arXiv:2304.02582v1 [math.DG] 5 Apr 2023

第一陈类消失的 Vaisman 流形

NICOLINA ISTRATI

Abstract. 第一陈类消失的紧致 Vaisman 流形根据 Bott-Chern 类的符号分为三类。我们证明，Bott-Chern 类非正的 Vaisman 流形具有典范度量，是准正则的，并且在变形下保持稳定。我们还证明，卡拉比–丘 Vaisman 流形满足一种 Beauville-Bogomolov 分解，并且其典范丛是挠的。最后，我们证明了一个关于复流形的自同构群在变形下行为的一般性结果。

1. 引言

K¨ahler 流形中第一陈类消失者具有显著性质。它们具有典范度量 [Ya78], ，即唯一的 Ricci 平坦 K¨ahler 度量，且其上同调类为给定类。经过有限覆盖后，它们分解为环面与典范丛平凡的单连通流形的乘积 [Be84], ，因此特别地，它们的典范类是挠的。最后，它们在小变形下保持稳定，并且具有光滑的万能 Kuranishi 空间。

所有这些性质一旦离开凯¨勒范畴便不再成立。首先，正如Tosatti [To15], 所倡导的，在这种一般性下，合理的要求是第一陈类在 Bott-Chern 上同调中消失，而 Bott-Chern 上同调细化了 de Rham 上同调。我们将这样的流形（非凯¨勒）称为卡拉比-丘流形。在这种情况下，仍然可以证明某些特殊度量的存在性，它们是 Monge-Amp`ere 方程的解 [TW10], 然而，它们的唯一性不再能由拓扑数据决定。这一现象与这样的事实有关：这类流形的自同构群的单位分支不再是紧的，因此不可能成为等距变换群——例如，所有复可平行化幂零流形都具有这种情形。

非 K¨ahler卡拉比-丘 流形也不具有全纯挠的典范丛，正如复平行化可解流形的某些变形所说明的那样 [Na75, 例 III-(3b)], [To15，例 3。2]。特别是，即使对于$\partial\partial$-流形，也不应期待任何合理的 Beauville-Bogomolov 分解，即使其典范丛平凡，这一点已在 [ACRT18，例 2。14]。最后，典范丛平凡的流形可能具有受阻的 Kuranishi 空间 [Ro11]。

另一方面，Vaisman 流形 [Va80]是Hermitian 流形的一类，它们仍然与凯¨勒世界相当接近。事实上，尽管它们不再满足$\partial\partial$-引理，但它们仍具有良好的上同调性质。更重要的是，它们具有一个全纯的一维横截面凯¨勒叶状结构。本文的主要目标之一是证明，Vaisman-Calabi-Yau 流形具有类似于凯¨勒流形的性质。

设 $X = (M, J)$ 是一个维数为 $\dim_{\mathbb{C}} X > 1$ 的紧复流形。若 X 上具有基本形式 Ω 的 Hermitian度量满足以下条件，则称其为 Vaisman度量。

持有:

$$d\Omega = \theta \wedge \Omega, \quad \nabla\theta = 0$$

其中 θ 是*Lee* 形式，它由度量唯一确定，而 ∇ 是 Levi-Civita 联络。与 θ 度量对偶的向量场是实全纯且为 Killing 向量场[Va82], , 因此生成一个复一维子群 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$，该子群与所选的 Vaisman 度量无关 [Ts97]。 X 若 G 是紧致的，则称其为准正则；此时复空间 X/G 具有自然的复射影轨形结构。

我们讨论的出发点是这样一个观察：第一陈类在 de Rham 上同调中消失的紧致 Vaisman 流形可分为三类。事实上，根据 [IO22], 自然映射的核

$$H^{1,1}_{BC}(X,\mathbb{R}) \to H^2(X,\mathbb{R}) \tag{1}$$

是一维的，由横向 K¨ahler 度量的类生成。因此，具有 $c_1(X) = 0$ in $H^2(X, \mathbb{R})$ 的 Vaisman 流形有一个定义良好的符号，取决于 $c_1^{BC}(X) = 0$ 或 $\pm c_1^{BC}(X)$ 是否可由横向 K¨ahler 类表示；我们将其记为 $\pm c_1^{BC}(X) > 0$。这三类可通过其 Kodaira维数 kod(X) 加以区分:

命题 A. 设 X 为 n 维紧致 *Vaisman* 流形，满足 $c_1(X) = 0 \in H^2(X, \mathbb{R})$。

(1) 若 $c_1^{BC} > 0$，则 $\mathrm{kod}(X) = -\infty$。
(2) 若 $c_1^{BC} = 0$，则 $\mathrm{kod}(X) = 0$。*(3)* 若 $c_1^{BC} < 0$，则 $\mathrm{kod}(X) = n - 1$。

我们专注于研究两类 $c_1^{BC}(X) = 0$ 和 $c_1^{BC}(X) < 0$，它们的行为非常相似。首先，我们得到了 Aubin-Yau定理的类似版本，产生具有规定拓扑数据的典范 Vaisman度量。注意，在非 K¨ahler 情形下，度量 Ω 的 Ricci曲率的角色由 Chern-Ricci 形式 $\rho_\Omega := -i\partial\bar{\partial}\log\det\Omega$ 扮演，它表示 $2\pi c_1^{BC}(X)$。此外，我们有一个自然映射

$$\psi : H^1(X,\mathbb{R}) \to H^{1,1}_{BC}(X,\mathbb{R}), \quad [\theta] \mapsto [-dJ\theta]_{BC}.$$

定理 B. 设 X 为具有 $c_1(X) = 0$ 的紧致 *Vaisman* 流形，并设 $\tau \in H^1(X)$ 表示 X 上某个 *Vaisman* 度量的 *Lee* 形式。

(1) 如果 $c_1^{BC}(X) = 0$, 则存在唯一的具有 *Lee* 类 τ 和指定总体积的 *Chern-Ricci* 平坦 *Vaisman* 度量。*(2)* 如果 $c_1^{BC}(X) < 0$ 且 $\tau \in \psi^{-1}(-2\pi c_1^{BC}(X))$，则存在唯一的 *Vaisman* 度量 $(\Omega\ \theta)$ 具有 $\theta \in \tau$, $\rho_\Omega = dJ\theta$ 和指定总体积。

注意，在负情形中，曲率条件 $\rho_\Omega = dJ\theta$ 起着爱因斯坦方程的作用，且 $\psi(\tau) = -2\pi c_1^{BC}(X)$ 是确保这种指定陈-黎奇曲率的必要上同调条件。同时，$\psi^{-1}(-2\pi c_1^{BC}(X))$ 总是包含一个 Lee 类，因此典范度量确实存在。

与典范度量的存在性相关，我们还得到了这些流形的一个刚性结果:

定理 C. 设 X 为具有 $c_1^{BC}(X) \leq 0$ 的紧致 *Vaisman* 流形。则$\mathrm{Aut}_0(X)$ 是紧致一维的，且 X 是准正则的。

对于 Calabi-Yau Vaisman 流形，我们进一步得到了Beauville-Bogomolov 分解的一个类似结果（参见定理 5.3 以获取更精确的表述）。注意,

Vaisman 流形无法全纯地分解为复流形的乘积[Va82，定理 5。1], 因此，以下结果已经是所能期望的最佳结果。

定理 D. 设 X 是一个紧 *Vaisman-Calabi-Yau* 流形。则存在 X 的一个有限 ´*étale* 覆盖，它是一个定性主椭圆 *orbifold* 束，底空间为轨形 Y，且该轨形是一个阿贝尔簇与一个典范除子平凡的单连通 *orbifold* 的乘积。特别地， X 具有全纯扭典范丛。

关于变形理论，需要指出的是，Vaisman 条件在变形下并不保持，准正则条件在 Vaisman 变形下也不保持。这两种现象都很常见，在 Hopf 曲面上便已显现；特别是，Hopf 曲面满足 $c_1^{BC}(X) > 0$。尽管如此，事实证明，这只是对称性过多所造成的结果，参见推论3.3。特别是，条件 $c_1^{BC}(X) \leq 0$ 足够稳健，因此：

定理 E. 紧致 *Vaisman* 流形 X 的任何小变形 X_t，若带有$c_1^{BC}(X) \leq 0$，则仍为 *Vaisman* 流形，且带有 $c_1^{BC}(X_t) \leq 0$。

该陈述由我们证明的一个更一般的结果推出，该结果具有独立的意义：

定理 F. 设 X 为紧复流形，且设 $H \subset \mathrm{Aut}_0(X)$ 为紧复子群。则对于 X 的任何小变形 X_t，有$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Aut}(X_t) \geq \dim_{\mathbb{C}} H$。特别地，若 $\mathrm{Aut}_0(X)$ 是紧的，则对于 X 的任何小变形 X_t，$\mathrm{Aut}_0(X_t)$ 是 $\mathrm{Aut}_0(X)$ 的小变形。

这首先通过注意到群 H 必须在相关上同调群上平凡作用来证明。其次，利用后者通过 Hodge 理论的描述，证明 H 也在 Kuranishi空间 上平凡作用。

定理 B 和 C对零情形和负情形以不同方式证明。Vaisman Calabi-Yau流形上典范度量的存在性由 Ornea-Verbitsky 关于 Vaisman度量 的 Yau 定理 [OV22A，定理 4.1], 推出，该定理基于 El Kacimi-Alaoui 的横向 Yau 定理[E90，第 3.5 节。5]。作为典范度量唯一性的推论，我们立即得到此类流形的群 $\mathrm{Aut}_0(X)$ 是紧的，然后通过局部共形 K¨ahler 流形自同构群的描述 [Is19，推论 1],推出它是一维的。

在负值情形下，我们首先证明此类流形是准正则的。这通过运用涉及 Weyl 联络和 Chern 联络的 Weitzenb¨ock 技巧，并再次使用横向 Yau 定理来完成 [E90，第 3.5 节。5]。然后我们利用 Aubin-Yau定理的轨形版本 [Fa18，定理 1。3]来推导典范度量的存在性。

特别是，定理 C引领我们进入复轨形的领域。在定理 2.4中，我们精确阐明了拟正则Vaisman流形与射影轨形之间的关系。粗略地说，前者对应于后者上的正椭圆轨形丛，并且 c_1^{BC}的符号在这种对应下保持不变。

然而，轨形 X/G 通常并非 纯粹的，其意义是 [Ca04], 即，轨形结构并不单由 X/G 的复结构决定， $\mathbb{Q}$-除子 D也决定于与 X 的余维 1 子空间相关的 G，在该处其作用并非自由的。尽管如此，在卡拉比–丘情形下，我们可以证明，在经过

到一个有限覆盖后，确实可以得到一个作为商空间的纯轨形。这建立在轨形版本的 Cheeger-Gromoll 定理之上 [BZ94，定理 2] 以及 Kollar 的一个结果 [Ko05，命题 10。2]特别地，随后我们可以使用纯 Calabi-Yau 轨形的 Beauville-Bogomolov 分解 [Ca04，定理 6。4] 以获得定理D

K¨ahler 几何中的 Fano 情形向来极为困难，因此本文不讨论这一情形 $c_1^{BC} > 0$ 。只需指出，在这种情况下，上述结果均不成立。顺带一提，Einstein-Weyl 条件 [Ga95],可视为 Calabi-Yau 条件的共形度量类比，它蕴含 $c_1^{BC} > 0$。

对于局部共形 K $c_1(X) = 0$ 或 $c_1^{BC}(X) = 0$ ähler 流形，更一般地研究条件¨很有意义。然而，问题之一在于，我们尚未充分了解局部共形 K¨ähler 流形的上同调，因此在这一更一般的情形下，映射 (1) 的核尚不清楚。此外，我们尚未发现任何非 Vaisman Calabi-Yau 例子。若此类例子存在，即便仅从局部共形 K¨ähler 几何的角度来看，也会非常有趣。

本文组织如下。在第 2 节，我们回顾关于复轨形的一些主要事实，遵循 [BG 07]，并建立这些与拟正则 Vaisman 流形之间的关系。第 3 节处理复流形及其自同构群的变形。在第 4 节，我们引入 Vaisman 流形上的 $c_1 = 0$条件，并解释此类流形分裂为前述三类。在第5 节，我们证明上述所有关于 Calabi-Yau Vaisman 流形的结果。特别地，我们还在第 5.3 节获得此类流形基本群的描述，以及第一 Betti 数上的障碍。第 6 节处理负情形。最后，在第 7 节我们给出一些具有 $c_1 = 0$ 的 Vaisman 流形的显式例子。

约定/记号。 对于给定的局部共形凯勒度量 g，Ω 表示其基本形式， θ 其 Lee 形式， B 是 θ 的度量对偶，即 Lee 向量场，我们记为 $\omega_0 := -dJ\theta$。对于 Vaisman 流形 X， $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ 是由 Lee 向量场生成的复李群。 $\Delta \subset \mathbb{C}$ 将表示单位圆盘。

致谢。本项目始于与 Alexandra Otiman 的一系列启发性讨论，对此我深表感激。我也非常感谢 S¨onke Rollenske 进行的有益讨论。

我获得了研究与创新部 CNCS - UEFISCDI 项目 PN-III-P1-1.1-TE-2021-0228（属于 PNCDI III）的部分资助，以及 DFG 项目 509274422 的资助。

2. Complex orbifolds and Vaisman manifolds

本节回顾 Vaisman 流形和复轨形的主要方面，并着重探讨这两种几何之间的关系。关于局部共形 K¨ahler 几何和 Vaisman 几何的详尽介绍，读者可参阅 [OV22B]，；至于轨形理论，我们遵循 [BG07，第 4]。

定义 2.1. 复流形 $X = (M, J)$ 上的 *Hermitian*度量 g称为局部共形 *K¨ahler*（*LCK*）度量，若其基本形式 $\Omega := g(J\cdot, \cdot)$ 满足可积性条件

$$d\Omega = \theta \wedge \Omega$$

其中 θ 是一个闭*1*-形式，称为该度量的 *Lee* 形式。若进一步有 $\nabla^g\theta = 0$，其中 ∇^g 是 *Levi-Civita* 联络，则该度量称为 *Vaisman* 度量。

若 de Rham上同调类 $\tau \in H^1(X, \mathbb{R})$ 可以由某个 LCK 度量的 Lee 形式表示，则称其为 *Lee* 类 。我们用 Lee$(X) \subset H^1(X, \mathbb{R})$ 表示所有此类的集合。

Vaisman度量在其共形类中唯一（相差一个正数常数的倍数）。此外，范数 $||\theta||$ 为常数。如果进一步要求 $||\theta|| = 1$，则称 Vaisman度量为标准化的 。在这种情况下，基本形式满足

$$\Omega = -dJ\theta + \theta \wedge J\theta. \tag{2}$$

当$\dim_{\mathbb{C}} X > 1$时，LCK度量的 Lee 形式由该度量唯一确定。我们将 B 称为与 θ 度量对偶的*Lee* 向量场。容易看出，如果LCK 度量的 Lee 向量场是 Killing 的，那么该度量就是 Vaisman 度量。反之，对于 Vaisman度量 g，B 和 JB 都是 Killing 的实全纯 [Vaisman82], ，因此它们生成一个复一维子群 $G \subset \mathrm{Aut}(M, J, g)$，我们将在下文称之为该流形的*Lee* 群。事实上，根据 [Ts97，推论 2，7], 群 G 与 Vaisman度量无关。

该群 G 在 X上局部自由作用，其轨道定义了一个叶状结构 $\mathcal{F}$，称为典范叶状结构。此外，任何 Vaisman度量（Ω θ）都有一个相应的横向凯¨勒度量 ω_0 ： $= -dJ\theta$ 相对于 $\mathcal{F}$ [Va82]而言。如果 G 是紧的，则 X 称为准正则*Vaisman*流形。在这种情况下，商空间 X/G继承一个自然的复轨形结构。此外，如果 G 在 X上自由作用，那么 X 称为正则*Vaisman*流形，而商空间 X/G 是一个光滑复流形。

我们回顾一下，维数为 n 的复轨形 $\mathcal{Y} = (Y, \mathcal{U})$是一个仿紧Hausdorff空间 Y，其上赋予了一个轨形图册的等价类 $\mathcal{U}$，具体如下。对于每个 $x \in Y$，存在一个邻域 $U \subset Y$ 和 $\tilde{}$ $\tilde{}$一个orbifold 图表（U, Γ, ϕ） $\in \mathcal{U}$，其中 $U \subset \mathbb{C}^n$ 是一个开集， Γ 是一个有限群$\tilde{}$ $\tilde{}$，由 U的双全纯映射组成，并且映射 $\phi : U \to U$ 是连续的、 Γ-不变的，且$\tilde{}$诱导出一个同胚$U/\Gamma \cong U$。此外，这些轨形图还满足自然的相容性条件。也就是说，对于被两个orbifold 图表 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$（U, Γ_U, ϕ_U）和（V, Γ_V, ϕ_V）覆盖的任意点 $x \in Y$，存在第三个orbifold图表（W, Γ_W, ϕ_W） $\in \mathcal{U}$$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$，满足 $x \in \phi_W$（W） $\subset \phi_U$（U）$\cap \phi_V$（V），以及嵌入 λ_{WU}、 λ_{WV}，使得下图交换

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{U} & \xleftarrow{\lambda_{WU}} & \tilde{W} & \xhookrightarrow{\lambda_{WV}} & \tilde{V} \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_U} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_W} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_V} \\ \phi_U(\tilde{U}) & \longleftarrow & \phi_W(\tilde{W}) & \hookrightarrow & \phi_V(\tilde{V}). \end{array} \tag{3}$$

如果两个轨形图册 $\mathcal{U}$、 $\mathcal{V}$ 具有共同的细化 $\mathcal{W}$、$\tilde{}$ $\tilde{}$，则称它们是等价的；这意味着，对于位于 $x \in Y$ 的任意图表 (U、 Γ_U、 ϕ_U) $\in \mathcal{U}$、(V、 Γ_V、 ϕ_V) $\in \mathcal{V}$，都存在位于 x 的第三个图表 (W、 Γ_W、 ϕ_W) $\in \mathcal{W}$，并带有满足 (3) 的嵌入 λ_{WU}、 λ_{WV}。任意轨形图册都可以细化为唯一的极大轨形图册。如果某个轨形结构可以由一个轨形图册表示，且其中所有群 Γ 都是平凡的，即可以由一个流形图册表示，则称该轨形结构是平凡的。

对于每个 $x \in U$以及元素 处选取一个轨形图表 (U, Γ, ϕ) $\in \mathcal{U}$，$\tilde{x} = \{g \tilde{\in} \Gamma \mid g\tilde{x} = \tilde{x}\} \subset \Gamma$ 的共轭类仅取决于

作用于 x 上以及 $\mathcal{U}$的等价类，其任意一个代表元都称为处的局部一致化群。根据切片定理，存在一个全纯坐标变换，将 $\tilde{x}$ 映射到 $0 \in \mathbb{C}^n$ ，并将 Γ_x 映射到 $U(n)$的一个子群。我们通常默认所处理的是这样的线性化轨形图表。

特别地，复轨形结构在 Y 上自然诱导出正规复空间结构：将全纯函数结构层 $\mathcal{O}_Y$定义为其茎为 $\mathcal{O}_{Y,\ x} = \mathcal{O}^{\Gamma}_{\tilde{U},\ 0}$；也就是说，在 x 处的局部全纯函数是 $(U, 0)$ 上的 Γ-不变˜ ˜局部全纯函数，其中 U 是 x 处的一个 orbifold 图表。然而， Y 的底层解析结构并不能确定轨形结构 $\mathcal{Y}$。事实上，由于 Y 是一个正规空间，其奇异轨迹 Y_{sing} 的余维至少为 2，而轨形奇异轨迹

$$\Sigma^{orb}(\mathcal{Y}) := \{x \in Y \mid \Gamma_x \neq \{1\}\}$$

确实满足 $Y_{sing} \subset \Sigma^{orb}(\mathcal{Y})$，但如果某个局部一致化群包含反射，则该包含关系为严格包含。 $\Sigma^{orb}(\mathcal{Y})$ 的余维一部分由分支除子编码：

$$D := \sum_{\alpha} \left(1 - \frac{1}{m_\alpha}\right) D_\alpha \tag{4}$$

其中 D_α 遍历包含在 $\Sigma^{orb}(\mathcal{Y})$ 中的所有不可约魏尔除子；对于每个 α, m_α :=，有 $\gcd_{x \in D_\alpha} |\Gamma_x|$。 $\mathbb{Q}$-除子 D 记录了所有˜ ˜局部分歧覆盖 $\phi\colon U \to U$ 在 $(U, \Gamma, \phi) \in \mathcal{U}$ 中的分歧轨迹。因此，轨形结构 $\mathcal{Y}$ 完全由二元组 (Y, D) 决定，其中 Y 现在视为复空间，而 D 是 Y 上的一个 $\mathbb{Q}$- 除子。如果 $D = \emptyset$，则按照 [Ca 04] 的说法，该轨形 $\mathcal{Y}$ 也称为纯轨形。

轨形上的一个张量 $\mathcal{Y}$ 是在 $Y - \Sigma^{orb}(\mathcal{Y})$ 上的张量 T，使得对于每个轨形˜ ˜坐标图 (U, Γ, ϕ)， $\phi^* T$都可以延拓为 U 上的一个张量。关于层和丛，在轨形上现在有两种不同的概念。一方面，在复空间 Y 上有通常的层、丛和除子理论。例如，典范除子 K_Y 定义为 Y 上的任意 Weil 除子；将其限制到正则轨迹 Y_{reg} 后，它对应于线丛 $\Omega^n_{Y_{reg}}$。

另一方面，人们还有更丰富的轨形层和轨形丛范畴。这些是生活在均匀化图表上的对象集合，但通常不对应于 Y上的任何对象。因此，一个轨形层，分别是一个轨形丛 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{Y}$ 上由 Γ-等变层的集合给出，分别是˜ ˜丛 $\mathcal{E}_{\tilde{U}}$在 U上，对于每个$(U, \Gamma, \phi) \in \mathcal{U}$，它们与任何轨形图的变化兼容。特别地，集合$(\mathcal{O}_{\tilde{U}})_{\tilde{U} \in \mathcal{U}}$定义了轨形层 $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$，˜集合$(TU)_{\tilde{U} \in \mathcal{U}}$定义了切轨形丛 $T\mathcal{Y}$，而集合$(K_{\tilde{U}})_{\tilde{U} \in \mathcal{U}}$定义了典范轨形层或轨形丛 $K^{orb}_{\mathcal{Y}} = \det T\mathcal{Y}^\vee$. 轨形层的一个截面是每个orbifold 图表上 Γ-不变截面的兼容集合。

注意，任意除子 W 在 Y 上都通过每个分歧覆盖映射拉回为 $\mathcal{Y}$上的轨道除子，我们形式上记作 $\phi^* W$。根据Hurwitz公式 [BG07，命题4.4.15]:

$$K^{orb}_{\mathcal{Y}} \equiv \phi^*(K_Y + D) = \phi^* K_Y + R \tag{5}$$

其中 R 是分歧轨道除子。

若 H是一个复李群，且 $\mathcal{P} = (P_{\tilde{U}})_{\tilde{U} \in \mathcal{U}}$是 $\mathcal{Y}$ 上的主全纯 H轨形丛，则 $\mathcal{P}$ 的全空间具有自然的轨形结构。其

底层复空间 P由图表 $\mathcal{P}_{\tilde{U}}/\Gamma$ 粘合而成，而轨形图表则由 $(P_{\tilde{U}},\ \Gamma,\ P_{\tilde{U}} \to P_{\tilde{U}}/\Gamma)$ 诱导得到。注意，Γ 作用于 $P_{\tilde{U}}$ 在 0 处的纤维上，从而定义了一个群同态 $h_{\tilde{U}}$: $\Gamma \to H = \mathrm{Aut}(P_{\tilde{U},\ 0})$。特别地，当且仅当 $h_{\tilde{U}}$是单射时，Γ 在 $P_{\tilde{U},\ 0}$上的作用是自由的；此时，自然的轨形图册可细化为 P 的平凡流形图册。最后，注意自然的局部投影定义了一个全局轨形纤维化映射 $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{Y}$。

随后可以通过切片定理证明：

定理 2.2. 设 X 是任意复流形，H 是一个以全纯、适当且局部自由的方式作用于 X 上的复李群，则复空间 $Y = X/H$ 自然带有复轨形结构 $\mathcal{Y}$，使得 X 是 $\mathcal{Y}$ 上一个 H-主轨形丛的底层复流形。反过来，若 $\mathcal{P}$ 是复轨形 $\mathcal{Y}$ 上任意全纯的 H-主轨形丛，且定义映射 $(h_{\tilde{U}})_{\tilde{U}\in\mathcal{U}}$ 是单射，则全空间 P 是光滑复流形，且 $\mathcal{P}$ 的轨形结构是平凡的。

由于轨形 $\mathcal{Y} = (Y,\ \mathcal{U})$ 上的轨形丛和轨形层实际上并不对应于 Y 上的层，因此不能直接使用 Y 上的上同调工具来研究它们。相反，可以为 $\mathcal{Y}$ 定义一个分类空间 $B\mathcal{Y}$，轨形层和轨道上同调自然地存在于其中。回想一下，经过对 $\mathcal{U}$ 作适当细化后，所有群 Γ 都可以看作是 $U(n)$ 的子群。固定 $U(n)$ 的一个分类空间 $BU(n)$，以及一个万能的 $U(n)$-丛 $EU(n) \to BU(n)$。然后将 CW复形 $B\mathcal{Y}$ 定义为具有局部坐标图

$$\tilde{U} \times_\Gamma EU(n)$$

对于每个（$U,\ \Gamma,\ \phi$）$\in \mathcal{U}$，其中 Γ通过其自然嵌入 $U(n)$ 作用于 $EU(n)$。此外，该分类空间还带有一个自然的连续映射

$$cl : B\mathcal{Y} \to Y.$$

注意，对于均化群为 Γ 的点，映射 cl 的纤维是一个 Eilenberg-MacLane空间 $K(\Gamma,\ 1)$。

在 $B\mathcal{Y}$ 上，现在可以在图表 $U \times_\Gamma EU(n)$ 中定义全纯对象，即定义在 $U \times EU(n)$ 上、具有 Γ-不变性、关于 U 变量全纯且关于 $EU(n)$-变量光滑的对象，也就是说，在 $EU(n)$ 的任意有限模型上光滑。通过这种方式，可以证明 $B\mathcal{Y}$ 上的全纯丛与 BG07 上的轨形丛一一对应，参见 BG07，定理 4.3。11]。特别地，轨形层 $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ 对应于 $B\mathcal{Y}$ 上的全纯函数层，我们仍将其记作 $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$。

在 $B\mathcal{Y}$ 上有通常的上同调解释。例如，人们将轨道同伦群定义为$\pi_i^{orb}(\mathcal{Y}) := \pi_i(B\mathcal{Y})$。对于环 R，$\mathcal{Y}$ 的轨道上同调系数在 R 中定义为

$$H^\bullet_{orb}(\mathcal{Y}, R) := H^\bullet(B\mathcal{Y}, R)$$

且若 R是一个域，则映射 $cl^* : H^\bullet(Y, R) \to H^\bullet_{orb}(\mathcal{Y}, R)$ 是一个同构。

若 $G = \mathbb{C}/\Lambda$ 是一维紧复环面，考虑 $B\mathcal{Y}$ 上的 G值全纯函数层 $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(G)$，以及 $\mathcal{O}^*_{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ 不消失的全纯函数层。那么根据经典理论，有

$$H^1_{orb}(\mathcal{Y}, \mathcal{O}^*_{\mathcal{Y}}) := H^1(B\mathcal{Y}, \mathcal{O}^*_{\mathcal{Y}}) \cong \mathrm{Pic}^{orb}(\mathcal{Y})$$

其中$\mathrm{Pic}^{orb}(\mathcal{Y})$ 表示在 $\mathcal{Y}$上的全纯直线轨丛的同构类。同样，

$$H^1_{orb}(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(G)) \cong \{\text{holomorphic } G\text{-principal orbi-bundle on } \mathcal{Y}\}/_\cong.$$

特别地， $B\mathcal{Y}$ 上的层的正合序列

$$0 \longrightarrow \Lambda_{B\mathcal{Y}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(G) \longrightarrow 0$$

将 a G-主 orbifold 丛的整系数陈类定义为上同调中的诱导连接映射

$$c^{\mathbb{Z}} : H^1_{orb}(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(G)) \to H^2_{orb}(\mathcal{Y}, \Lambda) \cong H^2_{orb}(\mathcal{Y}, \mathbb{Z}) \otimes \Lambda.$$

定义2.3。 我们称主 *orbifold*丛 $\mathcal{P} \in H^1_{orb}$（$\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$（$G$）为秩一，如果存在一个元素 $a \in \Lambda$ 使得

$$c^{\mathbb{Z}}(\mathcal{P}) = c_{\mathrm{fr}} \otimes a + c_{\mathrm{tors}} \tag{6}$$

其中 $0 \neq c_{\mathrm{fr}} \in H^2_{orb}(\mathcal{Y}, \mathbb{Z})$ 是一个非挠元，而 c_{tors} 是一个挠元。我们进一步称秩一主 *orbifold* 丛 $\mathcal{P}$ 是定性的，如果 $c(\mathcal{P})$ 的像经由自然映射

$$H^2_{orb}(\mathcal{Y}, \Lambda) \to H^2_{orb}(\mathcal{Y}, \mathbb{C}) \cong H^2(Y, \mathbb{C})$$

可以在 $\mathcal{Y}$ 上表示为一个相差一个符号的 *K¨ahler* 度量。

通过这一描述，可以证明，与光滑情形完全相同（参见 [Va82，定理 3。5]，[Ts99，第 4]，[Is19，命题 4]），拟正则 Vaisman 流形对应于定性 G-轨形丛。以下内容也在 [OV22B，定理 11。9] 中以不太精确的形式得到。

定理 2.4. 设 $G = \mathfrak{g}/\Lambda$ 是一维紧复环面。假设 $\mathcal{Y}$ 是紧复轨形，且 $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{Y}$ 上的全纯 G-主轨形丛。那么， $\mathcal{P}$ 的全空间存在 *Vaisman*度量，当且仅当 $\mathcal{P}$ 是定性形式。

在此情形下，存在有限轨形覆盖 $q : \mathcal{Y}' \to \mathcal{Y}$，以及 $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^{orb}(\mathcal{Y}')$，使得 $q^*\mathcal{P} \cong (\mathcal{L} - 0_{\mathcal{L}})/\langle\lambda\rangle$，其中 $\lambda \in \mathbb{C}^*$ 满足 $|\lambda| \neq 1$，并通过对 $\mathcal{L}$ 的乘法作用。

证明。由于证明与光滑情形类似，我们仅略述证明。首先假设 G 轨形丛 $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{Y}$ 的全空间存在 Vaisman度量 $(\Omega\ \theta)$，其 Lee 向量场为 B。这对应于 $P_{\tilde{U}}$ 上每个 orbifold 图表 $U \in \mathcal{U}$的一组 Γ-不变对象 $\tilde{}(\Omega\, \tilde{U}, \theta_{\tilde{U}}, B_{\tilde{U}})$。固定这样一个图表。该度量是 G-不变的， $\mathfrak{g}$ 由 $B_{\tilde{U}}$ 在 $\mathbb{C}$ 上生成，并且 [Is19，命题 4] 的证明表明，Lee 形式确定了主丛 $P_{\tilde{U}}$ 上一个 Γ-不变的联络形式 $\alpha_{\tilde{U}} \in \mathcal{A}^1_{P_{\tilde{U}}} \otimes \mathfrak{g}$，其曲率具有形式 $d\alpha_{\tilde{U}} = dJ\theta_{\tilde{U}} \otimes JB_{\tilde{U}}.\tilde{}$由于 $-dJ\theta_{\tilde{U}} = \pi^*\omega_{\tilde{U}}$ 对应于 U 上唯一的 K¨ahler 形式 $\omega_{\tilde{U}}$，集合 $(\omega_{\tilde{U}})\ \tilde{U} \in \mathcal{U}$ 对应于 $\mathcal{Y}$ 上一个全局 K¨ahler 度量 ω，使得

$$c(\mathcal{P}) = [-\omega \otimes JB] \in H^2(\mathcal{Y}, \mathfrak{g}) = H^2(\mathcal{Y}, \mathbb{C}).$$

因此 $\mathcal{P}$ 是定性的。

特别注意， $-JB$ 对应于 Λ 的一个整元素，因此它是唯一确定的不可分元素 $a \in \Lambda$的正倍数。这确定了一个典范同构 $\mathfrak{g} \cong \mathbb{C}$ 将 a 映射到1，以及一个唯一元素 $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $|\lambda| < 1$，从而我们有一个自然同构 $G \cong \mathbb{C}^*/\langle\lambda\rangle$。

现在我们假设 $\mathcal{P}$ 是定性的。在这种情况下，我们可以唯一地选取 $a \in \Lambda$ 在（6）中，使得 c_{fr} 是一个 K¨ahler 类，且 a 在 Λ中不可整除。特别地，我们可以将其补充为 a， b 的一组基 Λ。关于同构 $\mathfrak{g} \cong \mathbb{C}$

将 a 映至 1，我们还可以进一步假设 $b \in \mathbb{C}$ 满足 $\operatorname{Im} b > 0$。考虑如下图表：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Lambda & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 $\varphi(z) = e^{2\pi i z}$ 和 ψ 是诱导的自然投影

$$\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*/\langle e^{2\pi i b}\rangle = G.$$

它诱导上同调上的图表：

$$\begin{array}{ccc} H^1_{orb}(\mathcal{Y}, \mathcal{O}^*_{\mathcal{Y}}) & \xrightarrow{c_1} & H^2_{orb}(\mathcal{Y}, \mathbb{Z}) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_*} & & \downarrow \\ H^1_{orb}(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(G)) & \xrightarrow{c^{\mathbb{Z}}} & H^2_{orb}(\mathcal{Y}, \Lambda) \end{array}$$

其中， ψ_* 将一个线性 orbifold 丛 $\mathcal{L}$ 映射到.....的同构类

$$\mathcal{P}' := (\mathcal{L} - 0_{\mathcal{L}})/\langle e^{2\pi i b}\rangle.$$

我们声称，一个主轨道丛 $\mathcal{P}'$ 属于 ψ_* 的像，当且仅当

$$c^{\mathbb{Z}}(\mathcal{P}') \in H^2_{orb}(\mathcal{Y}, \mathbb{Z}) \subset H^2_{orb}(\mathcal{Y}, \Lambda).$$

一个方向是显然的。对于另一个方向，如果 $c^{\mathbb{Z}}(\mathcal{P}') = c_1(\mathcal{L})$，则有$\mathcal{P}' = \psi_*(\mathcal{L}) + \mathcal{P}_0$，其中 $\mathcal{P}_0$ 是平坦的 G-轨形丛

$$\mathcal{P}_0 := \tilde{\mathcal{Y}} \times_\rho G$$

其中 ρ: $\pi_1^{orb}(\mathcal{Y}) \to \mathrm{Aut}^{hol}_{gp}(G)$ 是一个取值于 G的全纯群自同构群中的群同态。但随后我们可以将 ρ 提升到$\hat{\rho} : \pi_1^{orb}(\mathcal{Y}) \to \tilde{\mathbb{C}^*}$，使得 $\mathcal{P}_0 = \psi_*\mathcal{L}_0$，其中 $\mathcal{L}_0 := \mathcal{Y} \times_{\hat{\rho}} \mathbb{C}$。我们推断 $\mathcal{P}' = \psi_*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0)$。

取一个有限orbifold覆叠 q： $\mathcal{Y}' \to \mathcal{Y}$使得 $H_1^{orb}(\mathcal{Y}', \mathbb{Z})$，或等价地，$H^2_{orb}(\mathcal{Y}', \mathbb{Z})$，没有挠。于是 $\mathcal{P}' := q^*\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ 是一个有限覆盖并满足$c^{\mathbb{Z}}(q^*\mathcal{P}) = q^* c_{\mathrm{fr}} \otimes a$，因此如上面的讨论所述，它由 $\mathcal{L}$ 上的线性轨形丛诱导。由于 $\mathcal{L}$具有丰性，它具有一个 Hermitian 结构 h，且具有正的Chern 曲率。对每个orbifold图表应用通常的论证 [Va82, 定理 3.5]，便可证明 $\Omega := f^{-1} i\partial\bar{\partial} f$是 $\mathcal{P}'$上的 Vaisman度量，其 Lee形式为 $\theta := -d\ln f$，其中 f 是 $\mathcal{L} - 0_{\mathcal{L}}$ 上的光滑实函数，定义为 $f(s) = ||s||^2_h$。

最后，如果 $F \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{Y}')$ 是覆盖 q的甲板变换群，那么我们可以取平均θ，得到一个 F-不变形式 $\theta_F := \frac{1}{|F|}\sum_{g\in F} g^*\theta$。由此可知，该 F-不变度量

$$\Omega_F := \frac{1}{|F|}\sum_{g\in F} g^*\Omega = -dJ\theta_F + \theta_F \wedge J\theta_F$$

是 LCK。由于 F 在 $\mathcal{P}'$上的作用与 G 的作用可交换，Ω_F 也是 G-不变的，并且 Ω_F 的Lee 向量场 B 就是 Ω 的 Lee 向量场。特别地，B 对于 Ω_F是Killing的，因此 Ω_F 是一个 Vaisman 度量，并下降为 $\mathcal{P}$ 上的 Vaisman 度量。证明完毕。□

注 2.5. 由于准正则 *Vaisman* 流形的基底轨形 $\mathcal{Y}$ 要求具有一个整 *K¨ahler* 类，轨形 *Kodaira* 定理 [Ba57] 便推出 $\mathcal{Y}$ 是一个射影轨形。

注 2.6. 请注意，上述定理同样适用于 $\mathcal{P}$ 的全空间不一定光滑的情形，因此对应于一个 *Vaisman*轨道流形。此外，上述证明中唯一涉及轨形条件的整体论证，是处理轨道上同调的部分；在这种情况下，我们将轨形上的问题转移到相应的分类空间上。

注记2.7。对于光滑*Vaisman*流形，基底轨形的局部均化群包含于固定的环面 G 中。此外，上述定理表明，经过有限覆盖后，基底轨形是局部循环的，即具有循环一致化群。

3. Deforming compact automorphism groups

本节讨论一般紧复流形的变形理论。主要结果如下：

定理3.1。设 X 为紧复流形，且设 $H \subset \mathrm{Aut}_0(X)$ 为紧复子群。那么对于 X_t 的任意小变形 X ，有$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Aut}(X_t) \geq \dim_{\mathbb{C}} H$。特别地，如果$\mathrm{Aut}_0(X)$ 是紧的，那么对于 X_t 的任意小变形 X，$\mathrm{Aut}_0(X_t)$ 是$\mathrm{Aut}_0(X)$的小变形。

证明。回顾一下，如果 $X = (M, J)$，复结构的一个小形变 J_t c-结构 $J = J_0$ 上的 M 由映射编码

$$\phi_t := -\pi_t^{1,0}|_{TX^{0,1}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{A}_X^{0,1} \otimes TX^{1,0})$$

满足Maurer-Cartan方程 $\partial\phi_t + [\phi_t, \phi_t]^- = 0$. 这里，$\pi^{1,0}_t$：$TX \otimes \mathbb{C} \to TX^{1,0}_t$ 表示相对于复结构 J_t 的$(1, 0)$-投影，反之，$TX^{0,1}_t = (\mathrm{id} + \phi_t)(TX^{0,1})$.

令我们设定

$$A^q := \mathcal{C}^\infty(\mathcal{A}_X^{0,q} \otimes TX^{1,0}), \quad q \in \mathbb{N}.$$

群 H 在 $TX^{1,0}$ 以及 $\mathcal{A}^{p,q}_X$ 上诱导出自然作用，因而也在 A^q上诱导出自然作用，并且该作用与作用于 $A^\bullet$. 上的微分 ∂交换。因此，$H^\bullet(X, TX)$自然是一个 H-表示。由于 H 在 X上全纯作用，即映射 $H \times X \to X$ 是全纯的，根据 [A12，第 109] 页，H-表示 $H^\bullet(X, TX)$是全纯的。

同时，由于 H 是紧致的，且通过双全纯映射作用于 X，我们可以在 X上选取并固定一个 H-不变的 Hermitian度量，它继而在 $A^\bullet$. 上诱导一个H-不变的 L^2-标量积。特别地，我们还可以定义 L^2-伴随算子 ∂^* 和 $\Box := [\partial, \partial^*]$，它们也将是 H-等变的。通过 Hodge 理论，我们有一个 H-等变同构 $H^\bullet(X, TX) \cong \ker \Box$。特别地，在上同调上诱导$L^2$-标量积后，$H^\bullet(X, TX)$ 成为一个酉 H-表示。

由于 H 是阿贝尔的，我们可以将该表示对角化，因此它由特征标 $\lambda : H \to \mathbb{C}^*$ 确定。根据上述考虑，这些特征标既是全纯函数，也是酉函数，因此为常数。由此可知，上述表示是平凡的，特别是

$$\ker \overline{\Box} \subset (A^\bullet)^H. \tag{7}$$

回想一下，根据 [Ku62], ，存在一个复解析空间芽（$\mathrm{Def}(X)$,0），它参数化了 J 的所有小形变，其中 $T_0\mathrm{Def}(X) = H^1(X, TX) \cong \ker \Box$。$\mathrm{Def}(X)$ 的显式描述可写为

$$\mathrm{Def}(X) := \{\phi \in A^1 | \overline{\partial}\phi + [\phi, \phi] = 0, \quad \overline{\partial}^*\phi = 0\} \subset A^1 \tag{8}$$

具有诱导的解析结构形式 A^1.

断言1. 定义$(X) \subset (A^1)^H$.

证明。 我们按照 X 中给出的 [Do66 第 4], 节对 Def(的描述 $A^\bullet = \operatorname{im} \partial \oplus \ker \partial^*$以及映射 $\Theta\colon A^1 \to A^2,\ \phi \mapsto \partial\phi + [\phi, \phi]$, 并定义巴拿赫子簇

$$\Sigma := \Theta^{-1}(\ker \overline{\partial}^*) \subset \overline{A^1}$$

根据隐函数定理，该对象在0 处是光滑的。由于 Σ 与 $\ker \partial^*$ 在0处横截相交，因此可知 V:= $\Sigma \cap \ker \partial^*$在 0处同样是光滑且有限维的，其中 $T_0V = \ker \square|_{A^1}$。由于 V 由椭圆方程的解组成，实际上有 $V \subset A^1$ ，最后 Def$(X) = V \cap \Theta^{-1}(0) \subset V$.

另一方面，映射 $\Theta|_{A^1}$ 是 H-等变的，因此也可以考虑其限制

$$\Theta_H = \Theta : \overline{(A^1)^H} \to \overline{(A^2)^H} = (\operatorname{im} \overline{\partial})^H \oplus (\ker \overline{\partial}^*)^H$$

以及 $\Sigma^H := (\Theta_H)^{-1}$((核 $\partial^*)^H$) 和 $V^H = \Sigma^H \cap$核 $\partial^* \subset (A^1)^H$。基于与上述相同的理由， Σ^H 和 V^H 在 0 处均光滑，并由（7）可得

$$T_0V^H = \ker \overline{\square}|_{(A^1)^H} = \ker \overline{\square}|_{A^1} = T_0V.$$

由于 $V^H \subset V$ 且二者在0处都光滑，因此它们作为芽相等，从而 Def$(X) \subset V^H \subset (A^1)^H$.

□

断言 1 意味着实李群 H 通过双全纯映射作用于 (M, J')，对于由元素 $\phi \in$ Def(X) 编码的任意小变形 J'。事实上，由于 ϕ是 H-不变的，并且 $TM^{0,1}_{J'} =$ (id $+\phi$)$(TX^{1,0})$，可知 H在 $TM \otimes \mathbb{C}$上的自然作用保持分裂 $TM \otimes \mathbb{C} = TM^{1,0}_{J'} \oplus TM^{0,1}_{J'}$，因此任意元素$g \in H$ 都满足 $g_* J' = J' g_*$。

令 $\mathfrak{h}$ 表示 H 的李代数，并将其视为 $\mathcal{C}^\infty(TM)$ 的李子代数；再将 $\mathfrak{h}^c = \mathfrak{h} + J'\mathfrak{h}$ 视为一个复向量空间，其复结构由 J' 诱导。上述讨论表明，我们有一个自然的单射 $\mathbb{C}$-线性态射

$$\mathfrak{h}^c \to H^0(TM^{1,0}_{J'}).$$

由此可推得

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Aut}(M, J') = \dim_{\mathbb{C}} H^0(TM^{1,0}_{J'}) \geq \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h} + J'\mathfrak{h}) =$$
$$= \frac{1}{2}(2 \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h} - \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h} \cap J'\mathfrak{h})) \geq \dim_{\mathbb{C}} H.$$

最后，若 $H =$Aut$_0(X)$，则由上半连续性，我们也有

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Aut}(M, J') \leq \dim_{\mathbb{C}} H.$$

这意味着上述所有不等式均为等式，因此特别有 $\mathfrak{h} = J'\mathfrak{h}$。于是， J' 赋予实李群 H 一种新的复李群结构，使得 $(H,\ J') =$Aut$_0(M,\ J')$。证毕。

□

特别地，我们立即得到以下推论：

推论 3.2. 假设 X 是一个紧复流形，其紧群Aut$_0(X)$满足： X 是轨形 Z 上的主Aut$_0(X)$-轨形丛。那么， X 的任意变形族 $\mathcal{X} \to \Delta$ 都会诱导出一族变形 $\mathcal{Z} \to \Delta$ ，其变形对象为

Z 和 $\mathcal{G} \to \Delta$ 的 $\mathrm{Aut}_0(X)$，使得对每个 $t \in \Delta$， $\mathcal{X}_t$ 是位于 $\mathcal{Z}_t$上的主 $\mathcal{G}_t$-轨形丛。

专门考察 Vaisman 流形的情形，我们得到：自同构群较小的 Vaisman 流形这一类在变形下是开集：

推论 3.3。 假设 X 是一个 *Vaisman* 型的紧复流形，且维数$_{\mathbb{C}}$自同构群$(X) = 1$。那么， X 的任意小变形仍是 *Vaisman* 型且准正则。

证明。 设 X_t 是 $X = X_0$的一个变形。根据 [OV10，定理 2。6]， X_t 当 t 接近 0 时，具有一个局部共形凯勒度量。根据定理 3.1，自同构群(X_t) 是一个紧复环面，因此 [Is19，定理 1] 推出 X_t 也属于 Vaisman 型。最后，定理 3.1推出 X_t 也为准正则。 □

4. Vaisman manifolds with $c_1(X) = 0$

本节首先研究较弱的 Calabi-Yau 条件

$$c_1(X) = 0 \in H^2(X, \mathbb{R})$$

在 Vaisman 流形上。让我们回顾实 Bott-Chern 上同调群的定义

$$H^{1,1}_{BC}(X, \mathbb{R}) := \frac{\{\alpha \in \mathcal{A}^{1,1}_X, d\alpha = 0, \alpha = \overline{\alpha}\}}{\{i\partial\overline{\partial} f | f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})\}}$$

以及恒等映射诱导出的自然映射

$$l : H^{1,1}_{BC}(X, \mathbb{R}) \to H^2(X, \mathbb{R})$$

将 $c_1^{BC}(X)$ 映射为 $c_1(X)$。因此， $c_1(X) = 0$ 意味着 $c_1^{BC}(X) \in \ker l$。

在 [IO22] 中给出的 Bott-Chern 上同调描述立即推出 $\ker l$ 是一维的，由横向 K¨ahler 度量的类生成；更具体地说，我们有一个正合序列：

$$H^1(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{\psi} H^{1,1}_{BC}(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{l} H^2(X, \mathbb{R}) \tag{9}$$

其中 $\psi[\theta] = [-dJ\theta]$。此外，由于 ¨横向 K H^1*ähler* 类在 $^1_{BC}(X, \mathbb{R})$ 中对应于集合 Lee(X) 通过 ψ得到的像，并且根据 [Ts94，定理 5。1],–Lee(X) ∩Lee$(X) = \emptyset$，这使我们能够将弱 Calabi-Yau 流形分为三个互不相交的类别：

定义 4.1.设 X 是一个紧致 *Vaisman* 流形，且 $c_1(X) = 0$。我们称：

- X 为正型，记作 $c_1^{BC}(X) > 0$，若 $c_1^{BC}(X)$ 是横向 *K¨ahler* 度量的类，即 $c_1^{BC}(X) \in \psi(\mathrm{Lee}(X))$;
- X 是卡拉比-丘流形，当且仅当 $c_1^{BC}(X) = 0$;
- X 是负型，记为 $c_1^{BC}(X) < 0$，如果 $-c_1^{BC}(X)$ 是横截 *K¨ahler* 度量的类，即 $-c_1^{BC}(X) \in \psi(\mathrm{Lee}(X))$。

对于一般的准正则 Vaisman 流形 X 且满足 $\mathcal{Y} = X/G$ 且投影映射 $\pi : X \to \mathcal{Y}$，由（5）可得：

$$K_X \cong \pi^* K^{orb}_{\mathcal{Y}} \cong \pi^* \mathcal{O}(\phi^*(K_Y + D))$$

其中， $D = \sum_\alpha \left(1 - \frac{1}{m_\alpha}\right) D_\alpha$ 是 $\mathcal{Y}$的分支除子。特别地，以下关系在有理上同调以及 Bott-Chern 上同调中均成立：

$$c_1(X) = \pi^*(c_1(Y) - \sum_\alpha \left(1 - \frac{1}{m_\alpha}\right)[D_\alpha]). \tag{10}$$

注意，如果 $K_Y + D \equiv 0$，那么 K_X 是全纯挠的。

定义 4.2. 若紧复轨形 $\mathcal{Y} = (Y, D)$ 分别满足以下条件，则称其为 *Fano* 轨形、卡拉比–丘轨形或一般型轨形：

$$c_1^{orb}(\mathcal{Y}) = -c_1^{orb}(K_{\mathcal{Y}}^{orb}) = c_1(Y) - [D] \in H^2(Y, \mathbb{R})$$

分别是正、零或负的 *K¨ahler* 类。

由于 π^* 在 (1,1)-Bott-Chern 上同调 [IO22，定理 4.2], 式 (10) 可推出，在定理 2.4所给出的对应关系中，这三个类也彼此对应。事实上，正如我们很快将看到的，这对一般的 Vaisman 流形也成立。

回忆一下，复流形 X 上的任意 Hermitian度量 Ω 都会在 K_X 上诱导一个 Hermitian 结构，其 Chern 曲率可局部表示为

$$\Theta_{K_X,\Omega} = \partial\overline{\partial} \log \det \Omega.$$

我们也称 $\rho_\Omega := -i\Theta_{K_X,\Omega}$ *Chern-Ricci* 形式 为 Ω 的，并且它满足：

$$c_1^{BC}(X) = \left[-\frac{i}{2\pi}\Theta_{K_X,\Omega}\right] = \frac{1}{2\pi}[\rho_\Omega] \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbb{R}).$$

注记 4.3. *Calabi-Yau* 条件等价于存在一个函数$f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ 使得 $\rho_\Omega = i\partial\overline{\partial} f$。特别地，如在 [To15], 中所注意到的，在卡拉比-丘流形上，任何 *Hermitian*度量共形于 *Chern-Ricci*平坦度量。

回顾一下， X 上的 Vaisman度量 (Ω θ) 具有一个关联的横向 K¨ahler 度量 ω_0 : $= -dJ\theta$。让我们用 ρ_0 表示其 Ricci曲率，它可以定义为 X 上的一个全局基本 (1,1)-形式。

引理 4.4. 我们有 $\rho_\Omega = \rho_0$。特别地， X 恰好当 $X/\mathcal{F}$ 是卡拉比-丘时是卡拉比-丘，分别恰好当 $X/\mathcal{F}$ 是 *Fano* 或一般型时是正型或负型。

证明。该陈述是局部的。取一个局部横截面 Y for $\mathcal{F}$，并令 $\pi : X|_Y \to Y$为相应的投影，使得 $\omega_0|_Y = \pi^*\eta$ fora K¨ahler metric η on Y。Ifσ_0 a local frame of K_Y, then $\sigma := \theta^{1,0}|_Y \wedge \pi^*\sigma_0$ is alocal frame for K_X over $X|_Y$。Using that $||\theta||$ is constant, we find

$$\rho_\eta = i\partial\overline{\partial} \log ||\sigma_0||^2_\eta$$

$$\rho_\Omega = i\partial\overline{\partial} \log ||\sigma||^2_\Omega = i\partial\overline{\partial}(\log \pi^*||\sigma_0||^2_\eta + \log \frac{||\theta||^2}{2}) = \pi^*\rho_\eta = \rho_0.$$

□

上述引理告诉我们，所有三类 Vaisman 流形都在自然界中出现，只需在相同符号的相应射影流形上取定性椭圆丛即可。它还告诉我们，对于具有 $c_1(X) = 0$ 的 Vaisman 流形，我们应该根据符号期望不同的事物。

现在注意到，Einstein-Weyl 条件蕴含 $c_1^{BC} > 0$。首先回顾一下 ˆ，任意 LCK 流形（X,Ω θ）都有一个相应的最小 K¨ahler 覆盖（X, ω）。

ˆ也就是说， $p : X \to X$ 是 X 的最小覆盖，使得 $p^*\theta = d\varphi$ 成为恰当形式，K¨ahler度量定义为 $\omega :=$e$^{-\varphi}p^*\Omega$，并且除常数因子外，它只依赖于Ω的共形类。

定义 4.5。 一个*LCK*流形 （X， Ω θ） 如果其 *K¨ahler*ˆ覆盖（X， ω） 是 *Ricci* 平坦的，则称为 *Einstein-Weyl* 流形。

该条件也可以用 Weyl 联络来等价地定义，并且根据 Gauduchon 的结果 [Ga95]，LCK Einstein-Weyl 流形自动是 Vaisman 流形，即在相应的共形类中存在 Vaisman度量。

局部共形凯勒度量的 Chern-Ricci 形式 ρ 与相应的 K¨ahler 度量 ˆg 的 Chern-Ricci 形式 ˆρ 相关，通过

$$\hat{\rho} = -i\partial\overline{\partial}\log(\det \pi^* g - n\varphi) = \pi^*(\rho - \frac{n}{2}\omega_0)$$

其中 $n =$ 维$_{\mathbb{C}}\, X$。特别地，Einstein-Weyl 条件意味着

$$c_1^{BC}(X) = \frac{1}{2\pi}[\rho] = \frac{n}{4\pi}[\omega_0] > 0.$$

我们还注意到以下几点：

命题 4.6。 一个紧致 *Vaisman* 流形 X 具有 c_1^{BC}（X） > 0 负的 *Kodaira*维数。

证明。反设，因此存在某个 $m \geq 1$ 和 $0 \neq \sigma \in H^0(X, K_X^{\otimes m})$。令 $D = \mathcal{Z}(\sigma)$ 为其相应的有效除子。根据假设，线丛$K_X^{\otimes m}$ 具有某个 Hermitian 结构 h，其 Chern 曲率满足

$$-\gamma := -\frac{i}{2\pi}\Theta_{K_X^{\otimes m},h}$$

是横向 K¨ähler度量位于 X。设 是 上的任意 Vaisman度量 X，并且$n :=$ 维数$_{\mathbb{C}}\, X$。那么 [Ga81，公式(1)] 给出：

$$0 < \int_D \Omega^{n-1} = \int_X \gamma \wedge \Omega^{n-1} < 0$$

这就构成了矛盾。因此，不存在这样的截面 σ 。 □

5. Vaisman manifolds with $c_1^{BC} = 0$

在本节中，我们汇总紧VaismanCalabi-Yau流形的所有主要几何性质。其中大多数性质都可由典范度量的存在性推导出来。另一个主要要素涉及它们的变形理论，这一点已在前一节中讨论过。

5.1. **典范度量**。 我们首先回顾 Ornea 和Verbitsky 的以下结果，这是一个针对 Vaisman度量的 Yau 定理，其基于 El Kacimi-Alaoui 的横向 Yau 定理 [E90]。我们在此给出 [OV22A，定理 41]的一个等价改述：

定理 5.1。设 X 为一个紧致 *Vaisman* 流形，令 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ 为 *Lee* 群，令 $\tau \in H^1(X, \mathbb{R})$ 为一个*Lee* 类，并令 η 为任意 G-不变的体积形式。则在 X 上存在唯一一个具有*Lee* 类 τ 和体积形式η的 *Vaisman*度量。

特别地，对于 Calabi-Yau 流形，即那些满足 $c_1^{BC}(X) = 0$ 的流形，我们得到：

推论 5.2。设 X 是一个紧*Vaisman Calabi-Yau*流形，且 $\tau \in H^1(X)$ 是一个 *Lee* 类。则存在唯一的 *Chern-Ricci*平坦*Vaisman* 度量，其 *Lee* 类为 τ，除相差一个正数常数倍外。

证明。根据 [Ts94, 《定理5 的证明》1], 存在一个 Vaisman度量 Ω_0，其Lee形式为$\theta_0 \in \tau$。由于 $c_1^{BC}(X) = 0$, $\rho_0 = \mathrm{i}\partial\bar{\partial} f$ 对于一个 f 在X 上全局定义的光滑函数，其中 ρ_0 是 Ω_0 的 Chern-Ricci 形式。于是直接计算可得 ρ_1的消失，即 Ω_1 的Chern-Ricci形式: $= e^{f}\Omega_0,$，其中 $n =$ 维数为$_{\mathbb{C}} X$。

注意，由于Ω_0 是 G-不变的， ρ_0也是如此。特别地，对于任意 $\phi \in G$ 我们有

$$0 = \phi^*\rho_0 - \rho_0 = i\partial\bar{\partial}(\phi^* f - f)$$

意味着 $\phi^* f = f$，即 f 是 G-不变的。因此，同样 $dv_1 := \frac{\Omega^n}{n!}$ 是 G-不变的。由定理 5.1，存在唯一的Vaisman度量 $(\Omega\ \theta)$ 使得 $dv_\Omega := \frac{\Omega^n}{n!} = dv_1$且 $\theta \in \tau$。

由于对于任意局部平凡化截面 σ （其属于 K_X ）以及任意 Hermitian度量 g，局部有

$$\rho_g = i\partial\bar{\partial}\log||\sigma||_g^2 \quad dv_g = i^l||\sigma||_g^{-2}\sigma\wedge\bar{\sigma} \tag{11}$$

对于某个 $l \in \mathbb{Z}$，由此可知，体积形式决定了该度量的 Chern-Ricci 形式。因此，我们的条件 $dv_\Omega = dv_1$ 意味着 $\rho_\Omega = \rho_1 = 0$。

最后，如果 Ω' 是另一种 Chern-Ricci 平坦 Vaisman 度量，其 Lee 类为 τ，则 en $dv_\Omega = e^h dv_{\Omega'}$ 对于一个全局光滑函数 h。但这通过（11）

$$0 = \rho_{\Omega'} - \rho_\Omega = i\partial\bar{\partial}h$$

由此 h 为常数。因此，根据定理 5.1，Ω在乘以一个正数常数的意义下是唯一的。□

5.2. **几何性质.** 基于上述内容，我们现在推断出Vaisman Calabi-Yau流形的一个结构结果，这可以看作是Beauville-Bogomolov 分解定理的一个类似物。在陈述它之前，让我们说，对于一个纯轨形 Y 赋予黎曼度量 g，我们定义其全纯为光滑部分的全纯 $(Y_{\mathrm{reg}}, g|_{Y_{\mathrm{reg}}})$。

定理 5.3。设 X 是一个紧*Vaisman-Calabi-Yau* 流形。那么$\mathrm{Aut}_0(X)$是一个紧致复一维李群，并且 X 是准正则的。此外，若 g 是 X 上的 *Chern-Ricci* 平坦 *Vaisman* 度量，且 $\pi: X \to \mathcal{Y} = X/G$ 是相应的 *Calabi-Yau* 轨形，设 g_0 是 $\mathcal{Y}$ 上诱导的 *Ricci* 平坦 *K¨ahler* 度量。那么存在一个有限轨形覆盖，它诱导出 *Vaisman* 流形的有限无分歧覆叠。

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle \pi'} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathcal{Y}' & \xrightarrow{p} & \mathcal{Y} \end{array}$$

使得 $\mathcal{Y}' = (Y', D = \emptyset)$ 是一个纯轨形，并且 (Y', p^*g_0) 在度量和全纯意义下分解为

$$Y' \cong A \times \prod_{i=1}^{r} Y_i \times \prod_{j=1}^{s} Z_j$$

其中， A 是一个平坦阿贝尔簇， Y_i 是具有全纯群$\mathrm{Sp}(m_i)$ 的单连通射影纯 *K¨ahler* 轨形，而 Z_j 是具有全纯群$\mathrm{SU}(n_j)$的单连通射影纯 *K¨ahler* 轨形。

证明。 固定 Chern-Ricci 平坦 Vaisman 度量（g, Ω θ）于 X 上，其 Lee 向量场为 B。任意自同构 $\phi \in \mathrm{Aut}_0(X)$ 都与恒等映射同伦，因此保持 Lee 形式的 de Rham上同调类不变 θ。此外，Lee 群 G 是 Aut 中心$_0(X)$ [Ts94，推论 4。5], 因此局部共形凯勒度量 $\phi^* g$ 具有 G-不变性。 $\phi^* g$ 的 Lee 向量场也为 B:

$$\phi^*\theta = \phi^*(g(B,\cdot)) = g(B,\phi_*) = \phi^*\theta$$

因此它是Killing，且 $\phi^* g$ 是 Vaisman。由此可知， $\phi^* g$ 是 Chern-Ricci 平坦 Vaisman 度量，其Lee 类为 $[\theta]$ ，并且$\int_X dv_{\phi^*\Omega} = \int_X dv_\Omega$。根据定理5.2，我们因此有 $\phi^* g = g$，即 $\phi \in \mathrm{Aut}(X,g)$。这表明$\mathrm{Aut}_0(X) = \mathrm{Aut}_0(X,g)$ 是一个紧复李群，因而是一个环面。现在 [Is19, Cor. 1] 表明 $\mathrm{Aut}_0(X) = G$。

Cheeger-Gromoll 定理的黎曼轨形版本 [BZ94，定理 2]蕴含（$\mathcal{Y}$， g_0）有一个有限 orbifold 覆叠 $p:\ \mathcal{Y}' \to \mathcal{Y}$ 使得

$$(\mathcal{Y}', g' := p^* g_0) \cong (A, g_1) \times (\mathcal{Q}, g_2),$$

其中（A, g_1）是一个平坦环面，而（$\mathcal{Q}, g_2$）是一个满足 $\pi_1^{orb}(\mathcal{Q}) = 0$ 的紧致里奇平坦黎曼轨形。我们声称，由于（$\mathcal{Y}', g'$）是 K¨ahler 的，度量 g_1, g_2 也都是K¨ahler的。为此，我们需要说明，如果 J 是 $\mathcal{Y}'$ 上的复结构，那么 $J(TA) = TA$。如果情况并非如此，那么存在一个 V 上的平行向量场 V，使得 $JV = W_A + W_Q$，其中 $W_A \in \Gamma(TA)$, $0 \neq W_Q \in \Gamma(T\mathcal{Q})$。现在， W_Q 被识别为一个集合（$W_{\tilde{U}} \in \Gamma(T\tilde{U})$）$_{\tilde{U} \in \mathcal{U}_Q}$。由于 $\nabla^{g'}(JV) = 0$，可知˜ ˜对每个 $U \in \mathcal{U}_Q$ 也有 $\nabla^{g_2} W_{\tilde{U}} = 0$。但是，度量对偶 $\alpha_{\tilde{U}} \in \mathcal{A}_1(U)$ 也满足 $\nabla^{g'}\alpha_{\tilde{U}} = 0$，从而在单连通 orbifold $\mathcal{Q}$上产生一个非零调和一形式，这就矛盾了。因此， J 保持分裂 $T\mathcal{Y}' = TA \oplus T\mathcal{Q}'$，所以在每个因子上诱导出平行的、因而是 K¨ahler 的复结构。

我们取 $X' := p^* X$，它是 X的有限覆盖。由于 $\mathcal{Q}$ 是单连通的，$H^2_{orb}(\mathcal{Q},\mathbb{Z})$ 无挠，因此根据定理 2.4 $\mathcal{P} := X'|_{\{0\}\times\mathcal{Q}}$ 是一个类为 $c(\mathcal{P}) = \kappa \otimes a$ 的全纯主 G-轨形丛，其中 a 是 G 的格中的不可整除元素，而 κ 是 $\mathcal{Q}$ 上的 K¨ähler类。特别地，存在 $\mathcal{L} \in$Pic $^{orb}(\mathcal{Q})$，使得全纯 $\mathbb{C}^*$-主轨形丛 $\mathcal{Z} := \mathcal{L} - 0_{\mathcal{L}}$ 是 $\mathcal{Q}$ 上 $\mathcal{P}$ 的 $\mathbb{Z}$-覆盖。进一步记 $\kappa = d\kappa_0$，其中 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\kappa_0 \in H^2_{orb}(\mathcal{Q},\mathbb{Z})$ 是一个不可整除类。于是存在一个次数为 d 的循环无分歧覆盖 $\mathcal{Z}' \to \mathcal{Z}$，其覆盖 $\mathcal{Q}$，且 $c_1^{orb}(\mathcal{Z}') = \kappa_0$。我们有正合序列

$$H_2^{orb}(\mathcal{Q},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\int_\bullet \kappa_0} \mathbb{Z} = H_1(\mathbb{C}^*,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_1^{orb}(\mathcal{Z}',\mathbb{Z}) \longrightarrow H_1^{orb}(\mathcal{Q},\mathbb{Z}) = 0$$

这意味着 $H_1^{orb}(\mathcal{Z}', \mathbb{Z}) = 0$，因此 $H_1(Z', \mathbb{Z}) = 0$根据 [BG07，第4.7定理。5]， $\mathcal{Z}' \to \mathcal{Q}$对应于一个 $\mathbb{C}^*$-Seifert 丛，其光滑总空间为光滑的，因此 [Ko05，命题10。2]适用于推断 $\mathcal{Q}$ 是一个纯轨形。

因此我们可以应用纯轨道体的 Beauville-Bogomolov 分解定理 [Ca04，定理 6。4] 以进一步分解 $\mathcal{Q}$ 成全纯性不可约因子，因此必须是 Sp(k) 或 SU(k)-型。最后，由于 $\mathcal{Y}$ 是射影的，每个因子再次是射影的。 □

特别地，我们有:

推论 5.4。 如果 X 是 *Vaisman* 型的紧致复 *Calabi-Yau* 流形，那么 K_X 是全纯挠的。

此外，上述定理的证明表明：

推论 5.5。设 X 是一个 *Lee* 群为 G 的紧*Vaisman Calabi-Yau*流形。那么存在一个有限无分歧覆叠 $X' \to X$，以及 G 到 X' 的一个提升，使得 $\Sigma^G(X') := \{x \in X' \mid G_x \neq \{1\}\}$ 在 X' 中的复余维至少为 2。

注*5.6*。我们应注意到，如果 X 不是卡拉比-丘，则上述推论不成立，即使对于 $b_1(X) = 1$也是如此。*Hopf*曲面 $X = \left(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\right)/\mathbb{Z}$，其中 $\mathbb{Z}$ 通过 $(z_1, z_2) \mapsto (2z_1, 4z_2)$ 作用，是*Vaisman*拟正则的，具有$G := \mathbb{C}^*/\langle 2\rangle$，其对应的轨形商 X/G 是单连通加权射影空间 $\mathbb{P}(1, 2)$。然而，对于 X的任意有限覆盖 X'，$\Sigma^G(X') = \{z_1 = 0\}/\pi_1(X')$都是轨形点 $[0 : 1] \in \mathbb{P}(1, 2)$上的椭圆曲线。

关于 Calabi-Yau 轨形的变形空间，我们有：

定理 5.7. 设 X 是一个紧*Vaisman Calabi-Yau*流形。那么，*Kuranishi*空间 $\mathrm{Def}(X)$ 是一个光滑的万有变形空间，并且 X 的任意小变形仍然是 *Vaisman Calabi-Yau* 流形。

证明. 由推论 5.4，存在一个有限覆盖 $p : Y \to X$，其甲板变换群为 F，使得 K_Y 是全纯平凡的。由于也具有 Vaisman 结构，其 F¨olicher 谱序列在 E_1 [Ts94], 处退化；因此，由 [KKP08，第 154], [ACRT18，定理 3.3], ，Kuranishi空间 Def(Y) 是光滑的。

我们可以在 X上固定一个Hermitian度量，将其拉回为 Y 上的 F-不变度量，并按照式 (8) 关于这些度量定义 Def(X) 和 Def(Y)。于是，可以将 Def(X) 与 Def(Y)$^F \subset$ Def(Y) 中的 F-不变元素构成的子空间等同起来。从几何上看，给定一个以圆盘 π_X 为底空间、中心纤维为 X的族 $\mathcal{X} \to \Delta$，有$\pi_1(\mathcal{X}) \cong \pi_1(X)$，因此存在一个 F-覆盖 q: $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$。族 $\pi_Y = \pi_X \circ q$: $\mathcal{Y} \to \Delta$ 于是就是 Y的相应变形。

现在，如断言 1中所示，可证明 Def(X) $\cong \mathrm{Def}(Y)^F \subset \mathrm{Def}(Y)$ 是一个光滑芽。事实上，采用断言 1中的记号，有 Def(Y) $= V \cap \Theta^{-1}(0)$，其中

$$V = \{\phi \in A^1 \mid \overline{\partial}^*\phi = 0, \quad \overline{\partial}^*(\overline{\partial}\phi + [\phi, \phi]) = 0\}, \quad \Theta(\phi) = \overline{\partial}\phi + [\phi, \phi].$$

但由于 Def(Y) 在 0处光滑且 T_0Def(Y) $= T_0V$，我们有 (V,0) $\subset (\Theta^{-1}(0), 0)$作为芽。因此同样有$(V^F, 0) \subset (\Theta^{-1}(0), 0)$，从而得到：

$$\mathrm{Def}(X) \cong \mathrm{Def}(Y)^F = V^F \cap \Theta^{-1}(0) = V^F$$

因此，芽 Def(X) 在 0 处也是光滑的。

再次考虑一个族 $\pi_X : \mathcal{X} \to \Delta$ 以及由此诱导的族 $\pi_Y : \mathcal{Y} \to \Delta$。根据定理 3.1，当 t 接近 $0 \in \Delta$ 时，有 $H^0(X_t, TX_t) \cong H^0(X, TX)$。这通过 [Wa69], 表明，Kuranishi空间 Def(X)是万能的。另一方面，由于每个 $\mathcal{Y}_t$ 的Fr¨olicher谱序列在 E_1处退化，$h^{n,0}(\mathcal{Y}_t)$在t中是常数。这意味着 $\pi_{Y*}\Omega^n_{\mathcal{Y}/\Delta}$ 是局部自由的，因此在 Δ上是一个平凡线丛。于是，可以将任意平凡化 $\sigma \in H^0(Y, K_Y)$延拓为 $\sigma_{\mathcal{Y}}$的 $\pi_{Y*}\Omega^n_{\mathcal{Y}/\Delta}$ 的一个截面；并且由于具有常秩的条件是开条件，在缩小Δ后，可以确保 $\sigma_{\mathcal{Y}}$ 平凡化每个 $K_{\mathcal{Y}_t}$. 。因此，每个 $\mathcal{Y}_t$以及 $\mathcal{X}_t$都是Vaisman-Calabi-Yau 流形。□

5.3. **上同调不变量**。我们得到 Vaisman Calabi-Yau 流形的以下解析不变量：

推论5.8。一个紧*Vaisman Calabi-Yau*流形具有*Kodaira*维数0。

证明。 由推论 5.4，这样的流形的典范丛是挠的，这蕴含了该断言。 □

推论 5.9。紧*VaismanCalabi-Yau*流形 X 的复维数为n，其代数维数为 $n-1$。

证明。 根据定理5.3， X 射影轨形上的椭圆曲线中的纤维，这意味着其代数维数 $a(X) \geq n-1$。与此同时，由于 X 不满足 $\partial\partial$-引理 [Va80]，，我们有 $a(X) < n$ 根据 [DGMS75，推论5。23]，由此得出结论。 □

我们的 VaismanCalabi-Yau流形结构结果的另一个推论，是对有限覆盖意义下可能出现的基本群进行分类；这可以被视为Vaisman-Calabi-Yau 类型复结构存在性的一个拓扑障碍。

推论 5.10。 紧致 *Vaisman*卡拉比-丘流形的基本群包含一个有限指数正规子群，该子群要么是阿贝尔的，要么是 $\mathbb{Z}\times H_{\mathbb{Z}}$，其中$H_{\mathbb{Z}}$ 是整数海森堡群。此外，第二种情况仅发生于例 7.2 中 *Kodaira* 流形的有限商。

证明。 设 X 是一个紧Vaisman Calabi-Yau流形。由定理 5.3，经过有限覆盖后，我们可以假设 $X/G = \mathcal{Y} = A\times\mathcal{Q}$，其中 $A = \mathbb{C}^m/\Gamma$ 是一个紧复环面，而 $\pi_1^{orb}(\mathcal{Q}) = 0$。那么我们恰好在 Kodaira 流形的情形下有 $\mathcal{Y} = A$，此时确实 $\pi_1(X)$ 包含一个有限指数的正规子群，其形式为 $\mathbb{Z}\times H_{\mathbb{Z}}$，参见例 7.2。

因此我们假设 $\mathcal{Q}\neq\emptyset$。如前记 $G = \mathbb{C}/\Lambda$，我们有一个正合序列：

$$\pi_2^{orb}(\mathcal{Y}) \xrightarrow{\int c^{\mathbb{Z}}(X)} \Lambda \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1^{orb}(\mathcal{Y}) = \Gamma \longrightarrow 0.$$

由于 $\pi_2^{orb}(\mathcal{Y}) = \pi_2^{orb}(\mathcal{Q}) = H_2^{orb}(\mathcal{Q},\mathbb{Z})$ 通过 Hurewicz 定理，并且由于 $c^{\mathbb{Z}}(X)|_{\mathcal{Q}}$的秩为 1，序列中的第一个映射的秩为 1。因此，如有必要，通过有限覆盖，我们可以假设我们有一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 0.$$

特别地，这意味着 $[\pi_1(X)\ \pi_1(X)] < \mathbb{Z}$。由于 $H_1(X,\mathbb{Z}) = \pi_1(X)^{\mathrm{ab}}$ 具有奇数秩，然而我们必须有 $[\pi_1(X)\ \pi_1(X)] = 0$，即 $\pi_1(X)\cong\mathbb{Z}\times\Gamma$ 是阿贝尔的。□

另一个拓扑障碍由第一 Betti 数给出：

推论 5.11。 设 X 是一个紧*Vaisman Calabi-Yau*流形。则

$$b_1(X) \leq 2\dim_{\mathbb{C}} X - 1$$

当且仅当 X 是一个 *Kodaira* 流形时等号成立。

证明。 令 $\Gamma\subset\pi_1(X)$ 为一个有限指数正规子群，根据上述推论，该子群是阿贝尔群或 $\mathbb{Z}\times H_{\mathbb{Z}}$，令 $X_\Gamma\to X$ 为相应的甲板变换群为 F 的覆盖。我们还可以假设 $X_\Gamma/G = A\times\mathcal{Q}$ 如上所述，其中 G 是 X 和 X_Γ 的 Lee 群。于是我们有

$$b_1(X) \leq b_1(X_\Gamma) \leq 1 + 2\dim_{\mathbb{C}} A \leq 2\dim_{\mathbb{C}} X - 1$$

且等号仅当 $X_\Gamma/G = A$，即 X_Γ 是 Kodaira 流形。此外，在这种情况下 F 作用于 $\Gamma = \mathbb{Z} \times H_\mathbb{Z}$ 且 $\mathrm{rank}(\Gamma^{ab})^F = \mathrm{rank}(\Gamma^{ab}) = 2\dim_\mathbb{C} X - 1$。这意味着 F 在 $\Gamma^{ab} = \mathbb{Z} \times H^{ab}_\mathbb{Z}$ 上的诱导作用是平凡的。

令 $\pi: X_\Gamma \to A$ 为投影映射。由于 G 和 F 的作用彼此可交换，F 在 A 上诱导出一个自然的全纯作用，而且该作用在 $\pi_1(A)$ 上是平凡的。这意味着 F 通过平移作用于 A，因此我们有一个群同态 $\eta: F \to A$。假设存在 $\mathrm{id} \neq \gamma \in \ker \eta$。则 γ 诱导出一个全纯映射 $f_\gamma: A \to G$，使得对于任意 $x \in X_\Gamma$，都有 $\gamma(x) = f_\gamma(\pi(x)).x$，其中圆点表示 G 在 X_Γ 上的作用。如果 f_γ 不是常值的，那么由于 G 是一维的，f_γ 必然是满射。但是如果 e 是 G 的单位元，那么对于任意 $x \in f_\gamma^{-1}(e)$，任意 $y \in \pi^{-1}(x)$ 都被 γ 固定，这与 F 应在 X_Γ 上自由作用这一事实相矛盾。因此 f_γ 是常值的且 $\gamma \in G$，但这与 G 在 X 上有效作用相矛盾。于是 η 是单射，F 可视为 A 的一个子群，而 X 是相应的主 G-丛，底空间为环面 A/F，因而再次得到一个 Kodaira 流形。证明完毕。

□

6. Vaisman manifolds with $c_1^{BC} < 0$

我们现在转向负的情形。这种情况与卡拉比-丘情形十分相似。然而，为了证明典范度量的存在性，我们需要 Aubin-Yau定理 的叶状版本，以给出唯一的横向负 K¨ahler-Einstein 度量。这很可能成立，但由于我们未能找到参考文献，我们将首先通过 Weitzenb¨ock 型公式证明，具有 $c_1^{BC} < 0$ 的 Vaisman 流形是准正则的。

设 $X = (M, J)$ 配备局部共形凯勒度量 $(g, \Omega\ \theta)$。回顾 Weyl 联络 $\mathcal{D}$ 是由以下性质刻画的唯一无挠仿射联络

$$\mathcal{D}J = 0, \qquad \mathcal{D}\Omega = \theta \otimes \Omega.$$

在 X 的万有覆盖上，Weyl 联络恰好提升为相应 K¨ahler 度量的 Chern 联络，或同样是 Levi-Civita 联络，并且我们有 $\mathcal{D}$ 与 Levi-Civita 联络 ∇^g 之间的如下关系：

$$\mathcal{D} = \nabla^g - \frac{1}{2}\left(\theta \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \theta - g \otimes B\right). \tag{12}$$

此外，$\mathcal{D}$ 在 TX^1 上诱导出一个自然联络，[0]它与切尔恩联络 ∇^{Ch} 之间的关系为（例如参见 [Is18，第 2 节。3]）：

$$\nabla^{Ch} = \mathcal{D} + \theta^{1,0} \otimes \mathrm{id}. \tag{13}$$

我们先证明以下一般公式：

引理 6.1。设 $X = (M, J)$ 是一个 n 维复流形，带有一个局部共形凯勒度量 $(g, \Omega\ \theta)$，并设 $\omega_0 := -dJ\theta$。则有以下 *Weitzenb¨ock* 型公式：

$$2(\overline{\partial}^*\overline{\partial}\xi + n\overline{\partial}_{B^{0,1}}\xi) = \mathcal{D}^*\mathcal{D}\xi + n\mathcal{D}_B\xi + i(\iota_\xi\rho)^{\sharp_g} - i\frac{n}{2}(\iota_\xi\omega_0)^{\sharp_g}, \quad \xi \in \mathcal{C}^\infty(X, T^{1,0}X). \tag{14}$$

˜ ˜证明。令 $p: X \to X$ 为万有覆盖，固定满足 $p^*\theta = d\varphi$ 的 $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$，并令 $\tilde{g} := \mathrm{e}^{-\varphi}p^*g$ 为相应的 K¨ahler 覆盖。若 $\mathcal{D}$ 表示 TX 上对应于 $\tilde{g}$ 的 Levi-˜Civita 联络，在 TX 上下降为 $(\Omega\ \theta)$ 的 Weyl 联络，则有以下 Weitzenb¨ock 公式 [Mo07, 命题 20.3]:

$$2\tilde{\overline{\partial}}^*\overline{\partial}\xi = \mathcal{D}^*\mathcal{D}\xi + i(\iota_\xi\tilde{\rho})^{\sharp_{\tilde{g}}}, \quad \xi \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{X}, T^{1,0}\tilde{X}) \tag{15}$$

¯其中， $\tilde{\rho} = \overline{-}i\partial\partial\log\det\tilde{g}$表示 $\tilde{g}$的 Ricci 形式；对于算子 P， P^*表示其相对于 K¨ahler 度量 $\tilde{g}$的 L^2-伴随。我们还将使用记号 P^*，分别表示相对于 p^*g和 g的 L^2-伴随算子 P。

首先，我们证明

$$\tilde{\mathcal{D}^*} = \mathrm{e}^{\varphi}\cdot(\mathcal{D}^* + n\iota_B). \tag{16}$$

确实，设 $\alpha\otimes v \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{X}, T^*\tilde{X}\otimes T^{1,0}\tilde{X})$、 $w \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{X}, T^{1,0}\tilde{X})$为紧支撑函数。于是可得

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{X}}\langle\tilde{\mathcal{D}^*}(\alpha\otimes v), w\rangle_{\tilde{g}}dv_{\tilde{g}} &= \int_{\tilde{X}}\langle\alpha\otimes v, \mathcal{D}w\rangle_g e^{-n\varphi}dv_g\\ &= \int_{\tilde{X}}\langle\alpha\otimes v, \mathcal{D}(\mathrm{e}^{-n\varphi}w)\rangle_g dv_g + \int_{\tilde{X}}\langle\alpha\otimes v, n\theta\otimes w\rangle_g dv_{\tilde{g}}\\ &= \int_{\tilde{X}}\langle\mathcal{D}^*(\alpha\otimes v), w\rangle_g dv_{\tilde{g}} + \int_{\tilde{X}} n\alpha(B)\langle v, w\rangle_g dv_{\tilde{g}}\\ &= \int_{\tilde{X}}\langle\mathrm{e}^{\varphi}\left(\mathcal{D}^*(\alpha\otimes v) + n\alpha(B)v\right), w\rangle_{\tilde{g}}dv_{\tilde{g}}\end{aligned}$$

由线性性可得式（16）。同理可证：

$$\overline{\partial}^{\tilde{*}} = \mathrm{e}^{\varphi}(\overline{\partial}^* + n\iota_{B^{0,1}}). \tag{17}$$

代入

$$\tilde{\rho} = -i\partial\overline{\partial}(\log\det p^*g - n\varphi) = p^*(\rho - \frac{n}{2}\omega_0) \tag{18}$$

再将式（16）、（17）代入式（15），可得式（14）。

□

定理 6.2. 设 X 为具有 $c_1^{BC}(X) < 0$ 的紧致 *Vaisman* 流形。则$\mathrm{Aut}_0(X) = G$ 是一维的且 X 是准正则的。

证明。根据假设， $-c_1^{BC}(X)$ 可由横向 K¨ahler 形式$\eta = h(J\cdot,\cdot)$ 表示。应用横向 Yau 定理 [E90, Sect. 3.5.5], 存在横向 K¨ahler 度量 ω_0 具有横向 Ricci 形式 $\rho_0 = \eta$。但 $\omega_0 = -dJ\theta$对于 G-不变的 Lee 形式 θ，其中 G 是 X 的 Lee 群。然后我们固定 $\Omega := -dJ\theta + \theta\wedge J\theta$作为 X 上归一化 Vaisman 度量 g 的基本形式。注意其 Lee 向量场满足

$$|B^{1,0}|_g^2 = \theta^{1,0}(B^{1,0}) = \frac{1}{2}.$$

设 $\xi\in H^0(X, TX)$ 被等同于一个 $(1,0)$-向量场。写 $\xi = \xi_0 + fB^{1,0}$，其中 $f = 2\theta^{1,0}(\xi)$ 且 $\xi_0\in\ker\theta^{1,0}$。注意由于 $B^{1,0}$ 与 ξ [Ts94, Cor. 4.5]对易，f 必须是 G-不变的，因此特别地 $[B,\xi_0] = 0$ 且 $\partial_{B^{0,1}}\xi_0 = 0$。此外， $\partial\xi = 0$ 蕴含

$$\overline{\partial}\xi_0 = -\overline{\partial}f\otimes B^{1,0} \tag{19}$$

$$\overline{\partial}f = 2(\overline{\partial}\theta^{1,0})(\xi) = i\iota_{\xi_0}\omega_0. \tag{20}$$

现在我们希望将方程（14）应用于 ξ_0。利用 Weyl 联络与 Levi-Civita 联络之间的关系（12），以及 $\nabla^g_B\xi_0 = [B,\xi_0] + \nabla^g_{\xi_0}B = 0$这一事实，我们得到

$$\mathcal{D}_{B^{1,0}}\xi_0 = \mathcal{D}_B\xi_0 - \overline{\partial}_{B^{0,1}}\xi_0 = \mathcal{D}_B\xi_0 = -\frac{1}{2}\xi_0. \tag{21}$$

此外，我们有：

$$(\iota_{\xi_0}\omega_0)^{\sharp_g} = g(J\xi_0, \cdot)^{\sharp_g} = i\xi_0, \quad (\iota_{\xi_0}\rho)^{\sharp_g} = -ih(\xi_0, \cdot)^{\sharp_g}. \tag{22}$$

将（14）中的所有内容替换，并取 L^2 与 ξ_0作乘积，我们得到：

$$\begin{aligned}\int_X |\mathcal{D}\xi_0|_g^2 dv_g &= \int_X \left(2|\overline{\partial} f \otimes B^{1,0}|_g^2 + \frac{n}{2}|\xi_0|_g^2 - |\xi_0|_h^2 - \frac{n}{2}|\xi_0|_g^2\right) dv_g \\ &\overset{(20)}{=} \int_X \left(|\xi_0|_g^2 - |\xi_0|_h^2\right) dv_g. \end{aligned} \tag{23}$$

与此同时，再次利用（21）和（13），我们还得到：

$$\begin{aligned}\int_X |\nabla^{Ch}\xi_0|_g^2 dv_g &= \int_X \left(|\mathcal{D}\xi_0|_g^2 + 2\,\mathrm{Re}\, g(\mathcal{D}\xi_0, \overline{\theta^{1,0} \otimes \xi_0}) + \frac{1}{2}|\xi_0|_g^2\right) dv_g \\ &= \int_X \left(|\mathcal{D}\xi_0|_g^2 - \frac{1}{2}|\xi_0|_g^2\right) dv_g \\ &\overset{(23)}{=} \int_X \left(\frac{1}{2}|\xi_0|_g^2 - |\xi_0|_h^2\right) dv_g. \end{aligned} \tag{24}$$

现在，让我们注意到

$$(\nabla^{Ch}\xi_0)_0 := \nabla^{Ch}\xi_0 - 2\theta^{1,0}(\nabla^{Ch}\xi_0) \otimes B^{1,0}$$

是 $\nabla^{Ch}\xi_0$ 在 $T^*X \otimes_{\mathbb{C}} B^1$ 的正交补上的正交投影，$^{0} \subset T^*X \otimes TX^{1,0}$相对于由 g 诱导的自然度量。这尤其意味着：

$$\int_X |(\nabla^{Ch}\xi_0)_0|_g^2 dv_g = \int_X \left(|\nabla^{Ch}\xi_0|_g^2 - 2|\theta^{1,0}(\nabla^{Ch}\xi_0)|_g^2\right) dv_g. \tag{25}$$

然而，利用公式（13）、（12）以及 $\nabla^g\theta = 0$，可立即计算得到

$$\nabla^{Ch}\theta^{1,0} = \theta^{0,1} \otimes \theta^{1,0} - \frac{1}{2}g(\cdot, \pi^{1,0}).$$

因此我们得到

$$\theta^{1,0}(\nabla^{Ch}\xi_0) = -(\nabla^{Ch}\theta^{1,0})(\xi_0) = -\frac{1}{2}g(\xi_0, \cdot)$$

并结合（25）和（24），可推得：

$$0 \leq \int_X |(\nabla^{Ch}\xi_0)_0|_g^2 dv_g = -\int_X |\xi_0|_h^2 dv_g$$

也就是说，$\xi_0 = 0$。特别地，由（19）可知，f为常数，因此 $H^0(X, TX) = \mathbb{C}B^{1,0}$。证明至此完成。

□

现在我们可以通过 Aubin-Yau 定理的轨形版本，证明负情形下也存在典范度量。在陈述该定理之前，再次回顾映射

$$\psi : H^1(X, \mathbb{R}) \to H^{1,1}_{BC}(X, \mathbb{R}), \quad [\theta] \mapsto [-dJ\theta]$$

以及以下事实：$c_1^{BC} < 0$ 等价于 $-c_1^{BC} \in \psi(\mathbf{Lee}(X))$。

定理6.3. 设 X 为一个紧致 *Vaisman* 流形，并且 $\tau \in \psi^{-1}(-2\pi c_1^{BC}(X))$。那么存在一个 *Vaisman*度量 $(\Omega\ \theta)$，满足 $\theta \in \tau$和 $\rho_\Omega = dJ\theta$，且在乘以正数常数的意义下唯一。

证明。 根据定理6.2， X 是准正则的，并且相应的 K¨ahler 轨形$\mathcal{Y} = X/G$ 满足 $c_1^{orb}(\mathcal{Y}) < 0$ 通过引理 4.4。轨形 Aubin-Yau 定理[Fa18，定理1。3] 给出唯一的 K¨ahler-Einstein度量 η 在 $\mathcal{Y}$ 上满足 $\rho_\eta = -\eta$。

令 $\pi: X \to \mathcal{Y}$ 为投影映射。则 $\omega_0 := \pi^*\eta$ 是一个横向K¨ahler 度量，其对应的Ricci曲率为 $\rho_0 = -\omega_0$。特别地，

$$\omega_0 \in -2\pi c_1^{BC}(X) = \psi(\tau),$$

因此根据假设，存在一个闭实一形式 $\theta \in \tau$，满足 $\omega_0 = -dJ\theta$。我们来证明， θ 必然是 G-不变的，其中 G 是 X的 Lee 群。事实上，G 在 $H^1(X,\mathbb{R})$ 上平凡作用，因此，如果 $\phi \in G$，则存在 $u \in \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{R})$使得$\phi^*\theta = \theta + du$。但是，由于 ω_0 是 G-不变的，我们得到

$$0 = \phi^*\omega_0 - \omega_0 = dd^c u$$

因此 u 必须为常数且 $\phi^*\theta = \theta$。

（1，1）-形式Ω: $= -dJ\theta + \theta \wedge J\theta$是正定的，且 $d\Omega = \theta \wedge \Omega$，因此对应于一个局部共形凯勒度量。其 Lee 向量场与 Lee群 G相切，因此（Ω θ）是一个归一化 Vaisman 度量。此外，根据引理 4.4，它满足 $\rho_\Omega = \rho_0 = dJ\theta$。

为证明唯一性，假设 (Ω', θ') 是另一个归一化 Vaisman 度量，且满足 $\theta' = \theta + du$ 以及 $\rho_{\Omega'} = dJ\theta'$。然而，根据引理 4.4，我们还有 $\rho_{\Omega'} = \rho_0'$，其中 ρ_0' 是与横向 K¨ ähler 度量 $-dJ\theta'$相对应的 Ricci 形式。由此可知， $-dJ\theta'$ 是 ¨上的 Kähler 度量 η' 的拉回，且满足 $\mathcal{Y}$。由于这样的度量是唯一的，必有 $\eta' = \eta$，即 $dJ\theta = dJ\theta' = dJ\theta + dd^c u$，因此 u 为常数。我们推得 $\theta' = \theta$ ，因此 Ω′ =Ω。证明至此完成。

□

注记 6.4。 显然， $\psi[\theta] \in -2\pi c_1^{BC}(X)$ 是存在满足 $\rho_\Omega = dJ\theta$ 的 *Vaisman*度量的必要上同调条件，因此，不同于 *Calabi-Yau* 情形，任意 *Lee* 类 τ 都不能解决我们的问题。

注记 6.5。 对上述论证稍作修改，还可以得到*5.2* 中关于 *Calabi-Yau* 情形下典范度量存在性的另一种证明。只需将 *Aubin-Yau*定理的轨形版本替换为丘成桐定理的叶状版本即可。

推论 6.6。 设 X 是一个满足 $c_1^{BC}(X) < 0$的紧致 *Vaisman* 流形。则 X 的小变形 X_t 仍然是满足 $c_1^{BC}(X_t) < 0$的 *Vaisman* 流形。

证明。设 $\mathcal{X} \to \Delta$ 是圆盘上的一个满足 $\mathcal{X}_0 = X$的变形。由定理 6.2， X 是准正则的，并且具有紧致群 $\mathrm{Aut}_0(X)$。由推论 3.2，每个 $\mathcal{X}_t$ 都是一个拟正则 Vais man 流形，并且存在轨形的诱导变形 $\mathcal{Z} \to \Delta$ ，使得对于每个 $t \in \Delta$， $\mathcal{Z}_t$ 是 $\mathcal{X}_t$ 所对应的轨形。由于 $-c_1^{orb}(\mathcal{Z}_0)$ 是一个 K¨ähler 类，根据小平稳定性定理，在 $\mathcal{Z}$ 上存在一个 2-形式 ω ，其限制在每个纤维 $\mathcal{Z}_t$ 上都是 K¨ähler度量 ω_t ，并且满足 $[\omega_0] = -c_1(\mathcal{Z}_0)$。特别地，由连续性，对于每个 $t \in \Delta$我们也有 $[\omega_t] = -c_1(\mathcal{Z}_t)$，因此每个 $\mathcal{Z}_t$ 也属于一般型。于是这意味着 $\mathcal{X}_t$ 满足$c_1^{BC}(\mathcal{X}_t) < 0$。□

推论 6.7。 一个 n 维紧致 *Vaisman* 流形 X 具有 $c_1^{BC}(X) < 0$*Kodaira*维数为 $n-1$。

证明。 令 $\pi: X \to \mathcal{Y}$ 表示到相应轨形的投影。由于 π 作为轨形之间的映射是淹没的，且其纤维是可平行化的，因此有 $K_X \cong \pi^* K_{\mathcal{Y}}^{orb}$。

由于$K_{\mathcal{Y}}^{orb}$具有丰性，某个其幂的截面将 $\mathcal{Y}$ 嵌入射影空间[Ba57]。特别地， $\mathcal{Y}$ 具有 Kodaira维数 $n-1$。此外，由于 π 对任意 $m \in \mathbb{N}$诱导单射 π^*： $H^0(\mathcal{Y}, (K_{\mathcal{Y}}^{orb})^{\otimes m}) \to H^0(X, K_X^{\otimes m})$，可知 X 的 Kodaira 维数至少为 $n-1$。然而， X 不可能具有 Kodaira维数 n，因为这样它将是一个Moishezon流形，特别是它将满足$\partial\bar{\partial}$-引理 [DGMS75，推论 5.23], 这与 [Va80]矛盾。结论得证。□

7. Examples

现在让我们给出一些具有 $c_1(X) = 0$ 的 Vaisman 流形的显式例子。

例 7.1. 根据 [B00], 的分类，任何紧 Vaisman 曲面 X 满足 $c_1(X) = 0$。事实上，有三类:

(1) 适当椭圆曲面。这些是亏格曲线上的椭圆轨形丛 $g > 1$。特别地，此类曲面满足 $c_1^{BC}(X) < 0$; (2) 第一类和第二类 Kodaira 曲面，见下文例 7.2和 7.3。这些满足 $c_1^{BC}(X) = 0$; (3) 对角 Hopf 曲面及其有限商。这些满足 $c_1^{BC}(X) > 0$。然而，一般的 Hopf 曲面不是准正则的，而且可以形变到非 Vaisman 曲面。这些例子表明，我们论文的结果在 $c_1^{BC} > 0$ 情形下失效。

例 7.2. 在我们的设定中，紧 Calabi-Yau 轨形的最简单例子由紧复环面给出。相应地，紧 Vaisman Calabi-Yau 流形的最简单例子由它们上的定性主椭圆丛给出，即 [GMPP04] 的 Kodaira 流形。这些是第一类 Kodaira 曲面的高维类似物，并具有带左不变复结构的幂零流形结构。特别地，它们的基本群形如 $\Gamma = \mathbb{Z} \times \Gamma_0$ 其中 Γ_0 是中心为 $\mathcal{Z}(\Gamma_0) = \mathbb{Z}$ 的一步幂零群，且 $[\Gamma_0, \Gamma_0] \subset \mathcal{Z}(\Gamma_0)$ 为有限指数子群。注意 Γ_0 当 $[\Gamma_0, \Gamma_0] = \mathcal{Z}(\Gamma_0)$ 时是整数海森堡群。

特别地，Kodaira 流形在双全纯映射下与

$$\{(A, \omega_0, \lambda) \mid \lambda \in \Delta^*, \quad (A, \omega_0) \text{ polarized abelian variety}\}$$

其中 $\Delta^* \subset \mathbb{C}$ 是去心圆盘。对应关系如下建立。给定一个极化阿贝尔簇 (A, ω_0)，以及其上的正线丛 L，满足 $c_1(L) = \omega_0$和 $\lambda \in \Delta^*$, $X = (L - 0_L)/\langle\lambda\rangle$，则对应的 Kodaira 流形为 A。此外，若另一个线丛 $L' \in \mathrm{Pic}(A)$ 满足 $c_1(L') = c_1(L)$，则有 $L' = \tau_t^* L$，其中 $\tau_t \in \mathrm{Aut}(A)$ 是由元素 $t \in A$确定的平移。特别地，所诱导的双全纯映射 $\tilde{\tau}_t : L' - 0_{L'} \to L - 0_L$ 覆盖 τ_t，且在纤维上是线性的，因此与 $\lambda \in \Delta^*$的作用可交换，从而诱导对应 Kodaira 流形之间的双全纯映射。反过来，由于 $H^2(A, \mathbb{Z})$ 没有挠元，根据定理 2.4，任意定义正定的主椭圆丛 A 都可写为 $X = (L - 0_L)/\langle\lambda\rangle$，其中 $L \in \mathrm{Pic}(A)$ 是某个正线丛，且 $\lambda \in \Delta^*$是唯一元素。

例7.3。所有一维卡拉比–丘紧致复轨形都可以实现为椭圆曲线的有限商 [Fa18，例 7。1]。特别地，如果它们不是光滑的，那么其底层复流形是 $\mathbb{P}^1$。它们都可以实现为光滑的卡拉比–丘 Vaisman 流形的基底，即一个（次级）小平曲面。

我们介绍 [BHPV04，第 V节5]中的（适应性）构造。假设 $\mathcal{Y} = E/\langle\sigma\rangle$，其中 $E = \mathbb{C}/\Lambda$ 是带有标记点0的椭圆曲线，而 σ 是 E 的一个阶为 d 的自同构。设 $L \in \mathrm{Pic}(E)$ 是任意一个充 ample 线丛，且具有 $\sigma^* L = L$，例如 $L = \mathcal{O}_E(0)$。于是 σ 诱导出一个线性映射 $\tilde{\sigma}: L \to L$，覆盖 σ；而 $\tilde{\sigma}^d$是覆盖恒等映射的线性映射，因而由乘以 $\mu \in \mathbb{C}^*$的纤维上的乘法给出。取 $\nu \in \mathbb{C}^*$ 满足 $\nu^d = \mu^{-1}$，线性映射 $\beta := \nu \cdot \tilde{\sigma}$ 是 L 的一个阶为 d的双全纯同构。由此，对于任意 $\lambda \in \Delta^*$，映射 $\rho := \lambda \cdot \beta$ 在 $L - 0_L$ 上自由作用，并诱导出一个图表

$$\begin{array}{ccc} X_1 := (L - 0_L)/\langle \lambda^d \rangle & \longrightarrow & X_2 := (L - 0_L)/\langle \rho \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & E/\langle \sigma \rangle. \end{array}$$

X_1 是一个主 Kodaira 曲面，而 X_2 根据紧复曲面的分类，或由定理 5.3可知，所有 Vaisman-Calabi-Yau 曲面都是 Kodaira 曲面，并且都是以这种方式得到的。

示例7.4。对于以下示例，我们参考 [BG07，第 4 节。5]关于加权射影空间的一般理论。

令 $\mathrm{w} = (w_0, \ldots, w_n) \in (\mathbb{N}_{>0})^{n+1}$ 为一个权，满足 $\gcd(w_0, \ldots, w_n) = 1$，并考虑 $\mathbb{C}^*$ 通过 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的加权作用 $\mathbb{C}^*(\mathrm{w})$

$$\lambda.(z_0, \ldots, z_n) = (\lambda^{w_0} z_1, \ldots, \lambda^{w_n} z_n).$$

相应的加权射影空间是该轨形

$$\mathbb{CP}(\mathrm{w}) := (\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\})/\mathbb{C}^*(\mathrm{w}).$$

它是局部循环且单连通的。任意加权多项式

$$f \in H^0(\mathbb{CP}(\mathrm{w}), \mathcal{O}(d)) \tag{26}$$

次数为 d 定义了一个 $\mathbb{C}^*(\mathrm{w})$-不变超曲面 ˆ $X_f := \mathcal{Z}(f) \backslash \{0\} \subset \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$. ˆ假设 X_f 是光滑的. 任意 $\lambda \in \Delta^*$ 定义了 $\mathbb{Z} := \langle\lambda\rangle \subset \mathbb{C}^*(\mathrm{w})$ ˆ ˆ 在 X_f 上的自由作用, 使得商 $X_f := X_f/\mathbb{Z}$是一个紧复流形.

ˆ 考虑超曲面 $Y_f = X_f/\mathbb{C}^*(\mathrm{w}) \subset \mathbb{CP}(\mathrm{w})$ 具有继承的轨形 ˆ 结构。由于 X_f 可以等同于负轨形丛 $\mathcal{O}(-d)|_{Y_f}$ 减去零截面的全空间，由此得出 G-轨形丛 $X_f \to Y_f$ 是定性的，其中 $G = \mathbb{C}^*/\langle\lambda\rangle$，因此 X_f 是光滑Vaisman流形。

根据伴随公式 [BG07，命题 4.6。13]， Y_f 当且仅当是 Calabi-Yau orbifold $d = \sum_{i=0}^n w_i$。因此对于这样的 d，可以得到一个光滑的 Vaisman-Calabi-Yau 流形。例如，多项式

$$f = z_0^2 + z_1^6 + z_2^6 + z_3^6 \in H^0(\mathbb{CP}(3,1,1,1), \mathcal{O}(6))$$
$$h = z_0^2 z_1 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 \in H^0(\mathbb{CP}(2,1,1,1), \mathcal{O}(5))$$

定义光滑 Vaisman 卡拉比-丘三维簇。相应的轨形 Y_f 是光滑 K3 曲面，而 Y_h 是具有一致化群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的轨形奇点$[1,0,0,0]$ 的轨形 K3 曲面。

此过程可轻松推广到完全交并产生许多例子。所有加权 K3 超曲面的列表由 Reid 发现 [Re80, 第 4], 并且更一般的加权卡拉比-丘轨形大量存在于例如 [IF00],[CLS90], 因此可用于如上产生 Vaisman 卡拉比-丘流形。在 [IF00, 第 8], 关于 (w d) 的条件也给出以

ˆ确保一般多项式 f 如式（26）所定义的是一个光滑的 X_f，从而是一个光滑Vaisman流形。

References

[A12] D. Akhiezer, *Lie Group Actions in complex Analysis*，第27卷。SpringerScience&Business Media，2012年。[ACRT 18] B. Anthes, *∂∂̄-Complex symplectic and Calabi–Yau manifolds: Albanese map deformations and period maps* A. Cattaneo, S. Rollenske,A. Tomassini,，，Ann.Glob.Anal.Geom. 54（2018年），377–398。[Ba57] W. L. Baily, *On the imbedding of V-manifolds in projective spaces*，Amer.J.Math.79（1957年），403–430。[BHPV04] W. P. Barth, K. Hulek, C. A.M. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge*第4卷。Springer-Verlag，柏林，第二版，2004年。[Be84] A. Beauville, *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*，微分几何杂志18，第4期（1984年），755–782。[B00] F. Belgun, *On the metric structure of non-Kähler complex surfaces*，数学年刊317（2000年），1–40。[BG07] C. P.Boyer, K.Galicki, *Sasakian Geometry*，牛津数学专著，牛津大学出版社，牛津，2007年。[BZ94] J. Borzellino, S. Zhu, *The Splitting Theorem for Orbifolds*，伊利诺伊州数学杂志38（1994年），679–691。[Ca04] F.Campana, *Orbifoldes à première classe de Chern nulle*，载于 *The Fano Conference*，第339–351页。都灵大学，都灵，2004年。[CLS90] P. Candelas,M. Lynker, R. Schimmrigk, *Calabi-Yau manifolds in weighted* $\mathbb{P}_4$，NuclearPhys. B341第2期，（1990年）383–402。[DGMS 75] P. Deligne, Ph. Griffiths, J. Morgan,J D.Sullivan,，Invent. Math.（）（），–。[Do66] A. Douady, *Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes* *Séminaire Bourbaki* 9 1964 1965 277, 1995, 7 13 第（/），第。法国数学学会，巴黎，。[E90] A. El Kacimi-Alaoui, *Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications* 73 1990 57 106 ，

Compositio Math.（），–。[Fa18] M. Faulk, *On Yau's theorem for effective orbifolds*，Expositiones Mathematicae，37.4（2019年），382–409。[Ga81] P.Gauduchon, *Le théorème de dualité pluriharmonique*，C.R. Acad. Sci.Paris 293（1981年），59–63。[Ga95] P. Gauduchon, *Structures de Weyl-Einstein, espaces de twisteurs et variétés de type* $S^1 \times S^3$，J.reine angew.Math.469（1995年），1–50。[GMPP 04] G. Grantcharov, C. McLaughlin, H.Pedersen, and Y.S.Poon,，Glasg. Math. J.，（）（），–。[IF00] A.R.Iano-Fletcher, *Working with weighted complete intersections*，《三维簇的显式双有理几何》，伦敦数学学会讲义丛书，第281卷，第101–173页。剑桥大学出版社，剑桥，2000年。[Is18] N. Istrati, *Conformal structures on compact complex manifolds*，博士论文，Universit´eSorbonne Paris Cit´e，2018年。[Is19] N.Istrati, *Existence criteria for special locally conformally Kähler metrics*，纯粹与应用数学年刊（1923-）第198卷（2019年），335–353。[IO22] N. Istrati, A. Otiman, *Bott-Chern cohomology of compact Vaisman manifolds*，即将在美国数学会汇刊发表。DOI: 10.1090/tran/8832。[KKP08] L. Katzarkov,M.Kontsevich, T.Pantev, *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry*。载于 *From Hodge theory to integrability and TQFT tt*-geometry*，《纯粹数学专题讨论会论文集》第78卷，第87–174页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008年。[Ko05] J. Koll´ar, *Einstein metrics on five-dimensional Seifert bundles*，J. Geom.Anal. 15第3期（2005年），445–476。[Ku62] M.Kuranishi, *On the locally complete families of complex analytic structures*，Ann. Math.（第2辑）75（1962年）536–577。

[Mo07] A. Moroianu, *Lectures on Kähler Geometry*伦敦数学会学生读本69。剑桥大学出版社，剑桥，2007年。[Na75] I. Nakamura, *Complex parallelisable manifolds and their small deformations*微分几何杂志 10（1975年），85–112。[OV10] L. Ornea, M. Verbitsky, *Locally conformal Kähler manifolds with potential*数学年刊348（2010），25–33。[OV22A] L.Ornea, M. Verbitsky, *A Calabi-Yau theorem for Vaisman manifolds*arXiv: 2206.08808。[OV22B] L.Ornea, M. Verbitsky, *Principles of Locally Conformally Kähler Geometry*arXiv:2208.07188。[Re80] M.Reid, *Canonical 3-folds*昂热代数几何会议，1979年7月/代数几何，昂热，1979年，第273–310页。Sijthoff &Noordhoff，莱茵河畔阿尔芬，1980年。[Ro11] S. Rollenske, *The Kuranishi space of complex parallelisable nilmanifolds*欧洲数学会杂志（JEMS），13(3)（2011），513–531。[To15] V. Tosatti, *Non-Kähler Calabi-Yau manifolds*《分析、复几何与数学物理：献给 Duong H. Phong 的纪念文集》，644（2015），261–277。[TW10] V.Tosatti, B.Weinkove, *The complex Monge-Ampère equation on compact Hermitian manifolds* 23, 4 2010 1187 1195 美国数学会杂志 no.（），，[Ts94] K.Tsukada, *Holomorphic forms and holomorphic vector fields on compact generalized Hopf manifolds* 93 1 1994 1 22 Compositio Math.（） （），–。[Ts97] K. Tsukada, *Holomorphic Maps of Compact Generalized Hopf Manifolds*几何献辞 68（1997），61–71。[Ts99] K.Tsukada, *The canonical foliation of a compact generalized Hopf manifold*Differential Geom. Appl. 11（1999），13–28。[Va80] I. Vaisman, *On Locally and Globally Conformal Kähler Manifolds*美国数学会汇刊262，第2期（1980），553–542。[Va82] I.Vaisman, *Generalized Hopf manifolds*几何献辞 13（1982），231–255。[Wa69] J. Wavrik, *Obstructions to the existence of a space of moduli Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira)* 403 414 1969 。载于，第–页。东京大学出版社，东京，。[Ya78] 丘成桐, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation* 31, 3 1978 339 411 纯粹与应用数学通讯 no.（），–。

Nicolina Istrati, FB 12/Mathematik und Informatik, Philipps-Universität Marburg, Hans-Meerwein-Str. 6 35032 Marburg Germany , ,
Email address: istrati@mathematik.uni-marburg.de