cup S_\alpha)$。仿照第一次迭代的过程，对每个 $u \in N(C) \cap M \cap D_\alpha$，定义 $c(u) = 0$。将 c视为图 $G[C \cup (N(C) \cap D_\alpha)]$,的一个部分着色后，我们通过取闭包，在 C 的某个顶点子集 $\overline{C}$ 上定义 c。因此，每个尚未处理的顶点 $u \in C \setminus \overline{C}$ 都满足$|N(u) \cap (C \setminus \overline{C})| = |N(u)| \in \mathcal{K}$。现在，可以应用假设，通过将该子图的不友好划分并入其中，将 c扩展为 $G[C \setminus \overline{C}]$。同样，改变 $C \cup (N(C) \cap D_\alpha)$ 中所有顶点的颜色后，我们可以假设 $c(v) = 1 - c(v_\alpha)$。最后，若 $c(v_\alpha)$ 尚未定义，只需令 $c(v_\alpha) = 0$。

在这个超限过程结束时， c 已为 M 的每个顶点以及 $G[N]$的某些连通分量定义。在这些连通分量中，这是一个不友好染色：在整个过程中，每个顶点要么被某个闭包着色，要么被假设给出的不友好划分着色。而$M \setminus \overline{D}$中的顶点则在其值由 c 确定之前的 κ 次迭代中，按照其在枚举 $\{v_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$中的指标，获得了一个颜色相反的邻居。因此， $M \setminus \overline{D}$ 中的每个成员都有 κ 个颜色相反的邻居，这验证了 c 在这些顶点上是不友好的。

然而，仍需为 $G[N \setminus \overline{D}]$ 的某些连通分量中的顶点定义颜色；这些连通分量尚未通过上述步骤进行分析。如果 C 是其中一个连通分量，那么与之前一样，我们将把着色c视为在 $G[C \cup N(C)]$ 上的部分定义着色。事实上，它仅在 $N(C) \cap M$中有定义。在该连通分量内取其闭包后， c 便在某个顶点集 $\overline{C} \subset C$ 上有定义，因此在这些顶点上是不友好的。同样，$u \in C \setminus \overline{C}$中的每个成员都满足 $|N(u) \cap (C \setminus \overline{C})| = |N(u)| \in \mathcal{K}$。因此，可以应用该假设，将 c 定义为 $G[C \setminus \overline{C}]$的不友好划分，从而为整个连通分量 C着色。

□

推论 2.8。命题 $\varkappa = \mathfrak{c}^{+\omega}$ 独立于 ZFC $+ \aleph_\omega < \mathfrak{c}$。

证明。根据马丁公理（它与 ZFC $+ \aleph_\omega < \mathfrak{c}$相容），由命题保证，每个没有有限度顶点且顶点数少于 $\mathfrak{c}$ 的图都存在不友好划分

2.5。由于在马丁公理下，$\mathfrak{c}$ 是正则基数，根据定理 2.7，我们实际上可以得出：顶点数至多为 $\mathfrak{c}$ 且所有顶点的度均为无限的图都存在不友好划分。记满足 $\mathfrak{c} = \aleph_\alpha$的序数为$\alpha > \omega$ 。注意到后继基数都是正则的，定理 2.7 还表明，每个顶点数至多为 $\aleph_{\alpha+n}$ 且所有顶点的度均为无限的图都存在不友好划分。这意味着，没有不友好划分且含有有限度顶点的图至少有 $\mathfrak{c}^{+\omega} = \aleph_{\alpha+\omega}$ 个顶点。由此可见，命题 $\varkappa = \mathfrak{c}^{+\omega}$ 与 ZFC $+ \aleph_\omega < \mathfrak{c}$相容；定理 2.1 给出的 Milner and Shelah 构造具有这样的大小。

另一方面，Milner 和 Shelah 用于证明定理 2.4 的公理也与命题 $\aleph_\omega < \mathfrak{c}$ 相容。因此，与 ZFC 相容的是 $+ \aleph_\omega < \mathfrak{c}$：存在一个顶点数少于 $\mathfrak{c}^{+\omega}$ 的图，其中所有顶点的度都是无限度，但该图不存在不友好划分。也就是说，命题 $\varkappa \neq \mathfrak{c}^{+\omega}$ 也与 ZFC $+ \aleph_\omega < \mathfrak{c}$ 相容。

因此，命题 $\varkappa = \mathfrak{c}^{+\omega}$ 独立于 ZFC $+ \aleph_\omega < \mathfrak{c}$。 □

因此，推论2.6和2.8共同证明了定理 1.1。换言之，如果我们要排除有限度顶点，那么即使已知基数 $\aleph_\omega$ 和 $\mathfrak{c}^{+\omega}$ 不同，也无法精确确定不存在不友好划分的图的最小规模。

3 致谢

两位作者感谢 FAPESP 提供的经费支持。第一作者获得了编号为2019/22344-0和2023/00595-6的资助，第二作者则获得了编号为2021/13373-6的资助。

参考文献

[1] R. Aharoni、E. C. Milner 和 K. Prikry。《图的不友好划分》。《组合理论杂志 B辑》，50(1):1–10，1990年。[2] R. Cowen 和 W. Emerson。《图的比例着色》。未发表。[3] Klaas Pieter Hart。《特征为 ω_1 的超滤子》。《符号逻辑杂志》，54(1):1–15，1989年。[4] W. Just 和 M. Weese。《发现现代集合论II：每位数学家的集合论工具》，《数学研究生系列》第18卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997年。[5] E. C. Milner 和 Saharon Shelah。《没有不友好划分的图》。载于 A. Baker、B. Bollob´as 和 A. Hajnal 编，《致敬 Paul Erd ¨os》，第373–384页。剑桥大学出版社，1990年。