arXiv:2304.02585v1 [math.RT] 5 Apr 2023

STABILITY IN THE CATEGORY OF SMOOTH MOD-P REPRESENTATIONS OF $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$

KONSTANTIN ARDAKOV, PETER SCHNEIDER

Abstract. 令 $p \geq 5$ 为一个素数，并令 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$。令 $\Xi =$ 谱(Z)表示 Z 的中心，即系数取在一个k 特征为 p的域上的 pro-p Iwahori Hecke 代数的中心的谱。令 $\mathcal{R} \subset \Xi \times \Xi$ 表示G的pro-p IwahoriExt 代数的支撑，并将其视为一个 (Z, Z)-双模。我们证明，局部环化空间 $\Xi/\mathcal{R}$ 是 Spec(k) 上的一条射影代数曲线，具有两个连通分支，并且每个连通分- 支都是一条射影直线链。对于 $\Xi/\mathcal{R}$的每个 Zariski 开子集 U，我们构造出光滑 k-线性表示的范畴 G的一个稳定局部化子范畴 $\mathcal{L}_U$。

Contents

1. 引言 21.1. 背景 2 1.2. 主要结果22.关于范畴模$_k(G)$的基本事实5 2.1.局部诺特 52.2.Krull维数 63.加厚 73.1.定义7 3.2.一个谱序列10 3.3. 内射谱10 3.4.局部化子范畴11 3.5. 稳定性133.6.一个环论情形 173.7.加厚的稳定性准则 20 4.范畴 模$_k(SL_2(\mathbb{Q}_p))$ 的商空间 254.1. pro-p 伊瓦霍里赫克代数及其中心254.2.谱(Z)的正规化 274.3. 双模湮灭子 314.4.Ext函子$^*_G(X, X)$ 的双模湮灭子374.5. 商空间的计算 40 附录53 A.1.关于余极限和余等化子的若干范畴论结果 53 A.2. 一种替代的稳定性证明 54 参考文献 56

Date: 2023年4月6日。

1. Introduction

1.1. 背景。设 k 是一个域， G 是一个 p-进约化群，并令 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 表示 G 的光滑 k-线性表示范畴。范畴 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 的中心 $\mathfrak{Z}(G)$ 称为 G 的伯恩斯坦中心。当 k 是复数域时，Bernstein [Ber] 对 $\mathfrak{Z}(G)$ 进行了深入研究，它在经典的局部 Langlands 对应中发挥着基础性作用。近年来，受 p-进和模-p Langlands 纲领相关考量的推动，人们开始关注 k 为特征 p 的域这一情形。然而在这种情形下， $\mathfrak{Z}(G)$ 结果相当小：在我们此前的工作[AS23], 中，我们证明了 $\mathfrak{Z}(G)$ 仅取决于 G 的中心 $Z(G)$；特别地，当假设 G 连通且半单时，$\mathfrak{Z}(G)$ 同构于有限维 k-代数 $k[Z(G)]$ 。

这一情形让人联想到这样一个事实：任意射影簇 X 上的全局正则函数环 $\mathcal{O}(X)$ 也相当小。当我们回顾 Gabriel [Gab], 的工作时，这一观察便与 G 的伯恩斯坦中心相关：Gabriel 证明了，诺特概形 X 的结构层可以从拟凝聚层范畴$\mathrm{QCoh}(X)$中重构出来。具体而言，他将 X 的任意开子概形 U 与$\mathrm{QCoh}(X)$ 的局部化子范畴 $\mathcal{L}_U$联系起来；该局部化子范畴由支撑在 X 中 U 的补子模上的层组成，并证明环 $\mathcal{O}(U)$ 可以从$\mathrm{QCoh}(X)$ 中恢复为商范畴 $\mathrm{QCoh}(X)/\mathcal{L}_U$ 的中心。在我们最近的工作 [AS24], 中，我们将 Gabriel 的构造推广到了任意格罗滕迪克范畴 $\mathcal{C}$，如下所述。

回顾一下，如果局部化子范畴 $\mathcal{L}$ of $\mathcal{C}$ 在本质扩张下稳定，则称其为稳定的。 $\mathcal{C}$ 的稳定局部化子范畴的集合$\mathrm{L}^{st}(\mathcal{C})$在逆包含关系下构成一个偏序集。对于 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}_1$， $\cdots$、 $\mathcal{L}_n$ 属于 $\mathrm{L}^{st}(\mathcal{C})$，如果$\mathcal{L} = \bigcap_i \mathcal{L}_i$，则称 $\{\mathcal{L}_i\}_{1\leq i\leq n}$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个覆盖。这个概念使 $\mathrm{L}^{st}(\mathcal{C})$ 成为一个 Grothendieck位，并且我们在[AS24] 定理 1.1中证明了，$\mathrm{L}^{st}(\mathcal{C})$上的预层 $\mathcal{L} \mapsto Z(\mathcal{C}/\mathcal{L})$ 实际上是一个层。当进一步假设范畴 $\mathcal{C}$ 是局部诺特时，我们证明了，在所谓的 $\mathcal{C}$ 的内射谱 $\mathrm{Sp}(\mathcal{C})$ 的稳定子集与$\mathrm{L}^{st}(\mathcal{C})$ 之间存在一个序反转双射 $U \mapsto \mathcal{L}_U$ 。我们在 [AS24] 定理 1.2 中证明了，$\mathrm{Sp}(\mathcal{C})$ 上相应的预层$U \mapsto Z(\mathcal{C}/\mathcal{L}_U)$ 关于任意覆盖都满足层条件。这些结果表明，尽管 $Z(\mathrm{Mod}_k(G))$ 可能很小且缺乏趣味，但这只反映出这样一个事实：这个中心是由$\mathrm{Mod}_k(G)$的商范畴的中心所形成的层的全局截面环。当然，只有当人们能够写出足够多的$\mathrm{Mod}_k(G)$ 的稳定局部化子范畴时，这个层才有意义。

1.2. 主要结果。本文的主要目标是在 $p \geq 5$ 和 G 为群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 的情形下，构造 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 的一大族稳定局部化子范畴。为陈述我们的结果，以下引入一个公理化框架将很有帮助。设 $\mathcal{A}$ 是局部诺特格罗滕迪克范畴 $\mathcal{C}$ 的全阿贝尔子范畴。粗略地说，若 $\mathcal{C}$ 中的每个诺特对象都有一个有限滤过，且其所有子商都属于 $\mathcal{A}$，并且包含函子 $i : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ 有一个左正合右伴随函子 $r : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ，该函子在 $\mathcal{A}$ 上限制为恒等函子，且在 $\mathcal{C}$ 中保持非零对象，则称 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的增厚。我们证明， r 诱导出相应内射谱之间的双射 $r : \mathrm{Sp}(\mathcal{C}) \xrightarrow{=} \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ ，并且映射 $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} \cap \mathcal{A}$ 在 $\mathcal{C}$ 的局部化子范畴集合与 $\mathcal{A}$ 的局部化子范畴集合之间定义了一个双射。

[1]参见定义3.1.1 以了解精确定义

~双射 r :Sp($\mathcal{C}$) $\xrightarrow{=}$ Sp($\mathcal{A}$) 保持稳定子集，因此诱导出一个单射r: $L^{st}(\mathcal{C}) \to L^{st}(\mathcal{A})$；然而 r 通常不是满射。

例 1.2.1. 设 G =$SL_2(Q_p)$，并设 I 为 G 的 pro-p Iwahori 子群。令 $\mathrm{Mod}_k^I(G)$ 表示 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 的全子范畴，其对象由其 I- 不变向量生成；并令 $r(V) = k[G] \cdot V^I$，对所有属于 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 的 V 均成立。我们将在下文的 §2.1 中证明，$\mathrm{Mod}_k(G)$ 是 $\mathrm{Mod}_k^I(G)$ 的增厚；此外，紧诱导表示 $\mathrm{ind}_I^G(k)$ 实际上是 $\mathrm{Mod}_k^I(G)$ 的诺特投射生成元。

回到我们的公理化框架，我们进一步假设 $\mathcal{A}$ 有一个诺特投射生成元 P。函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -) : \mathcal{A} \to \mathrm{Mod}(H)$ 因而是一个范畴等价，其拟逆为 $P \otimes_H - : \mathrm{Mod}(H) \to \mathcal{A}$，其中 $H := \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P)^{\mathrm{op}}$；并且在定理 3.5.8 中，我们证明 r 的像恰好由那些在函子 $P \otimes_H \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(P, -) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 作用下保持不变的 $\mathcal{A}$ 的局部化子范畴组成。为了更好地理解这一条件，我们引入分次 (H, H)-双模

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{C}}(P, P) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(P, P) \tag{1}$$

其特别是 $Z \otimes Z := Z \otimes_{\mathbb{Z}} Z$ 的一个模，其中 $Z := Z(H)$ 是 H 的中心。令 $\mathcal{J} := \mathrm{Ann}_{Z\otimes Z}$(Ext函子$^*_{\mathcal{C}}(P, P)$) 为其湮灭理想，且令 $\mathcal{R} := V(\mathcal{J}) \subseteq$ 谱$(Z \otimes Z)$ 为相应的 Zariski 闭子集。令 $\pi_1, \pi_2 : \mathcal{R} \to \Xi :=$ 谱(Z) 表示两个投影映射谱$(Z \otimes Z) \rightrightarrows \Xi$ 的限制。于是我们得到一个余等化子图表

$$\mathcal{R} \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} \Xi \xrightarrow{\mathfrak{q}} \Xi/\mathfrak{R}$$

在局部环化空间的范畴中（参见 [DG] 命题 I.1.1.6）。为陈述我们的主定理，我们引入映射 τ : $\mathbf{Sp}$（$\mathcal{C}$）$\to \Xi/\mathfrak{R}$ 由下图的交换性定义：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{Sp}(\mathcal{A}) & & \xleftarrow[r]{\cong} & & \mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \\
\cong\downarrow & & & & \\
\mathbf{Sp}(\mathrm{Mod}(H)) & & & & \vdots\ \tau \\
\downarrow & & & & \\
\mathrm{Spec}(H) & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathrm{Spec}(Z) = \Xi & \xrightarrow[\mathfrak{q}]{} & \Xi/\mathfrak{R}.
\end{array}$$

~左侧第一个竖直箭头来自等价关系 同态集$_{\mathcal{A}}(P, -)$: $\mathcal{A} \xrightarrow{=}$ 模(H)，映射 φ 定义为 $\varphi(P) = P \cap Z$ 对所有 $P \in$ 谱(H)。第二个竖直箭头来自 [Gab] V § 4；当 H 作为其中心上的模为有限生成时，它是一个双射。于是我们的第一个主要结果如下

定理 1.2.2 (命题3.7.4)。 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$的增厚。假设 $\mathcal{A}$ 有一个诺特投射生成元 P，并令 $H = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P)^{\mathrm{op}}$。进一步假设:

(A1) H 作为其中心 Z上的模是有限生成的；(A2) 存在一个整数 d，使得对于任意 $j > d$，$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{C}}(P, -)|_{\mathcal{A}} = 0$；(A3) $Z \otimes Z/\mathcal{J}^{d+1}$ 是诺特的。

那么 τ : Sp($\mathcal{C}$) $\to \Xi/\mathcal{R}$ 关于稳定拓扑是连续的。

在这种一般性下， $\Xi/\mathcal{R}$ 只是一个局部环化空间。第 §4 我们论文致力于计算该空间在示例1.2.1 上述情形下，关键依赖于 [OS22] 关于pro-pIwahori Ext 代数（1）结构的计算。然后我们的第二个主要结果如下

定理 1.2.3 (定理4.5.23, 推论 4.5.24). 假设 $p \geq 5$, $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}_k(G)$以及 $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}_k^I(G)$.

a) $\Xi/\mathcal{R}$ *is a scheme.*
b) $\Xi/\mathcal{R}$ *has two connected components.*
c) *Each connected component of* $\Xi/\mathcal{R}$ *is a chain of projective lines.*

Example 1.2.4. *When* $p = 13$, *the scheme* $\Xi/\mathcal{R}$ *looks as follows:*



In Example 4.5.25 below, we sketch how to obtain this gluing from the scheme Ξ.

推论 1.2.5. 设 $p \geq 5$ 且令 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$。对于 $\Xi/\mathcal{R}$ 的每个 Zariski 开子集 U， $\tau^{-1}(U)$ 都是 $\mathrm{Sp}(\mathrm{Mod}_k(G))$ 的稳定开子集。

证明。 这由定理 1.2.2 得出，只需验证其条件。注意 $\mathcal{C}$ =$\mathrm{Mod}_k(G)$ 是 $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}_k^I(G)$ 的增厚，且 $P = \mathrm{ind}_I^G(k)$ 是 $\mathcal{A}$ 的诺特投射生成元，由例 1.2.1。

(A1)。由 [Vig]，pro-p Iwahori-Hecke 代数 $H = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(P)^{\mathrm{op}}$ 作为其中心上的模是有限生成的；另见 [OS18]推论 3.4 和注 3.5。

(A2). 由于 $p \geq 5$，群 I 没有阶为 p 的元素，因此具有有限的 p-上同调维数等于 3，即 I 作为 p-进李群的维数。利用 Frobenius 互反律，我们看到对所有 V 在 $\mathcal{C}$ 中，

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{C}}(P, V) = \mathrm{Ext}^j_G(\mathrm{ind}_I^G, V) = \mathrm{Ext}^j_I(k, V) = H^j(I, V) = 0 \quad \text{for all} \quad j > 3.$$

(A3)。鉴于下面的注 3.7.5 ，我们可以将 **(A3)** 替换为较弱的假设，即$Z \otimes_k Z$ 是诺特的，因为 $\mathcal{C}$ 恰好是一个 k-线性范畴。命题 4.1.5 和方程 (11) 表明 Z作为 k-代数是有限生成的。因此 $Z \otimes_k Z$是诺特的，由希尔伯特基定理。 □

本文 [DEG] 考察群 $G = GL(\mathbb{Q}_p)$ 的情形：$\mathrm{Mod}_{k,\,\zeta}(G)$ 中由 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 内具有固定中心特征 ζ 的表示构成的全子范畴。他们为该子范畴关联了一个概形 X ，它也是一条射影直线链。在这种情况下，这个概形无疑类似于我们的商空间 $\Xi/\mathcal{R}$ 的一个连通分支。然而，[DEG] 背后的思路 X 则截然不同： X 被视为一个模空间，可看作二维半单伽罗瓦表示模掉 p所得。从这一角度看， X 与 G 的表示论之间的联系源自 Breuil 的模 p 半单朗兰兹对应。基于此，论文 [DEG] 还为范畴 $\mathrm{Mod}_{k,\,\zeta}(G)$ 发展了局部化理论，并证明 X 的闭点参数化了 $\mathrm{Mod}_{k,\,\zeta}(G)$ 的克鲁尔维数为 0 的子范畴中的块。我们强调，本文完全立足于全范畴 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 的表示论一侧，而我们的商空间 $\Xi/\mathcal{R}$ 源自泛 Ext 群的非消失性（及其结构）。因此，我们认为这两篇论文以一种有趣的方式互为补充。

致谢：作者感谢德国研究基金会（DFG）通过 SFB 1442“几何：形变与刚性”项目（项目编号 427320536）以及德国卓越战略 EXC 2044（项目编号 390685587）下的 Mathematics M¨unster: Dynamics–Geometry–Structure 提供支持。第二位作者还感谢牛津数学研究所和布雷斯诺斯学院提供的支持。

2. Basic facts about the category $\mathrm{Mod}_k(G)$

我们固定一个域 k，其特征为 $p > 0$。对于任意局部紧完全不连通群 $\mathcal{G}$，我们将$\mathrm{Mod}_k(\mathcal{G})$记为作用于 k-向量空间上的光滑 $\mathcal{G}$-表示的阿贝尔范畴。令 $G = SL_2(\mathbb{Q}_p)$。我们固定 pro-p 伊瓦霍里子群 $I \subseteq SL_2(\mathbb{Z}_p)$，该子群由所有模 p 上为上三角幺幂的矩阵组成。

2.1. 局部诺特。令 $\mathrm{Mod}_k^I(G)$ 表示 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 中由其 pro-p Iwahori 不变向量 V^I 生成的所有 V 所构成的全子范畴。记 $H := \mathrm{End}_{k[G]}(k[G/I])^{\mathrm{op}}$。

Theorem 2.1.1. *The functor*

$$\begin{aligned} \mathrm{Mod}_k^I(G) &\xrightarrow{\simeq} \mathrm{Mod}(H) \\ V &\longmapsto V^I \end{aligned}$$

是具有拟逆 $M \longmapsto k[G/I] \otimes_H M$的范畴等价。此外，$k[G/I]$ 作为 H-模是投射且忠实平坦的。

证明。 [Koz]和 [OS18] 命题 3.25 及其证明。 □

引理 2.1.2. $\mathrm{Mod}_k^I(G)$ 是 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 的阿贝尔子范畴，在子对象、商对象以及任意余极限的形成下封闭。

证明。显然 $\mathrm{Mod}_k^I(G)$ 在任意直和的形成下封闭。设 $0 \to V_0 \to V_1 \to V_2 \to 0$ 是 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 中的正合列，使得 V_1 属于 $\mathrm{Mod}_k^I(G)$。显然，此时 V_2 也属于 $\mathrm{Mod}_k^I(G)$。对于 V_0 我们考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & k[G/I] \otimes_H V_0^I & \longrightarrow & k[G/I] \otimes_H V_1^I & \longrightarrow & k[G/I] \otimes_H V_2^I \\ & & \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & V_0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_2 \longrightarrow 0. \end{array}$$

上水平行由函子的左正合性是正合的（$-$）^{I} 以及$k[G/I]$ 作为（右） H-模是平坦的。由定理中的范畴等价2.1.1 中间和右边的垂直态射是同构。因此左边的也是同构。这表明 V_0 属于 Mod_k^I（G）。 □

该 k-模 H 是仿射的，并且作为其中心上的模是有限生成的（[Vig] 或者，以显式形式表示，[OS 18] 推论 3.4 和注 3.5），因此是诺特的。因此，阿贝尔范畴 $\mathrm{Mod}(H)$ 是局部诺特格罗滕迪克范畴。

引理 2.1.3. 设 $\mathcal{G}$ 为任意局部紧完全不连通群，具有开的pro-p 子群 J。任意有限生成 $\mathcal{G}$-表示 V 在 $\mathrm{Mod}_k(\mathcal{G})$ 中具有有限滤过$\{0\} \subset V_1 \subset \ldots \subset V_\ell = V$ 由子表示，使得每个子商 V_i/V_{i-1}，对于$0 < i \leq \ell$，由有限多个 J-不动向量生成。

证明。只需考虑 V 由单个向量 v生成的情形。于是我们可以找到一个开正规子群 $N \subseteq J$，使得 N 固定 v。那么 V 是 $\mathcal{G}$-表示 $k[\mathcal{G}/N]$的一个商。因此实际上只需考虑 $V = k[\mathcal{G}/N]$ 的情形。在V中，我们有 J-子表示 $k[J/N]$。令 $\mathfrak{m}$表示环 $k[J/N]$的增广理想。由于 J/N 是一个有限 p-群，我们可找到一个整数 $\ell \geq 0$，使得 $\mathfrak{m}^\ell = 0$。注意到 J 在每个子商 $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$上都平凡作用。现在我们将 $V_i \subseteq V$ 定义为由 $\mathfrak{m}^{\ell-i}$生成的 $\mathcal{G}$-子表示。于是子商 V_i/V_{i-1} 由 $\mathfrak{m}^{\ell-i}/\mathfrak{m}^{(\ell-i)+1}$的像生成，而该像包含于 $(V_i/V_{i-1})^J$。□

Proposition 2.1.4. *The abelian category* $\mathrm{Mod}_k(G)$ *is locally noetherian.*

证明。根据引理 1(iv)， [Sch], $\mathrm{Mod}_k(G)$ 是一个格罗滕迪克范畴。我们必须证明，$\mathrm{Mod}_k(G)$ 中的任意有限生成 G-表示 V 都是诺特的。引理2.1.3将问题归结为 V 由有限多个 I-不变向量生成的情形。根据引理 2.1.2， V 的任意递增 G-子表示链已经包含在 $\mathrm{Mod}_k^I(G)$中。因此，根据定理 2.1.1，它对应于有限生成 H-模 V^I 中的一个链。因此该链必定变为稳定。□

The exact inclusion functor $\mathrm{Mod}_k^I(G) \subseteq \mathrm{Mod}_k(G)$ is left adjoint to the left exact functor

$\mathrm{Mod}_k(G) \longrightarrow \mathrm{Mod}_k^I(G) V \longmapsto V(I) :=$ G- V由 $V^I(\cong k[G/I] \otimes_H V^I)$生成的子表示。

引理 2.1.5. 函子 $V \mapsto V(I)$

a) 在 $\mathrm{Mod}_k^I(G)$ 上限制为恒等函子，b) 保持非零对象，c) 保持内射对象，并且 d) 与任意滤过余极限可交换。

证明。a) 显然。b) 成立，因为 I 是 pro-p。c) 是该函子为一个（左）正合函子的右伴随的结果。对于 d)，设 $V = \varinjlim_j V_j$ 是 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 中的一个滤过余极限。由于格罗滕迪克范畴 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 中的滤过余极限是正合的，我们有包含关系 $\varinjlim_j V_j(I) \subseteq V(I)$。但 $V^I = \varinjlim_j V_j^I$。因此这个包含关系是等式。□

2.2. Krull 维数。我们简要回顾 Gabriel 关于任意格罗滕迪克范畴 $\mathcal{C}$ 的 Krull 维数的概念。Gabriel 对 $\mathcal{C}$ 的维数过滤是由局部化子范畴 $\mathcal{C}_\alpha$ 构成的过滤，这些子范畴属于 $\mathcal{C}$，并由序数 α 索引。他的约定是， $\mathcal{C}_{-1}$ 是 $\mathcal{C}$ 中所有零对象构成的子范畴，而 $\mathcal{C}_0$ 是包含所有有限长度对象的最小局部化子范畴。随后， $\mathcal{C}_\alpha$ 按如下方式逐步定义。若 $\alpha = \beta + 1$，则 $\mathcal{C}_\alpha$ 是商函子 $q_{\mathcal{C}_\beta} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{C}_\beta$ 下 $(\mathcal{C}/\mathcal{C}_\beta)_0$ 的原像；若 α 是极限序数，则 $\mathcal{C}_\alpha$ 是包含所有 $\mathcal{C}_\beta$（其中 $\beta < \alpha$）的最小局部化子范畴。只要 $\mathcal{C}_/\mathcal{C}_\alpha$ 没有单对象，这一过程就会终止。但根据 [Gab] 第 387 页命题 7，后者意味着 $\mathcal{C}_\alpha$ 必须等于 $\mathcal{C}$。现在可以将 $\mathcal{C}$ 的 Krull 维数 $\kappa(\mathcal{C})$ 定义为使 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\alpha$ 成立的最小 α。类似地， $\mathcal{C}$ 中对象 Y 的 Krull 维数 $\kappa(Y)$ 定义为使 Y 属于 $\mathcal{C}_\alpha$ 的最小 α。相应地，集合

$$\mathbf{Sp}(\mathcal{C}) = \dot{\bigcup}_{\alpha < \kappa(\mathcal{C})} \mathbf{Sp}_\alpha(\mathcal{C})$$

可按以下子集进行分层：$\mathbf{Sp}_\alpha(\mathcal{C})$ 中所有满足以下条件的 $[E] \in \mathbf{Sp}(\mathcal{C})$：$q_{\mathcal{C}_\alpha}(E)$ 含有一个单对象（[Gab] 第 383 页）。一般而言，无法从 $\kappa(E)$ 读出一个$[E] \in \mathbf{Sp}_\alpha(\mathcal{C})$ 的 Krull 维数。 α。

注 2.2.1. 设 $\alpha < \kappa(\mathcal{C})$ 是一个序数，使得 $\mathcal{C}_{\alpha+1}$ 是一个稳定局部化子范畴；则对于任意 $[E] \in \mathrm{Sp}_\alpha(\mathcal{C})$，$\kappa(E) = \alpha + 1$。

证明。根据我们的假设，E 是 $\mathcal{C}_\alpha$-闭的，并且包含一个非零子对象 S 包含于 $\mathcal{C}_{\alpha+1}$（参见 [Gab]，第 383 页）。由于 E 是其任一非零子对象的本质扩张（参见 [Gab]，第 361 页命题 11），由 $\mathcal{C}_{\alpha+1}$ 的稳定性可知 E 属于 $\mathcal{C}_{\alpha+1}$。□

注 2.2.2。（[Gab]，第 387 页命题 7）设 $\mathcal{C}$ 是局部诺特的。那么 $\mathcal{C}$ 具有 Krull 维数，并且对于任意非极限序数 α，范畴 $\mathcal{C}_\alpha/\mathcal{C}_{\alpha-1}$ 是局部有限的。

For the convenience of the reader we point out the following elementary consequences of the fact that the subcategories $\mathcal{C}_\alpha$ are localising:

– If $0 \to U_1 \to U_2 \to U_3 \to 0$ is a short exact sequence in $\mathcal{C}$ then

$$\kappa(U_2) = \sup(\kappa(U_1), \kappa(U_3)) \ .$$

– 若 U 在 $\mathcal{C}$ 中是一个子对象族 U_i 的归纳极限，则 $\kappa(U) = \sup_i \kappa(U_i)$。特别地，对于任意 U，我们有 $\kappa(U) = \sup_i \kappa(U_i)$，其中 U_i遍历 U的所有诺特子对象。

在 [MCR] 第 6 章中，使用偏序集引入了范畴 $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(R)$ 中关于诺特环上的模的 Krull 维数概念 R。根据同上引文中的引理6.2.4 和 6.2.17，它也具有上述两个性质。因此，例如由 [GR] 命题2.3（请注意，该参考文献将 Gabriel的定义平移了 1）可知，对于诺特环，这两个 Krull 维数概念是一致的 R。

Proposition 2.2.3. *The categories* $\mathrm{Mod}_k(G)$ *and* $\mathrm{Mod}(H)$ *have Krull dimension one.*

证明。[OS18] §3.2.4中对 $Z(H)$的计算（连同 [MCR] 推论6.4.8）表明，$Z(H)$的Krull 维数为一。根据 [OS18] 推论 3.4，中心 $Z(H)$ 包含一个多项式环$k[\zeta]$，H 是其上的有限生成自由模。随后利用 [MCR] 推论6.5.3 可得，H 的 Krull 维数同样为一。因此，$\mathrm{Mod}_k^I(G) \simeq \mathrm{Mod}(H)$的 Krull 维数为一。由引理 2.1.2的证明可知，子范畴 $\mathrm{Mod}_k^I(G)$ 在 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 中关于取子对象是闭合的。因此，$\mathrm{Mod}_k^I(G)$ 中一个对象的Krull 维数，无论将其视为 $\mathrm{Mod}_k^I(G)$ 还是 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 中的对象，二者均相同。

由于子范畴 $\mathrm{Mod}_k(G)_1$ 对扩张封闭，因此由引理 2.1.3可知，每个有限生成表示都属于 $\mathrm{Mod}_k(G)_1$。关于 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 的断言则直接由 $\mathrm{Mod}_k(G)_1$ 同样对归纳极限封闭这一事实得出。□

3. Thickenings

It will be useful to axiomatize the situation in the previous section.

3.1. **Definitions.** For this we fix a locally noetherian Grothendieck category $\mathcal{C}$ together with a full abelian subcategory $\mathcal{A}$ of $\mathcal{C}$.

定义3.1.1。范畴 $\mathcal{C}$ 被称为 $\mathcal{A}$ 的增厚，如果：a) $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{C}$ 中对商对象、子对象的形成以及任意余极限封闭；

b) 包含函子 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ 具有一个左正合右伴随函子$r = r_{\mathcal{C},\ \mathcal{A}}:\ \mathcal{C} \to \mathcal{A}$使得:

- 函子 $r : \mathcal{C} \xrightarrow{r} \mathcal{A} \xrightarrow{\subseteq} \mathcal{C}$ 是恒等函子 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ 的子函子, - $r|\mathcal{A} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$, - r 保持非零对象, 并且 - r 与任意滤过余极限交换;

c)每个诺特对象 V 在 $\mathcal{C}$ 中都有一个有限滤过 $0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_m = V$，使得所有子商 V_j/V_{j-1}对于 $1 \leq j \leq m$都属于 $\mathcal{A}$。

在下文中，我们固定一个如上面定义中的 $\mathcal{A}$ 。注意到， $\mathcal{A}$ 是一个严格全子范畴。对于 $\mathcal{C}$ 中的任意 V，子对象 $r(V)$ 是 V 的最大子对象，并且属于 $\mathcal{A}$。实际上，函子 r 产生了一整列子函子 $r_j : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$（对于 $j \geq 0$），它们属于恒等函子 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$，并按如下方式归纳定义。我们定义

$$r_0 : \mathcal{C} \xrightarrow{r} \mathcal{A} \xrightarrow{\subseteq} \mathcal{C} \quad \text{and} \quad r_j(V)/r_{j-1}(V) = r_0(V/r_{j-1}(V)) \quad \text{for } j \geq 1.$$

Obviously we have, for any V in $\mathcal{C}$, the increasing filtration by subobjects

$$r(V) \subseteq r_1(V) \subseteq \ldots \subseteq r_j(V) \subseteq \ldots \subseteq V\ .$$

Lemma 3.1.2. *For any $j \geq 0$ the functor r_j has the following properties:*

a) *r_j is left exact;*
b) *$r_j \circ r_i = r_i \circ r_j = r_j$ for any $i \geq j$;*
c) *r_j preserves filtered unions of subobjects.*

证明。 在 [Ste] VI§1 中，函子 r_0 被称为 左正合幂等元预根基 的 $\mathcal{C}$，而关于 r_j 的断言性质可在该章 VI 的练习 1 和 2 中找到。 □

Correspondingly we introduce, for any $j \geq 0$, the strictly full subcategory

$$\mathcal{A}_j := \text{ all objects } V \text{ such that } r_j(V) = V$$

of $\mathcal{C}$. We have $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$, and $\mathcal{A}_j$ is a subcategory of $\mathcal{A}_{j+1}$. Each functor r_j may be viewed as a functor $r_j : \mathcal{C} \to \mathcal{A}_j$.

Lemma 3.1.3. *For any $j \geq 0$ we have:*

a) $\mathcal{A}_j$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个阿贝尔子范畴，在 $\mathcal{C}$中对取子对象、商对象以及任意余极限封闭; b) $r_j : \mathcal{C} \to \mathcal{A}_j$ 是包含函子 $\mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{C}$的右伴随; c) $r_j|\mathcal{A}_j = \mathrm{id}_{\mathcal{A}_j}$; d)$r_j$ 保持非零对象; e) r_j 与任意滤过余极限交换; f) V中的任意对象具有有限滤过 $0 \subseteq r_0(V) \subseteq r_1(V) \subseteq \ldots \subseteq r_j(V) = V$，其子商 $r_i(V)/r_{i-1}(V)$均属于 $\mathcal{A}$。

证明。 a) 由 [Ste] 命题 VI.1.2 和 VI.1.7得出。对于 b)，我们注意到，对于任意同态 $f:\ V_0 \to V_1$ 在 $\mathcal{C}$ 中，我们有 $r_j(f) = f|r_j(V_0)$。c)、d) 和 f) 根据构造成立。e) 我们关于 j进行归纳法。对于 $j = 0$ 该断言属于定义 3.1.1。现在假设该断言对于某个 j成立。设 $V = \varinjlim_i V_i$ 是 $\mathcal{C}$中的一个滤过余极限。我们

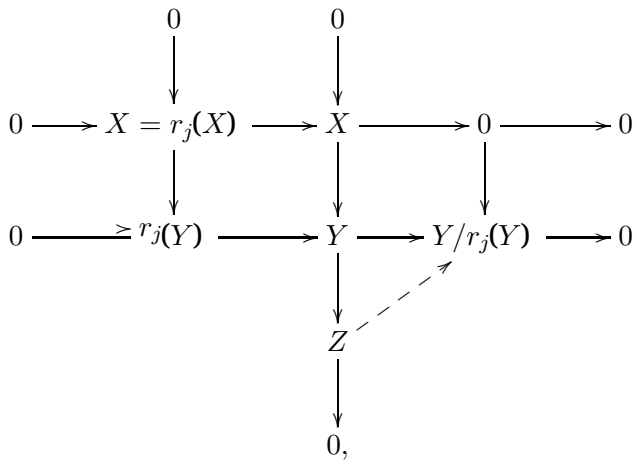
那么有

$$\begin{aligned} r_{j+1}(V)/r_j(V) &= r_0(V/r_j(V)) = r_0(\varinjlim_i V_i/r_j(\varinjlim_i V_i)) = r_0(\varinjlim_i V_i/\varinjlim_i r_j(V_i)) \\ &= r_0(\varinjlim_i (V_i/r_j(V_i))) = \varinjlim_i r_0(V_i/r_j(V_i)) = \varinjlim_i (r_{j+1}(V_i)/r_j(V_i)) \\ &= \varinjlim_i r_{j+1}(V_i)/\varinjlim_i r_j(V_i) = (\varinjlim_i r_{j+1}(V_i))/r_j(V)\ , \end{aligned}$$

其中，等式 4 和 7 用到了 $\mathcal{C}$ 中的滤过余极限是正合的。由此可得$r_{j+1}(V) = \varinjlim_i r_{j+1}(V_i)$。□

引理 3.1.4. 设 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个短正合列，且对于某个 $j \geq 0$， X 属于 $\mathcal{A}_j$，而 Z 属于 $\mathcal{A}$；则 Y 属于 $\mathcal{A}_{j+1}$。

证明。因为 r_j 由引理3.1.2.a 可知是左正合的，我们有如下交换正合图表



这表明 $Y/r_j(Y)$ 是 Z 的一个商对象。由于 $\mathcal{A}$ 对商对象封闭，因此可得 $r_0(Y/r_j(Y)) = Y/r_j(Y)$。另一方面，根据构造，我们有 $r_{j+1}(Y)/r_j(Y) = r_0(Y/r_j(Y))$。由此可得 $r_{j+1}(Y) = Y$。□

引理 3.1.5. 对任意 $V \in \mathcal{C}$，我们有 $V = \bigcup_{j\geq 0} r_j(V)$。

证明。 写作 V 为诺特子对象的一个滤并。由引理 3.1.2.c 可知，只需对诺特 V证明此断言。但在此情形下，由定义3.1.1.c 以及反复应用引理 3.1.4 可得， $V = r_j(V)$ 对充分大的 j成立。 □

命题 3.1.6. 对任意 $j \geq 0$， $\mathcal{A}_j$ 都是一个局部诺特格罗滕迪克范畴。

证明。 由 [BP] 引理 3.4 可知，范畴 $\mathcal{A}_j$ 是格罗滕迪克范畴。它是局部诺特的显然成立。 □

注 3.1.7. 设 V 是 $\mathcal{A}_j$ 中的一个对象，其中 $\mathcal{A}_j$ 属于某个 $j \geq 0$；那么，将 V 看作 $\mathcal{A}_j$ 中的对象所得的 Krull 维数，与将其看作 $\mathcal{C}$ 中的对象所得的 Krull 维数相同。

证明。这由 $\mathcal{C}$中的 $\mathcal{A}_j$ 在取子对象下封闭立即可得。 □

3.2. 一个谱序列。 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{A}$ 中的Ext群通过以下谱序列相关联。

Proposition 3.2.1. *For objects A in $\mathcal{A}$ and V in $\mathcal{C}$ we have the Grothendieck spectral sequence*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A, R^j r(V)) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{C}}(A, V) \ .$$

证明。我们有伴随同态集$_{\mathcal{A}}(A, r(V))$ $=$同态集$_{\mathcal{C}}(A, V)$。由于 r作为一个（左）正合函子的右伴随，会保持内射对象不变，因此该等式可推广为所述的复合函子谱序列。□

Corollary 3.2.2. *Suppose that P is a projective object in $\mathcal{A}$. For any object V in $\mathcal{C}$ and any $j \geq 0$ we then have*

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{C}}(P, V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, R^j r(V)) \ .$$

3.3. 内射谱。我们先回顾一些标准记号。对于任意对象 Y属于一个局部诺特格罗滕迪克范畴 $\mathcal{D}$ ，其内射包的一种选取 Y 记作 $E_{\mathcal{D}}(Y)$或简记为 $E(Y)$。内射谱 $\mathbf{Sp}(\mathcal{D}$是以下同构类的集合 $[Y]$ ： 不可分解内射对象 Y 的同构类 $\mathcal{D}$；例如，根据 [Her] 第523页，它是一个集合。

在下文中，我们保持增厚 $\mathcal{C}$ of $\mathcal{A}$ 的设定。

引理 3.3.1. 对于任意 V in $\mathcal{C}$ 我们有：

a) 包含 $r(V) \subseteq V$是本质扩张。特别地，如果 V是内射对象则V 是 $r(V)$ 的内射包。
b) 如果 V在 $\mathcal{A}$ 中是内射对象则 $V \cong r(E_{\mathcal{C}}(V))$。 c) 如果 V 在 $\mathcal{C}$ 中是内射对象则 V不可分解当且仅当 $r(V)$ 不可分解。

证明. i. 设 $U \subseteq V$是非零子对象。由于 r 保持非零对象，我们于是有$0 \neq r(U) \subseteq r(V)$ 从而 $U \cap r(V) \neq 0$。

ii. 我们显然有 $V = r(V) \subseteq r(E_{\mathcal{C}}(V)) \subseteq E_{\mathcal{C}}(V)$。由于 r 作为（左）正合函子的右伴随，保持内射对象，本质扩张 $V = r(V) \subseteq r(E_{\mathcal{C}}(V))$ 中的两项在 $\mathcal{A}$ 中都是内射对象。因此我们必须有等式。

iii.假设 $r(V) = U_1 \oplus U_2$，其中 $U_i \neq 0$（并且必然位于 $\mathcal{A}$中）。利用 [Ste] 命题 V.2.6，我们看到， V 根据 i. 是 $r(V)$的内射包，因此同构于 U_1 和 U_2 的内射包的直和，从而是可分解的。另一方面，如果 $V = V_1 \oplus V_2$且 $V_i \neq 0$，那么 $r(V) = r(V_1) \oplus r(V_2)$，其中 $r(V_i) \neq 0$。□

The above lemma implies that the map

$$\begin{aligned} \mathbf{Sp}(\mathcal{C}) &\xrightarrow{\simeq} \mathbf{Sp}(\mathcal{A}) \\ [E] &\longmapsto r([E]) := [r(E)] \end{aligned}$$

是一个双射，其逆为 $[U] \longmapsto [E_{\mathcal{C}}(U)]$。事实上，由于引理 3.1.3 上述所有内容对每个函子 r_j仍然成立。因此我们有双射

$$\begin{aligned} \mathbf{Sp}(\mathcal{C}) &\xrightarrow{\simeq} \mathbf{Sp}(\mathcal{A}_j) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Sp}(\mathcal{A}) \\ [E] &\longmapsto [r_j(E)] \longmapsto [r(E)] \ . \end{aligned} \tag{2}$$

3.4. 局部化子范畴。我们回顾一下，局部诺特格罗滕迪克范畴 $\mathcal{D}$ 的全子范畴 $\mathcal{L}$ 被称为局部化的，如果它对取子对象、商对象、扩张以及任意直和的运算都是封闭的。特别地，它是严格全的，并且包含零对象（作为空直和）。回顾下面的事实在技术上也很有用。设 $\mathcal{D}^{noeth}$ 表示 $\mathcal{D}$ 中所有诺特对象构成的全子范畴。

Proposition 3.4.1. *The map*

$$\begin{array}{ccc} \textit{collection of all localising} & \xrightarrow{\simeq} & \textit{collection of all Serre} \\ \textit{subcategories of } \mathcal{D} & & \textit{subcategories of } \mathcal{D}^{noeth} \\ \mathcal{L} & \longmapsto & \mathcal{L} \cap \mathcal{D}^{noeth} \end{array}$$

是一个双射；其逆将一个塞尔子范畴 $\mathcal{S}$ 发送到包含 $\mathcal{S}$的 $\mathcal{D}$ 的最小局部化子范畴$\langle \mathcal{S} \rangle$ ；等价地， $\langle \mathcal{S} \rangle$是由 $\mathcal{S}$中的对象的所有滤过余极限构成的全子范畴。

Proof. [Her] Thm. 2.8. □

Lemma 3.4.2. *If $\mathcal{L}$ is a localising subcategory of $\mathcal{C}$ then $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$ is localising in $\mathcal{A}$.*

证明。 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{L}$ 这两个范畴都对子对象、商对象和任意直和封闭。因此， $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$也满足这一性质。剩下只需考虑扩张。设 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个短正合列，且 X 和 Z 属于 $\mathcal{L}$。那么Z 必属于 $\mathcal{L}$，因而也属于 $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$。□

命题 3.4.3。映射

$$\begin{array}{ccc} \textit{collection of all localising} & \xrightarrow{\simeq} & \textit{collection of all localising} \\ \textit{subcategories of } \mathcal{C} & & \textit{subcategories of } \mathcal{A} \\ \mathcal{L} & \longmapsto & \mathcal{A} \cap \mathcal{L} \end{array}$$

是一个双射；其逆将 $\mathcal{A}$的局部化子范畴 $\mathcal{K}$ 映到包含 $\mathcal{K}$的 $\mathcal{C}$ 的最小局部化子范畴 $\langle \mathcal{K} \rangle$ 。

证明。显然有 $\mathcal{A}^{noeth} = \mathcal{A} \cap \mathcal{C}^{noeth}$。因此，命题 3.4.1 将所述双射性归结为映射的双射性

$$\begin{array}{ccc} \text{collection of all Serre} & \xrightarrow{\simeq} & \text{collection of all Serre} \\ \text{subcategories of } \mathcal{C}^{noeth} & & \text{subcategories of } \mathcal{A}^{noeth} \\ \mathcal{S} & \longmapsto & \mathcal{A} \cap \mathcal{S} \ . \end{array}$$

但由定义 3.1.1.c 可知，任何这样的 $\mathcal{S}$ 都是 $\mathcal{C}^{noeth}$中包含 $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$的最小 Serre 子范畴。另一方面，设 $\mathcal{T}$是 $\mathcal{A}^{noeth}$的一个 Serre 子范畴。我们定义$\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{C}^{noeth}$ 的全子范畴，其对象 V 具有有限滤过 $0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq .. \subseteq V_m = V$，其中 V_j/V_{j-1} 属于 $\mathcal{T}$，对任意 $1 \leq j \leq m$均成立。容易验证， $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{C}^{noeth}$ 的 Serre 子范畴，并且 $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = \mathcal{T}$。□

上述命题 3.4.3当然也相应地成立，只需将 $\mathcal{A}$ 替换为 $\mathcal{A}_j$。对于局部诺特格罗滕迪克范畴 $\mathcal{D}$ 的任意局部化子范畴 $\mathcal{L}$，定义子集

$$A(\mathcal{L}) := \{[E] \in \mathbf{Sp}(\mathcal{D}) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(V, E) = 0 \text{ for any } V \in \mathrm{ob}(\mathcal{L})\}$$

属于 $\mathbf{Sp}(\mathcal{D})$。这些子集 $A(\mathcal{L})$ 构成 $\mathbf{Sp}(\mathcal{D})$ 上一个拓扑的闭集，该拓扑称为 齐格勒拓扑 (参见 [Her] 定理 3.4)。事实上，由命题 3.4.1 和 [Her] 定理 3.8，可知映射

$$\begin{array}{ccc} \text{collection of all localising} & \xrightarrow{\simeq} & \text{set of all Ziegler-closed} \\ \text{subcategories of } \mathcal{D} & & \text{subsets of } \mathbf{Sp}(\mathcal{D}) \\ \mathcal{L} & \longmapsto & A(\mathcal{L}) \end{array} \tag{3}$$

是一个反转包含关系的双射。这意味着，$\mathbf{Sp}(\mathcal{D})$ 的 Ziegler 闭子集对 $\mathcal{D}^{noeth}$ 的 Serre 子范畴以及 $\mathcal{D}$ 的局部化子范畴进行了分类。这也意味着，可以通过 $A(\mathcal{L})$ 重构 $\mathcal{L}$，方法是

$$\mathrm{ob}(\mathcal{L}) = \{V \in \mathrm{ob}(\mathcal{D}) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(V, E) = 0 \text{ for all } [E] \in A(\mathcal{L})\}.$$

推论 3.4.4。 映射 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Sp}(\mathcal{A}_j) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Sp}(\mathcal{A})$ 在 (2) 对于 Ziegler 拓扑都是同胚。

证明。利用 [她的] 命题 3.2 和推论 3.5，我们看到定义 3.1.1.c 意味着 se ts

$$O_{\mathcal{C}}(U) := \{[E] \in \mathbf{Sp}(\mathcal{C}) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, E) \neq 0\},$$
$$\text{resp. } O_{\mathcal{A}}(U) := \{[r(E)] \in \mathbf{Sp}(\mathcal{A}) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, r(E)) \neq 0\},$$

对于 $U \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$，构成 $\mathrm{Sp}(\mathcal{C})$ 和 $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ 中 Ziegler 开子集的基。但对于这样的U，我们有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, E) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, r(E))$，因为 r 是包含函子的右伴随。□

Later on another topology on $\mathbf{Sp}(\mathcal{D})$ will be more important for our purposes.

Proposition 3.4.5. *For a localising subcategory $\mathcal{L}$ of $\mathcal{D}$, the following are equivalent:*

a) *there is a noetherian object C in $\mathcal{D}$ such that $\mathcal{L}$ is the smallest localising subcategory containing C;*
b) *there is a noetherian object C in $\mathcal{D}$ such that*

$$A(\mathcal{L}) = \{[E] \in \mathbf{Sp}(\mathcal{D}) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(C, E) = 0\};$$

c) *the Ziegler open subset $\mathbf{Sp}(\mathcal{D}) \setminus A(\mathcal{L})$ is quasi-compact.*

证明。对于 a.和 b.的等价性，我们更一般地考虑$\mathcal{D}$的任意对象，并令 $\langle C \rangle$ 表示包含 C 的最小局部化子范畴。令 E 为 $\mathcal{D}$ 中的任意内射对象。如果 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, E)$ 在 $\langle C \rangle$ 上为零，那么显然$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(C, E) = 0$。但 E 的内射性很容易推出反之亦然。因此，

$$A(\langle C \rangle) = \{[E] \in \mathbf{Sp}(\mathcal{D}) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(C, E) = 0\}.$$

For the equivalence of b. and c. see [Her] Cor. 3.9. □

$\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ 上以拟紧 Ziegler 开子集的补子模作为开子集基的拓扑，称为 Gabriel-Zariski 拓扑。

推论 3.4.6. 映射 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Sp}(\mathcal{A}_j) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Sp}(\mathcal{A})$ 在 (2) 是关于 Gabriel-扎里斯基拓扑的同胚。

3.5.稳定性。我们回顾一下，局部诺特格罗滕迪克范畴 $\mathcal{D}$ 的局部化子范畴若对取本质扩张封闭，则称其为稳定。

Lemma 3.5.1. *For any localising subcategory $\mathcal{L}$ of $\mathcal{D}$ the following are equivalent:*

a) *$\mathcal{L}$ is stable;*
b) *any indecomposable injective object of $\mathcal{D}$ either lies in $\mathcal{L}$ or has no non-zero subobject lying in $\mathcal{L}$.*

Proof. We argue similarly as in [Gol] Prop. 11.3.

a) $\Longrightarrow$ *b)*: 设 E 为 $\mathcal{D}$ 中的一个不可分解内射对象，并设 $t_{\mathcal{L}}(E)$表示 E 中包含在 $\mathcal{L}$的最大子对象。假设 $t_{\mathcal{L}}(E) \neq 0$。则 E 是 $t_{\mathcal{L}}(E)$的内射包，因此，由稳定性，包含在 $\mathcal{L}$中。

b) $\Longrightarrow$ *a)*: 我们将一个属于 $\mathcal{L}$ 的对象 V 的内射包 $E(V)$ 写成不可分解内射对象 E_i 的直和$E(V) = \oplus_{i\in I} E_i$。由于对于任意 $i \in I$， $E_i \cap V \neq 0$ 都属于 $\mathcal{L}$，我们可知所有 E_i，因此 $E(V)$ 也属于 $\mathcal{L}$。□

Corollary 3.5.2. *Let $\mathcal{L}$ be a stable localising subcategory of $\mathcal{D}$; then*

$$A(\mathcal{L}) = \{[E] \in \mathbf{Sp}(\mathcal{D}) : E \notin \mathrm{ob}(\mathcal{L})\} .$$

The following is a straightforward generalization of [Lou] Prop. 4.

Lemma 3.5.3. *For a subset $A \subseteq \mathbf{Sp}(\mathcal{D})$ the following are equivalent:*

a) $A = A(\mathcal{L})$ 对于一个稳定局部化子范畴 $\mathcal{L}$ 的 $\mathcal{D}$; b) 如果 $[E] \in \mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ 满足 同态集$_{\mathcal{D}}(E, E') \neq 0$ 对于某个 $[E'] \in A$，则 $[E] \in A$。

证明。 *a)* $\Longrightarrow$ *b)*：令 $[E'] \in A$（$\mathcal{L}$）使得同态集$_{\mathcal{D}}$（E， E'） $\neq 0$。则 E 不属于 $\mathcal{L}$。由于$\mathcal{L}$ 是稳定的，引理 3.5.1 适用，并告诉我们 E 没有任何非零子对象属于 $\mathcal{L}$。因此 $[E] \in A$（$\mathcal{L}$） $= A$。

b) $\Longrightarrow$ *a)*: 令 $\mathcal{L}$ 为 $\mathcal{D}$ 的局部化子范畴，由 E' 关于 $[E'] \in A$余生成。这意味着， $\mathcal{L}$ 是那些对象 V 的全子范畴，这些对象位于 $\mathcal{D}$ 中，并满足同态集$_{\mathcal{D}}(V, E') = 0$，对任意 $[E'] \in A$均如此。显然， $A \subseteq A(\mathcal{L})$。任取 $[E] \in A(\mathcal{L})$。则 E 不能属于 $\mathcal{L}$。因此，必存在一个 $[E'] \in A$，使得同态集$_{\mathcal{D}}(E, E') \neq 0$。由 (b) 可得$[E] \in A$。这表明 $A = A(\mathcal{L})$。为证明 $\mathcal{L}$ 是稳定的，我们使用引理 3.5.1。我们刚刚看到，不属于 $\mathcal{L}$ 的 E 必须具有 $[E] \in A(\mathcal{L})$。根据 $A(\mathcal{L})$的定义，这样的 E 没有位于 $\mathcal{L}$中的非零子对象。□

子集 $A \subseteq \mathbf{Sp}(\mathcal{D})$ 若具有以下形式，则称为 稳定的；若具有以下形式，则称为 稳定开： $A = A(\mathcal{L})$, 其中 是某个稳定局部化子范畴； $\mathcal{L}$ 如果 $\mathcal{D}$ 是稳定的，且在 Gabriel-Zariski 拓扑下是开集，则也称为稳定开。显然，例如由引理 3.5.3可知，任意稳定子集的交与并仍是稳定子集。因此，稳定子集（分别为稳定开子集）构成一个拓扑的开集；我们称之为 $\mathbf{Sp}(\mathcal{D})$ 上的稳定拓扑（分别为稳定 Zariski 拓扑）。

推论 3.5.4。 双射 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Sp}(\mathcal{A}_j) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Sp}(\mathcal{A})$ 在 (2) 保持稳定子集；特别地，其逆映射关于稳定拓扑是连续的。

证明。只需考虑映射 $\mathrm{Sp}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$，该映射将 $[E]$ 发送到 $[r(E)]$。设 $S \subseteq \mathrm{Sp}(\mathcal{C})$ 是任意稳定子集，且 $[r(E')]$ 是 S的像中的任意一点。现在假设存在 $[U] \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$，使得 同态集$_{\mathcal{A}}(U, r(E')) \neq 0$。那么 同态集$_{\mathcal{C}}(U, E') \neq 0$，从而 同态集$_{\mathcal{C}}(E_{\mathcal{C}}(U)\ E') \neq 0$。利用引理 3.5.3，我们推出 $[E_{\mathcal{C}}(U)] \in S$。但是 $U \cong r(E_{\mathcal{C}}(U))$。因此， $[U]$ 属于 S 的像。再次利用引理 3.5.3，我们得出 S 的像是稳定的。□

引理3.5.5.假设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{C}$的稳定局部化子范畴；那么，对于任意 $j \geq 0$， r 的右导出函子 $R^j r$ 将 $\mathcal{L}$ 映射到 $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$。

证明。设 V 是 $\mathcal{L}$ 中的任意对象。由于 $\mathcal{L}$ 稳定， V 在 $\mathcal{C}$ 中的内射包 $E(V)$ 已属于 $\mathcal{L}$。因此，我们可以在 $\mathcal{C}$ 中取 V 的内射分解 $V \xrightarrow{\simeq} I^\bullet$ ，其所有项都属于 $\mathcal{L}$。相关右导函子的值 $R^j r(V)$ 是复形 $r(I^\bullet)$ 的上同调对象。另一方面，定义 3.1.1.b 容易推出 r 将 $\mathcal{L}$ 映射到 $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$。由此可知，复形 $r(I^\bullet)$ 及其上同调对象也属于 $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$。□

本节余下部分，我们对 $\mathcal{A}$ 的增厚 $\mathcal{C}$ 施加附加条件： $\mathcal{A}$ 有一个诺特投射生成元 P。注意，此时 P 作为 $\mathcal{C}$ 中的对象也是诺特的。我们记 $H := \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P)^{\mathrm{op}} = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(P)^{\mathrm{op}}$ 为生成元 P 的自同态环的反环。在这种情况下，存在如下范畴等价

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\xrightarrow{\simeq} \mathrm{Mod}(H) \\ A &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, A) \end{aligned} \tag{4}$$

(参见 [Pop] 推论 5.9.5)。事实上，在 $\overset{j}{\mathcal{C}}(P, -)$ 上的 Ext函子 Ext函子 $\mathcal{C}$，对于 $j \geq 0$，可以自然地视为函子

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{C}}(P, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Mod}(H) \ .$$

In particular, the natural isomorphism

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{C}}(P, V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, R^j r(V)) \qquad \text{for any } V \text{ in } \mathcal{C} \text{ and any } j \geq 0 \tag{5}$$

from Cor. 3.2.2 is an isomorphism of H-modules.

Lemma 3.5.6. *Let A and V be objects in $\mathcal{A}$.*

a) *There is a natural exact sequence of abelian groups*

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, V) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(A, V) \xrightarrow{\varphi_{A,V}} \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, A), \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(P, V)) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(A, V) \ .$$

b) *If V is an injective object in $\mathcal{A}$, then $\varphi_{A,V}$ is a natural isomorphism.*

Proof. a) By Prop. 3.2.1 we have the convergent Grothendieck spectral sequence

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A, R^j r(V)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{C}}(A, V) \ .$$

The exact sequence of low degree terms is

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, r(V)) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(A, V) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R^1 r(V)) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(A, r(V)) \ .$$

Since V lies in $\mathcal{A}$ we have $r(V) = V$. Moreover, using (5) for the second equality, we obtain

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R^1 r(V)) &= \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, A), \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, R^1 r(V))) \\ &= \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, A), \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(P, V)) \ . \end{aligned}$$

b) Since V is injective, we have $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(A, V) = \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(A, V) = 0$. □

现在设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{C}$ 的局部化子范畴。那么 $\mathcal{L} \cap \mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 的局部化子范畴。我们希望研究 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$ 的稳定性要求之间的关系。如果 $\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{C}$ 中稳定，那么 $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$ 在 $\mathcal{A}$ 中稳定，这是显而易见的。反之则更为微妙。我们将 Mod(H) 中对应的局部化子范畴记为

$\mathcal{L}^H :=$ 本质的像 $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$ 在Mod(H) 中，在函子 同态集$_{\mathcal{A}}(P, -)$ 下。

命题 3.5.7. 假设 $\mathcal{A}\cap\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{A}$ 中稳定，并且 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(P,-)$ 将 $\mathcal{A}\cap\mathcal{L}$ 映射到$\mathcal{L}^H$。设 V 是 $\mathcal{C}$ 中的一个非零对象，使得

a) $V = r_1(V)$, *and*

b) $r(V)$ *is the largest subobject of* V *contained in* $\mathcal{L}$.

Then $V = r(V)$.

Proof. We first note that we have $r(V)\neq 0$ by Def. 3.1.1.b.

设 $E_{\mathcal{C}}(V)$ 是 $\mathcal{C}$ 中 V 的内射包，且 $E = r_1(E_{\mathcal{C}}(V))$。那么 $r(E) = r(E_{\mathcal{C}}(V))$ 是 $\mathcal{A}$ 中的内射对象，并且 $r(V)\subseteq r(E)$。事实上，我们有如下包含关系。

$$\begin{array}{ccccc} r(E) & & \xrightarrow{\quad=\quad} & & r(E_{\mathcal{C}}(V)) \\ \uparrow{\scriptstyle\subseteq} & & & & \downarrow{\scriptstyle\subseteq} \\ r(V) & \xrightarrow{\subseteq} & V & \xrightarrow{\subseteq} & E_{\mathcal{C}}(V). \end{array}$$

根据引理 3.3.1.a，扩张 $r(V)\subseteq V$是本质的。因此，扩张 $r(V)\subseteq r(E)$ 也同样是本质的。由于 $\mathcal{A}\cap\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{A}$ 中是稳定的，并且由于 $r(V)$ 根据假设 b)位于 $\mathcal{A}\cap\mathcal{L}$，我们看到 $r(E)$ 属于 $\mathcal{A}\cap\mathcal{L}$。

现在，由于 r_1 是左正合的，$V = r_1(V)\subseteq r_1(E_{\mathcal{C}}(V)) = E$。接下来，$(r(E)+V)/r(E)\cong V/(V\cap r(E)) = V/r(V)$，因为 r 是左正合的。由于 $r(V)$ 是包含于 $\mathcal{L}$ 中的 V 的最大子对象，我们看到 $V/r(V)$ 是 $\mathcal{L}$-无挠的。此外，$V = r_1(V)$ 意味着 $V/r(V)$ 属于 $\mathcal{A}$。我们推得 $(r(E)+V)/r(E)\cong V/r(V)$ 属于 $\mathcal{A}$ 且是 $\mathcal{L}$-无挠的。因此，我们需要证明 $V\subseteq r(E)$。

考虑任意中间对象 $r(E)\subseteq V''\subseteq V' := r(E)+V\subseteq E$ in $\mathcal{C}$。我们获- 得扩张类 $e' = [0\to r(E)\to V'\to V'/r(E)\to 0]\in \mathrm{Ext}$函子$^1_{\mathcal{C}}(V'/r(E)\ r(E))$ 以及类似地 $e''\in \mathrm{Ext}$函子$^1_{\mathcal{C}}(V''/r(E)\ r(E))$。注意 $V'/r(E)$、$V''/r(E)$ 和 $r(E)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的对象，其中 $V'/r(E)$ 和 $V''/r(E)$ 是 $\mathcal{A}\cap\mathcal{L}$-无挠的，且 $r(E)$ 在 $\mathcal{A}$ 中是内射对象。因此引理 3.5.6 适用。我们定义 H-模 N'':=同态集$_{\mathcal{A}}(P,V''/r(E))\subseteq N'$:=同态集$_{\mathcal{A}}(P,V'/r(E))$ 并得到交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(V'/r(E),r(E)) & \xrightarrow[\cong]{\varphi'} & \mathrm{Hom}_H(N',\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(P,r(E))) \\ {\scriptstyle\subseteq^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{res}} \\ \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(V''/r(E),r(E)) & \xrightarrow[\varphi'']{\cong} & \mathrm{Hom}_H(N'',\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(P,r(E))). \end{array}$$

具有水平同构。显然，左侧的垂直箭头将 e' 映射到 e''。由于 $r(E)$ 属于 $\mathcal{A}\cap\mathcal{L}$，根据我们的假设，$H$-模 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(P,r(E))$ 属于 $\mathcal{L}^H$。我们有一个 H-线性映射 $f' := \varphi'(e') : N'\to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(P,r(E))$。现在假设 $N'\neq 0$，并选取一个非零元素 $v\in N'$。令 J:=$\mathrm{Ann}_H(f'(v))\subseteq H$ 为湮灭左理想。于是 $H/J\cong Hf'(v)$ 属于 $\mathcal{L}^H$。现在我们具体考察 H-子模 N'':$= Jv\subseteq N'$。由范畴等价性，存在唯一一个如上所述的 V''，使得 $N''=\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,V''/r(E))$。我们先验证 $N''\neq 0$。否则就有 $J\subseteq\mathrm{Ann}_H(v)$，从而 H/J满射到 $Hv\subseteq N'$，这意味着 Hv 属于 $\mathcal{L}^H$。另一方面，模 $Hv\subseteq N'$ 是 $\mathcal{L}^H$-无挠的，这就产生了矛盾。因此 $N''\neq 0$。现在

$$\mathrm{res}(\varphi'(e'))(N'') = \mathrm{res}(f')(N'') = f'(N'') = f'(Jv) = Jf'(v) = 0\ .$$

因此，上述图表的交换性意味着扩张类 $e''=0$，即短正合列 $0\to r(E)\to V''\to V''/r(E)\to 0$ 在 $\mathcal{C}$ 中分裂。但由于

$V''/r(E) \neq 0$ 我们看到 $r(E)$ 在 E 中不是本质的，这与引理 3.3.1.a 矛盾。由此可知 N' 必为零，即 $r(E) + V = r(E)$。□

定理 3.5.8. 假设 $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$ 在 $\mathcal{A}$ 中是稳定的。则下列条件等价：

a) $\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{C}$中是稳定的，b) $R^j r$ 将 $\mathcal{L}$ 映射到 $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$ 对所有 $j \geq 0$，c) Ext函子$^j_{\mathcal{C}}(P, -)$ 将 $\mathcal{L}$ 映射到 $\mathcal{L}^H$ 对所有 $j \geq 0$，d) Ext函子$^1_{\mathcal{C}}(P, -)$ 将 $\mathcal{L}$ 映射到 $\mathcal{L}^H$，e) Ext函子$^1_{\mathcal{C}}(P, -)$ 将 $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$ 映射到 $\mathcal{L}^H$。

证明. a) $\Rightarrow$ b). 这是引理 3.5.5.

b) $\Rightarrow$ c). 这由 (5) 以及 $\mathcal{L}^H$ 的定义得出。

c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e). 这些是平凡的。

e) $\Rightarrow$ a). 令 E 为 $\mathcal{C}$ 中的一个不可分解内射对象，并令 Y为它在 $\mathcal{L}$中的最大子对象。我们假设 $Y \neq 0$，并将证明 $Y = E$。令 $E_n := r_n(E)$，其中 $n \geq 0\infty$ ∞，并注意到根据引理 3.1.5，$E = \bigcup E_n$。相应地，$Y = \bigcup Y_n$，其中 $Y_n := r_n(Y)$，$n=0$ $n=0$，并注意到对所有 $n \geq 0$，$Y_n = Y \cap V_n$ 成立，因为每个 r_n 都是左正合的。

由于 Y是包含于 $\mathcal{L}$中的 E 的最大子对象，E/Y是 $\mathcal{L}$-挠无的。因此，对于任意 $n \geq 0$，$(E_n + Y)/Y$也是 $\mathcal{L}$-挠无的。但 $(E_n + Y)/Y \cong E_n/(E_n \cap Y) = E_n/Y_n$。因此，对所有 $n \geq 0$，E_n/Y_n 都是 $\mathcal{L}$-挠无的，而 Y_n 是包含于 $\mathcal{L}$ 中的 E_n 的最大子对象。

结合 $Y \neq 0$，$Y_0 = r(Y)$ 也非零。由于 E 是 $\mathcal{C}$ 中的不可分解内射对象，因此 Y_0 在 E 中是本质的。

假设为了得出矛盾，$Y \neq E$，并设 n 是使得 $Y_n \neq E_n$ 的最小者。现在，$Y_0 \subseteq E_0$ 是 $\mathcal{A}$ 中的本质扩张，且 Y_0 位于 $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$ 中；由于 $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$ 在 $\mathcal{A}$ 中是稳定的，我们看到 $Y_0 = E_0$。因此 $n \geq 1$，而 n 的最小性意味着 $Y_{n-1} = E_{n-1}$，从而 $E_{n-1} \subseteq Y_n$。

现在，考虑短正合列

$$0 \to Y_n/E_{n-1} \to E_n/E_{n-1} \to E_n/Y_n \to 0$$

在 $\mathcal{A}$ 中。注意 Y_n/E_{n-1} 位于 $\mathcal{L}$ 中，且 E_n/Y_n 是 $\mathcal{L}$-无挠的且非零。如果 Y_n/E_{n-1} 也非零，则因为 $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}$ 在 $\mathcal{A}$ 中是稳定的，这个扩张不是本质的。这给出了 E_n 的某个子对象 W，它包含 E_{n-1}，使得 W/E_{n-1} 同构于 E_n/Y_n 的一个非零子对象；因此 W/E_{n-1} 也非零且 $\mathcal{L}$-无挠。如果 $Y_n = E_{n-1}$，则我们可以取 $W = E_n$ 来得到具有相同性质的对象。

记 $E_{-1} := 0$ 和 $X := W/E_{n-2} \subseteq E_n/E_{n-2}$，并考虑短正合列

$$0 \to E_{n-1}/E_{n-2} \to X \to W/E_{n-1} \to 0\ .$$

由于此短正合列的外项属于 $\mathcal{A}$，我们得到 $r_1(X) = X$。此外，$r(X) \subseteq r(E_n/E_{n-2}) = E_{n-1}/E_{n-2} = r(E_{n-1}/E_{n-2}) \subseteq r(X)$，其中左边的等式利用引理3.1.2.b 得出

$$r(X) = E_{n-1}/E_{n-2} \subsetneqq X\ .$$

由于 W/E_{n-1} 是 $\mathcal{L}$-挠无子的，且 $E_{n-1}/E_{n-2} = Y_{n-1}/E_{n-2}$ 是 Y的一个子商，因此我们看到 $r(X)$ 是包含在 $\mathcal{L}$中的 X 的最大子对象。现在应用命题 3.5.7，取 X便导出矛盾。□

3.6. 环论情形。本节讨论范畴 $\mathcal{C}$ =Mod(H) 中左 H-模的稳定性，其中环 H 假设为左诺特，且作为其中心 $Z(H)$ 上的模是有限生成的。本节内容将在 §3.7.

该环 $Z(H)$ 根据 [MCR] 推论 10.1.11(ii)。该环 H 也是右诺特环，而阿贝尔范畴 Mod(H) 和 Mod($Z(H)$) 是局部诺特 Grothendieck 范畴。当然，谱(H) 和谱($Z(H)$) 表示分别赋予其 Zariski 拓扑的环的素理想谱。

设 $\varrho : \mathrm{Mod}(H) \to \mathrm{Mod}(Z(H))$ 表示取底层 $Z(H)$-模的函子。由 [Gab] 第428页命题 10，Mod($Z(H)$) 的任何局部化子范畴都是稳定的。我们还有以下事实。

Lemma 3.6.1.

a)对于 Mod($Z(H)$)的任意局部化子范畴 $\mathcal{L}$ ， Mod(H)的局部化子范畴 $\varrho^{-1}(\mathcal{L})$ 是稳定的。b)对于任意序数 α ，我们有 $\varrho^{-1}(\mathrm{Mod}(Z(H))_\alpha)$ =Mod(H)$_\alpha$，因此其是稳定的。 c) 对于任意序数 $\alpha < \kappa(\mathrm{Mod}(H))$，我们有

$$\mathbf{Sp}_\alpha(\mathrm{Mod}(H)) = \{[E] \in \mathbf{Sp}(\mathrm{Mod}(H)) : \kappa(E) = \alpha + 1\}.$$

证明。 a) [Gab] 第 431 页命题 12。 b) 该等式见 [MCR] 推论 10.1.10，稳定性由 a) 得出。 c) 由 b) 可知，这由注记 2.2.1 得出。 □

接下来有:

(A) 连续映射 $\varphi : \mathrm{Spec}(H) \to \mathrm{Spec}(Z(H))$ 将 $\mathfrak{p}$ 映至 $\mathfrak{p} \cap Z(H)$，是一个满射且具有有限纤维（参见 [Gab] 第 429 页命题 11）。(B) 映射

$$\begin{aligned} \mathbf{Sp}(\mathrm{Mod}(H)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(H) \\ [J] &\longmapsto \text{the unique prime ideal associated to } J. \end{aligned} \tag{6}$$

是一个同胚，其中左侧和右侧分别赋予 Gabriel-Zariski 拓扑和 Zariski 拓扑（[Ste] 定理 VII.2.1；注意到 H 由 [Ste] VII §2 例 4 可知是全左有界且全右有界的）， [Gab] V §4）。令 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(H)$。取 $H/\mathfrak{p}$ 在 Mod(H) 中的一个内射包 $E(H/\mathfrak{p})$。由 [Ste] 命题 VII.1.9，我们知道，对于某个不可分解内射 H-模 $E_\mathfrak{p}$，有 $E(H/\mathfrak{p}) \cong \oplus_{i\in I} E_\mathfrak{p}$ 。利用 [Ste] 引理 VII.1.7，我们看到，双射 (6) 的逆由 $\mathfrak{p} \longmapsto [E_\mathfrak{p}]$ 给出。

首先我们描述稳定 Zariski 拓扑，其中我们将始终默默地进行等同（6）。因此在谱($Z(H)$)上，稳定 Zariski 拓扑就是 Zariski 拓扑。从[Gab] V §4 我们知道谱(H)的 Ziegler 开子集是 Zariski 闭子集的可能无限并。因此拟紧的 Ziegler 开子集就是 Zariski 闭子集。因此稳定 Zariski 拓扑的开子集就是稳定 Zariski 开子集。

引理 **3.6.2.** *$A(\varrho^{-1}(\mathcal{L})) = \varphi^{-1}(A(\mathcal{L}))$ for any localising subcategory $\mathcal{L}$ of* $\mathrm{Mod}(Z(H))$.

Proof. (Recall the notation $A(\mathcal{L})$ from §3.4.) Using Cor. 3.5.2 we compute

$$\begin{aligned} A(\varrho^{-1}(\mathcal{L})) &= \{\mathfrak{p} \notin \mathrm{Spec}(H) : E_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{ob}(\varrho^{-1}(\mathcal{L}))\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(H) : H/\mathfrak{p} \notin \mathrm{ob}(\varrho^{-1}(\mathcal{L}))\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(H) : \varrho(H/\mathfrak{p}) \notin \mathrm{ob}(\mathcal{L})\} \\ &\supseteq \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(H) : Z(H)/\varphi(\mathfrak{p}) \notin \mathrm{ob}(\mathcal{L})\} \\ &= \varphi^{-1}(A(\mathcal{L})) \ . \end{aligned}$$

对于反向包含，假设 $Z(H)/\varphi(\mathfrak{p})$ 属于 $\mathcal{L}$。由于 $Z(H)/\varphi(\mathfrak{p})$-模 $\varrho(H/\varphi(\mathfrak{p})H)$ 是有限生成的，它也必属于 $\mathrm{ob}(\mathcal{L})$，因此 $H/\varphi(\mathfrak{p})H \in \mathrm{ob}(\varrho^{-1}(\mathcal{L}))$。由此可得，作为 $H/\varphi(\mathfrak{p})H$ 的商， $H/\mathfrak{p}$ 包含于 $\mathrm{ob}(\varrho^{-1}(\mathcal{L}))$。□

引理 3.6.3. 对于 $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in$ 谱(H)，我们有：

a) 设 $z \in Z(H)$；若 $z \in \mathfrak{p}$，则 z 在 $E_{\mathfrak{p}}$ 上局部幂零作用；若 $z \notin \mathfrak{p}$，则 z 在 $E_{\mathfrak{p}}$ 上可逆地作用。 b) 若 $\mathrm{Hom}_H(E_{\mathfrak{p}}, E_{\mathfrak{q}}) \neq 0$，则 $\mathfrak{p} \cap Z(H) \subseteq \mathfrak{q} \cap Z(H)$。

证明. a) 设 L 是 $H/\mathfrak{p}$ 中的一致左理想，使得 $E_{\mathfrak{p}}$ 是 L的内射包 $E(L)$。

首先假设 $z \notin \mathfrak{p}$。乘以 z 是一个内射的 H-线性映射 $\ell_z : H/\mathfrak{p} \to H/\mathfrak{p}$: 如果 $x + \mathfrak{p} \in H/\mathfrak{p}$ 使得 $z(x + \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ 则$(HzH)(HxH) \subseteq \mathfrak{p}$ 因为 z 在 H中是中心的，所以 $x \in \mathfrak{p}$ 因为 $\mathfrak{p}$ 是素的且 $z \notin \mathfrak{p}$。由于 L 是 $H/\mathfrak{p}$的一个 H-子模， $\ell_z : L \to L$ 也是内射的。因此它通过 $E(L)$的内射性延拓为一个内射的 H-线性映射 $\ell_z : E(L) \to E(L)$。 ℓ_z 的像必须在 $E(L)$中有一个补子模，因为它本身是内射的。由于$E(L) \cong E_{\mathfrak{p}}$ 是不可分解的， $\ell_z : E(L) \to E(L)$是一个同构，如所声称。

现在设 $z \in \mathfrak{p}$，并令 $x \in E_{\mathfrak{p}}$ 非零。由于 L 在 $E_{\mathfrak{p}}$中是本质的，我们看到$Hx \cap L$ 在 Hx中也是本质的。由于 H 是诺特的且 z 是中心的， zH 的理想满足左阿廷–里斯性质，根据 [MCR] 命题 4.2.6。由于 $z \in \mathfrak{p}$ 湮灭 L，它也湮灭 $Hx \cap L$。因此，根据[MCR] 定理4.2.2中从 (i) $\Rightarrow$ (iii) 的蕴含关系， z^n 对某个 $n \geq 1$ 湮灭 Hx 。

b)设 $\phi : E_{\mathfrak{p}} \to E_{\mathfrak{q}}$ 是一个非零映射。假设存在一个 $z \in (\mathfrak{p} \cap Z(H)) \setminus \mathfrak{q}$。那么，根据a)，$z$ 在 $E_{\mathfrak{q}}$上可逆地作用，但在 $E_{\mathfrak{p}}$ 上局部幂零。考虑任意 $x \in E_{\mathfrak{p}}$ 使得$\phi(x) \neq 0$。我们找到一个 $t \geq 1$ 使得 $z^t x = 0$。因此 $z^t \phi(x) = \phi(z^t x) = \phi(0) = 0$，这就产生了矛盾。□

对于任意子集 $A \subseteq$谱(H)，全子范畴 $\mathcal{L}_A$ 由 $\mathrm{Mod}(H)$ 中满足$\mathrm{Hom}_H(U, E_{\mathfrak{p}}) = 0$对任意 $\mathfrak{p} \in A$的所有模 U 组成，是 $\mathrm{Mod}(H)$ 的局部化子范畴。显然我们有 $A \subseteq A(\mathcal{L}_A)$。

We now describe explicitly all localising subcategories of $\mathrm{Mod}(H)$ which are of the form $\rho^{-1}(\mathcal{L})$ as in Lemma 3.6.1.a.

回想一下，拓扑空间 T 的子集 S 称为泛化闭，如果任意一个其闭包 $\overline{\{y\}}$ 包含 S 中某个点的点 $y \in T$ 也属于 S。等价地， S 是泛化闭的，当且仅当它是 T 的若干开子集的（可能无限）交集。

在引理 3.6.2 之前，我们已指出，$\mathrm{Spec}(H)$ 的 Ziegler 开子集是 Zariski 闭子集的并。因此，Ziegler 闭子集是泛化闭子集。

Therefore the inverse of the bijection (3) is the map

$$\begin{array}{ccc} \text{set of all generalization-closed} & \xrightarrow{\simeq} & \text{collection of all localising} \\ \text{subsets of } \mathrm{Spec}(Z(H)) & & \text{subcategories of } \mathrm{Mod}(Z(H)) \end{array}$$

$$W \longmapsto \mathcal{L}_W^Z := \text{ all } M \text{ with } \mathrm{Hom}_{Z(H)}(M, E) = 0 \text{ for any } [E] \in W.$$

We conclude from Lemma 3.6.2 that

$$\varrho^{-1}(\mathcal{L}_W^Z) = \mathcal{L}_{\varphi^{-1}(W)} \ . \tag{7}$$

For an ideal I of $Z(H)$, recall that $V(I)$ denotes the subset of $\mathrm{Spec}(Z(H))$ consisting of all prime ideals containing I.

Proposition 3.6.4. *Let W be a generalization-closed subset of $\mathrm{Spec}(Z(H))$. The following are equivalent for an H-module M:*

a) M 属于 $\mathcal{L}_{\varphi^{-1}(W)}$; b) $V(\mathrm{Ann}^{Z(H)}(v)) \cap W = \emptyset$ 对所有非零 $v \in M$;

c) $V(\mathrm{Ann}^{Z(H)}(N)) \cap W = \emptyset$对所有诺特子模 $N \subseteq M$。

证明。由于 $\mathcal{L}_{\varphi^{-1}(W)}$ 是局部化的，我们可以假设 M是有限生成的。如果 v_1、.....、 v_r是 H-模 M 的生成元，那么

$$V(\mathrm{Ann}_{Z(H)}(M)) = V\left(\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ann}_{Z(H)}(v_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{r} V(\mathrm{Ann}_{Z(H)}(v_i)) \ .$$

这说明 b) 与 c) 等价。

为了证明 a) 与 b) 等价，我们首先注意到，由于 H 是诺特的， M 包含一个形如 $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_r$的本质子模 N，其中每个 N_i都是一致的 H-模（[GW]推论 5.18 和命题 5.15）。因此 $E(M) = E(N) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} E(N_i)$。根据 [GW]引理 5.26，对于每个 $i = 1$、 $\cdots$、 r，存在唯一的 H的素理想 $\mathfrak{p}_i$，它等于某个非零 H-子模 N_i' 的湮灭子，并且包含所有非零 H-子模 N_i 的湮灭子。按照 [GW] 第 102 页上的定义，这个 $\mathfrak{p}_i$ 就是 N_i 的关联素理想。

由于 H 被假设为其中心上的有限生成模，因此根据 [GW] 命题 9.1(a)，我们可以应用 [GW] 命题 9.14 来看出，一致内射H-模 $E(N_i)$ 同构于 H-内射包 $E(L_i)$（任意一致左理想 L_i 的$H/\mathfrak{p}_i$）。换言之（[GW] 引理 5.14）， $E(N_i) \cong E_{\mathfrak{p}_i}$，并且

$$E(M) \cong E(N) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} E(N_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\mathfrak{p}_i} \ .$$

我们将 M 与其在 $E(M)$ 中的像等同。注意，对于任意 j， M 都不包含在直和 $\bigoplus_{i \neq j} E_{\mathfrak{p}_i}$ 中，否则就会有 $M \cap E_{\mathfrak{p}_j} = 0$，这与 M 是 $E(M)$ 中的本质的这一事实矛盾。因此，对于任意 j，$\mathrm{Hom}_H(M, E_{\mathfrak{p}_j})$ 都非零。

a) $\Rightarrow$b)。假设 M属于 $\mathcal{L}_{\varphi^{-1}(W)}$。由$\mathrm{Hom}_H(M, E_{\mathfrak{p}_j}) \neq 0$ 对任意 j，我们推出$\mathfrak{p}_j \notin \varphi^{-1}(W)$对所有 j 均成立。现在考虑任意非零 $v \in M$ 以及任意 $\mathfrak{p} \in \varphi^{-1}(V(\mathrm{Ann}^{Z(H)}(v)))$。由于根据引理 3.6.3.a, $\mathfrak{p}_i \cap Z(H)$ 在 $E_{\mathfrak{p}_i}$ 上作用为局部幂零，我们看到

$$((\mathfrak{p}_1 \cap Z(H))(\mathfrak{p}_2 \cap Z(H)) \cdots (\mathfrak{p}_r \cap Z(H))^k \cdot v = 0$$

对于某个 $k > 0$。这意味着对于某个 j， $\mathfrak{p}_j \cap Z(H) \subseteq \mathfrak{p} \cap Z(H)$。由于 W 在泛化下封闭且 $\mathfrak{p}_j \cap Z(H) \notin W$，我们看到 $\mathfrak{p} \cap Z(H) \notin W$。因此 $V(\mathrm{Ann}^{Z(H)}(v)) \cap W = \emptyset$。

b) $\Rightarrow$ a)。假设 $\mathrm{Hom}_H(M, E_{\mathfrak{q}}) \neq 0$对某个 $\mathfrak{q} \in \varphi^{-1}(W)$成立。那么 $\mathrm{Hom}_H(E_{\mathfrak{p}_i}, E_{\mathfrak{q}}) \neq 0$对某个 $1 \leq i \leq r$ 成立，因此 $\mathfrak{p}_i \cap Z(H) \subseteq \mathfrak{q} \cap Z(H)$，依据引理 3.6.3.b。于是 $\mathfrak{p}_i \cap Z(H) \in W$，因为 W 是泛化闭的。

取一个非零元素 $v \in N_i'$；由于 $\mathfrak{p}_i$杀死 $N_i' \supseteq Hv$，我们有 $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathrm{Ann}_H(Hv)$；另一方面， $\mathfrak{p}_i$ 包含 $\mathrm{Ann}_H(Hv)$，正如我们上面所看到的，因此 $\mathfrak{p}_i = \mathrm{Ann}_H(Hv)$。由于 $Z(H)$ 在 H 中是中心的，我们有$\mathrm{Ann}^{Z(H)}(v) = \mathrm{Ann}^{Z(H)}(Hv)$。 $Z(H)$的这个理想等于 $\mathrm{Ann}_H(Hv) \cap Z(H) = \mathfrak{p}_i \cap Z(H)$。因此$\mathrm{Ann}^{Z(H)}(v) = \mathfrak{p}_i \cap Z(H)$ 包含于 W，从而 $V(\mathrm{Ann}^{Z(H)}(v)) \cap W \neq \emptyset$。□

Obviously we have a corresponding result for modules over $Z(H)$.

Remark 3.6.5. *Let W be a generalization-closed subset of* $\mathrm{Spec}(Z(H))$. *The following are equivalent for a $Z(H)$-module M:*

a) M 属于$\mathcal{L}_W^Z$； b) $V(\mathrm{Ann}^{Z(H)}(v)) \cap W = \emptyset$ 对所有非零 $v \in M$；

c) $V(\mathrm{Ann}^{Z(H)}(N)) \cap W = \emptyset$对所有诺特子模 $N \subseteq M$。

3.7. 加厚的稳定性准则。 在本节中，设 $\mathcal{C}$ 是其全阿贝尔子范畴 $\mathcal{A}$的一个局部诺特格罗滕迪克范畴，且是该子范畴的加厚。回顾 §3，我们于是得到 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \hookrightarrow \mathcal{A}_1 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathcal{A}_j \hookrightarrow \ldots$ 的递增滤链， $\mathcal{C}$ 其各项均为全阿贝尔子范畴，且都是局部诺特格罗滕迪克范畴。由（2），相应的内射谱之间均存在双射

$$\begin{aligned} \mathbf{Sp}(\mathcal{C}) &\xrightarrow{\simeq} \mathbf{Sp}(\mathcal{A}_j) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Sp}(\mathcal{A}) \\ [E] &\longmapsto r_j([E]) \longmapsto r([E]) \ . \end{aligned}$$

根据推论 3.4.6 和推论 3.5.4 这些双射的逆映射对于稳定拓扑以及稳定扎里斯基拓扑都是连续的。事实上，很容易推得，对于 $i \leq j$，映射

$$\begin{aligned} \mathbf{Sp}(\mathcal{A}_j) &\xrightarrow{\simeq} \mathbf{Sp}(\mathcal{A}_i) \\ x = [E_x] &\longmapsto r_{j,i}(x) := r_i(x) = [r_i(E_x)] \end{aligned}$$

is a bijection with inverse $[U] \mapsto [E_{\mathcal{A}_j}(U)]$, and this inverse is continuous for the stable as well as the stable Zariski topologies.

在本节中，我们将介绍一种实际寻找 $\mathbf{Sp}(\mathcal{C}$ 中稳定子集的技巧。为此，从现在起我们再次假设 $\mathcal{A}$ 有一个诺特投射生成元 P。回顾 $H = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P)^{\mathrm{op}} = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(P)^{\mathrm{op}}$，并令 $Z = Z(H)$ 表示它的中心。由范畴等价（4），此中心 Z 自然作用于 $\mathcal{A}$ 中的任意对象上，即 $Z = Z(\mathcal{A})$ 是范畴 $\mathcal{A}$ 的中心。

But we need further assumptions. The first one is:

(A1) H 作为其 中心 Z上的模是有限生成的。

The central tool for our investigation will be the (graded) (H, H)-bimodule

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{C}}(P, P) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(P, P) \ .$$

特别地，这是一个关于 $Z\otimes Z := Z\otimes_{\mathbb{Z}} Z$ 的模。令 $\mathcal{J} := \mathrm{Ann}_{Z\otimes Z}(\text{Ext函子}^*_{\mathcal{C}}(P,P))$ 为其湮灭理想，并令 $\mathcal{R} := V(\mathcal{J}) \subseteq$ 谱$(Z\otimes Z)$ 为相应的 Zariski 闭子集。进一步地，令 $\pi_i : \mathcal{R} \to \Xi := $ 谱(Z)（其中 $i = 1$取 2）表示两个投影映射谱$(Z\otimes Z) \rightrightarrows \Xi$ 的限制。于是我们得到一个余等化子图

$$\mathcal{R} \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} \Xi \xrightarrow{\mathbf{q}} \mathfrak{Z}$$

在局部环化空间范畴中（参见 [DG] 命题 I.1.1.6）。我们简要回顾，$\mathbf{q}$ 是一个拓扑商映射，它将点 $\pi_1(x)$ 与 $\pi_2(x)$ 对所有 $x\in\mathcal{R}$ 等同起来，并且层 $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ 对于任意开子集 $U\subseteq\Xi$ 由等化子图表给出

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}(U) \xrightarrow{\mathbf{q}^{\#}=\subseteq} \mathcal{O}_{\Xi}(\mathbf{q}^{-1}(U)) \underset{\pi_2^{\#}}{\overset{\pi_1^{\#}}{\rightrightarrows}} \mathcal{O}_{\mathcal{R}}((\mathbf{q}\pi_i)^{-1}(U)) \ .$$

在第 3.6 节中，我们考虑了对于任意泛化封闭子集 $W\subseteq\Xi$，局部化子范畴 $\mathcal{L}^{Z}_{W}\text{of}\ \mathrm{Mod}(Z)$ 以及 $\mathcal{L}^{H}_{W} := \mathcal{L}_{\varphi^{-1}(W)}\,\text{of}\,\mathrm{Mod}(H)$。它们满足 $\varrho^{-1}(\mathcal{L}^{Z}_{W}) = \mathcal{L}^{H}_{W}$，由 (7)。在范畴等价 (4) 下，子范畴 $\mathcal{L}^{H}_{W}$ 对应于局部化子范畴

$$\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{W} := \text{ all } A \text{ in } \mathcal{A} \text{ such that } \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,A) \text{ lies in } \mathcal{L}^{H}_{W}$$

of $\mathcal{A}$。最后，由命题 3.4.3，我们有局部化子范畴 $\mathcal{L}^{\mathcal{C}}_{W} := \langle \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{W}\rangle$ of $\mathcal{C}$，它是 $\mathcal{C}$ 的唯一局部化子范畴，使得 $\mathcal{A}\cap\mathcal{L}^{\mathcal{C}}_{W} = \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{W}$。

定理 3.7.1. 除 (A1) 外，我们还假设：

(A2) 存在一个整数 d，使得对任意 $j>d$，Ext函子$^{j}_{\mathcal{C}}(P,-)|_{\mathcal{A}} = 0$。

(A3) $Z\otimes Z/\mathcal{J}^{d+1}$ 是诺特的。

那么，对任意具有如下性质的泛化封闭子集 $W\subseteq\Xi$： $\pi_2(\pi_1^{-1}(W)) \subseteq W$，局部化子范畴 $\mathcal{L}^{\mathcal{C}}_{W}$ 是稳定的。

我们先回顾一个有用的事实，再开始证明。

引理 3.7.2. 设 M 是范畴 $\mathcal{C}$中的一个诺特对象。那么，对所有 $j\geq 0$，Ext函子$^{j}_{\mathcal{C}}(M,-)$与滤过余极限可交换。

证明。 在格罗滕迪克范畴 $\mathcal{C}$ 中，滤过余极限是正合的。此外，由于 $\mathcal{C}$ 是局部诺特的，且 M 是 $\mathcal{C}$中的一个诺特对象， [Gab] 第 358 页的推论 1 告诉我们：

– $\mathcal{C}$ 中的内射对象的全子范畴在滤过余极限下封闭； – 函子 $F := $ 同态集$_{\mathcal{C}}(M,-)$从 $\mathcal{C}$ 到阿贝尔群范畴保持滤过余极限。

在这种情况下， [KS] 命题 15.3.3 意味着导出函子 $R^jF = \text{Ext函子}^{j}_{\mathcal{C}}(M,-)$ 的 F与滤过余极限交换。 □

接下来，我们首先需要一个辅助结果。由于环 $Z\otimes Z$ 作用于 $Z = Z(\mathcal{A})$，对于任意两个对象 A_1 和 A_2，环 $\mathcal{A}$ 都自然地作用在群 $\mathrm{Ext}^{j}_{\mathcal{C}}(A_1,A_2)$ 上，其中第一因子和第二因子分别通过范畴 $\mathcal{C}$ 中作用于 A_1 和 A_2 的自同态起作用。

引理3.7.3. 假设 (A2)成立，并令 A 为 $\mathcal{A}$中的任意对象；那么，对于任意 $j\geq 0$， $Z\otimes Z$-模 Ext函子$^{j}_{\mathcal{C}}(P,A)$ 被 $\mathcal{J}^{d+1-j}$ 湮灭。

证明。 根据引理 3.7.2，函子 Ext函子$^j_{\mathcal{C}}(P,\ -)$，对于任意 $j \geq 0$，都与任意直和交换。因此，$\mathcal{J}$湮灭Ext函子$^*_{\mathcal{C}}(P,\ F)$，其中任意 F是 P的有限或无限个副本的直和。由于 P 是[2]的生成元，利用 [Ste] 第93页命题6.2反复应用，我们得到 $\mathcal{A}$ 中的一个形如

$$\ldots \longrightarrow F_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

where each F_n is a direct sum of copies of P. We break it up into short exact sequences

$$\begin{aligned}
&0 \to Y_0 \to F_0 \to A \to 0\\
&0 \to Y_1 \to F_1 \to Y_0 \to 0\\
&\ldots\\
&0 \to Y_n \to F_n \to Y_{n-1} \to 0\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Applying $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{C}}(P,-)$ we obtain exact sequences

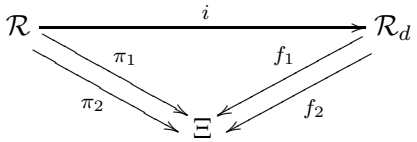
$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(P,F_0) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(P,A) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{C}}(P,Y_0)\\
&\mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{C}}(P,F_1) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{C}}(P,Y_0) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{i+2}_{\mathcal{C}}(P,Y_1)\\
&\ldots\\
&\mathrm{Ext}^{i+n}_{\mathcal{C}}(P,F_n) \to \mathrm{Ext}^{i+n}_{\mathcal{C}}(P,Y_{n-1}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{i+n+1}_{\mathcal{C}}(P,Y_n)\ ,\\
&\ldots
\end{aligned}$$

其中 δ 表示连接同态。这些都是 $Z\otimes Z$-双模序列。每个序列的第一项都被 $\mathcal{J}$ 消去。现在取 $n := d-i$。于是 $\mathrm{Ext}^{i+n+1}_{\mathcal{C}}(P,Y_n) = 0$。现在沿着上述序列向下归纳即可得出结论。□

定理 3.7.1 的证明。由于 $\mathcal{L}^H_W = \varrho^{-1}(\mathcal{L}^Z_W)$，由引理 3.6.1 可知 $\mathcal{L}^H_W$ 在 $\mathrm{Mod}(H)$ 中是稳定的。因此，$\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_W = \mathcal{L}^{\mathcal{C}}_W \cap \mathcal{A}$ 在 $\mathcal{A}$ 中是稳定的。于是，根据定理 3.5.8，只需证明函子 Ext函子$^1_{\mathcal{C}}(P,-)$ 将 $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_W$映到 $\mathcal{L}^H_W$。根据引理 3.7.2，函子 Ext函子$^1_{\mathcal{C}}(P,-)$ 与滤过余极限相交换。因此，只需证明对于 $\mathcal{L}^{\mathcal{C}}_W \cap \mathcal{A}$ 中的任意诺特对象 A，H-模 $M :=$ Ext函子$^1_{\mathcal{C}}(P,A)$ 属于 $\mathcal{L}^H_W$。由于函子 Ext函子$^1_{\mathcal{C}}(P,-)$ 也是半正合的，我们可以进一步利用同态集$_{\mathcal{A}}(P,A)$ 的一个素级数（如 [GW] 命题 3.13 中所述），假设 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,A)$ 的任意非零 H-子模的湮灭子都是 $\mathfrak{p}$ 的H中的一个素理想。于是必有 $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_H($同态集$_{\mathcal{A}}(P,A))$，并记 $\mathfrak{p}_Z := \mathfrak{p} \cap Z \in \Xi$。

根据引理 3.7.3 该 $Z\otimes Z$-模 $M =$ Ext函子$^1_{\mathcal{C}}(P,A)$被 $\mathcal{J}^{d+1}$湮灭。令 $\mathcal{R}_d :=$谱$((Z\otimes Z)/\mathcal{J}^{d+1}$，于是我们可以自然地将 M 视为一个 $\mathcal{O}(\mathcal{R}_d) = (Z\otimes Z)/\mathcal{J}^{d+1}$-模。接下来，考虑交换图

(8)



where i is the closed embedding, and the f_j are, similarly as before, the restrictions of the two projection maps.

[2]The projectivity of P is not needed for this argument.

令 $S:=\Xi\backslash W$；那么我们的假设 $\pi_2(\pi_1^{-1}(W))\subseteq W$等价于 $\pi_1^{-1}(W)\subseteq\pi_2^{-1}(W)$，这与 $\pi_2^{-1}(S)\subseteq\pi_1^{-1}(S)$ 相同。由于 $\pi_j=f_j\circ i$，这等价于 $i^{-1}f_2^{-1}(S)\subseteq i^{-1}f_1^{-1}(S)$。然而，$i$ 是一个双射，因为 $\mathcal{J}$模 $\mathcal{J}^{d+1}$ 幂零，因此这又等价于 $f_2^{-1}(S)\subseteq f_1^{-1}(S)$。

现在，$\mathfrak{p}$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,A)$ 的任何非零 H-子模的湮灭子，因此对所有非零 $v\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,A)$ 有 $\mathfrak{p}_Z=\mathfrak{p}\cap Z=\mathrm{Ann}_Z(v)$。由于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,A)$ 位于 $\mathcal{L}_W^H$ 中，这意味着$V(\mathfrak{p}_Z)\cap W=\emptyset$由命题 3.6.4，从而 $V(\mathfrak{p}_Z)\subseteq S=\Xi\setminus W$。

由假设 $\mathcal{O}(\mathcal{R}_d)=(Z\otimes Z)/\mathcal{J}^{d+1}$ 是诺特的。设 $\bar{i}_2\colon Z\to(Z\otimes Z)/\mathcal{J}^{d+1}$，将$z$映到 $1\otimes z+\mathcal{J}^{d+1}$，为诱导 f_2 的环同态。设 $Q_1,\cdots,Q_k\subseteq\mathcal{O}(\mathcal{R}_d)$ 为位于 $\bar{i}_2(\mathfrak{p}_Z)\mathcal{O}(\mathcal{R}_d)$ 之上的极小素理想；则对某些正整数 $a_1,\cdots,a_k$ 有 $Q_1^{a_1}\cdots Q_k^{a_k}\subseteq\bar{i}_2(\mathfrak{p}_Z)\mathcal{O}(\mathcal{R}_d)$。由于 $Q_j\in f_2^{-1}(V(\mathfrak{p}_Z))\subseteq f_2^{-1}(S)\subseteq f_1^{-1}(S)$，我们看到对所有 $j=1,\cdots,k$，$\mathfrak{q}_j:=f_1(Q_j)$ 位于 S 中。因此对所有 j 有 $V(\mathfrak{q}_j)\subseteq S$，因为 S 是特殊化闭的。

由于 同态集$_{\mathcal{A}}(P,A)$ 也被 A $\mathfrak{p}_Z$消去。因此 $M=$Ext函子$^1_{\mathcal{C}}(P,A)$ 也被 $Z\otimes\mathfrak{p}_Z$以及 $\mathcal{J}^{d+1}$消去。我们看到，M被 $\bar{i}_2(\mathfrak{p}_Z)\mathcal{O}(\mathcal{R}_d)\supseteq Q_1^{a_1}\cdots Q_k^{a_k}$ 消去。因此 $\mathfrak{q}_1^{a_1}\cdots\mathfrak{q}_k^{a_k}\cdot v=0$对任意 $v\in M$，所以 $V(\mathrm{Ann}_Z(v))\subseteq V(\mathfrak{q}_1)\cup\cdots\cup V(\mathfrak{q}_k)\subseteq S$。因此，$H$-模 M（其中H 通过其在 P 上的作用作用于 M）根据命题 3.6.4 属于 $\mathcal{L}_W^H$，正如所要求的。□

Now we form the following diagram, which defines the map τ:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{Sp}(\mathcal{A}) & & \xrightarrow[\cong]{r^{-1}} & & \mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \\
\cong\downarrow & & & & \vdots\,\tau \\
\mathbf{Sp}(\mathrm{Mod}(H)) & & & & \\
\cong\downarrow & & & & \\
\mathrm{Spec}(H) & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathrm{Spec}(Z)=\Xi & \xrightarrow[\mathbf{q}]{} & \mathfrak{Z}=\Xi/\mathfrak{R}
\end{array}$$

命题 3.7.4. 假设 (A1)、(A2)、(A3)。若 $U\subseteq\mathfrak{Z}$ 是开子集的交集，则 $\tau^{-1}(U)$ 是稳定的。

Proof. Put $W=\mathbf{q}^{-1}(U)$. Then

$$\pi_2(\pi_1^{-1}(W))=\pi_2(\pi_1^{-1}\mathbf{q}^{-1}(U))=\pi_2(\pi_2^{-1}\mathbf{q}^{-1}(U))\subseteq\mathbf{q}^{-1}(U)=W.$$

Now apply Thm. 3.7.1. □

注 3.7.5. 假设我们的范畴 $\mathcal{C}$ 是 k-线性的。则 $Z\otimes_{\mathbb{Z}}Z$-作用在 Ext群 $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{C}}(M,N)$ 上对于 M，N在 $\mathcal{A}$ 中，通过 $Z\otimes_k Z$ 分解。因此定理 3.7.1 的证明在我们将 (A3) 替换为较弱的假设 $(Z\otimes_k Z)/\overline{\mathcal{J}}^{d+1}$ 是诺特的情况下仍然成立，其中 $\overline{\mathcal{J}}$是 $\mathcal{J}$在满射 $Z\otimes_{\mathbb{Z}}Z\twoheadrightarrow Z\otimes_k Z$ 下的像。

我们还应用定理3.7.1，为局部诺特范畴 $\mathcal{C}$ 的 Krull 维数过滤的稳定性给出一个充分判据。对于每个序数 α，集合

$$W_\alpha:=\{\mathfrak{p}\in\Xi:\kappa(Z/\mathfrak{p})>\alpha\}$$

是一个推广稳定子集，属于 Ξ。我们确定相应的局部化子范畴$\mathcal{L}^{\mathcal{C}}_{W_\alpha}$ 的 $\mathcal{C}$ 在引理 3.7.7 下面，但首先我们回顾关于 Krull 维数的一个标准事实。

引理 3.7.6. 设 M 是交换诺特环 A 上的有限生成模。则

$$\kappa(M) = \sup_{v\in M} \kappa(Av) = \sup_{v\in M} \sup_{\mathfrak{p}\in V(\mathrm{ann}(v))} \kappa(A/\mathfrak{p}).$$

证明. 对生成元个数进行归纳 M 并结合 [MCR] 引理 6.2.4 表明第一个等式，即 $\kappa(M) = \sup_{v\in M} \kappa(Av)$.

设 I 是 A 的一个理想。由于 A 是诺特的，[MCR] 引理 6.2.4 意味着 $\kappa(A/I) = \kappa(A/I^m)$ 对所有 $m \geq 0$。由于对于足够大的 m，$(\sqrt{I})^m \subseteq I$，我们有 $\kappa(A/I) \geq \kappa(A/\sqrt{I}) = \kappa(A/(\sqrt{I})^m) \geq \kappa(A/I)$，因此实际上我们有等式 $\kappa(A/I) = \kappa(A/\sqrt{I})$。由于 $\sqrt{I}$ 等于包含它的有限多个极小素理想 $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ 的交，存在一个自然的 A-线性嵌入 $A/\sqrt{I} \hookrightarrow \oplus_{i=1}^n A/\mathfrak{p}_i$。所以，

$$\kappa(A/I) = \kappa(A/\sqrt{I}) \leq \sup_{1\leq i\leq n} \kappa(A/\mathfrak{p}_i) \leq \sup_{\mathfrak{p}\in V(I)} \kappa(A/\mathfrak{p}) \leq \kappa(A/I).$$

Therefore for any $v \in M$, $\kappa(Av) = \kappa(A/\operatorname{Ann}_A(v)) = \sup_{\mathfrak{p}\in V(\mathrm{ann}(v))} \kappa(A/\mathfrak{p})$. □

Recall (§2.2) that $\mathcal{C}_\alpha$ is the full subcategory of $\mathcal{C}$ consisting of objects V such that $\kappa(V) \leq \alpha$.

Lemma 3.7.7. *For any ordinal α, we have $\mathcal{L}^{\mathcal{C}}_{W_\alpha} = \mathcal{C}_\alpha$.*

证明。根据Gabriel 的 Krull 维数定义（见 [Gab] p.382），我们看到 $\kappa(V) = \sup_i \kappa(V_i)$，如果将 $V = \varinjlim V_i$ 写成其诺特子对象 V_i的滤过余极限。因此，只需证明对于诺特 $V \in \mathcal{C}$，我们有 $V \in \mathcal{L}^{\mathcal{C}}_{W_\alpha}$ 当且仅当 $\kappa(V) \leq \alpha$。由于 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$的增厚，我们还可以假设 $V \in \mathcal{A}$。因此，我们归结为证明对于有限生成的 H-模 M，我们有

$$M \in \mathcal{L}^H_{W_\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \kappa(M) \leq \alpha.$$

然而，由于 H 是有限生成的 Z-模，根据 [MCR] 推论 10.1.10，$\kappa(M) = \kappa(\rho(M))$；另一方面，根据等式 (7)，$M \in \mathcal{L}^H_{W_\alpha}$ 当且仅当 $\rho(M) \in \mathcal{L}^Z_{W_\alpha}$。接下来，对于所有 $v \in M$ 以及所有包含 $\operatorname{Ann}_Z(v)$ 的 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(Z)$，$\rho(M) \in \mathcal{L}^Z_{W_\alpha}$ 当且仅当我们有 $\kappa(Z/\mathfrak{p}) \leq \alpha$。由于 $\rho(M)$ 是有限生成的 Z-模，根据引理 3.7.6，这等价于 $\kappa(\rho(M)) \leq \alpha$。□

现在，在关于 Ξ 和 $\mathcal{R}$ 的某些相当严格的假设下，我们可以确立 $\mathcal{C}$ 上 Krull 维数过滤的稳定性。

命题 3.7.8。假设 $\mathcal{C}$ 是 k-线性的，Z 是有限生成的 k-代数，并且存在一个整数 d，使得对于任意 $j > d$，$\operatorname{Ext}^j_{\mathcal{C}}(P, .)|_{\mathcal{A}} = 0$。进一步假设 $\mathrm{pr}_2 : \mathcal{R} \to \Xi$ 是拟有限的。那么，对于所有 α，$\mathcal{L}^{\mathcal{C}}_{W_\alpha}$ 是 $\mathcal{C}$ 的稳定局部化子范畴。

证明。根据假设，k-代数 $Z \otimes_k Z$ 也是有限生成的，因此根据希尔伯特基定理，它是诺特的。由定理3.7.1 和备注 3.7.5，只需证明

$$\mathrm{pr}_2(\mathrm{pr}_1^{-1}(W_\alpha)) \subseteq W_\alpha.$$

Let $\mathcal{S}_\alpha := \Xi \backslash W_\alpha$ be the complement of W_α in Ξ; then it is enough to show that

$$\mathrm{pr}_1(\mathrm{pr}_2^{-1}(\mathcal{S}_\alpha)) \subseteq \mathcal{S}_\alpha.$$

令 $P \in \mathrm{pr}_2^{-1}(\mathcal{S}_\alpha)$，并对 $i = 1$ 设置 $\mathfrak{p}_i := \mathrm{pr}_i(P)$，2。于是 $\mathfrak{p}_2 \in \mathcal{S}_\alpha$，因此 $\kappa(Z/\mathfrak{p}_2) \leq \alpha$。态射 pr_1 和 pr_2 诱导出以下剩余域图表：

$$k(\mathfrak{p}_1) \hookrightarrow k(P) \hookleftarrow k(\mathfrak{p}_2).$$

Since $\mathrm{pr}_2 : \mathcal{R} \to \Xi$ is quasi-finite, $k(P)$ is a finite dimensional $k(\mathfrak{p}_2)$-vector space. Hence

$$\mathrm{tr}\,.\,\deg_k(k(\mathfrak{p}_1)) \leq \mathrm{tr}\,.\,\deg_k(k(P)) = \mathrm{tr}\,.\,\deg_k(k(\mathfrak{p}_2)).$$

Since Z is a finitely generated k-algebra, we can apply a version of the Noether Normalization Theorem — see [Mat] Thm. 5.6 — to deduce that

$$\kappa(Z/\mathfrak{p}_i) = \mathrm{tr}\,.\,\deg_k(Z/\mathfrak{p}_i) = \mathrm{tr}\,.\,\deg_k(k(\mathfrak{p}_i)) \quad \text{for} \quad i = 1, 2.$$

Hence $\kappa(Z/\mathfrak{p}_1) \leq \kappa(Z/\mathfrak{p}_2) \leq \alpha$, which means that $\mathfrak{p}_1 = \mathrm{pr}_1(P) \in \mathcal{S}_\alpha$. □

4. The quotient space for $\mathrm{Mod}_k(SL_2(\mathbb{Q}_p))$

4.1. **The pro-p Iwahori Hecke algebra and its centre.**

4.1.1. 设定。令 $\mathfrak{F}$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，其整数环为 $\mathfrak{O}$，极大理想为 $\mathfrak{M}$，剩余域为 $\mathfrak{f}$。我们固定 $\mathfrak{M}$的一个生成元 π 。必有$\mathfrak{f} \cong \mathbb{F}_q$，其中 q是 p的某个幂。我们假设基域 k 包含 $\mathfrak{f}$。

4.1.2. *Groups.* Let $G = \mathrm{SL}_2(\mathfrak{F})$ and $K = \mathrm{SL}_2(\mathfrak{O})$, and define the *pro-p Iwahori subgroup*

$$I := \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{M} & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{M} & 1+\mathfrak{M} \end{pmatrix} \cap G.$$

令 $T = \begin{pmatrix} \mathfrak{F}^\times & 0 \\ 0 & \mathfrak{F}^\times \end{pmatrix} \cap G$ 为 G 中对角矩阵组成的子群，并令 $T^0 := T \cap K$。(1,1)-项的投影给出群同构 $T \xrightarrow{\cong} \mathfrak{F}^\times$ 和 $T^0 \xrightarrow{\cong} \mathfrak{O}^\times$。因此， T/T^0是一个无限循环群。 T 在 G 中的正规化子 $N_G(T)$由 T 和 $s_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 生成，而 $N_G(T)$同构于半直积 $T \rtimes \langle s_0 \rangle$，其中 s_0 通过取逆作用于 T 。此作用保持子群 T_0不变，因此 T_0 是 $N_G(T)$的正规子群。于是我们可以构造仿射Weyl 群 $W := N_G(T)/T_0$，它同构于无限二面体群，由 T_0-陪集 s_0 和 $s_1 := \begin{pmatrix} 0 & -\pi^{-1} \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$ 生成。子群$T^1 := T \cap I$ 也是 $N_G(T)$ 的正规子群，这给出了扩张Weyl群 $\widetilde{W} := N_G(T)/T^1$。令 $\Omega := T^0/T^1$; 则 $\Omega \cong \mathfrak{f}^\times$，并且我们有短正合列

$$1 \to \Omega \to \widetilde{W} \to W \to 1.$$

Note that Ω 同构于 $\mathbb{F}_q^\times$，因此是一个阶为 $q-$ 的有限循环群 1.

4.1.3. pro-p Iwahori Hecke 代数。设 $\Omega :=$ 同态集$(\Omega\ k^\times)$ 为 Ω 的 k-线性特征群。由于假设 k 包含 $\mathfrak{F}$ 的剩余域 $\mathfrak{f}$，Ω 是一个阶为 $q-1$ 的循环群，由恒等特征生成

$$\mathrm{id} : \Omega \to k^\times, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} T^1 \mapsto a + \mathfrak{M} \in \mathfrak{f}^\times \hookrightarrow k^\times.$$

换言之，我们有 $\widehat{\Omega} = \{\mathrm{id}^j : \ 0 \leq j \leq q-2\}$ 其中$\mathrm{id}^0 = \mathbb{1}$ 是平凡特征。群代数 $k[\Omega]$ 包含 $q-1$ 本原幂等元

$$e_\lambda := -\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega)^{-1}\omega, \qquad \lambda \in \widehat{\Omega} \tag{9}$$

that form a basis for $k[\Omega]$ as a k-vector space. These idempotents are pairwise orthogonal:

$$e_\lambda e_\mu = \delta_{\lambda\mu} e_\lambda \quad \text{for all} \quad \lambda, \mu \in \widehat{\Omega}. \tag{10}$$

We have the compactly induced G-representation

$$\mathrm{ind}_I^G(k) := k[G/I] = k[G] \underset{k[I]}{\otimes} k$$

来自平凡表示 k 的 I。它是 k-线性的光滑 G表示，因此 $k[G/I]$是 $\mathrm{Mod}_k(G)$中的一个对象。pro-p Iwahori Hecke 代数是该表示的自同态环的反环：

$$H := \mathrm{End}_{\mathrm{Mod}_k(G)}(k[G/I])^{\mathrm{op}}.$$

The following facts are known about H.

Lemma 4.1.1.

~a) 双陪集 $\{\tau_w := IwI : w \in W\}$ 构成 H 的 k-基。 b) 映射 $k[\Omega] \to H$ （由 $\Omega \ni \omega \mapsto \tau_\omega$ 给出）是 k-代数的单射。 c) 元素 $\tau_0 := \tau_{s_0}$ 和 $\tau_1 := \tau_{s_1}$ 与 $k[\Omega]$一起生成作为 k-代数的 H。^d) 对于 $i = 0$、1 以及任意 $\lambda \in \Omega$，我们有 $\tau_i e_\lambda = e_{\lambda^{-1}} \tau_i$。 e) 我们有二次关系 $\tau_i^2 = -\tau_i e_{\mathbb{1}}$，其中 $i = 0$、1。

~当 w 是 W 的单位元时，我们绝不会使用记号 τ_w，因为这等于 H 中的单位元。因此，写作 $\tau_1 = \tau_{s_1}$ 不应引起任何混淆。

4.1.4. .....的中心 H。 中心 $Z = Z(H)$ k-代数可以明确地描述出来。以下陈述众所周知，但也可参见 [OS18] §3.2.2.

引理 4.1.2。元素

$$\zeta := (\tau_0 + e_{\mathbb{1}})(\tau_1 + e_{\mathbb{1}}) + \tau_1\tau_0 = (\tau_1 + e_{\mathbb{1}})(\tau_0 + e_{\mathbb{1}}) + \tau_0\tau_1$$

在 $Z(H)$ 内生成一个多项式环 $k[\zeta]$。

^定义 4.1.3。对于每个 $\lambda \in \Omega$，我们定义 H 中的以下元素：

$$X_\lambda = \begin{cases} e_\lambda \tau_0\tau_1 + e_{\lambda^{-1}}\tau_1\tau_0 & : \ \lambda \neq \mathbb{1} \\ e_{\mathbb{1}}\zeta & : \ \lambda = \mathbb{1}. \end{cases}$$

同样，我们省略以下众所周知结果的证明。

^引理 4.1.4。设 $\lambda \in \Omega$。

a) X_λ 在 H 中是中心的。b) 若 $\lambda \neq \lambda^{-1}$，则 $(e_\lambda + e_{\lambda^{-1}})\zeta = X_\lambda + X_{\lambda^{-1}}$。 c) 若 $\lambda = \lambda^{-1}$，则 $e_\lambda \zeta = X_\lambda$。 d) 我们有 $\sum_{\sim \alpha \in \Omega} X_\alpha = \zeta$。

现在我们将完整地描述 Z 作为一个带有关系和生成元的 k-代数。设 $\lambda \in \widehat{\Omega}$ 满足 $\lambda \neq \lambda^{-1}$；那么利用引理4.1.1，我们看到幂等元 $e_\lambda + e_{\lambda^{-1}}$在 H中是中心元。此外，已知在这种情况下

$$X_\lambda \cdot X_{\lambda^{-1}} = 0.$$

注意，恰有两个特征 $\lambda \in \widehat{\Omega}$ 满足 $\lambda = \lambda^{-1}$，即平凡特征 $1 = \mathrm{id}^0$和“二次特征” $\mathrm{id}^{\frac{q-1}{2}}$ 。 $\widehat{\Omega}$ 的所有其他元素都不等于其逆。这给出了 Z 作为非幺子环直积的分解:

$$Z = e_{\mathbb{1}} Z \quad \oplus \quad e_{\mathrm{id}^{\frac{q-1}{2}}} Z \quad \oplus \quad \bigoplus_{j=1}^{\frac{q-3}{2}} (e_{\mathrm{id}^j} + e_{\mathrm{id}^{-j}}) Z \tag{11}$$

从 §3.2 的 [OS18] 我们推出以下

命题 4.1.5. 设 $\lambda \in \Omega$.

a) 假设 $\lambda = \lambda^{-1}$。则 k-代数同态

$$k[x] \to e_\lambda Z, \quad 1 \mapsto e_\lambda, \quad x \mapsto X_\lambda$$

是一个同构。

b) *Suppose that $\lambda \neq \lambda^{-1}$. Then the k-algebra homomorphism*

$$b_\lambda : \frac{k[x,y]}{\langle xy \rangle} \to (e_\lambda + e_{\lambda^{-1}}) Z, \quad 1 \mapsto e_\lambda + e_{\lambda^{-1}}, \quad x \mapsto X_\lambda, \quad y \mapsto X_{\lambda^{-1}}$$

is an isomorphism.

4.2. **The normalisation of** $\mathrm{Spec}(Z)$**.**

4.2.1.概形的范畴商。设$\mathcal{R} \rightrightarrows X$ 是概形的两个态射。回想，概形态射 $\psi : X \to Y$ 被称为 X 关于 $\mathcal{R}$ 的范畴商，如果它是概形范畴中该图表的余等化子。

Given a morphism of locally ringed spaces $f : X \to Y$, we write $|f| : |X| \to |Y|$ for the underlying continuous map of topological spaces.

设 $\mathcal{R} \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{\psi} Y$ 是一个概形图表，使得 $\psi f = \psi g$，并且令 $\{Y_i : i \in I\}$ 是 Y 的开覆盖。对于每个 $i \in I$，构造纤维积 $X_i := X \times_Y Y_i$ 和 $\mathcal{R}_i := \mathcal{R} \times_Y Y_i$，并考虑图表 $\mathcal{R}_i \overset{f_i}{\underset{g_i}{\rightrightarrows}} X_i \xrightarrow{\psi_i} Y_i$，其中 f_i、g_i 和 ψ_i 分别是 f、g 和 ψ 的 g_i 拉回。

我们用 Sch 表示概形范畴，用 LRS 表示局部交换环拓扑空间范畴。

引理 4.2.1. 设 $\mathcal{R} \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{\psi} Y$ 是一个概形图表，满足 $\psi f = \psi g$，并设 $g\{Y_i : i \in I\}$ 是 Y 的一个开覆盖。假设

a) $|\mathcal{R}| \overset{|f|}{\underset{|g|}{\rightrightarrows}} |X| \xrightarrow{|\psi|} |Y|$ *is a coequaliser diagram of topological spaces,*

b) *Y_i, X_i and $\mathcal{R}_i$ is affine for all $i \in I$, and*

c) $\mathcal{O}(Y_i) \xrightarrow{\psi_i} \mathcal{O}(X_i) \overset{f_i}{\underset{g_i}{\rightrightarrows}} \mathcal{O}(\mathcal{R}_i)$ *is an equaliser diagram of commutative rings for all $i \in I$.*

那么 $\mathcal{R} \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{\psi} Y$ 是 LRS [3], 中的 ψ 是 $\mathcal{R} \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X$ 的范畴商。

Proof. By the construction of colimits in LRS ([DG] Prop. I.1.1.6) the first statement is equivalent to the following conditions:

- $|\mathcal{R}| \overset{|f|}{\underset{|g|}{\rightrightarrows}} |X| \xrightarrow{|\psi|} |Y|$ is a coequaliser diagram of topological spaces;
- $\mathcal{O}_Y \longrightarrow \psi_*\mathcal{O}_X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} (\psi f)_*\mathcal{O}_{\mathcal{R}} = (\psi g)_*\mathcal{O}_{\mathcal{R}}$ is an equaliser diagram of sheaves of commutative rings on Y.

第二个条件可以在限制到开子概形 Y_i 后进行检验。根据第二个假设，这些开子概形及其在 X 和 $\mathcal{R}$ 中的原像全都是仿射的。因此，这些限制后的层由这些仿射概形上的全局截面决定。因此，这归结为第三个假设。

Since Sch is a full subcategory of LRS, the second statement follows from the first. □

We will now give an example of Lemma 4.2.1 in action, which will come in useful later. Consider the union of two crossing affine lines:

$$\mathcal{X} := \operatorname{Spec} \frac{k[x,y]}{\langle xy \rangle}.$$

We will 'separate' the two crossing affine lines to form a disjoint union of two affine lines

$$\mathcal{X}' := \operatorname{Spec}(k[x] \times k[y])$$

and 然后将它们重新粘合在一起，使 $\mathcal{X}$ 成为 $\mathcal{X}'$ 关于某个等价关系的商.

更精确地说，注意到 $\mathcal{X}'$ 是 Spec $k[x]$ 与 Spec $k[y]$ 的不交并。设 $\mathcal{S}$:= Spec $k = \{s\}$ 是一个点，设 $a\colon \mathcal{S} \to \mathcal{X}'$ 是将原点包含到第一条仿射直线中的包含映射，并设 $b\colon \mathcal{S} \to \mathcal{X}'$ 是将原点包含到第二条仿射直线中的包含映射。

考虑 k-代数同态

$$\varphi : \frac{k[x,y]}{\langle xy \rangle} \to k[x] \times k[y], \qquad \varphi\left(\overline{f(x,y)}\right) = (f(x,0), f(0,y)) \quad \text{for any} \quad f(x,y) \in k[x,y],$$

a并设 $\theta := \operatorname{Spec}(\varphi)\colon \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ 是相应的仿射概形态射.

命题 4.2.2. $\theta\colon \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ 是 $\mathcal{S} \overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}} \mathcal{X}'$ 的范畴商

证明。我们将应用引理 4.2.1。余态射 $a^\sharp : \mathcal{O}(\mathcal{X}') \to \mathcal{O}(\mathcal{S})$（分别地，$b^\sharp\colon \mathcal{O}(\mathcal{X}') \to \mathcal{O}(\mathcal{S})$）等于从 $k[x] \times k[y]$ 到 $k[x]$ 的第一投影（分别地，从 $k[x] \times k[y]$ 到 $k[y]$ 的第二投影）与零点取值映射 $k[x] \to k$, $f(x) \mapsto f(0)$（分别地，$k[y] \to k$, $f(y) \mapsto f(0)$）的复合。k-代数同态 $a^\sharp\varphi$ 和 $b^\sharp\varphi$ 均将 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$ 映为零；由于这两个元素作为 k- 代数生成 $\mathcal{O}(\mathcal{X})$，我们得到 $a^\sharp\varphi = b^\sharp\varphi$。这给出了一个由 $\mathcal{O}(\mathcal{X})$-模组成的复形

$$0 \to \frac{k[x,y]}{\langle xy \rangle} \xrightarrow{\varphi} k[x] \times k[y] \xrightarrow{a^\sharp - b^\sharp} k. \tag{12}$$

[3]注意 从概形到 LRS 的函子不保余等化子（例如，见 [LMB] ）。

由于 $\langle x\rangle\cap\langle y\rangle=\langle xy\rangle$ 属于 $k[x,y]$，k-代数同态 φ 是内射对象。若 $u=(f(x)\ g(y))\in k[x]\times k[y]$ 满足 $a^\sharp(u)=b^\sharp(u)$，则 $f(0)=g(0)$，于是

$$\varphi\left(\overline{f(x)+g(y)}\right)=(f(x),f(0))+(g(0),g(y))=(g(0),f(0))+(f(x),f(y))=\varphi\left(\overline{f(0)}\right)+u$$

表明 $\ker(a^\sharp-b^\sharp)=\mathrm{Im}(\varphi)$。因此，复形 (12) 实际上是正合的，这验证了引理4.2.1.

我们已经注意到 $\overline{x},\overline{y}\in\mathcal{O}(\mathcal{X})$ 在将 $\mathcal{O}(\mathcal{S})=k$ 视为通过 $\mathcal{O}(\mathcal{S}$ 的 $\mathcal{O}(\mathcal{X}$-模时，会湮灭 $a^\sharp\varphi=b^\sharp\varphi$。因此它也被 $\overline{x}+\overline{y}$湮灭。所以，若我们在元素 $\overline{x}+\overline{y}\in\mathcal{O}(\mathcal{X}$处局部化正合列 (12)，便得到同构

$$\left(\frac{k[x,y]}{\langle xy\rangle}\right)\left[\frac{1}{\overline{x}+\overline{y}}\right]\quad\xrightarrow{\cong}\quad k[x,x^{-1}]\times k[y,y^{-1}].$$

设 $O:=\langle\overline{x},\overline{y}\rangle\in\mathcal{X}$ 为两条相交仿射直线的交点。那么，将 $\theta=\mathrm{Spec}(\varphi)$ 限制到 $\mathcal{X}'-\{a(s)\ b(s)\}=\mathrm{Spec}\left(k[x,x^{-1}]\times k[y,y^{-1}]\right)$ 上，得到一个到 $\mathcal{X}\backslash\{O\}$的同构。由于 θ将 $\mathcal{X}'$中的两个原点都映到 $O\in\mathcal{X}$，我们看到 $|\theta|$是满射；并且若 $p,q\in|\mathcal{X}'|$满足 $|\theta|(p)=|\theta|(q)$，但 $p\neq q$，则必有 $p,q\in\{a(s)\ b(s)\}$。因此，作为集合，$|\mathcal{X}|$可由在 $|\mathcal{X}'|$中将 $a(s)$ 与 $b(s)$ 识别而得到。

最后，$|\mathcal{X}'|$和 $|\mathcal{X}|$都带有余有限扎里斯基拓扑，而$|a|$上的商拓扑 $|\mathcal{X}'|/(a(s)\sim b(s))$仍然是余有限拓扑。因此，$|\mathcal{S}|\rightrightarrows|\mathcal{X}'|\to|\mathcal{X}|$是一个拓扑空间的余等化子$|b|$图表，满足引理4.2.1的条件 a)。

□

4.2.2. *The normalisation of* $\mathrm{Spec}(Z)$. We return to the notation of §4.1.4.

Definition 4.2.3.

a) 令 $\Xi=\mathrm{Spec}(Z)$。 b) 令 $Z':=k[\Omega][t]$，其中 t 是一个形式变量，并令 $\Xi':=\mathrm{Spec}\,Z'$。 c) 令 $\varphi\colon Z\to Z'$ 为由下式定义的 k-代数同态:

$$\varphi(X_\lambda)=e_\lambda t\quad\textit{for all}\quad\lambda\in\widehat{\Omega}.$$

d) *Let* $\theta:\Xi'\to\Xi$ *be defined by* $\theta=\mathrm{Spec}(\varphi)$.

注意到，Ξ' 是 $|\Omega|=q-1$ 仿射直线 Ξ'_λ 的= 不交并 $k[t_\lambda]$谱，其中$t_\lambda:=e_\lambda t\in Z'$。我们称 Ξ'_λ 为 λ-Ξ'的分量。我们将 $\langle t_\lambda\rangle\in\Xi'_\lambda$原点在 Ξ' 中的像记为 O_λ。等价地，O_λ 是 Z'的极大理想 $\langle 1-e_\lambda,\ t\rangle$。

Definition 4.2.4.

a)令 $\Xi_{\mathrm{sing}}:=\{s_1,s_2,\cdots,s_{\frac{q-3}{2}}\}$为 $\frac{q-3}{2}$ 个谱 k的不交并。b) 定义 $a:\ \Xi_{\mathrm{sing}}\to\Xi'$ 和 $b:\ \Xi_{\mathrm{sing}}\to\Xi'$ 为由下式给出的闭嵌入，

$$a(s_j)=O_{\mathrm{id}^j}\quad\textit{and}\quad b(s_j)=O_{\mathrm{id}^{-j}}\quad\textit{for all}\quad j=1,\cdots,\frac{q-3}{2}.$$

该记号旨在表示 Ξ_{sing} 是概形Ξ奇异轨迹的一个副本：事实上，根据分解（11）和命题4.1.5.b，Ξ 包含 $\frac{q-3}{2}$ 个交叉线对 谱 $\frac{k[x,y]}{\langle xy\rangle}$ 的副本，因此 Ξ 的奇异轨迹由 $\frac{q-3}{2}$ 个闭点组成。

命题 4.2.5. $\theta:\ \Xi'\to\Xi$ 是 $\Xi_{\mathrm{sing}}\overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}}\Xi'$ 的范畴商。

证明. $Z = \mathcal{O}(\Xi)$作为非幺子环的直积的分解（在(11)中给出）意味着 Ξ 分解为连通分支的不交并

$$\Xi = \Xi_0 \quad \cup \quad \Xi_{\frac{q-1}{2}} \quad \cup \quad \coprod_{j=1}^{\frac{q-3}{2}} \Xi_{j,-j} \tag{13}$$

其中这些连通分支由下式定义

$$\Xi_0 := \operatorname{Spec} e_{\mathbb{1}} Z, \quad \Xi_{\frac{q-1}{2}} := \operatorname{Spec} e_{\mathrm{id}^{\frac{q-1}{2}}} Z, \quad \text{and} \quad \Xi_{j,-j} := \operatorname{Spec}(e_{\mathrm{id}^j} + e_{\mathrm{id}^{-j}}) Z$$

对所有 $j = 1, \cdots, \frac{q-3}{2}$。另一方面，我们可以写成

$$\Xi' = \Xi'_{\mathbb{1}} \quad \cup \quad \Xi'_{\mathrm{id}^{\frac{q-1}{2}}} \quad \cup \quad \coprod_{j=1}^{\frac{q-3}{2}} (\Xi'_{\mathrm{id}^j} \cup \Xi'_{\mathrm{id}^{-j}}). \tag{14}$$

固定 $j = 1, \cdots, \frac{q-3}{2}$。态射 θ 将 $(\Xi'_{\text{恒等}^j} \cup \Xi'_{\text{恒等}^{-j}})$ 映到 $\Xi_{j,\ -j}$；令 θ_j 表示 θ 在 $(\Xi'_{\text{恒等}^j} \cup \Xi'_{\text{恒等}^{-j}})$ 上的限制。于是得到仿射概形的交换图

$$\begin{array}{ccc} \Xi'_{\mathrm{id}^j} \cup \Xi'_{\mathrm{id}^{-j}} & \xrightarrow{\theta_j} & \Xi_{j,-j} \\ {\scriptstyle \alpha_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_j} \\ \mathcal{X}' & \xrightarrow[\theta_0]{} & \mathcal{X} \end{array} \tag{15}$$

其中 $\theta_0 :\quad \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$是命题 θ中的态射 4.2.2，$\beta_j :\ = \operatorname{Spec}(b_{\mathrm{id}^j})$ 是由命题 b_{id^j} 4.1.5中的同构 α_j 定义的仿射概形同构，而 k-代数同构

$$\alpha_j^\sharp : k[x] \times k[y] \quad \longrightarrow k[t_{\mathrm{id}^j}] \times k[t_{\mathrm{id}^{-j}}]$$

given by $\alpha_j^\sharp(x) = t_{\mathrm{id}^j}$ and $\alpha_j^\sharp(y) = t_{\mathrm{id}^{-j}}$. This gives us the commutative diagram of schemes

$$\begin{array}{ccccc} \{s_j\} & \overset{a_j}{\underset{b_j}{\rightrightarrows}} & \Xi'_{\mathrm{id}^j} \cup \Xi'_{\mathrm{id}^{-j}} & \xrightarrow{\theta_j} & \Xi_{j,-j} \\ \cong\downarrow & & \alpha_j\downarrow\cong & & \cong\downarrow{\scriptstyle \beta_j} \\ \mathcal{S} & \overset{a_0}{\underset{b_0}{\rightrightarrows}} & \mathcal{X}' & \xrightarrow[\theta_0]{} & \mathcal{X} \end{array} \tag{16}$$

其中 a_0 和 b_0 是命题 a 和 b 中所记的态射，见 4.2.2。现在我们可以应用命题 4.2.2来看到 θ_j是 a_j、b_j的余等化子。

请注意，态射 θ 将 $\Xi'_{\mathbb{1}}$ （分别地，$\Xi'_{\mathrm{id}^{\frac{q-1}{2}}}$）同构地映到 Ξ_0 （分别地，$\Xi'_{\frac{q-1}{2}}$）。对图表（16）取余积，其中 $j = 1, \cdots, \frac{q-3}{2}$，并考虑到分解（213）和（14），结合引理 A.1.3即可得到结论。□

4.2.3. Ξ 的非奇异轨迹。令 $V(t)$表示由 $q-1$ 闭点组成的集合，其中包括 Ξ'中 $q-1$ 仿射直线 $\Xi'_\lambda =$ 谱 $k[t_\lambda]$ 的原点的不交并。

Lemma 4.2.6. *The morphism θ restricts to an isomorphism*

$$\mathring{\theta} : \Xi' - V(t) \quad \xrightarrow{\cong} \quad \Xi - V(\zeta).$$

证明。令 $\lambda \in \widehat{\Omega}$并写作 $\lambda = \mathrm{id}^j$，其中 $j = 0$、$\cdots$、$q-2$。首先假设 $j \neq 0$ 且$j \neq \frac{q-1}{2}$。那么，在限制映射 $Z = \mathcal{O}(\Xi) \to \mathcal{O}(\Xi_{j,-j})$ 下，ζ 在 $\mathcal{O}(\Xi_{\lambda,\lambda^{-1}})$中的像为 $(e_\lambda + e_{\lambda^{-1}})\zeta$，由引理 4.1.4.b 可知它等于 $X_\lambda + X_{\lambda^{-1}}$。我们看到，$\beta_j(V(\zeta) \cap \Xi_{j,-j})$ 是交叉线对 $\mathcal{X}$中的原点 O。同样，若 $j = 0$ 或 $j = \frac{q-1}{2}$，引理4.1.4.c推出 $V(\zeta) \cap \Xi_{\frac{q-1}{2}} = V(e_\lambda \zeta)$ 是仿射直线 Ξ_j中的原点。因此，$V(\zeta) \subset \Xi$ 恰由$\frac{q-3}{2} + 2 = \frac{q+1}{2}$ 个闭点组成，并包含 Ξ 的奇异轨迹；而 $V(t)$在 Ξ'中由 $|\mathrm{Spec}\, k[\Omega]| = |\Omega| = q-1$ 个闭点组成。

该结果现在由交换图（15）以及我们在命题4.2.2 的证明中所作的观察，即 θ_0 限制为以下两者之间的同构$\mathcal{X}'\backslash\{a_0(s)\ \ b_0(s)\}$ 以及 $\mathcal{X}\backslash\{O\}$。□

Corollary 4.2.7. *There is a k-algebra isomorphism*

$$\mathring{\theta}^\sharp : Z_\zeta = \mathcal{O}(\Xi - V(\zeta)) \quad \xrightarrow{\cong} \quad \mathcal{O}(\Xi - V(t)) = k[\Omega][t, t^{-1}]$$

which sends ζ to t.

Of course, $\mathring{\theta}^\sharp$ restricts to the basic map $\varphi : Z \to Z'$ on Z from Def. 4.2.3.c.

Definition 4.2.8. *For each $\lambda \in \widehat{\Omega}$ we define $\epsilon_\lambda := (\mathring{\theta}^\sharp)^{-1}(e_\lambda)$.*

The family $\{\epsilon_\lambda : \lambda \in \widehat{\Omega}\}$ form a complete set of primitive idempotents in Z_ζ.

Lemma 4.2.9. *We have $\epsilon_\lambda = \frac{X_\lambda}{\zeta}$ for all $\lambda \in \widehat{\Omega}$.*

证明。由于 ζ是 Z_ζ中的一个单位，因此只需证明 $\epsilon_\lambda \zeta^2 = X_\lambda \zeta$。由于 $\mathring{\theta}^\sharp$ 是一个环同构，且其在 φ 上的限制为 Z，因此只需证明等式 $e_\lambda \varphi(\zeta)^2 = \varphi(X_\lambda \zeta)$ 在$k[\Omega][t, t^{-1}]$中成立。然而，利用引理 4.1.4.d以及定义 4.2.3.c，我们有

$$\varphi(\zeta) = \varphi\left(\sum_{\alpha \in \widehat{\Omega}} X_\alpha\right) = \left(\sum_{\alpha \in \widehat{\Omega}} e_\alpha t\right) = t \tag{17}$$

and therefore $e_\lambda \varphi(\zeta)^2 = e_\lambda t^2 = (e_\lambda t)t = \varphi(X_\lambda)\varphi(\zeta) = \varphi(X_\lambda \zeta)$ as required. □

推论 4.2.10. 作为 $k[\zeta, \zeta^{-1}]$-模，Z_ζ 分解如下：

$$Z_\zeta = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{\Omega}} \epsilon_\lambda k[\zeta, \zeta^{-1}].$$

证明. 由引理 4.2.6 给出的同构 $\mathring{\theta}^\sharp$：$Z_\zeta \xrightarrow{\cong} k[\Omega][t, t^{-1}]$ 将 ζ映到 t（由方程 (17)），并且对每个 $\lambda \in \widehat{\Omega}$，它将 $\epsilon_\lambda \in Z_\zeta$ 映到 $e_\lambda \in k[\Omega][t, t^{-1}]$。由于 $\{e_\lambda : \lambda \in \widehat{\Omega}\}$ 构成 $k[\Omega][t, t^{-1}]$的$k[t, t^{-1}]$-模基，因此 $\{\epsilon_\lambda : \lambda \in \widehat{\Omega}\}$ 构成 Z_ζ 的 $k[\zeta, \zeta^{-1}]$-模基。□

4.3. 双模湮灭子。

4.3.1. 关于湮灭子和双模的一些一般性。

定义 4.3.1. 设 A 是一个 k-代数，并设 $\phi : A \to A$ 是一个 k-代数自同构。令 M 为一个 A-双模。我们用 M_ϕ 表示带有如下作用的 (A, A)-双模 M：

$$a \cdot m \cdot b = a\ m\ \phi(b) \quad \text{for all} \quad a, b \in A, m \in M$$

and we call M_ϕ the right ϕ-twist of M.

Thus, the left A-action on M_ϕ is the usual one, whereas the right A-action is twisted by ϕ.

引理 4.3.2。设 A 是一个 k-代数，设 M 是一个(A,A)-双模，并设 $\phi\colon A \to A$ 是一个k-代数自同构。则

$$\mathrm{Ann}_{A\otimes_k A}(M_\phi) = (1\otimes\phi^{-1})(\mathrm{Ann}_{A\otimes_k A}(M)).$$

证明。令 $x=\sum_{i=1}^n a_i\otimes b_i \in A\otimes_k A$。那么 $x\cdot M_\phi = 0$ 当且仅当 $\sum_{i=1}^n a_i m\phi(b_i) = 0$ 对所有 $m\in M$成立。这等价于 $(1\otimes\phi)(x)\cdot M = 0$，结论由此得出。□

Lemma 4.3.3. *Let A be a k-algebra with centre Z and let $\mathrm{mult}_Z : Z\otimes_k Z \to Z$ be the multiplication map. Then*

$$\mathrm{Ann}_{Z\otimes_k Z}(A) = \mathrm{Ann}_{Z\otimes_k Z}(Z) = \mathrm{Ann}_{Z\otimes_k Z}(1) = \ker \mathrm{mult}_Z\,.$$

证明。对于一个元素 $x=\sum_{i=1}^n a_i\otimes b_i \in Z\otimes_k Z$，我们有$x\cdot 1 = \sum a_i b_i = \mathrm{mult}_Z(x)$。这表明最后一个等式。由于 $A\supseteq Z\ni 1$，我们有 $\mathrm{Ann}_{Z\otimes_k Z}(A) \subseteq \mathrm{Ann}_{Z\otimes_k Z}(Z) \subseteq \mathrm{Ann}_{Z\otimes_k Z}(1) = \ker \mathrm{mult}_Z$根据上文。令 $x=\sum_{i=1}^n a_i\otimes b_i \in \ker\mathrm{mult}_Z$，并令 $c\in A$。那么由于 a_i、b_i在 A中是中心的，我们有 $x\cdot c = \sum_{i=1}^n a_i c b_i = (\sum_{i=1}^n a_i b_i)\,c = \mathrm{mult}_Z(x)c = 0$。因此 $\ker\mathrm{mult}_Z \subseteq \mathrm{Ann}_{Z\otimes_k Z}(A)$。□

Lemma 4.3.4. *Let A be a commutative k-algebra and let $\mathrm{mult}_A : A\otimes_k A \to A$ be the multiplication map.*

a)$\ker\mathrm{mult}_A$ 在 $A\otimes_k A$ 中作为理想由 $\{a\otimes 1 - 1\otimes a \text{ 生成：}\ a\in A\}$。b)假设 a_1、$\cdots$、a_m 生成 A 作为一个 k-代数。那么 $\{a_i\otimes 1 - 1\otimes a_i\text{：}\ i=1$、$\cdots$、$m\}$在 $A\otimes_k A$中作为理想生成$\ker\mathrm{mult}_A$。

证明。a) 显然，对于所有 $a\in A$，mult_A 都消去 $a\otimes 1 - 1\otimes a$。反过来，若 $x=\sum_{i=1}^n a_i\otimes b_i \in A\otimes A$ 满足 $\mathrm{mult}_A(x) = \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$，则

$$x = \sum_{i=1}^n (a_i\otimes b_i - 1\otimes a_i b_i) = \sum_{i=1}^n (a_i\otimes 1 - 1\otimes a_i)(1\otimes b_i)$$

lies in the ideal in $A\otimes A$ generated by $\{a\otimes 1 - 1\otimes a : a\in A\}$.

b) Write $\partial(a) = a\otimes 1 - 1\otimes a$ for $a\in A$. Then for all $a,b\in A$ we have

$$\partial(ab) = ab\otimes 1 - 1\otimes ab = (a\otimes 1 - 1\otimes a)(b\otimes 1) + (1\otimes a)(b\otimes 1 - 1\otimes b) = \partial(a)(b\otimes 1) + (1\otimes a)\partial(b).$$

因此，由 $\{\partial(a_i)\text{: }\ i=1,\cdots,m\}$ 生成的理想包含 $\partial(a_1^{k_1}\cdots a_m^{k_m})$，对所有非负整数 $k_1,\cdots,k_m$都成立。由于 $a\mapsto\partial(a)$是 k-线性的，且由于 $A = k[a_1,\cdots,a_m]$ 根据假设成立，该理想包含 $\partial(a)$，对所有 $a\in A$ 都成立。因此，根据a) 部分，它包含 $\ker\mathrm{mult}_A$。反向包含关系显然成立，因为对于所有 i，$\mathrm{mult}_A(\partial(a_i)) = 0$。□

4.3.2. 双模 $\left(\frac{H_\zeta}{H_\zeta\tau_0}\oplus\frac{H_\zeta}{H_\zeta\tau_1}\right)[\kappa,z,\mu]$。回顾规范对合 $\iota\colon H\to H$来自[OS22], §2.4.3：它是一个自逆的 k-代数自同态，H 它逐点固定子代数 $k[\Omega]$，并满足

$$\iota(\tau_0) = -e_{\mathbb{1}} - \tau_0 \quad\text{and}\quad \iota(\tau_1) = -e_{\mathbb{1}} - \tau_1.$$

Lemma 4.3.5. *ι fixes the centre Z of H pointwise.*

证明。 分解（11）连同命题 4.1.5 表明中心元素$\prec\{X_\lambda:\ \lambda\in\Omega\}$ 生成 Z 作为一个 k-代数。由于 ι是一个 $k[\Omega]$-线性对合，因此只需验证 ι 固定每个 X_λ。现在若 $\lambda\neq\mathbb{1}$，则由于 $e_{\mathbb{1}}e_\lambda=e_{\mathbb{1}}e_{\lambda^{-1}}=0$ 根据（10），我们计算

$$\iota(X_\lambda)=\iota(e_\lambda\tau_0\tau_1+e_{\lambda^{-1}}\tau_1\tau_0)=e_\lambda(-e_{\mathbb{1}}-\tau_0)(-e_{\mathbb{1}}-\tau_1)+e_{\lambda^{-1}}(-e_{\mathbb{1}}-\tau_1)(-e_{\mathbb{1}}-\tau_0)=X_\lambda.$$

另一方面，由于 $\zeta=(\tau_0+e_{\mathbb{1}})(\tau_1+e_{\mathbb{1}})+\tau_1\tau_0$，且由于 ι 固定 $e_{\mathbb{1}}\in k[\Omega],$，我们有

$$\iota(X_{\mathbb{1}})=e_{\mathbb{1}}\iota(\tau_0+e_{\mathbb{1}})\iota(\tau_1+e_{\mathbb{1}})+\iota(\tau_1)\iota(\tau_0)=e_{\mathbb{1}}\tau_0\tau_1+(-e_{\mathbb{1}}-\tau_1)(-e_{\mathbb{1}}-\tau_0)=e_{\mathbb{1}}\zeta=X_{\mathbb{1}},$$

其中我们使用了 ζ 引理 4.1.2。 □

设 $\kappa:\ H\to R$ 是 k-代数的一个同态，设 $z\in Z(R)$，并设 $\mu\in\Omega$。那么在[OS22], §2.4.7 中，Ollivier 和 Schneider 解释了如何利用这些参数赋予左R-模 $R\oplus R$ 一个右 H-模结构；事实上，它构成一个 (R,H)-双模，他们将其记为 $(R\oplus R)[\kappa,z,\mu]$。左 R 在 $(R\oplus R)[\kappa,z,\mu]$ 上的作用显而易见，而H 则从右侧按如下方式作用：

$$(r_1,r_2)h:=(r_1,r_2)\kappa_2(h)\quad\text{for all}\quad r_1,r_2\in R,h\in H.$$

这里 $\kappa_2:\ H\to M_2(H_\zeta)$ 是从 k 到 [OS22] §2.4.7 的显式 Z -代数同态。在这种一般性下，我们将明确计算 Z 在此双模上的右作用。

引理 4.3.6. 我们有 $\kappa_2(X_\alpha)=z^2\begin{pmatrix}\kappa(e_{\alpha^{-1}\mu}\tau_0\tau_1)&0\\0&\kappa(e_{\alpha\mu^{-1}}\tau_1\tau_0)\end{pmatrix}$ 对所有 $\alpha\in\widehat{\Omega}.$

证明。 回顾 [OS22]§2.4.7，可知 $\kappa_2(\tau_\omega)=M_\omega=\begin{pmatrix}\mu^{-1}(\omega)\ \kappa\ \tau_\omega&0\\0&\mu\ \omega\ \kappa\end{pmatrix}$。然后

$$\begin{aligned}\kappa_2(e_\alpha)&=-\sum_{\omega\in\Omega}\alpha^{-1}(\omega)\kappa_2(\omega)=-\sum_{\omega\in\Omega}\alpha^{-1}(\omega)M_\omega\\&=\begin{pmatrix}-\sum_{\omega\in\Omega}\alpha^{-1}(\omega)\mu^{-1}(\omega)\kappa(\tau_\omega)&0\\0&-\sum_{\omega\in\Omega}\alpha^{-1}(\omega)\mu(\omega)\kappa(\tau_\omega)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\kappa(e_{\alpha\mu})&0\\0&\kappa(e_{\alpha\mu^{-1}})\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{18}$$

using (9). On the other hand, we have

$$\kappa_2(\tau_0)=M_0=\begin{pmatrix}-\kappa(e_\mu)&0\\z\kappa(\tau_1)&0\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad\kappa_2(\tau_1)=M_1=\begin{pmatrix}0&z\kappa(\tau_0)\\0&-\kappa(e_{\mu^{-1}})\end{pmatrix}.$$

Then using (18) together with (10), we compute

$$\begin{aligned}\kappa_2(e_\alpha\tau_0\tau_1)&=\begin{pmatrix}\kappa(e_{\alpha\mu})&0\\0&\kappa(e_{\alpha\mu^{-1}})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\kappa(e_\mu)&0\\z\kappa(\tau_1)&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&z\kappa(\tau_0)\\0&-\kappa(e_{\mu^{-1}})\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&-z\kappa(e_{\alpha\mu}e_\mu\tau_0)\\0&z^2\kappa(e_{\alpha\mu^{-1}}\tau_1\tau_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\delta_{\alpha\mathbb{1}}z\kappa(e_\mu\tau_0)\\0&z^2\kappa(e_{\alpha\mu^{-1}}\tau_1\tau_0)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Similarly,

$$\begin{aligned}\kappa_2(e_{\alpha^{-1}}\tau_1\tau_0)&=\begin{pmatrix}\kappa(e_{\alpha^{-1}\mu})&0\\0&\kappa(e_{\alpha^{-1}\mu^{-1}})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&z\kappa(\tau_0)\\0&-\kappa(e_{\mu^{-1}})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\kappa(e_\mu)&0\\z\kappa(\tau_1)&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}z^2\kappa(e_{\alpha^{-1}\mu}\tau_0\tau_1)&0\\-z\kappa(e_{\alpha^{-1}\mu^{-1}}e_{\mu^{-1}}\tau_1)&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z^2\kappa(e_{\alpha^{-1}\mu}\tau_0\tau_1)&0\\-z\delta_{\alpha\mathbb{1}}\kappa(e_{\mu^{-1}}\tau_1)&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

首先假设 $\alpha \neq \mathbb{1}$，从而 $X_\alpha = e_\alpha\tau_0\tau_1 + e_{\alpha^{-1}}\tau_1\tau_0$。那么 $\delta_{\alpha\mathbb{1}} = 0$，将最后两个显示的方程相加即可得到这种情况下的结果。

现在假设 $\alpha = \mathbb{1}$ 使得 $X_\mathbb{1} = e_\mathbb{1}\zeta = e_\mathbb{1}\tau_0\tau_1 + e_\mathbb{1}\tau_1\tau_0 + e_\mathbb{1}(\tau_0 + \tau_1 + 1)$。在这种情况下将上述两个方程相加得到

$$\kappa_2(e_\mathbb{1}\tau_0\tau_1 + e_\mathbb{1}\tau_1\tau_0) = z^2\begin{pmatrix}\kappa(e_\mu\tau_0\tau_1) & 0\\ 0 & \kappa(e_{\mu^{-1}}\tau_1\tau_0)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -z\kappa(e_\mu\tau_0)\\ -z\kappa(e_{\mu^{-1}}\tau_1) & 0\end{pmatrix}. \tag{19}$$

Since $\kappa_2(e_\mathbb{1}) = \begin{pmatrix}\kappa(e_\mu) & 0\\ 0 & \kappa(e_{\mu^{-1}})\end{pmatrix}$ and $\kappa_2(\tau_0+\tau_1+1) = \begin{pmatrix}\kappa(1-e_\mu) & z\kappa(\tau_0)\\ z\kappa(\tau_1) & \kappa(1-e_{\mu^{-1}})\end{pmatrix}$, we have

$$\kappa_2(e_\mathbb{1}(\tau_0+\tau_1+1)) = \begin{pmatrix}0 & z\kappa(e_\mu\tau_0)\\ z\kappa(e_{\mu^{-1}}\tau_1) & 0\end{pmatrix}. \tag{20}$$

将 (19) 和 (20) 相加完成计算。 □

推论 4.3.7. $\kappa_2(\zeta) = z^2\begin{pmatrix}\kappa(\tau_0\tau_1) & 0\\ 0 & \kappa(\tau_1\tau_0)\end{pmatrix}$.

证明。 注意 $\sum_{\alpha\in\Omega} e_{\alpha^{-1}\mu} = \sum_{\lambda\in\Omega} e_\lambda = 1$。现在应用引理 4.3.6 和引理 4.1.4。 □

现在我们稍微特殊化，取 R 为 H 在 ζ 处的中心局部化 H_ζ。设 κ 为 $\iota\colon H \to H$ 与包含 $H \hookrightarrow H_\zeta$ 的复合，并设

$$z := -\tau_{\omega_{-1}}\zeta^{-1} \in H_\zeta \quad \text{and} \quad \mu := \mathrm{id}^2.$$

定义 4.3.8。设 $B := \left(\frac{H_\zeta}{H_\zeta\tau_0} \oplus \frac{H_\zeta}{H_\zeta\tau_1}\right)[\kappa, z, \mu]$ 是一个 (H_ζ, H)-双模。

We will now calculate the right action of Z on this bimodule.

Proposition 4.3.9.

a) 我们有 $v\zeta = \zeta^{-1}v$ 对所有 $v \in B$。 b)设 $\mathbf{1} := (1, 1) \in B$。则 $\mathbf{1}\epsilon_\alpha = \epsilon_{\alpha^{-1}\mu}\mathbf{1}$ 对所有 $\alpha \in \Omega$。

证明。a) 我们有 $z = -\tau_{\omega_{-1}}\zeta^{-1}$，因此 $z^2 = \zeta^{-2}$，因为 ζ 是中心的，且 $(\omega_{-1})^2 = \omega_1 = 1$。注意到 $\kappa(\tau_0\tau_1) = \iota(\tau_0\tau_1) = (\tau_0 + e_\mathbb{1})(\tau_1 + e_\mathbb{1}) = \zeta - \tau_1\tau_0 \equiv \zeta$ 模 $H\tau_0$，同理，鉴于引理 4.1.2，$\kappa(\tau_1\tau_0) = \zeta - \tau_0\tau_1 \equiv \zeta$ 模 $H\tau_1$。记 $v = (\overline{v_1}, \overline{v_2})$，我们应用推论 4.3.7：

$$(\overline{v_1}, \overline{v_2})\zeta = (\overline{v_1}, \overline{v_2})\kappa_2(\zeta) = (\overline{v_1}, \overline{v_2})\zeta^{-2}\begin{pmatrix}\zeta - \tau_1\tau_0 & 0\\ 0 & \zeta - \tau_0\tau_1\end{pmatrix} = (\overline{v_1\zeta^{-1}}, \overline{v_2\zeta^{-1}}) = \zeta^{-1}(\overline{v_1}, \overline{v_2}).$$

b) Recall that $\epsilon_\alpha = X_\alpha/\zeta$ by Lemma 4.2.9. We will show that

$$\zeta^2\mathbf{1}X_\alpha = X_{\alpha^{-1}\mu}\mathbf{1}. \tag{21}$$

Applying Lemma 4.3.6, we calculate

$$(\overline{1}, \overline{1})\kappa_2(X_\alpha) = (\overline{1}, \overline{1})z^2\begin{pmatrix}\kappa(e_{\alpha^{-1}\mu}\tau_0\tau_1) & 0\\ 0 & \kappa(e_{\alpha\mu^{-1}}\tau_1\tau_0)\end{pmatrix} = \zeta^{-2}\left(\overline{e_{\alpha^{-1}\mu}\iota(\tau_0\tau_1)}, \overline{e_{\alpha\mu^{-1}}\iota(\tau_1\tau_0)}\right). \tag{22}$$

接下来，

$$\begin{aligned}\iota(\tau_0\tau_1) &= (-\tau_0 - e_\mathbb{1})(-\tau_1 - e_\mathbb{1}) = \tau_0\tau_1 + e_\mathbb{1}(\tau_0 + \tau_1 + 1), \quad \text{and}\\ \iota(\tau_1\tau_0) &= (-\tau_1 - e_\mathbb{1})(-\tau_0 - e_\mathbb{1}) = \tau_1\tau_0 + e_\mathbb{1}(\tau_0 + \tau_1 + 1).\end{aligned} \tag{23}$$

首先假设 $\alpha \neq \mu$。那么由于 $e_{\alpha^{-1}\mu}e_{\mathbb{1}} = e_{\alpha\mu^{-1}}e_{\mathbb{1}} = 0$ 由 (10),

$$\mathbf{1}X_\alpha = (\overline{1},\overline{1})\kappa_2(X_\alpha) = \zeta^{-2}\left(\overline{e_{\alpha^{-1}\mu}\tau_0\tau_1}, \overline{e_{\alpha\mu^{-1}}\tau_1\tau_0}\right).$$

On the other hand, using Def. 4.1.3, we have the congruences

$$X_{\alpha^{-1}\mu} = e_{\alpha^{-1}\mu}\tau_0\tau_1 + e_{\alpha\mu^{-1}}\tau_1\tau_0 \equiv \begin{cases} e_{\alpha^{-1}\mu}\tau_0\tau_1 & \mod H\tau_0 \\ e_{\alpha\mu^{-1}}\tau_1\tau_0 & \mod H\tau_1. \end{cases}$$

Putting these together shows that

$$X_{\alpha^{-1}\mu}\mathbf{1} = \left(\overline{X_{\alpha^{-1}\mu}}, \overline{X_{\alpha^{-1}\mu}}\right) = \left(\overline{e_{\alpha^{-1}\mu}\tau_0\tau_1}, \overline{e_{\alpha\mu^{-1}}\tau_1\tau_0}\right) = \zeta^2\mathbf{1}X_\alpha$$

as required. Suppose now that $\alpha = \mu$. Then applying (22) and (23) again, we have

$$\zeta^2\mathbf{1}X_\mu = (\overline{e_{\mathbb{1}}\iota(\tau_0\tau_1)}, \overline{e_{\mathbb{1}}\iota(\tau_1\tau_0)}) = (\overline{e_{\mathbb{1}}\tau_0\tau_1 + e_{\mathbb{1}}\tau_1 + e_{\mathbb{1}}}, \overline{e_{\mathbb{1}}\tau_1\tau_0 + e_{\mathbb{1}}\tau_0 + e_{\mathbb{1}}}),$$

然而，由于在此情况下 $X_{\alpha^{-1}\mu} = X_{\mathbb{1}} = e_{\mathbb{1}}\zeta = e_{\mathbb{1}}(\tau_0\tau_1 + \tau_1\tau_0 + \tau_0 + \tau_1 + 1)$，我们看到

$$X_{\mathbb{1}}\mathbf{1} = (\overline{X_{\mathbb{1}}}, \overline{X_{\mathbb{1}}}) = (\overline{e_{\mathbb{1}}\tau_0\tau_1 + e_{\mathbb{1}}\tau_1 + e_{\mathbb{1}}}, \overline{e_{\mathbb{1}}\tau_1\tau_0 + e_{\mathbb{1}}\tau_0 + e_{\mathbb{1}}}).$$

已经证明 (21) 成立，我们使用 a) 部分得到

$$\mathbf{1}\epsilon_\alpha = \left(\mathbf{1}\zeta^{-1}\right)X_\alpha = \zeta\mathbf{1}X_\alpha = \zeta^{-1}\left(\zeta^2\mathbf{1}X_\alpha\right) = \zeta^{-1}X_{\alpha^{-1}\mu}\mathbf{1} = \epsilon_{\alpha^{-1}\mu}\mathbf{1}. \qquad \square$$

4.3.3. B 在 $Z_\zeta \otimes Z_\zeta$中的湮灭子。由推论 4.2.7 回忆，Z_ζ 同构于$k[\Omega][t,t^{-1}]$。注意到 $k[\Omega]$ 同构于 $|\widehat{\Omega}| = q-1$ 个基域 k的直积，以下陈述是显然的:

Lemma 4.3.10. 存在唯一的 k-代数自同构 $\phi : Z_\zeta \to Z_\zeta$ 使得 t

$$\phi(\zeta) = \zeta^{-1} \quad \textit{and} \quad \phi(e_\alpha) = e_{\mu/\alpha} \quad \textit{for all} \quad \alpha \in \widehat{\Omega}.$$

注意这个 ϕ实际上是一个对合。

命题 4.3.11. 映射 $\psi : (H_\zeta)_\phi \to B$ 由 $\psi(h) = h\mathbf{1}$ 对所有 $h \in H_\zeta$ 给出，是 (H_ζ, Z_ζ)-双模的单射同态。

证明。映射 ψ 显然是左 H_ζ-线性的。使用命题 4.3.9，我们有

$$\psi(h)\zeta = h\mathbf{1}\zeta = h\zeta^{-1}\mathbf{1} = \psi(h\phi(\zeta)) \quad \text{and} \quad \psi(h)\epsilon_\alpha = h\mathbf{1}\epsilon_\alpha = h\epsilon_{\mu/\alpha}\mathbf{1} = \psi(h\phi(\epsilon_\alpha))$$

对于任意 $\alpha \in \Omega$。在推论 4.2.7之后，我们知道 Z_ζ 作为 k-代数由 ϵ_α的，ζ和 ζ^{-1}生成。由此得出 ψ 是右 Z_ζ-线性的。

我们有 $\ker\psi = H_\zeta\tau_0 \cap H_\zeta\tau_1$ 根据 B 的定义。这等于 $(H\tau_0 \cap H\tau_1)\zeta$。但是$H\tau_0 \cap H\tau_1 = 0$ 根据引理 4.3.12 如下。$\square$

Lemma 4.3.12. *The sum of left ideals $H\tau_0 + H\tau_1$ is direct.*

证明。回顾一下，$\{\tau_w : w \in W\}$ 构成 H 的一个基，作为一个 k-向量空间。现在，W 包含Ω作为一个正规子群，并且 s_0 和 s_1 在 W/Ω中的像生成一个无限二面体群的副本。因此，W 中的每个元素都可以唯一地表示为ωw 的形式，其中 $\omega \in \Omega$，而 w 是 s_0 和 s_1中的一个字。于是，τ_0 和 τ_1 中的字构成 H 作为一个 $k[\Omega]$-模的一个基。每个这样的非空字恰好以 τ_0 或 τ_1中的一个结尾，从而得到所述结果。$\square$

现在我们研究余核 ψ。

Lemma 4.3.13. *The left H-module $H/(H\tau_0 + H\tau_1)$ is killed by $\zeta(\zeta-1)$.*

证明。事实是，$\{\tau_w\colon\ w \in W\}$ 张成 H，这意味着 $H = k[\Omega] \oplus (H\tau_0 + H\tau_1)$ 是一个 k-向量空间。因此，只需证明对所有 $\lambda \in \Omega$，$\zeta(\zeta-1)e_\lambda \in H\tau_0 + H\tau_1$。然而 $\zeta = \tau_0\tau_1 + \tau_1\tau_0 + e_{\mathbb{1}}\tau_1 + e_{\mathbb{1}}\tau_0 + e_{\mathbb{1}} \equiv e_{\mathbb{1}}$ 模 $H\tau_0 + H\tau_1$，所以如果 $\lambda \neq \mathbb{1}$，则已经有 $\zeta e_\lambda \equiv 0$ 模 $H\tau_0 + H\tau_1$；而如果 $\lambda = \mathbb{1}$，那么 $\zeta(\zeta-1)e_{\mathbb{1}} = \zeta(\zeta e_{\mathbb{1}} - e_{\mathbb{1}}) \equiv \zeta(e_{\mathbb{1}}^2 - e_{\mathbb{1}}) = 0$ 模 $H\tau_0 + H\tau_1$。□

Corollary 4.3.14. *There exist elements $u, v \in H$ such that $\zeta(\zeta-1) = u\tau_0 + v\tau_1$.*

Proposition 4.3.15. *We have $(\zeta-1)\cdot \operatorname{coker}\psi = 0$.*

证明。令 $(\overline{a},\ \overline{b}) \in B$ 对某个 $a,\ b \in H_\zeta$。定义 $c\colon = av\tau_1 + bu\tau_0$，其中 $u,\ v \in H$ 由推论4.3.14给出。则

$$c = a\left(\zeta(\zeta-1) - u\tau_0\right) + bu\tau_0 \equiv a\zeta(\zeta-1) \mod H_\zeta\tau_0$$

同理，$c \equiv b\zeta(\zeta-1)$ 模 $H_\zeta\tau_1$。因此 $\zeta(\zeta-1)(\overline{a},\overline{b}) = (\overline{c},\overline{c}) = c\mathbf{1} = \psi(c)$，故余核 ψ 被 $\zeta(\zeta-1)$ 消去。由于 ζ 在 H_ζ 中可逆，余核 ψ 已被 $\zeta-1$ 消去。□

Lemma 4.3.16. *$H/H\tau_0$ and $H/H\tau_1$ are $k[\zeta]$-torsionfree.*

Proof. Let H_0 be the k-subalgebra of H generated by $k[\Omega]$ and τ_0. We have

$$H_0 = k[\Omega] \oplus k[\Omega]\tau_0 = k[\Omega] \oplus \tau_0 k[\Omega].$$

接下来，由 [OS18] 推论 3.4，H 作为一个 $H_0 \otimes_k k[\zeta]$-模是秩为 2 的自由模，其基为 $\{1, \tau_1\}$。若 $H_0[\zeta]$ 表示由 H 和 H_0 生成的 ζ 的子代数，则这意味着乘法映射 $H_0 \otimes_k k[\zeta] \to H_0[\zeta]$ 是一个 k-代数同构，并且 H 作为左 $H_0[\zeta]$-模是秩为 2 的自由模，其基为 $\{1, \tau_1\}$：

$$H = H_0[\zeta] \oplus H_0[\zeta]\tau_1.$$

令 $A := k[\Omega][\zeta] \subset H_0[\zeta]$；显然 A 同构于一个在 $k[\Omega]$ 上的一元多项式环，作为一个 k-代数。结合上面显示的两个等式，我们得到分解

$$H = A \oplus A\tau_0 \oplus A\tau_1 \oplus A\tau_0\tau_1$$

的 H 作为左 A-模。现在 $\tau_1^2 = -e_{\mathbb{1}}\tau_1$ 由引理 4.1.1可知，且 $e_{\mathbb{1}}$ 在 H 中是中心的。这意味着，右乘 τ_1 将 H 映入 $A\tau_1 \oplus A\tau_0\tau_1$。由于这个 A-模显然包含于 $H\tau_1$，我们得出 $H\tau_1 = A\tau_1 \oplus A\tau_0\tau_1$，因此

$$H/H\tau_1 \cong A \oplus A\tau_0$$

作为左 A-模。由于 A 本身是自由的 $k[\zeta]$-模，我们看到 $H/H\tau_1$ 是秩为 $2(q-1)$ 的自由 $k[\zeta]$-模。特别地，它是 $k[\zeta]$-无挠的。

对于 $H/H\tau_0$ 的论证相同，只需将 τ_0 与 τ_1 互换。□

推论 4.3.17。左 H-模 B 是 $k[\zeta]$-无挠的。

证明。作为左 $k[\zeta]$-模，B 同构于 $k[\zeta,\zeta^{-1}] \otimes_{k[\zeta]} \left(\frac{H}{H\tau_0} \oplus \frac{H}{H\tau_1}\right)$。括号中的表达式由引理 $k[\zeta]$ 可知是 4.3.16-无挠的，结论遂易得。□

Theorem 4.3.18. *Let $R = Z_\zeta \otimes Z_\zeta$. Then we have $\operatorname{Ann}_R(B) = (1 \otimes \phi)(\ker \operatorname{mult}_{Z_\zeta})$.*

证明. 利用命题 4.3.11，我们看到

$$\operatorname{Ann}_R(B) \subseteq \operatorname{Ann}_R((H_\zeta)_\phi).$$

假设 $r \in R$ 消灭 $(H_\zeta)_\phi$；则 r 消灭 $\mathrm{im}(\psi)$. 由命题 4.3.15，$(\zeta-1)B \subseteq \mathrm{im}(\psi)$. 因此$r\cdot((\zeta-1)\otimes 1)$ 消灭 B，所以 $\zeta-1$ 消灭 $r\cdot B$。但是 B 是 $k[\zeta]$-无挠 由推论 4.3.17，所以 $r\cdot B=0$。这表明

$$\mathrm{Ann}_R(B) = \mathrm{Ann}_R((H_\zeta)_\phi).$$

现在我们应用引理 4.3.2 于 (Z_ζ, Z_ζ)-双模 H_ζ，可得

$$\mathrm{Ann}_R((H_\zeta)_\phi) = (1\otimes\phi^{-1})(\mathrm{Ann}_R(H_\zeta)).$$

现在 Z_ζ i 是 H_ζ 的中心，因此 $\mathrm{Ann}_R(H_\zeta) = \mathrm{Ann}_R(Z_\zeta)$，由引理 4.3.3。由于 $\phi=\phi^{-1}$，

$$\mathrm{Ann}_R(B) = \mathrm{Ann}_R((H_\zeta)_\phi) = (1\otimes\phi)(\mathrm{Ann}_R(Z_\zeta)).$$

结论现在由引理 4.3.3 取 $A = Z_\zeta$ 应用后即得。 □

记 $\delta(a) := a\otimes 1 - 1\otimes\phi(a)$ 对所有 $a \in Z_\zeta$。以下用于 $\mathrm{Ann}_R(B)$ 的有限理想生成元集合将在后文对我们有用。

Corollary 4.3.19. *We have* $\mathrm{Ann}_R(B) = R\delta(\zeta) + \sum_{\alpha\in\widehat{\Omega}} R\delta(\epsilon_\alpha)$.

证明。根据推论 4.2.7，存在一个 k-代数同构 $Z_\zeta \xrightarrow{\cong} k[\Omega][t,t^{-1}]$，它将 ϵ_α 映到e_α，并将 ζ映到 t。因此 $\{\epsilon_\alpha\colon \alpha\in\widehat{\Omega}\}\cup\{\zeta,\zeta^{-1}\}$ 构成 k-代数 Z_ζ的一组生成元。记 $\partial(a) = a\otimes 1 - 1\otimes a$ 对所有 $a\in Z_\zeta$，由引理 4.3.4.b 可得

$$\ker \mathrm{mult}_{Z_\zeta} = R\partial(\zeta) + R\partial(\zeta^{-1}) + \sum_{\alpha\in\widehat{\Omega}} R\partial(\epsilon_\alpha). \tag{24}$$

注意到 $\partial(\zeta^{-1}) = \zeta^{-1}\otimes 1 + 1\otimes\zeta^{-1} = (\zeta^{-1}\otimes\zeta^{-1})\partial(\zeta)$，因此 $R\partial(\zeta^{-1}) = R\partial(\zeta)$。另外，注意到 $(1\otimes\phi)\partial = \delta$。因此，将 $1\otimes\phi$ 应用于 (24) 得到

$$(1\otimes\phi)\left(\ker \mathrm{mult}_{Z_\zeta}\right) = R\delta(\zeta) + \sum_{\alpha\in\widehat{\Omega}} R\delta(\epsilon_\alpha).$$

The result now follows from Thm. 4.3.18. □

4.4. **The bimodule annihilator of $\mathrm{Ext}^*_G(X,X)$.** Our goal will be to compute the ideal

$$\mathrm{Ann}_{Z\otimes_k Z} E^*, \quad \text{where} \quad E^* = \bigoplus_{n\geq 0} E^n, \quad \text{and} \quad E^n = \mathrm{Ext}^n_G(X,X).$$

For brevity, we will write for each $n\geq 0$

$$J_n := \mathrm{Ann}_{Z\otimes_k Z}(E^n).$$

首先，我们将使用 Poincar´e 对偶同构 [OS19] 来建立 J_n 与 J_{d-n}之间的联系，其中 d 是 G 作为一个 p-进李群的维数。为此，我们需要考察反对合 $\mathfrak{J}\colon E^*\to E^*$，它是在 [OS19] 中引入的，§6：根据 E^* OS[命题 6.1，它是分次代数 19], 的一个反自同构，因此特别地限制为 k的一个 $H=E^0$-代数反自同构。

Lemma 4.4.1. *$\mathfrak{J}$ fixes Z pointwise.*

证明。 根据 [OS19] 命题 6.1，我们知道 $\mathcal{J}(\tau_g) = \tau_{g^{-1}}$ 对所有 $g \in G$，其中τ_g 表示双陪集的特征函数 IgI ——参见 [OS19]， §2.2。因此可得 $\mathcal{J}$限制在群代数 $k[\Omega] \subset H$ 上是标准的反对合，它将群元素 τ_ω 映射为 $\tau_{\omega^{-1}}$，对每个 $\omega \in \Omega$。等式 (9) 现在意味着

$$\mathcal{J}(e_\lambda) = e_{\lambda^{-1}} \quad \text{for all} \quad \lambda \in \widehat{\Omega}.$$

接下来，对于 $i = 0$，我们有 $s_i^{-1} = -s_i$，其中 1 属于 G。记作 $\epsilon = \tau_{\omega_{-1}}$，于是可得 t

$$\mathcal{J}(\tau_i) = \tau_i\epsilon, \quad i = 0, 1.$$

掌握这两条信息后，现在我们可以计算 $\mathcal{J}$ 对$\widehat{}$代数生成元 X_λ 的 Z 的定义 4.1.3的影响，对每个 $\lambda \in \Omega$。当 $\lambda \neq \mathbb{1}$时，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(X_\lambda) &= \mathcal{J}(e_\lambda\tau_0\tau_1 + e_{\lambda^{-1}}\tau_1\tau_0) \\
&= \mathcal{J}(\tau_1)\mathcal{J}(\tau_0)\mathcal{J}(e_\lambda) + \mathcal{J}(\tau_0)\mathcal{J}(\tau_1)\mathcal{J}(e_{\lambda^{-1}}) \\
&= \tau_1\epsilon\,\tau_0\epsilon\,e_{\lambda^{-1}} + \tau_0\epsilon\,\tau_1\epsilon\,e_\lambda \\
&= \tau_1\tau_0 e_{\lambda^{-1}} + \tau_0\tau_1 e_\lambda \\
&= e_{\lambda^{-1}}\tau_1\tau_0 + e_\lambda\tau_0\tau_1 \\
&= X_\lambda.
\end{aligned}$$

我　　这里用到了 ϵ 是 H 中的中心对合这一事实，以及以下关系　　s

$$\tau_i e_\lambda = e_{\lambda^{-1}}\tau_i, \quad i = 0, 1$$

根据引理 4.1.1。接下来，回顾引理 4.1.2 指出 $\zeta = (\tau_0 + e_\mathbb{1})(\tau_1 + e_\mathbb{1}) + \tau_1\tau_0$。当$\lambda = \mathbb{1}$时，计算如下：

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(X_\mathbb{1}) &= \mathcal{J}(e_\mathbb{1}\zeta) = \mathcal{J}(\zeta)e_\mathbb{1} \\
&= ((\tau_0\epsilon)(\tau_1\epsilon) + (\tau_1\epsilon + e_\mathbb{1})(\tau_0\epsilon + e_\mathbb{1}))e_\mathbb{1} \\
&= (\tau_0\tau_1 + \tau_1\tau_0 + e_\mathbb{1}\tau_0\epsilon + \tau_1 e_\mathbb{1}\epsilon + e_\mathbb{1})e_\mathbb{1} \\
&= \zeta e_\mathbb{1} = X_\mathbb{1}.
\end{aligned}$$

这里我们用到了如下事实： $e_\mathbb{1}\epsilon = \mathbb{1}$ (ϵ) $e_\mathbb{1} = e_\mathbb{1}$。我们已经证明， $\mathcal{J}$ 固定每个 X_λ。根据命题 4.1.5，这些元素作为 Z 的 k-代数生成 $\mathcal{J}|_Z$ 是恒等映射。□

对于下一个结果，我们需要引入 k-代数对合 σ： $Z \otimes_k Z \to Z \otimes_k Z$，其定义为 $\sigma(z_1 \otimes z_2) = z_2 \otimes z_1$，其中 $z_1, z_2 \in Z$。

Lemma 4.4.2. *For each $n = 0, \cdots, d$, we have $J_{d-n} = \sigma(J_n)$.*

证明。 对于一个 k-向量空间 V，令 $V^\vee$ 表示满 k-线性对偶 $V^\vee =$ 同态集$_k(V, k)$。当V恰好是一个 (H, H)-双模时， $V^\vee$ 也是一个 (H, H)-双模。沿用 [OS19]§7.1，该双模结构由以下规则给出：

$$(a \cdot f \cdot b)(v) = f(b\,v\,a) \quad \text{for all} \quad v \in V, a, b \in H, f \in V^\vee.$$

我们这里只对 (Z, Z)-双模感兴趣。将每个 (Z, Z)-双模 V以标准方式视为左$A := Z \otimes_k Z$-模，我们可以将 A 在 $V^\vee$ 上的这个作用写成如下：

$$(x \cdot f)(v) = f(\sigma(x)v) \quad \text{for all} \quad v \in V, x \in A, f \in V^\vee.$$

It follows immediately that for every (Z, Z)-bimodule V we have

$$\sigma^{-1}(\mathrm{Ann}_A V) \subseteq \mathrm{Ann}_A(V^\vee). \tag{25}$$

Now, [OS19] Prop. 7.18 gives us an injective homomorphism of (H,H)-bimodules

$$\Delta^n : E^n \hookrightarrow ({}^{\jmath}(E^{d-n})^{\jmath})^\vee.$$

Since $\jmath$ fixes Z pointwise by Lemma 4.4.1, we may write this as

$$\Delta^n : E^n \hookrightarrow (E^{d-n})^\vee,$$

an injective homomorphism of (Z,Z)-bimodules. Using (25), we obtain

$$J_{d-n} = \mathrm{Ann}_A(E^{d-n}) \subseteq \sigma(\mathrm{Ann}_A(E^{d-n})^\vee) \subseteq \sigma(\mathrm{Ann}_A(E^n)) = \sigma(J_n).$$

将 n 替换为 $d-n$ 得到 $J_n \subseteq \sigma(J_{d-n})$，因此 $J_{d-n} \subseteq \sigma(J_n) \subseteq \sigma^2(J_{d-n}) = J_{d-n}$。 □

Recall the multiplication map $\mathrm{mult}_Z : Z \otimes_k Z \to Z$ from §4.3.1.

Lemma 4.4.3.

a) *We have* $J_0 = \ker \mathrm{mult}_Z$.

b) $J_0 = \sigma(J_0)$.

证明。 由于 Ext函子$^0_G(X,X)$ =同态集$_G(X,X)$ $= H$并且 $Z = Z(H)$，引理 4.3.3 推出 $J_0 = \ker \mathrm{mult}_Z$。第二个结论由引理 4.3.4 得出。a. □

在 §4.4结束之前，我们假设 $\mathfrak{F} = \mathbb{Q}_p$、 $p \neq 2$、3 以及 $\pi = p$。 这一假设使我们能够应用 [OS22] 的结果来研究 J_1。首先回忆一下，根据 [OS22] 命题 6.10(1)，存在一个某种（H、 H）-双模的短正合列

$$0 \to \ker(f_1) \oplus \ker(g_1) \to E^1 \to C \to 0. \tag{26}$$

Here C is a certain (H,H)-bimodule with $\dim_k C = 4$.

Lemma 4.4.4. *We have* $\mathrm{Ann}_{Z\otimes_k Z}(\ker g_1)) = J_0$.

证明。 由 [OS22] 命题 6.3，$\ker(g_1) \cong F^1H$作为一个$(H,\ H)$-双模，其中$(F^nH)_{n\geq 0}$是 H 上定义于 [OS22], §2.2.4 的降滤过。记 $A = Z \otimes_k Z$，则有

$$\mathrm{Ann}_A(\ker(g_1)) = \mathrm{Ann}_A(F^1H) \supseteq \mathrm{Ann}_A(H).$$

对于反向包含，注意到 $F^1H = H\tau_0 + H\tau_1$，因此 $\zeta(\zeta-1)$ 从左侧消去 H/F^1H，由引理 4.3.13。由于 H 是 $k[\zeta]$- 无挠的，并且由于 ζ 在 H 中为中心元，左乘 $\zeta(\zeta-1)$ 给出一个（H，H）- 双模 $H \hookrightarrow F^1H$的单射同态。因此

$$\mathrm{Ann}_A(\ker(g_1)) = \mathrm{Ann}_A(F^1H) = \mathrm{Ann}_A(H) = \mathrm{Ann}_A(E^0) = J_0.$$ □

在 [OS22], 第 38 页中，Ollivier 和 Schneider考虑了（$H_\zeta \oplus H_\zeta$）$[\kappa, z, \mu]$ 的某个扭曲，他们将其记作（$H_\zeta \oplus H_\zeta$）$^{\pm}$。 H在（$H_\zeta \oplus H_\zeta$）H上的左作用不变，但右 H-作用通过预先复合之前的右 ι-作用与 H_ζ而发生扭曲。他们证明了这个直和的左 $H_\zeta\tau_0 \oplus H_\zeta\tau_1$ -子模 H在这个新的右H_ζ-作用下是稳定的，这使他们能够取商，从而构造出（H,）-双模。

$$\left(\frac{H_\zeta}{H_\zeta\tau_0} \oplus \frac{H_\zeta}{H_\zeta\tau_1}\right)^{\pm} = \frac{(H_\zeta \oplus H_\zeta)^{\pm}}{(H_\zeta\tau_0 \oplus H_\zeta\tau_1)^{\pm}}.$$

随后他们证明了以下定理——参见[OS22] 命题 3.28 和定理 6.8 ：

Theorem 4.4.5. *There is an* (H_ζ, H)*-bimodule isomorphism*

$$\left(\frac{H_\zeta}{H_\zeta\tau_0} \oplus \frac{H_\zeta}{H_\zeta\tau_1}\right)^{\pm} \xrightarrow{\cong} \ker(f_1)$$

我们只关注（Z_ζ， Z_ζ）-双模结构于$\ker(f_1)$ 上。回顾定义H_ζ， H）-双模 B 见定义 4.3.8。

推论 4.4.6. 存在一个 (H_ζ, Z_ζ)-双模同构 $B \xrightarrow{\sim} \ker(f_1)$.

证明。 注意， ζ 根据定义，从两侧可逆地作用于 $\ker(f_1)$：事实上，左ζ-作用与右 ζ-作用互为逆。因此 $\ker(f_1)$ 实际上是一个 (H_ζ, H_ζ)- 双模。由于 ι 根据引理 Z 固定了 4.3.5，在前面合成 ι 不会改变 Z的右作用。现在可以应用定理4.4.5。 □

定理 4.4.7. 假设 $\mathfrak{F} = \mathbb{Q}_p$, $p \neq 2, 3$ 和 $\pi = p$。

a) 我们有 $J_1 = J_0 \cap \mathrm{Ann}^{Z\otimes_k Z}(B)$。

b) $J_1 = \sigma(J_1)$。

Proof. a) Again, write $A = Z \otimes_k Z$. Using (26), we see that

$$\mathrm{Ann}_A(E^1) \subseteq \mathrm{Ann}_A(\ker(f_1) \oplus \ker(g_1)).$$

对于反向包含，假设 $x \in \mathrm{Ann}_A(\ker(f_1) \oplus \ker(g_1))$.由于出现在 (26)中的 (H, H)-双模 C 满足$\dim_k C < \infty$, 因此存在一个非零 $g(\zeta) \in k[\zeta]$ 使得 $g(\zeta)E^1 \subseteq \ker(f_1) \oplus \ker(g_1)$。因此 $x \cdot (g(\zeta)E^1) = 0$，所以 $g(\zeta)(x \cdot E^1) = 0$。由于根据 [OS22] 引理 5.1， E^1 是$k[\zeta]$-无挠的，这迫使 $x \cdot E^1 = 0$。因此 $x \in \mathrm{Ann}_A(E^1)$ 并且

$$\mathrm{Ann}_A(E^1) = \mathrm{Ann}_A(\ker(f_1) \oplus \ker(g_1)) = \mathrm{Ann}_A(\ker(f_1)) \cap \mathrm{Ann}_A(\ker(g_1)).$$

Using Cor. 4.4.6 and Lemma 4.4.4, we see that

$$J_1 = \mathrm{Ann}_A(E^1) = \mathrm{Ann}_A(B) \cap J_0. \tag{27}$$

b) 我们知道， B事实上是一个（Z_ζ, Z_ζ）-双模，因此

$$\mathrm{Ann}_A(B) = A \cap \mathrm{Ann}_{Z_\zeta \otimes_k Z_\zeta}(B).$$

根据公式（27）和引理4.4.3.b，只需证明将 σ 自然延拓到 $Z_\zeta \otimes Z_\zeta$ 后仍保持 $\mathrm{Ann}^{Z_\zeta\otimes_k Z_\zeta}(B)$ 。

回顾定理 4.3.18 ，该理想由以下元素生成： $\{\delta(a) : a \in Z_\zeta\}$，其中我们定义$\delta(a) := a \otimes 1 - 1 \otimes \phi(a)$，对每个 $a \in A$。由于 $\phi^2(a) = a$ 对所有 $a \in Z_\zeta$均成立，我们计算得

$$\sigma(\delta(a)) = \sigma(a \otimes 1 - 1 \otimes \phi(a)) = -(\phi(a) \otimes 1 - 1 \otimes a) = -\delta(\phi(a)).$$

因此， σ 按要求保持 $\mathrm{Ann}^{Z_\zeta\otimes_k Z_\zeta}(B)$。 □

综合以上各点，我们得到

推论 4.4.8. 设 $\mathfrak{F} = \mathbb{Q}_p$, $p \neq 2, 3$ 和 $\pi = p$。那么

$$\mathrm{Ann}_{Z\otimes_k Z}(E^*) = \ker \mathrm{mult}_Z \cap \mathrm{Ann}_{Z\otimes_k Z}(B).$$

证明。 此处 $d = 3$，因此 $\mathrm{Ann}^{Z\otimes_k Z}(E^*) = J_0 \cap J_1 \cap J_2 \cap J_3$。然而 $J_2 = \sigma(J_1)$ 以及 $J_3 = \sigma(J_0)$ 根据引理 4.4.2。利用引理 4.4.3.b 和定理4.4.7.b，我们得到

$$\mathrm{Ann}_{Z\otimes_k Z}(E^*) = J_0 \cap J_1.$$

Now use Thm. 4.4.7.a and Lemma 4.4.3.a to conclude. □

4.5.商空间的计算。从现在起，我们假设 $\mathfrak{F} = \mathbb{Q}_p$,$p \neq 2$、$3$ 和 $\pi = p$。我们的目标是计算商局部环化空间 $\Xi/\mathcal{R}$，其中

$$\mathcal{R} := V(\mathrm{Ann}_{Z\otimes_k Z}(E^*)) \subset \Xi \times \Xi.$$

4.5.1. *Passing to the normalisation.* Cor. 4.4.8 tells us that

$$\mathcal{R} = V\left(\ker \mathrm{mult}_Z \cap \mathrm{Ann}_{Z\otimes_k Z}(B)\right).$$

回顾 Def. 4.2.3，$\theta:\ \Xi' \to \Xi$ 是 Ξ的正规化，其中 $\theta = \mathrm{Spec}(\varphi)$且$\varphi: Z \to Z'$ 是将 $X_\lambda \in Z$ 映射到 $e_\lambda t \in Z' = k[\Omega][t]$的映射。由于局部化映射$Z \to Z_\zeta$通过 Z'分解，我们看到，Def. 4.3.8 中的（Z_ζ, Z_ζ）-双模 B可沿 $Z' \hookrightarrow Z_\zeta$通过限制视为（$Z', Z'$）-双模。

定义4.5.1.我们定义 $\mathcal{R}' := V(\ker \mathrm{mult}_{Z'} \cap \mathrm{Ann}^{Z'\otimes_k Z'}(B)) \subset \Xi' \times \Xi'$.

Lemma 4.5.2. *Write $A' = Z' \otimes_k Z'$. Then we have*

$$\ker \mathrm{mult}_{Z'} = A'(t\otimes 1 - 1\otimes t) + \sum_{\alpha\in\widehat{\Omega}} A'(e_\alpha \otimes 1 - 1\otimes e_\alpha).$$

$\widehat{}$证明。 该 k-代数 $Z' = k[\Omega][t]$ 由以下元素生成 $\{t\}\cup\{e_\alpha:\ \alpha\in\Omega\}$。使用引理 4.3.4.b. □

It turns out that $\mathrm{Ann}_{Z'\otimes_k Z'}(B)$ is slightly easier to compute than $\mathrm{Ann}_{Z\otimes_k Z}(B)$.

Proposition 4.5.3. *Write $A' = Z' \otimes_k Z'$. Then we have*

$$\mathrm{Ann}_{A'}(B) = I := A'(t\otimes t - 1\otimes 1) + \sum_{\alpha\in\widehat{\Omega}} A'(e_\alpha\otimes 1 - 1\otimes e_{\mu/\alpha}).$$

证明。根据推论4.2.7，存在一个 k-代数同构$Z'_t \cong Z_\zeta$。在此同构下，$\backsim t \in Z'$ 映射到 $\zeta \in Z_\zeta$，而 $e_\alpha \in Z'$ 映射到 $\epsilon_\alpha = X_\alpha/\zeta \in Z_\zeta$，对于每个 $\alpha\in\Omega$。此同构还诱导出 k-代数同构 $A'_{t\otimes t} \cong (Z'_t)\otimes_k (Z'_t) \cong (Z_\zeta)\otimes_k (Z_\zeta) \cong R$。通过此同构将 B 视为一个 $A'_{t\otimes t}$-模，我们可以应用推论 4.3.19 得到

$$\mathrm{Ann}_{A'_{t\otimes t}}(B) = A'_{t\otimes t}(t\otimes 1 - 1\otimes t^{-1}) + \sum_{\alpha\in\widehat{\Omega}} A'_{t\otimes t}(e_\alpha\otimes 1 - 1\otimes e_{\mu/\alpha}) = A'_{t\otimes t}\cdot I.$$

根据 I的定义，我们看到 A'/I 与 $S[t,t^{-1}]$ 同构，作为一个 k-代数，其中$S := k[\Omega]^{\otimes 2}/\left\langle e_\alpha\otimes 1 - 1\otimes e_{\mu/\alpha}:\ \alpha\in\widehat{\Omega}\right\rangle$。这个环是 t-无挠的。因此 A'/I 是 $t\otimes t$-无挠的，所以 $A'\cap(I\cdot A'_{t\otimes t}) = I$。因此$\mathrm{Ann}_{A'}(B) = A'\cap\mathrm{Ann}^{A'_{t\otimes t}}(B) = A'\cap(I\cdot A'_{t\otimes t}) = I$. □

Recall the coequaliser diagram $\Xi_{\mathrm{sing}} \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} \Xi' \xrightarrow{\theta} \Xi$ from Prop. 4.2.5.

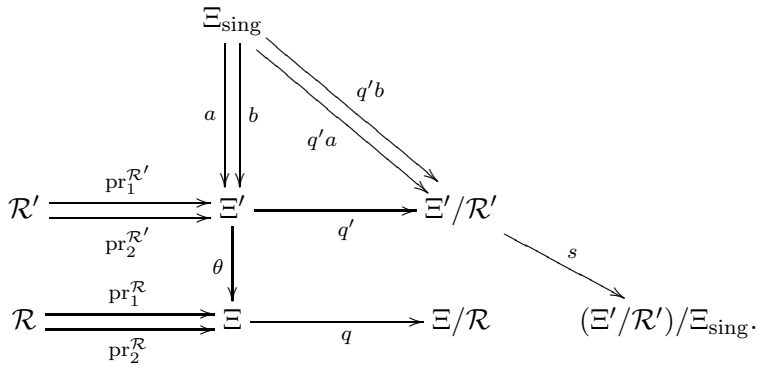
命题 4.5.4。 设 $q':\ \Xi' \to \Xi'/\mathcal{R}'$ 是 LRS 中 $\mathcal{R}' \underset{\mathrm{pr}_2^{\mathcal{R}'}}{\overset{\mathrm{pr}_1^{\mathcal{R}'}}{\rightrightarrows}} \Xi'$ 的余等化子，并设

$q'as : \Xi'/\mathcal{R}' \to (\Xi'/\mathcal{R}')/\Xi_{\mathrm{sing}}$ 是 LRS 中 $\Xi_{\mathrm{sing}} \underset{q'b}{\overset{q'a}{\rightrightarrows}} \Xi'/\mathcal{R}'$ 的余等化子。则

$$\Xi/\mathcal{R} \quad\cong\quad (\Xi'/\mathcal{R}')/\Xi_{\mathrm{sing}}.$$

Proof. The situation is summarised in the following diagram:

(28)



该结果现在由引理 A.1.2 得出，前提是我们能够找到一个满态射 $\theta'\colon\ \mathcal{R}' \to \mathcal{R}$在 LRS 中使图表交换，即 $\theta' \operatorname{pr}_i^{\mathcal{R}} = \operatorname{pr}_i^{\mathcal{R}'} \theta$对 $i = 1,\ 2.$ 成立。

Write $A = Z \otimes_k Z$ and $A' = Z' \otimes_k Z'$; then by Cor. 4.4.8 we have

$$\mathcal{O}(\mathcal{R}) = \frac{A}{\ker \operatorname{mult}_Z \ \cap\ \operatorname{Ann}_A(B)} \quad \text{and} \quad \mathcal{O}(\mathcal{R}') = \frac{A'}{\ker \operatorname{mult}_{Z'} \ \cap\ \operatorname{Ann}_{A'}(B)}.$$

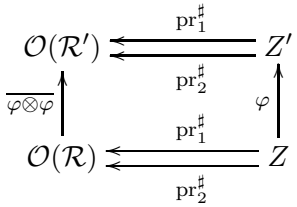
The map $\varphi \otimes \varphi : A \to A'$ is an injective k-algebra homomorphism; furthermore we have

$$\ker \operatorname{mult}_Z = (\varphi \otimes \varphi)^{-1}(\ker \operatorname{mult}_{Z'}) \quad \text{and} \quad \operatorname{Ann}_A(B) = (\varphi \otimes \varphi)^{-1}(\operatorname{Ann}_{A'}(B)).$$

Therefore $\varphi \otimes \varphi$ descends to a natural *injective* k-algebra homomorphism

$$\overline{\varphi \otimes \varphi} : \mathcal{O}(\mathcal{R}) \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{R}'). \tag{29}$$

We define $\theta' := \operatorname{Spec}(\overline{\varphi \otimes \varphi}) : \mathcal{R}' \to \mathcal{R}$ to be the corresponding morphism of affine schemes. The following diagram of commutative rings



is readily checked to be commutative: for example, we have

$$\operatorname{pr}_1^\sharp(\varphi(a)) = \overline{\varphi(a) \otimes 1} = \overline{\varphi \otimes \varphi}(\overline{a \otimes 1}) = \overline{\varphi \otimes \varphi}(\operatorname{pr}_1^\sharp(a)) \quad \text{for any} \quad a \in Z.$$

由于概形 Ξ, Ξ', $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$都是仿射的，因此 $\theta' \operatorname{pr}_i^{\mathcal{R}} = \operatorname{pr}_i^{\mathcal{R}'} \theta$对 $i = 1,\ 2.$ 还需证明 θ'是 LRS 中的满态射，这由下面的引理4.5.5 可得，只需验证其两个条件。

a) 我们注意到，通过 $\varphi\colon\ Z \to Z'$, $Z' = k[\Omega][t]$ 是一个有限生成的 Z-模：事实上，$\Omega \subset Z'$ 是作为 $k[t]$- 模的有限生成集，并且 $k[t] = k[\varphi(\zeta)] \subseteq \varphi(Z)$。因此， A' 是一个有限生成的 A- 模，所以 $\mathcal{O}(\mathcal{R}')$ 是一个有限生成的 $\mathcal{O}(\mathcal{R})$-模。因此，根据 [AM] 命题 5.1 和定理 5.10， $|\theta'|$ 是满射的。

b) The map $(\theta')^\sharp(\mathcal{R}) = \overline{\varphi \otimes \varphi}$ is injective, as we saw above in equation (29). □

Lemma 4.5.5. [4] *Let $f : Y \to X$ be a morphism of affine schemes. Suppose that*

a) *$|f| : |Y| \to |X|$ is surjective,*
b) *$f^\sharp(X) : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$ is injective.*

Then $f : Y \to X$ is an epimorphism in LRS.

证明。假设 $uf = vf$对于某些态射 $u, v\colon X \to Z$在 LRS中。则 $|u||f| = |v||f|$意味着 $|u| = |v|$，因为 $|f|$ 是满射。因此只需证明 $u^\sharp = v^\sharp$。现在，$|u|_*(f^\sharp) \circ u^\sharp = (uf)^\sharp = (vf)^\sharp = |v|_*(f^\sharp) \circ v^\sharp$，所以只需证明 $f^\sharp\colon \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$是内射对象。这可以在 X 的基本开子集 $D(g)$ 上，以及 $g \in \mathcal{O}(X)$ 上进行验证。但由于 X, Y是仿射的，映射 $f^\sharp(D(g))\colon \mathcal{O}(D(g)) \to \mathcal{O}(f^{-1}D(g))$ 是单射 $f^\sharp(X)\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$ 在 g 处的局部化，因此也是内射对象。□

4.5.2. 计算 $\Xi'/\mathcal{R}'$。对每个 $\alpha \in \Omega$，我们令 $\Xi_\alpha := V(1-e_\alpha) \subset \Xi'$ 为由幂等元 $1 - e_\alpha \in \mathcal{O}(\Xi') = k[\Omega][t]$ 切出的闭子概形。令 t_α 为 $t \in \mathcal{O}(\Xi')$ 在 $\mathcal{O}(\Xi'_\alpha)$ 中的像；则 $\mathcal{O}(\Xi'_\alpha) = k[t_\alpha]$ 且 $\Xi' = \coprod_{\alpha\in\widehat{\Omega}} \Xi'_\alpha$。因此，

$$\Xi' \times \Xi' = \coprod_{\alpha,\beta\in\widehat{\Omega}} \Xi'_\alpha \times \Xi'_\beta.$$

We write $\mathcal{R}'_{\alpha,\beta} := \mathcal{R}' \cap (\Xi'_\alpha \times \Xi'_\beta)$ for all $\alpha, \beta \in \widehat{\Omega}$, so that

$$\mathcal{R}' = \coprod_{\alpha,\beta\in\widehat{\Omega}} \mathcal{R}'_{\alpha,\beta}.$$

对于每个 $\alpha, \beta \in \Omega$，将把 $\mathcal{O}(\Xi'_\alpha \times \Xi'_\beta) = k[t_\alpha] \otimes_k k[t_\beta]$ 与多项式代数$k[x, y]$，通过 $x \mapsto t_\alpha \otimes 1$ 和 $y \mapsto 1 \otimes t_\beta$。有了这个记号，我们现在可以计算每个 $\mathcal{R}'_{\alpha,\beta}$ 的定义方程。

命题 4.5.6. 对于每一个 $\alpha, \beta \in \Omega$ 我们有

$$\mathcal{R}'_{\alpha,\beta} = V((x - y)^{\delta_{\alpha,\beta}}(xy - 1)^{\delta_{\alpha,\mu/\beta}}).$$

证明. 考虑典范投影 $\pi_{\alpha,\beta}\colon A' = \mathcal{O}(\Xi' \times \Xi') \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\Xi'_\alpha \times \Xi'_\beta) = k[x, y]$ 具有核 $\ker \pi_{\alpha,\beta} = \langle (1 - e_\alpha) \otimes 1, 1 \otimes (1 - e_\beta)\rangle$. 然后对于所有 $\gamma, \delta \in \Omega$ 我们有

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha,\beta}(e_\gamma \otimes e_\delta) &= \delta_{\alpha,\gamma}\delta_{\beta,\delta}, \\ \pi_{\alpha,\beta}(e_\gamma \otimes 1) &= \delta_{\alpha,\gamma}, \\ \pi_{\alpha,\beta}(1 \otimes e_\delta) &= \delta_{\beta,\delta}. \end{aligned} \tag{30}$$

Using Lemma 4.5.2 together with equations (30), we have

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha,\beta}(\ker \mathrm{mult}_{Z'}) &= \langle x - y\rangle + \sum_{\lambda\in\widehat{\Omega}} \langle \pi_{\alpha,\beta}(e_\lambda \otimes 1) - \pi_{\alpha,\beta}(1 \otimes e_\lambda)\rangle \\ &= \langle x - y\rangle + \sum_{\lambda\in\widehat{\Omega}} \langle \delta_{\alpha,\lambda} - \delta_{\beta,\lambda}\rangle \\ &= \langle (x - y)^{\delta_{\alpha,\beta}}\rangle. \end{aligned}$$

[4]因为 $|\cdot| : \mathrm{LRS} \to \mathrm{Top}$ 是一个左伴随，它必须保持满态射，因此条件 a) 对于引理 4.5.5 成立是必要的。讨论 [KStm] 给出了一个明确的例子，其中引理 4.5.5 在仅假设条件 b) 成立时失效。

Similarly, using Prop. 4.5.3 together with equations (30), we have

$$\begin{aligned}\pi_{\alpha,\beta}(\mathrm{Ann}_{A'}(B)) &= \langle xy-1\rangle + \sum_{\lambda\in\widehat{\Omega}} \langle \pi_{\alpha,\beta}(e_\lambda\otimes 1) - \pi_{\alpha,\beta}(1\otimes e_{\mu/\lambda})\rangle \\ &= \langle xy-1\rangle + \sum_{\lambda\in\widehat{\Omega}} \langle \delta_{\alpha,\lambda} - \delta_{\beta,\mu/\lambda}\rangle \\ &= \langle (xy-1)^{\delta_{\alpha,\mu/\beta}}\rangle.\end{aligned}$$

根据下面的初等引理 4.5.7 ，我们便有

$$\begin{aligned}\pi_{\alpha,\beta}(\ker \mathrm{mult}_{Z'} \cap \mathrm{Ann}_{A'}(B)) &= \pi_{\alpha,\beta}(\ker \mathrm{mult}_{Z'}) \cap \pi_{\alpha,\beta}(\mathrm{Ann}_{A'}(B)) \\ &= \langle (x-y)^{\delta_{\alpha,\beta}}\rangle \cap \langle (xy-1)^{\delta_{\alpha,\mu/\beta}}\rangle \\ &= \langle (x-y)^{\delta_{\alpha,\beta}}(xy-1)^{\delta_{\alpha,\mu/\beta}}\rangle.\end{aligned}$$

回想 $\mathcal{R}'_{\alpha,\ \beta} = \mathcal{R}' \cap (\Xi'_\alpha \times \Xi'_\beta)$，并利用定义 4.5.1，可得

$$\mathcal{R}'_{\alpha,\beta} = V(\pi_{\alpha,\beta}(\ker \mathrm{mult}_{Z'} \cap \mathrm{Ann}_{A'}(B))) \subset \Xi'_\alpha \times \Xi'_\beta.$$

结论由此得出。 □

引理 4.5.7. 设 A 为一个环， e、 $f \in A$ 为两个中心幂等元，并考虑典范投影 π: $A \twoheadrightarrow A/\langle 1-e, 1-f\rangle$。那么对于 A 的任意一对理想 I、 J，有$\pi(I\cap J) = \pi(I)\cap\pi(J)$。

证明。设 $a \in \pi(I)\cap\pi(J)$。那么我们可以找到 $x \in I$ 和 $y \in J$，使得 $a = \pi(x) = \pi(y)$。现在， $x = (1-e+e)(1-f+f)x$意味着 $\pi(x) = \pi(efx)$，类似地， $\pi(y) = \pi(efy)$。因此 $\pi(efx) = \pi(x) = \pi(y) = \pi(efy)$，所以 $efx - efy \in \ker\ \pi$。但是 $ef(1-e) = ef(1-f) = 0$，所以 $ef\ker\ \pi = 0$。因此 $ef(efx - efy) = 0$，所以 $efx = e^2f^2x = e^2f^2y = efy$。由于 $efx \in I$和 $efy \in J$，我们得到 $efx = efy \in I\cap J$。因此 $a = \pi(x) = \pi(efx) \in \pi(I\cap J)$，所以$\pi(I)\cap\pi(J) \subseteq \pi(I\cap J)$。反向包含显然。□

^我们通过规定 $\alpha \sim \beta$ 当且仅当 $\beta \in \{\alpha, \mu/\alpha\}$，在 Ω 上引入一个等价关系 $\sim$。对于等价类 $\gamma \in \Omega/\sim$，我们记作

$$\Xi'_\gamma := \coprod_{\alpha\in\gamma} \Xi'_\alpha \quad \text{and} \quad \mathcal{R}'_\gamma := \coprod_{\alpha,\beta\in\gamma} \mathcal{R}'_{\alpha,\beta}. \tag{31}$$

我们使用投影映射 $\mathrm{pr}_1^{\Xi'_\gamma}$、$\mathrm{pr}_2^{\Xi'_\gamma}$: $\Xi'_\gamma \times \Xi'_\gamma \to \Xi'_\gamma$ 来定义映射

$$f_i^\gamma := \mathrm{pr}_i^{\Xi'_\gamma}|_{\mathcal{R}'_\gamma} : \mathcal{R}'_\gamma \to \Xi'_\gamma \quad \text{for} \quad i = 1, 2.$$

^那么对于每个 $\gamma \in \Omega/\sim$，我们可以在 LRS 中构造余等化子图

$$\mathcal{R}'_\gamma \underset{f_2^\gamma}{\overset{f_1^\gamma}{\rightrightarrows}} \Xi'_\gamma \longrightarrow \Xi'_\gamma/\mathcal{R}'_\gamma. \tag{32}$$

引理 4.5.8. 我们有 $\Xi' = \coprod_{\gamma\in\Omega/\sim}\ \Xi'_\gamma$ 且 $\mathcal{R}' = \coprod_{\gamma\in\Omega/\sim}\ \mathcal{R}'_\gamma$。

Proof. Only the second statement needs proof. For this, we have

$$\mathcal{R}' = \coprod_{\alpha,\beta\in\widehat{\Omega}} \mathcal{R}'_{\alpha,\beta} = \coprod_{\gamma\in\widehat{\Omega}/\sim} \coprod_{\alpha\in\gamma} \coprod_{\beta\in\widehat{\Omega}} \mathcal{R}'_{\alpha,\beta}.$$

但是根据命题 4.5.6, 我们有$\mathcal{R}'_{\alpha,\beta} = \emptyset$ 若 $\beta \notin \{\alpha, \mu/\alpha\}$。因此 $\mathcal{R}' = \coprod_{\gamma\in\Omega/\sim} \mathcal{R}'_\gamma$。 □

推论 4.5.9。我们有 $\Xi'/\mathcal{R}' \cong \coprod_{\gamma\in\Omega/\sim} \Xi'_\gamma/\mathcal{R}'_\gamma$ 在 LRS 中。

证明。 我们有 $\Xi' = \coprod_{\gamma\in\Omega/\sim} \Xi'_\gamma$ 和 $\mathcal{R}' = \coprod_{\gamma\in\Omega/\sim} \mathcal{R}'_\gamma$ 根据引理 4.5.8。另请注意，$\mathrm{pr}_i^{\Xi'} = \coprod_{\gamma\in\Omega/\sim} f_i^\gamma$ 对于 $i = 1,\ 2$。现在由引理 A.1.3即可得到结果。 □

Rec所有 [Sta] 第 01JA 节，一个 LRS 中的粘合数据 由以下数据组成 a:

- an index set I,
- a locally ringed space X_i for each $i \in I$,
- an open subspace $\iota_{i,j} : U_{i,j} \hookrightarrow X_i$ for each $i, j \in I$,
- an isomorphism $\varphi_{i,j} : U_{i,j} \xrightarrow{\cong} U_{j,i}$ in LRS for all $i, j \in I$,

such that

(1)$U_{i,i} = X_i$ 对所有 $i \in I$，以及 (2) $\varphi_{k,j} \circ \varphi_{j,i}|_{U_{i,j}\cap U_{i,k}} = \varphi_{k,i}|_{U_{i,j}\cap U_{i,k}}$对所有 i、j、$k \in I$成立。

Recall from [DG] Prop. I.1.1.6 that LRS admits all colimits.

定义 4.5.10.设 $(I, \{U_i\}_{i\in I}, \{\iota_{i,j}\}_{i,j\in I}, \{\varphi_{i,j}\}_{i,j\in I})$是LRS 中的一个粘合数据。构造余积 $U := \coprod_{i\in I} U_i$，并令 $\ell_i : U_i \hookrightarrow U$ 为每个 $i \in I$ 的典范嵌入。

Define

$$\coprod_{i,j} U_{i,j} \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} \coprod_{i\in I} U_i \tag{33}$$

by setting $u = (u_{i,j})_{i,j\in I}$ *and* $v = (v_{i,j})_{i,j\in I}$, *where*

$$u_{i,j} = \ell_i \circ \iota_{i,j} \quad \text{and} \quad v_{i,j} = \ell_j \circ \iota_{j,i} \circ \varphi_{i,j} \quad \text{for all} \quad i, j \in I. \tag{34}$$

If $q : U \to X$ *is a coequaliser of this diagram in* LRS, *then we call* X *the* gluing of the X_i's with respect to the gluing datum.

注 4.5.11。 在 [Sta], 引理 01JA 中证明了，粘合的局部环化空间 X具有一个开覆盖 $\{U_i : i \in I\}$ 使得 $U_i \cong X_i$ 对于所有 $i \in I$。由此立即可知，当每个 X 都是一个概形时， U_i 它是一个概形。

定理 4.5.12。假设 $\gamma = \{\alpha, \beta\}$，其中 $\beta = \mu/\alpha$ 和 $\alpha \neq \beta$。那么 $\Xi'_\gamma/\mathcal{R}'_\gamma$ 同构于投射直线 $\mathbf{P}^1$。

证明。我们首先回顾用于构造投射直线 $\mathbf{P}^1$ 的一个众所周知的粘合数据：例如参见 [Sta], Example 01JE。指标集合为 $I := \{\alpha, \beta\}$。待粘合的空间为 $X_\alpha := \Xi'_\alpha =$谱 $k[t_\alpha]$和 $X_\beta := \Xi'_\beta =$谱 $k[t_\beta]$。$U_{i,\ j}$'如下：

$$U_{\alpha,\alpha} := \Xi'_\alpha, \quad U_{\beta,\beta} = \Xi'_\beta, \quad U_{\alpha,\beta} = \operatorname{Spec} k[t_\alpha, t_\alpha^{-1}] \quad \text{and} \quad U_{\beta,\alpha} = \operatorname{Spec} k[t_\beta, t_\beta^{-1}]$$

包含 $\iota_{\alpha,\beta}$ 通过记号已清楚表明，而粘合同构 $\varphi_{i,j}$ 如下： $\varphi_{\alpha,\alpha} = \mathrm{id}_{U_\alpha}$, $\varphi_{\beta,\beta} = \mathrm{id}_{U_\beta}$, $\varphi_{\beta,\alpha} = \varphi_\alpha^{-1}$,$_\beta$, 以及 $\varphi_{\alpha,\beta} : U_{\alpha,\beta} \xrightarrow{\cong} U_{\beta,\alpha}$ 由以下确定

the corresponding map $\varphi^\sharp_{\alpha,\beta}$ on coordinate rings, which is given by $\varphi^\sharp_{\alpha,\beta}(t_\beta) = t_\alpha^{-1}$. Hence we have the coequaliser diagram

$$U_\gamma := \coprod_{i,j\in\{\alpha,\beta\}} U_{i,j} \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} \Xi'_\alpha \coprod \Xi'_\beta \xrightarrow{\ q\ } \mathbb{P}^1 \ .$$

回忆一下， $\Xi'_\gamma/\mathcal{R}'_\gamma$ 由余等化子图（32）定义。我们看到，要证明$\Xi'_\gamma/\mathcal{R}'_\gamma \cong \mathbb{P}^1$ 作为局部环化空间，只需找到一个概形同构。

$$\tau : \mathcal{R}'_\gamma \xrightarrow{\cong} U_\gamma$$

such that the following two diagrams of affine schemes are commutative:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}'_\gamma & \longrightarrow & \Xi'_\gamma \times \Xi'_\gamma \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ U_\gamma & \xrightarrow[u]{} & \Xi'_\gamma \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{R}'_\gamma & \longrightarrow & \Xi'_\gamma \times \Xi'_\gamma \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} \\ U_\gamma & \xrightarrow[v]{} & \Xi'_\gamma. \end{array}$$

Here, both of the top horizontal arrows are the closed embedding of $\mathcal{R}'_\gamma$ into $\Xi'_\gamma \times \Xi'_\gamma$. Now, the relation $\mathcal{R}'_\gamma$ also decomposes as a disjoint union

$$\mathcal{R}'_\gamma = \coprod_{i,j\in\{\alpha,\beta\}} \mathcal{R}'_{i,j} \quad \subset \quad \Xi'_\gamma \times \Xi'_\gamma = \coprod_{i,j\in\{\alpha,\beta\}} \Xi'_i \times \Xi'_j$$

so it will be enough to work componentwise, and for each $i, j \in \gamma$ to find an isomorphism

$$\tau_{ij} : \mathcal{R}'_{i,j} \xrightarrow{\cong} U_{i,j}$$

such that the following two diagrams of affine schemes are commutative:

(35)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}'_{i,j} & \longrightarrow & \Xi'_i \times \Xi'_j \\ {\scriptstyle\tau_{i,j}}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ U_{i,j} & \xrightarrow[u_{i,j}]{} & \Xi'_i \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{R}'_{i,j} & \longrightarrow & \Xi'_i \times \Xi'_j \\ {\scriptstyle\tau_{i,j}}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} \\ U_{i,j} & \xrightarrow[v_{i,j}]{} & \Xi'_j. \end{array}$$

Because $\alpha \neq \beta$, the connected components $\mathcal{R}'_{i,j}$ of $\mathcal{R}'_\gamma$ are given by Prop. 4.5.6 as follows:

(36)
$$\begin{array}{lcl} \mathcal{R}'_{\alpha,\alpha} & = & V(\langle t_\alpha \otimes 1 - 1 \otimes t_\alpha \rangle), \\ \mathcal{R}'_{\beta,\beta} & = & V(\langle t_\beta \otimes 1 - 1 \otimes t_\beta \rangle), \\ \mathcal{R}'_{\alpha,\beta} & = & V(\langle t_\alpha \otimes t_\beta - 1 \otimes 1 \rangle), \quad \text{and} \\ \mathcal{R}'_{\beta,\alpha} & = & V(\langle t_\beta \otimes t_\alpha - 1 \otimes 1 \rangle). \end{array}$$

首先假设 $j = i$。在这种情况下 $u_{i,i} = \mathrm{id}^{\Xi'_i}$，因此我们定义$\tau_{i,i} := \mathrm{pr}^1|_{\mathcal{R}'_{i,j}}$；那么（35）中的第一个图表根据定义是交换的。对于第二个图表，注意到 $v_{i,i} = u_{i,i} \circ \varphi_{i,i}$ 也等于$\mathrm{id}^{\Xi'_i}$，因此根据（36）中的前两个等式，$v_{i,i} \circ \tau_{i,i} = \mathrm{pr}^1|_{\mathcal{R}'_{i,i}} = \mathrm{pr}^2|_{\mathcal{R}'_{i,i}}$。所以（35）中的第二个图表也交换。

现在假设 $j \neq i$。考察（36）中的最后两个方程，我们看到元素 $\mathrm{pr}_1^\sharp(t_i)|_{\mathcal{R}'_{i,\,j}} = \overline{t_i \otimes 1}$ 是 $\mathcal{O}(\mathcal{R}'_{i,\,j})$ 中的一个单位。因此， k-代数同态 $(\mathrm{pr}^1|_{\mathcal{R}'_{i,\,j}})^\sharp : \mathcal{O}(\Xi'_i) \to \mathcal{O}(\mathcal{R}'_{i,\,j})$ 可扩张到 $\mathcal{O}(\Xi'_i)$ 的局部化 $\mathcal{O}(U_{i,\,j})$，这意味着 $\mathrm{pr}^1|_{\mathcal{R}'_{i,\,j}}$ 经由 Ξ'_i 的 Zariski 开子集$U_{i,\,j}$ 分解。换言之，存在一个态射

$\tau_{i,\ j}:\ \mathcal{R}'_{i,\ j}\to U_{i,\ j}$，使（35）中的第一个图表交换。再次考察（36）中的最后两个方程，我们看到相应的坐标环上的映射

$$\tau_{i,j}^{\sharp}: k[t_i,t_i^{-1}]\to\frac{k[t_i]\otimes k[t_j]}{\langle t_i\otimes t_j-1\otimes 1\rangle}$$

将 t_i 映射到$\overline{t_i\otimes 1}$，并将 t_i^{-1}映射到 $\overline{t_i\otimes 1}^{-1}=\overline{1\otimes t_j}$，且它是一个同构。因此$\tau_{i,\ j}$也是一个同构。还需验证（35）中的第二个图表是交换的。由于涉及的所有概形都是仿射的，只需在坐标环上验证即可。

假设（$i,\ j$）=（$\alpha,\ \beta$）。由于$v_{\alpha,\ \beta}=u_{\beta,\ \alpha}\circ\varphi_{\alpha,\ \beta}$由（34）可知，此图表是

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{k[t_\alpha]\otimes k[t_\beta]}{\langle t_\alpha\otimes t_\beta-1\otimes 1\rangle} & & \longleftarrow & & k[t_\alpha]\otimes k[t_\beta] \\
\uparrow{\scriptstyle \tau^{\sharp}_{\alpha,\beta}} & & & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2^{\sharp}} \\
k[t_\alpha,t_\alpha^{-1}] & \xleftarrow[\varphi^{\sharp}_{\alpha,\beta}]{} & k[t_\beta,t_\beta^{-1}] & \longleftarrow & k[t_\beta]
\end{array}$$

并且它是交换的，因为 $\tau_{\alpha,\ \beta}^{\sharp}(\varphi_{\alpha,\ \beta}^{\sharp}(t_\beta))=\tau_{\alpha,\ \beta}^{\sharp}(t_\alpha^{-1})=\overline{1\otimes t_\beta}=\mathrm{pr}_2^{\sharp}(\overline{t_\beta})$。

同样，当（$i,\ j$）=（$\beta,\ \alpha$）时，由于$v_{\beta,\ \alpha}=u_{\alpha,\ \beta}\circ\varphi_{\beta,\ \alpha}$由（34）可知，此图表是

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{k[t_\beta]\otimes k[t_\alpha]}{\langle t_\beta\otimes t_\alpha-1\otimes 1\rangle} & & \longleftarrow & & k[t_\beta]\otimes k[t_\alpha] \\
\uparrow{\scriptstyle \tau^{\sharp}_{\beta,\alpha}} & & & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2^{\sharp}} \\
k[t_\beta,t_\beta^{-1}] & \xleftarrow[\varphi^{\sharp}_{\beta,\alpha}]{} & k[t_\alpha,t_\alpha^{-1}] & \longleftarrow & k[t_\alpha]
\end{array}$$

并且它是可交换的，因为 $\tau_{\beta,\ \alpha}^{\sharp}(\varphi_{\beta,\ \alpha}^{\sharp}(t_\alpha))=\tau_{\beta,\ \alpha}^{\sharp}(t_\beta^{-1})=\overline{1\otimes t_\alpha}=\mathrm{pr}_2^{\sharp}(t_\alpha)$。 □

接下来，我们将研究以下 k-概形图表：

$$\mathbb{R}\ \underset{\mathrm{pr}_2}{\overset{\mathrm{pr}_1}{\rightrightarrows}}\ \mathbb{A}^1\xrightarrow{\ \psi\ }\mathbb{P}^1 \tag{37}$$

其中，$\mathbb{A}^1=\mathrm{Spec}\,k[x]$ 是一条仿射直线，$\mathbb{R}=\Delta\cup\mathbb{H}=V((x-y)(xy-1))\subseteq\mathbb{A}^2=\mathrm{Spec}\,k[x,y]$ 是双曲线 $\mathbb{H}=V(xy-1)$ 与对角线 $\Delta=V(x-y)$ 的并，$\mathrm{pr}_1,\mathrm{pr}_2$ 是投影态射，其相应的余态射由 $\mathrm{pr}_1^{\sharp}(x)=x$ 和 $\mathrm{pr}_2^{\sharp}(x)=y$ 确定；而态射 $\psi:\mathbb{A}^1\to\mathbb{P}^1$，，视为相应点函子之间的自然变换，由以下规则给出

$$\psi(a)=(a^2+1:a)\quad\text{for all}\quad a\in\mathbb{A}^1.$$

Lemma 4.5.13. *We have* $\psi\circ\mathrm{pr}_1=\psi\circ\mathrm{pr}_2$.

证明。设 $(a,b)\in\mathbb{R}$。则 $\psi(\mathrm{pr}_1(a,b))=\psi(a)=(a^2+1:a)$且 $\psi(\mathrm{pr}_2(a,b))=\psi(b)=(b^2+1:b)$。然而 $(a,b)\in\mathbb{R}$ 意味着 $a=b$ 或 $ab=1$，且在两种情况下都有$(a^2+1)b=a(b^2+1)$。因此 $\psi(\mathrm{pr}_1(a,b))=\psi(\mathrm{pr}_2(a,b))$。□

我们令 y 为 $\mathbb{P}^1$，上由 $y((a:1))=a$ 确定的局部坐标，使得 $Y_0:=\mathrm{Spec}\,k[y]$ 和 $Y_\infty:=\mathrm{Spec}\,k[1/y]$ 构成 $\mathbb{P}^1$ 的一个由两条仿射直线组成的标准开覆盖。

引理4.5.14。设 $X_i = \psi^{-1}(Y_i)$和 $\mathrm{R}_i = \mathrm{pr}_1^{-1}(X_i)$对于 $i = 0, \infty$。那么 X_i 是A^1, 中的基本仿射开集，且 R_i 是 R 中的基本仿射开集。

证明。我们有 $X_0 = \{a \in \mathrm{A}^1 : (a^2+1 :\ a) \in Y_0\} = \{a \in \mathrm{A}^1 :\ a \neq 0\}$，它是基本仿射开集 $D(x) \subset \mathrm{A}^1$。类似地， $X_\infty = \{a \in \mathrm{A}^1 : (a^2+1 :\ a) \in Y_\infty\} = \{a \in \mathrm{A}^1 :\ a^2+1 \neq 0\}$，它是基本仿射开集 $D(x^2+1) \subset \mathrm{A}^1$。在仿射概形态射 $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{R} \to \mathrm{A}^1$ 下，任意基本仿射开集 $D(f) \subset \mathrm{Spec}\ k[x]$的原像是 $D(\mathrm{pr}_1^\sharp(f))$，这是 R 中的一个基本仿射开集。因此，$\mathrm{R}_0$ 和 R_∞ 是 R 中的基本仿射开集。□

命题 4.5.15. $0 \longrightarrow \mathcal{O}(Y_i) \xrightarrow{\psi^\sharp} \mathcal{O}(X_i) \underset{\mathrm{pr}_2^\sharp}{\overset{\mathrm{pr}_1^\sharp}{\rightrightarrows}} \mathcal{O}(\mathrm{R}_i)$ 是交换环的等化子图表，如果 $i = 0$ 或 $i = \infty$。

证明。设 $\mathrm{H}_i = \mathrm{R}_i \cap \mathrm{H}$，其中 $i = 0, \infty$。将 $\mathrm{pr}_1^\sharp$、$\mathrm{pr}_2^\sharp$ 与限制映射$\mathcal{O}(\mathrm{R}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\mathrm{H}_i)$复合后，我们可以在此证明中用 H_i 替换 R_i。

First we consider the case $i = 0$, where the diagram becomes

$$0 \longrightarrow k[y] \xrightarrow{\psi^\sharp} k[x, x^{-1}] \underset{\mathrm{pr}_2^\sharp}{\overset{\mathrm{pr}_1^\sharp}{\rightrightarrows}} k[x, x^{-1}]$$

且映射由 $\psi^\sharp(y) = x + x^{-1}, \mathrm{pr}_1^\sharp(x) = x, \mathrm{pr}_2^\sharp(x) = x^{-1}$。显然 $\psi^\sharp$是内射对象，且 $\mathrm{pr}_1^\sharp \psi^\sharp = \mathrm{pr}_2^\sharp \psi^\sharp$ 由引理 4.5.13。

假设对于某个 $a_i \in k$，有 $a = \sum^n a_i x^i \in \ker(\mathrm{pr}_1^\sharp - \mathrm{pr}_2^\sharp)$。那么对于所有 i，都有 $a_i = a_{-i}$，因此$i=-nma$ 属于 k-线性张成空间 $\{x^n + x^{-n} :\ n \geq 0\}$。于是对于某个 $m \geq 0$，有 $a \in F_m := \sum k(x^n + x^{-n})_{n=0}$。我们将用归纳法证明，对于所有 $r \geq 0$，都有 $F_r \subseteq k[x + x^{-1}]$。基础情形$r = 0$ 显然成立。假设归纳地，对于某个 $r \geq 1$，有 $F_{r-1} \subseteq k[x + x^{-1}]$，则我们看到$x^r + x^{-r} \equiv (x + x^{-1})^r$ 模 F_{r-1}，因此 $x^r + x^{-r} \in k[x + x^{-1}]$ 也成立。于是

$$\ker(\mathrm{pr}_1^\sharp - \mathrm{pr}_2^\sharp) = k[x + x^{-1}], \tag{38}$$

并且该序列在中间处正合，满足所需条件。

接下来，我们考虑 $i = \infty$ 的情形。图表变为

$$0 \longrightarrow k[y^{-1}] \xrightarrow{\psi^\sharp} k[x, \tfrac{1}{x^2+1}] \underset{\mathrm{pr}_2^\sharp}{\overset{\mathrm{pr}_1^\sharp}{\rightrightarrows}} k\left[x, x^{-1}, \tfrac{1}{x^2+1}\right]$$

其中映射现在定义为 $\psi^\sharp(y^{-1}) = \frac{1}{x+x^{-1}} = \frac{x}{x^2+1}$，$\mathrm{pr}_1^\sharp(x) = x$，以及 $\mathrm{pr}_2^\sharp(x) = x^{-1}$。显然，$\psi^\sharp$ 仍是内射对象，并且 $\mathrm{pr}_1^\sharp \psi^\sharp = \mathrm{pr}_2^\sharp \psi^\sharp$，由引理 4.5.13可知。

设 $a_{(x)\,(x^2+1)_n} \in \ker(\mathrm{pr}_1^\sharp - \mathrm{pr}_2^\sharp)$，其中 $a(x) \in k[x]$ 且 $n \geq 0$。那么

$$\frac{a(x)}{(x^2+1)^n} = \frac{a(x^{-1})}{(x^{-2}+1)^n}.$$

两边同乘以 $(x^2+1)^n$ 表明 $a(x) = a(x^{-1})x^{2n}$。因此 $\deg(a) \leq 2n$，两边同除以 x^n 表明 $a(x)x^{-n} \in k[x, x^{-1}]$ 在代换下不变

$x \mapsto x^{-1}$. 利用 (38)，我们看到 $a(x)x^{-n} = b(x + x^{-1})$对于某个 $b(x) \in k[x]$ 满足$\deg b \leq n$。记 $b(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ 对于某个 $b_0, \cdots, b_n \in k$；于是

$$\frac{a(x)}{(x^2+1)^n} = \frac{x^n}{(x^2+1)^n} \sum_{i=0}^{n} b_i \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^i = \sum_{i=0}^{n} b_i \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{n-i} \in k\left[\frac{x}{x^2+1}\right].$$

因此 $a_{(x)\,(x^2+1)^n} \in k\left[\frac{x}{x^2+1}\right]$ 且该序列在中间是正合的，符合要求。

□

命题 4.5.16. $\mathbb{R} \underset{\mathrm{pr}_2}{\overset{\mathrm{pr}_1}{\rightrightarrows}} \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^1$是 LRS 中的余等化子图。

证明. 注意到 $\psi \circ \mathrm{pr}_1 = \psi \circ \mathrm{pr}_2$ 由引理 4.5.13，这可由引理 4.2.1 得出，将其应用于 $\{Y_0 =$ 谱 $k[y]$、$Y_\infty =$ 谱 $k[y^{-1}]\}$ 的标准覆盖 $Y = \mathbb{P}^1$,，只需验证其三个条件。条件 b) 由引理 4.5.14 得出，条件 c) 由命题 4.5.15 得出，因此只需验证条件 a)。这相当于验证以下内容:

(i) $|\psi| : |\mathbb{A}^1| \to |\mathbb{P}^1|$ 是满射,

(ii) 等价关系的等价类 $\sim$在 $|\mathbb{A}^1|$ 上由 $|\mathbb{R}| \underset{|\mathrm{pr}_2|}{\overset{|\mathrm{pr}_1|}{\rightrightarrows}} |\mathbb{A}^1|$确定

等于 $|\psi|$的纤维,

(iii) 诱导映射 $|\mathbb{A}^1|/\sim \longrightarrow |\mathbb{P}^1|$ 是一个同胚。

对于 (i) 和 (ii)，对于任意 k有限型 -簇 X，我们利用 [MO], 第四章，定理 2.3，将 $|X|$ 识别为 $\mathcal{G}$ 中的 -轨道集合$|X_{\overline{k}}|$，其中 $\mathcal{G} = \mathrm{Aut}(\overline{k}/k)$ 且 $X_{\overline{k}} = X \times_k \overline{k}$ 是将 X 基变换到 $\overline{k}$所得。于是我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
|\mathbb{R}_{\overline{k}}| & \rightrightarrows & |\mathbb{A}^1_{\overline{k}}| & \xrightarrow{|\psi_{\overline{k}}|} & |\mathbb{P}^1_{\overline{k}}| \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
|\mathbb{R}| & \rightrightarrows & |\mathbb{A}^1| & \xrightarrow[|\psi|]{} & |\mathbb{P}^1|
\end{array}$$

where the vertical arrows are surjective. Chasing this diagram reduces us to the case $k = \overline{k}$.

(i) $|\psi|$ 将 $|\mathbb{A}^1|$ 中的一般点映到 $|\mathbb{P}^1|$中的一般点，并将 $0 \in \mathbb{A}^1$ 映到 $\in \mathbb{P}^1$中的无穷远点 $(1:0)$。$|\mathbb{P}^1|$ 中的任何其他点都具有$(c:1)$ 的形式，其中某个 $c \in k$；由于 k 是代数闭的，方程 $a + a^{-1} = c$ 有解，因此 $(c:1) \in \mathrm{im}(|\psi|)$。

(ii) 令 $a, b \in |\mathbb{A}^1|$ 满足 $\psi(a) = \psi(b)$。如果 $\psi(a)$是$\mathbb{P}^1$，的泛点，那么 a 和b 必须都等于 $\mathbb{A}^1$，的泛点，因此假设并非如此。于是 a, b 必然是 $\mathbb{A}^1$中的闭点。由于 $k = \overline{k}$，我们可以假设 $a, b \in \mathbb{A}^1(k) = k$。现在，$\psi(a) = \psi(b)$ 蕴含 $(a^2+1 : a) = (b^2+1 : b)$，从而 $(a^2+1)b = a(b^2+1)$，所以$(a-b)(ab-1) = 0$ 且$(a, b) \in R(k)$。令 $u = (a, b) \in |R|$，我们看到 $a = \mathrm{pr}_1(u)$ 且 $b = \mathrm{pr}_2(u)$，如所要求。

(iii) 映射 $|\psi| : |\mathbb{A}^1| \to |\mathbb{P}^1|$ 是满射且纤维有限。因此，由该映射从 $|\mathbb{A}^1|$ 上的 Zariski 拓扑在 $|\mathbb{P}^1|$ 上诱导的商拓扑是余有限拓扑，因而与 $|\mathbb{P}^1|$上的 Zariski 拓扑一致。□

定理4.5.17。假设 $\gamma = \{\alpha\}$，其中 $\alpha = \mu/\alpha$。那么 $\Xi'_\gamma/\mathcal{R}'_\gamma$ 也同构于投射直线 $\mathbb{P}^1$。

证明。由于 $\gamma = \{\alpha\}$，我们有 $\Xi'_\gamma = \Xi'_\alpha =$ 谱 $k[t_\alpha]$ 以及 $\mathcal{R}'_\gamma = \mathcal{R}'_{\alpha,\ \alpha}$ 根据方程（31）。由于 $\alpha = \mu/\alpha$，命题 4.5.6 告诉我们 $\mathcal{R}'_{\alpha,\ \alpha} = V((x-y)(xy-1))$，其中 $x = t_\alpha \otimes 1$以及 $y = 1 \otimes t_\alpha$。因此我们得到一个概形的交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}'_\gamma & \overset{f_1^\gamma}{\underset{f_2^\gamma}{\rightrightarrows}} & \Xi'_\gamma & \longrightarrow & \Xi'_\gamma/\mathcal{R}'_\gamma \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong & & \\ \mathbb{R} & \overset{\mathrm{pr}_1}{\underset{\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} & \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^1 \end{array} \tag{39}$$

where the top line is the diagram (32), and the vertical arrows are the isomorphisms of schemes whose corresponding comorphisms are

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}) = \frac{k[x,y]}{\langle (x-y)(xy-1)\rangle} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}(\mathcal{R}'_{\alpha,\alpha}) \quad \text{and} \quad \mathcal{O}(\mathbb{A}^1) = k[x] \xrightarrow{\cong} k[t_\alpha] = \mathcal{O}(\Xi'_\alpha),$$

由 $x \mapsto t_\alpha \otimes 1$、$y \mapsto 1 \otimes t_\beta$和 $x \mapsto t_\alpha$分别给出。由于 ψ是 LRS 中 pr_1,pr_2的余等化子（命题 4.5.16），这就给出了所需的概形同构 $\Xi'_\gamma/\mathcal{R}'_\gamma \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^1$。□

Corollary 4.5.18. *$\Xi'/\mathcal{R}'$ is isomorphic to the disjoint union of $\frac{p+1}{2}$ projective lines.*

证明。在推论4.5.9、定理4.5.12和定理4.5.17之后，$\Xi'/\mathcal{R}'$ 同构于由 $\widehat{\ }$个 $|\Omega/\!\sim|$ 射影直线不交并组成的集合。恰好有2 个元素 $\alpha \in \Omega$满足 $\alpha = \mu/\alpha$：如果$\alpha = \mathrm{id}^j$对于某个 $j = 0$、$\cdots$、$p-2$，那么 $\alpha^2 = \mathrm{id}^{2j} = \mu = \mathrm{id}^2$ 当且仅当 $2j \equiv 2$ 模 $p-1$，这等价于 $j = 1$ 或$j = \frac{p+1}{2}$。这些对应于单元素等价类，而所有其他类的大小均为二。因此 $|\widehat{\ }\Omega/\!\sim| = 2 + \frac{p-3}{2} = \frac{p+1}{2}$。 □

4.5.3. *Re-gluing the projective lines to form $\Xi/\mathcal{R}$.* At this point we have to introduce more notation.

Definition 4.5.19. *For each $1 \le r \le \frac{p+1}{2}$, let $\gamma_r := \{\mathrm{id}^r, \mathrm{id}^{2-r}\}$ and define*

$$Z_r := \Xi'_{\gamma_r}/\mathcal{R}'_{\gamma_r}$$

注意，$\Xi'/\mathcal{R}' \cong Z_1 \coprod Z_2 \coprod \cdots \coprod Z_{\frac{p+1}{2}}$根据推论 4.5.9 和推论 4.5.18。在定理 4.5.12和定理4.5.17之后，我们知道每个 Z_r 都同构于投射直线 $\mathbb{P}^1$。还要注意，如果 $\alpha = \mathrm{id}^r$，那么 $\alpha = \mu/\alpha$ 当且仅当 $r = 1$ 或 $r = \frac{p+1}{2}$。

Definition 4.5.20. *Let $1 \le r \le \frac{p+1}{2}$ and write $\alpha = \mathrm{id}^r$.*

- 如果 $r = 1$，令 z_r 为 Z_r 上的局部坐标，其在态射$\frac{t_\alpha}{t_\alpha^2+1}$ 下拉回为 $\Xi'_\alpha \twoheadrightarrow \mathbb{P}^1$，来自定理 *4.5.17*的证明。
- 如果 $r \ne 1$ 且 $r \ne \frac{p+1}{2}$，令 z_r 为 Z_r 上的局部坐标，其拉回为 t_α 在态射 $\Xi'_\alpha \coprod \Xi'_{\mathrm{id}^2/\alpha} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^1$ 定理 *4.5.12*的证明中。
- 如果 $r = \frac{p+1}{2}$，则令 z_r 为 Z_r 上的局部坐标，其在态射 $t_\alpha + t_\alpha^{-1}$下拉回为 $\Xi'_\alpha \twoheadrightarrow \mathbb{P}^1$，该态射来自定理 *4.5.17*的证明。
- *Let $O_r, \infty_r \in Z_r$ be the closed points defined by $O_r := \{z_r = 0\}$ and $\infty_r := \{z_r = \infty\}$.*

$\widehat{\ }$回顾一下，对于任意 $\alpha \in \Omega$，仿射直线上的原点 Ξ'_α 记作 O_α，并且$q' : \Xi' \twoheadrightarrow \Xi'/\mathcal{R}'$ 表示商映射。重新审视定理 4.5.12 和定理4.5.17的证明后，我们得到以下

Lemma 4.5.21. *Let* $1 \le r \le \frac{p+1}{2}$.

- 若 $r = 1$，则 $q'(O_{\text{恒等}^1}) = O_1$。
- 若 $r \neq 1$ 且 $r \neq \frac{p+1}{2}$，则 $q'(O_{\text{恒等}^r}) = O_r$，且 $q'(O_{\text{恒等}^{2-r}}) = \infty_{r}$。
- 若 $r = \frac{p+1}{2}$，则 $q'(O_{\text{恒等}^{\frac{p+1}{2}}}) = \infty_{\frac{p+1}{2}}$。

回顾余等化子图 $\Xi_{\text{sing}} \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} \Xi' \xrightarrow{\theta} \Xi$，见命题 4.2.5。命题 4.5.4之后，我们希望更深入地理解余等化子图

$$\Xi_{\text{sing}} \underset{q'b}{\overset{q'a}{\rightrightarrows}} \Xi'/\mathcal{R}' \xrightarrow{s} (\Xi'/\mathcal{R}')/\Xi_{\text{sing}} .$$

引理 4.5.22。对 $r = 1$、$\cdots$、$\frac{p-3}{2}\}$，各对 $\{(q'a(s_r)\ q'b(s_r))$ 明确给出如下：

$$(q'a(s_r), q'b(s_r)) = (O_r, \infty_{r+2}) \quad \textit{for all} \quad r = 1, \cdots, \frac{p-3}{2}.$$

Proof. Suppose first that $r \neq \frac{p-3}{2}$. Then using Def. 4.2.4.b and Lemma 4.5.21, we have

$$q'(a(s_r)) = q'(O_{\text{id}^r}) = O_r \quad \text{and} \quad q'(b(s_r)) = q'(O_{\text{id}^{-r}}) = q'(O_{\text{id}^{2-(r+2)}}) = \infty_{r+2},$$

where the last equality holds because $1 \le r < \frac{p-3}{2}$ implies that $1 < r+2 < \frac{p+1}{2}$.

现在假设 $r = \frac{p-3}{2}$。那么我们仍有 $q'(a(s_r)) = q'(O_{\text{id}^r}) = O_r$，但现在引理 4.5.21 给出

$$q'(b(s_{\frac{p-3}{2}})) = q'(O_{\text{id}^{-(\frac{p-3}{2})}}) = q'(O_{\text{id}^{\frac{p+1}{2}}}) = \infty_{\frac{p+1}{2}}. \qquad \square$$

Theorem 4.5.23. *The locally ringed space* $\Xi/\mathcal{R}$ *is a scheme.*

证明。我们知道，对于每个 $\gamma \in \Omega/\sim$，$\Xi'_\gamma/\mathcal{R}'_\gamma$ 是一个概形，这是由定理4.5.12 和定理4.5.17得出的。因此，根据推论4.5.9，$\Xi'/\mathcal{R}'$ 是一个概形。由命题 4.5.4，只需证明局部$_{p+1_2}$环空间$(\Xi'/\mathcal{R}')/\Xi_{\text{sing}}$ 是一个概形。现在，$\Xi'/\mathcal{R}' \cong \coprod Z_r$，我们定义$_{r=1}$

$$X_1 := \coprod_{r \equiv 1 \text{ or } 2 \bmod 4} Z_r \quad \text{and} \quad X_2 := \coprod_{r \equiv 3 \text{ or } 0 \bmod 4} Z_r$$

so that $X_1 \coprod X_2 = \Xi'/\mathcal{R}'$. We also define maps $\theta_1, \theta_2 : \Xi_{\text{sing}} \to \Xi'/\mathcal{R}'$ as follows:
$\theta_1(s_r) = \begin{cases} O_r \text{ 如果} & r \equiv 1 \quad 2 \quad 4 \text{ 或模 如果或模 且 } \theta_2(s_r) = \begin{cases} \infty_{r+2} \text{ 如果} & r \equiv 1 \quad 2 \quad 4 \text{ 或模 如果或模 使得 } \theta_1(\Xi_{\text{sing}}) \subseteq X_1 \text{ 且 } \theta_2(\Xi_{\text{sing}}) \subseteq X_2\text{。使用引理 4.5.22，对所有} \\ & r \equiv 3 \quad 0 \quad 4 \end{cases} \\ & r \equiv 3 \quad 0 \quad 4 \end{cases}$
O_r
$s_r \in \Xi_{\text{sing}}$ 我们有。

$$(\theta_1(s_r), \theta_2(s_r)) = \left(q'a(s_r), q'b(s_r)\right) \quad \text{or} \quad \left(q'b(s_r), q'a(s_r)\right).$$

设 $s : \Xi'/\mathcal{R}' \to (\Xi'/\mathcal{R}')/\Xi_{\text{sing}}$ 为 $\Xi_{\text{sing}} \underset{q'b}{\overset{q'a}{\rightrightarrows}} X_1 \coprod X_2$ 的余等化子；由此可得

$$\Xi_{\text{sing}} \underset{\theta_2}{\overset{\theta_1}{\rightrightarrows}} X_1 \coprod X_2 \xrightarrow{s} (\Xi'/\mathcal{R}')/\Xi_{\text{sing}}$$

是 LRS 中的余等化子图。因此 $(\Xi'/\mathcal{R}')/\Xi_{\mathrm{sing}}$ 同构于 X_1 和X_2 沿 $\theta_1 : \Xi_{\mathrm{sing}} \to X_1$ 和 $\theta_2 : \Xi_{\mathrm{sing}} \to X_2$。由于 θ_1 和 θ_2 都是闭嵌入，由命题 1.1，此粘合是一个概形。1 [类似]。 □

Using Lemma 4.5.22, we can also deduce the following

推论4.5.24。将 $P_r := s(Z_r) \subset (\Xi'/\mathcal{R}')/\Xi_{\mathrm{sing}}$ 记为 $r = 1, \cdots, \frac{p+1}{2}$。

a)假设 $p \equiv 1$ 模 4，因此$\frac{p+1}{2}$ 为奇数且 $\frac{p-1}{2}$ 为偶数。那么 P_1 在 $(\Xi'/\mathcal{R}')/\Xi_{\mathrm{sing}}$ 中的连通分支由下式给出

$$P_1 \cup P_3 \cup P_5 \cup \cdots \cup P_{\frac{p+1}{2}}$$

and the connected component of P_2 *in* $(\Xi'/\mathcal{R}')/\Xi_{\mathrm{sing}}$ *is given by*

$$P_2 \cup P_4 \cup P_6 \cup \cdots \cup P_{\frac{p-1}{2}}.$$

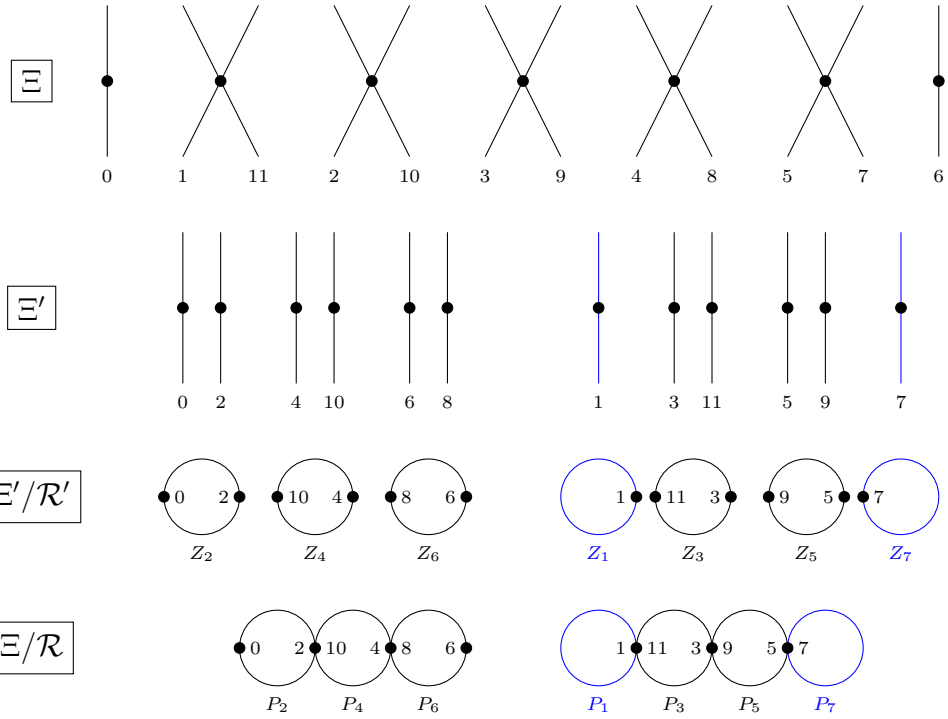
b) 假设 $p \equiv 3 \bmod 4$，因此 $\frac{p-1}{2}$ 是奇数且 $\frac{p+1}{2}$ 是偶数。那么 P_1 在 $(\Xi'/\mathcal{R}')/\Xi_{\mathrm{sing}}$ 中的连通分支由以下给出

$$P_1 \cup P_3 \cup P_5 \cup \cdots \cup P_{\frac{p-1}{2}}$$

and the connected component of P_2 *in* $(\Xi'/\mathcal{R}')/\Xi_{\mathrm{sing}}$ *is given by*

$$P_2 \cup P_4 \cup P_6 \cup \cdots \cup P_{\frac{p+1}{2}}.$$

Example 4.5.25. *When* $p = 13$*, the schemes* Ξ*,* Ξ'*,* $\Xi'/\mathcal{R}'$ *and* $\Xi/\mathcal{R}$ *look as follows:*



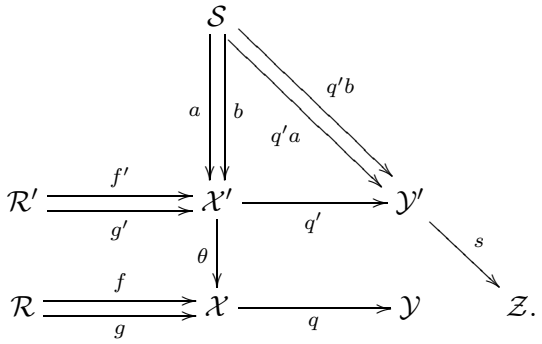
Appendix

A.1. **Some categorical results about colimits and coequalisers.** We omit the proof of the following standard result.

Lemma A.1.1. *Suppose that $q : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ is a coequaliser of the arrows $f, g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ in a category $\mathcal{C}$. Then q is an epimorphism.*

Lemma A.1.2. *Let $\mathcal{C}$ be a category, containing the following diagram:*

(40)



Suppose that in this diagram, we have

a) *q is a coequaliser of* $\mathcal{R} \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \mathcal{X}$,

b) *q' is a coequaliser of* $\mathcal{R}' \underset{g'}{\overset{f'}{\rightrightarrows}} \mathcal{X}'$,

c) *θ is a coequaliser of* $\mathcal{S} \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} \mathcal{X}'$, *and*

d) *s is a coequaliser of* $\mathcal{S} \underset{q'b}{\overset{q'a}{\rightrightarrows}} \mathcal{Y}'$.

Suppose further that there exists a morphism $\theta' : \mathcal{R}' \to \mathcal{R}$ such that:

e) *θ' is an epimorphism, and*

f) *$\theta f' = f\theta'$ and $\theta g' = g\theta'$.*

Then there exists an isomorphism $\varphi : \mathcal{Y} \xrightarrow{\cong} \mathcal{Z}$ such that $sq' = \varphi q\theta$.

证明。由 d)，我们有 $sq'a = sq'b$。因此由 c)，存在唯一的态射 $\alpha : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$使得$sq' = \alpha\theta$。利用这一点，我们有 $\alpha f\theta' \overset{f)}{=} \alpha\theta f' = sq'f' \overset{b)}{=} sq'g' = \alpha\theta g' \overset{f)}{=} \alpha g\theta'$. 于是$\alpha f = \alpha g$ 由 e)，因此由 a)，存在唯一的态射 $\varphi : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ 使得 $\alpha = \varphi q$。 □

接下来，我们有 $q\theta f' \overset{f)}{=} qf\theta' \overset{a)}{=} qg\theta' \overset{f)}{=} q\theta g'$，因此根据b)，存在唯一的态射 τ: $\mathcal{Y}' \to \mathcal{Y}$使得 $q\theta = \tau q'$。然后 $\tau q'a = q\theta a \overset{c)}{=} q\theta b = \tau q'b$，因此根据 d)，存在唯一的态射 $\psi : \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$ 使得 $\psi s = \tau$。我们将证明 φ 和 ψ 互为逆。

首先，$\varphi\psi sq' = \varphi\tau q' = \varphi q\theta = \alpha\theta = sq'$。但是 q' 和 s 由 b) 和 d) 可知是余等化子，因此根据引理 A.1.1，它们是满态射。因此 $\varphi\psi = 1_{\mathcal{Z}}$。其次，$\psi\varphi q\theta = \psi\alpha\theta = \psi sq' = \tau q' = q\theta$。由于 θ 和 q 由 c) 和 a) 可知是余等化子，根据引理 A.1.1，它们是满态射。因此 $\psi\varphi = 1_{\mathcal{Y}}$。最后，$\varphi q\theta = \alpha\theta = sq'$。□

以下标准结果的证明从略。

Lemma A.1.3. *Let $\mathcal{I}$ be a set and let $\mathcal{C}$ be a category with coproducts. Suppose that*

$$\left\{ \mathcal{R}_i \underset{b_i}{\overset{a_i}{\rightrightarrows}} X_i \xrightarrow{q_i} Y_i \ , i \in I \right\}$$

is a family of coequaliser diagrams in $\mathcal{C}$. Then

$$\coprod_{i\in I} \mathcal{R}_i \underset{\coprod_{i\in I} b_i}{\overset{\coprod_{i\in I} a_i}{\rightrightarrows}} \coprod_{i\in I} X_i \xrightarrow{\coprod_{i\in I} q_i} \coprod_{i\in I} Y_i$$

is also a coequaliser diagram in $\mathcal{C}$.

A.2. 另一种稳定性证明。 根据命题 2.2.3， $\mathrm{Mod}_k(G)$ 的 Krull 维数为 1，因此 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 的 Krull 维数过滤中唯一的非平凡项是 $\mathrm{Mod}_k(G)_0$。其稳定性随即由我们的结果命题 3.7.8 得出。在此我们为 $\mathrm{Mod}_k(G)_0$ 的稳定性给出一个替代性的、更直接的论证。我们的论证受到 Pa$\check{\text{s}}$sk$^-$unas 对群 $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ 及具有固定中心特征的表示的相应结果的证明的启发（[Pas] 命题 5.16）。

一个 H-模称为 局部有限 ，如果其每个元素都包含于一个有限长度的子模中。根据备注 2.2.2 ， 局部有限 H- 模构成局部化子范畴 $\mathrm{Mod}(\mathcal{H})_0$ Krull 维数为 0 的对象。

Lemma A.2.1. $\mathrm{Mod}(H)_0$ *is stable.*

证明。 由 [MCR] 推论 13.1.13(iii) 和定理 13.10.3(i)，仿射PIk-代数 H 上的每个单模都是有限维的 k。因此，局部有限模与这样一种模相同：其中每个元素都包含于一个有限维子模中。容易推出， $\mathrm{Mod}(H)_0$ 满足判据 [Gab] 命题 V.6.12。 □

Correspondingly, a G-representation in $\mathrm{Mod}_k(G)$ is locally finite if each of its elements is contained in a subrepresentation of finite length.

引理 A.2.2. 如果表示 V 属于 $\mathrm{Mod}_k(SL_2(\mathbb{Z}_p))$ 且为容许的，那么它在 $\mathrm{Mod}_k(SL_2(\mathbb{Z}_p))$ 中的内射包也是容许的。

证明. 令 $K := SL_2(\mathbb{Z}_p)$. 众所周知， $\mathrm{Mod}_k(K)$ 中的表示 V 是容许的当且仅当其 Pontrjagin 对偶 $V^\vee$ 作为完备群环 $k[[K]]$ 上的模是有限生成的。包含 $V \hookrightarrow E(V)$ 到内射包对偶化为投射覆盖 $E(V)^\vee \twoheadrightarrow V^\vee$。由于环 $k[[H]]$ 是诺特的（参见 [Sch] Prop. 5 的证明中的解释）这个覆盖 $E(V)^\vee$ 必须作为 $k[[H]]$-模是有限生成的。由此得出$E(V)$ 是容许的。 □

Lemma A.2.3. *For a representation V in $\mathrm{Mod}_k(G)$ we have:*

a) V 具有有限长度，当且仅当 V 有限生成且容许。b) V 局部有限，当且仅当其局部容许（按 [EP] 的意义）。

证明。 a) 假设 V 具有有限长度。那么它显然是有限生成的。为了看出 V 是容许的，我们可以假设它是不可约的。但根据定理 2.1.1， H-模 V^I 是有限维的，这意味着 V 是容许的。现在反过来假设 V 是有限生成且容许的。使用 V 的一个滤子，如引理 2.1.3

以及可容许性在取子商后得以保持这一事实（[埃米] 命题 2.2.13），我们可以假设 V 属于 $\mathrm{Mod}^I(G)$。由于 V^I 是有限维的，定理2.1.1 中的等价性告诉我们 V 是有限长度的。

b) 若 V 局部有限，则由 a) 可知它是局部容许的。因此，假设 V 局部容许。但这样一来，它就是容许且有限生成子表示的并集。再次由 a) 可知，V 是有限长度子表示的并集。□

引理 A.2.4. 若 V 是 $\mathrm{Mod}_k(G)_0$ 中的内射对象，则 V 也是 $\mathrm{Mod}_k(SL_2(\mathbb{Z}_p))$ 中的内射对象。

证明。 证明几乎与 [EP] 推论 3.8 的证明完全相同。为方便读者，谨记：

– 使用引理A.2.3.b 将 V 局部有限这一假设替换为假设 V 局部容许，这正是该处所采用的假设。– 群 $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ 是 $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ 与 $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)SL_2(\mathbb{Z}_p)\left(\begin{smallmatrix}0&p^{-1}\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 沿 Iwahori 子群的 amalgam（参见 [Ser] II.4.1 推论 1）。

We also point out that in loc. cit. a version of Lemma A.2.2 is used without mentioning it. □

Proposition A.2.5. $\mathrm{Mod}_k(G)_0$ *is stable.*

证明。根据Gabriel 的判据（参见 [Ste] 命题VI.7.1），我们必须检查以下内容：令 $V_0 \subseteq V$ 为 $\mathrm{Mod}_k(G)$ 中的任意本质扩张（特别是 $V_0 \neq \{0\}$），使得 V_0 是局部有限的。那么我们必须证明 V 也是局部有限的。首先，通过将 V 替换为一个内射包，我们可以假设 V 是一个内射对象。其次，由于 $\mathrm{Mod}_k(G)_0$ 是局部化的，通过可能扩大 V_0，我们可以假设 V_0 是 V的最大局部有限子表示。于是很容易看出，V_0 是 $\mathrm{Mod}_k(G)_0$中的一个内射对象。因此，利用弗罗贝尼乌斯互反律，我们从引理 A.2.4 推得

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Mod}_k(G)}(\mathrm{ind}_K^G(\sigma), V_0) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Mod}_k(K)}(\sigma, V_0) = 0 \tag{41}$$

对于子群 K 的任意光滑表示 $\sigma := SL_2(\mathbb{Z}_p)$。

我们用反证法，假设 $V_0 \neq V$。只需构造 V/V_0 的一个非零局部有限子表示即可。为此，我们在 V/V_0 的 K-基座中选取一个不可约 K-子表示 σ。我们还选取一个向量 $v \in (V/V_0)^I$，它作为 K-$\bar{}$ 表示生成 σ。我们令 $X \subseteq V/V_0$ 表示由 v 生成的 G-子表示，并令 X 为其在 V 中的原像。我们得到：

$\bar{}$a) 由于 $V_0 \hookrightarrow X$ 是本质扩张，$\mathrm{Mod}_k(G)$ 中的短正合列 $0 \to V_0 \to X \to X \to 0$ 不分裂。b) 由 Frobenius 互反律等式 $\mathrm{Hom}^{k[K]}(\sigma, \bar{X}) = \mathrm{Hom}^{k[G]}(\mathrm{ind}_K^G(\sigma)\ \bar{X})$，包含 $\sigma \subseteq \bar{X}$ 对应于一个 G-同态 $\bar{\psi}: \mathrm{ind}_K^G(\sigma) \twoheadrightarrow \bar{X}$，该同态是满射，因为 v 位于其像中。

将(41) 应用于a) 表明映射同态集$^{k[G]}(\mathrm{ind}_K^G(\sigma)\ X) \twoheadrightarrow$同态集$^{k[G]}(\mathrm{ind}_K^G(\sigma)\ \bar{X})$是满射，因此 $\bar{\psi}$ 有一个原像 $\psi: \mathrm{ind}_K^G(\sigma) \to X$。如果 $\bar{\psi}$ 也是内射对象，那么$\psi \circ \bar{\psi}^{-1}: \bar{X} \to X$ 将分裂 a)中的序列。由此可知 $\bar{\psi}$ 是一个真商映射。由于 $\bar{\psi}$ 是$\mathrm{Mod}_k^I(G)$中的映射，定理2.1.1 中的范畴等价意味着序列 $\bar{\psi}^I: \mathrm{ind}_K^G(\sigma)^I \twoheadrightarrow \bar{X}^I$ 是 H-模的真商映射。我们断言，$\mathrm{ind}_K^G(\sigma)^I$ 的任意真 H-商都具有有限的 k-维数。再次应用定理 2.1.1可知，$\bar{X}$ 具有有限长度，这将与 V_0 的极大性相矛盾。

为了确定 H-模结构 $\mathrm{ind}_K^G(\sigma)^I$，我们引入有限维-子代数 $H_0 := \mathrm{End}^{k[K]}(k[K/I])^{\mathrm{op}}$，它属于 H。众所周知，该 H_0-模的不变向量 σ^I 是一维的，因此给出一个特征 $\chi : H_0 \to k$。根据 [Oll]引理 3.6，存在一个 H-模同构 $\mathrm{ind}_K^G(\sigma)^I \cong H \otimes_{H_0} \chi$。[5]

另一方面，回顾在 §4.1中引入的记号。注意 τ_0 和 e_1 位于 H_0 中，并且 $Z(H)$包含多项式环 $k[\zeta]$ 由引理4.1.2。作为 [OS18]推论 3.4 的结果，我们有 $k[\zeta]$-模的同构

$$k[\zeta] \oplus k[\zeta] \xrightarrow{\cong} H \otimes_{H_0} \chi$$

它将(1, 0)映到 $1 \otimes 1$ 并将(0, 1)映到 $\tau_1 \otimes 1$。

设 $Q := k(\zeta)$为 $k[\zeta]$ 的分式域，并设 $V := Q \otimes_{k[\zeta]} (H \otimes_{H_0} \chi)$。则 V是 Q 上的2维向量空间，基为 v, w，其中 $v := 1 \otimes 1 \otimes 1$ 且 $w := 1 \otimes \tau_1 \otimes 1$。现假设我们有 $H \otimes_{H_0} \chi$中一个无限余维的非零 H-子模。它在向量空间 V 中给出一条直线，该直线被 τ_0 和τ_1的 Q-线性作用所保持。设 $a := \chi(e_1)$且 $b := \chi(\tau_0)$。因此，a 为0或1，而 b 是 k中的某个元素。我们计算出，τ_0 相对于基 v, w的作用矩阵 A 为$\begin{pmatrix} b & \zeta - a \\ (b+1)\,0 & -(a+b) \end{pmatrix}$，而 τ_1 相对于同一基的作用矩阵B 为$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$。$B$的最小多项式显然是 $X^2 + aX$。如果 $a = 0$，则 B 是幂零的，且 V中唯一的 τ_1-不变直线由 w张成。如果 $a = 1$，则 B 可对角化，并且还有一条额外的 τ_1-不变直线由$v + w$张成。因此我们只需检查这两条直线不是 τ_0-不变的。转到矩阵，我们需要检查列向量$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$不是 A-特征向量：

– $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta - a \\ (b+1) - (a+b) \end{pmatrix}$ 不属于 $Q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，因为 $\zeta - a(b+1)$ 在 Q 中不为零；– $A\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _ \\ \zeta - a\,(a+b) \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ 对某个 $c \in Q$ 成立，这意味着 $c = -(a+b) \in k$，但同时也有 $\zeta - a = ca \in k$，这是不可能的。□

References

[Ana] Anantharaman,S.: *Schémas en groupes espaces homogénes et espaces algébriques sur une base de dimension 1*, 《法国数学学会回忆录》- () 33, 5 79 1973

[AS23] ArdakovK.、SchneiderP.: *The Bernstein center in natural characteristic*。《斯捷克洛夫数学研究所数学汇刊》30，1–20（2023）

[AS24] ArdakovK.、Schneider P.: *The central sheaf of a Grothendieck category*。预印本，2022年。

[ ] *Commutative Algebra* 1969 AM Atiyah M.、MacDonald I.: 《》。Addison-Wesley

[ ] *Le "centre" de Bernstein* Ber Bernstein J.: 《》。载于 *Représentations des reductive groupes réductifs sur un corps local* 1 32 （编者：Bernstein、Deligne、Kazhdan、Vigneras），第–页。Hermann 1984

[ ] *Matlis category equivalences for a ring epimorphism*

BPBazzoniS.、PositselskiL.: 《》。《纯粹与应用代数杂志》224，1-25（2020）

[DEG] Dotto A.、EmertonM.、GeeT.: *Localization of smooth p-power torsion representations of* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$。预印本，2022年。

[ ] *Groupes Algébriques* 1970 DG Demazure M.、Gabriel P.: 《》。North-Holland

[ ] *Ordinary parts of admissible representations of p-adic reductive groups I. Definition and first properties* 331, 355 402 2010 EmeEmertonM.: 《Asterisque》-()

[EP] Emerton M.、Paskunas V.: *On the effaceability of certain δ-functors*。《Ast´erisque》331，461-469（2010）

[Gab] Gabriel P.: *Des catégories abéliennes*。《法国数学学会公报》90，323-448（1962）

[ ] *Localization of noncommutative rings* 1975 Gol Golan J.S.: 《》。Marcel Dekker, 纽约

[ ] *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings* GWGoodearlK.R.、Warfield R.B.: 《》。第2版，伦敦数学学会学生教材61，剑桥大学出版社，2004年

[5]在 [Oll] 中，域 k 被假定为 $\mathbb{F}_p$ 的一个代数闭包。但在我们的情形中，所有不可约的模 p 表示 $SL_2(\mathbb{F}_p)$ 都定义在 $\mathbb{F}_p$ 上，因此这一假设并无必要。

[GR] Gordon R.,RobsonJ.C.: *The Gabriel Dimension of a Module*。J.Algebra29,459 - 473(1974) [Her] HerzogI.: *The Ziegler spectrum of a locally coherent Grothendieck category*。Proc. London Math. Soc.74, 503 - 558 (1997) [KS] Kashiwara M., Schapira P.: *Categories and Sheaves*。Grundlehrenmath. Wissenschaften332, Springer2005[KStm] 用户 k.stm：概形的满态射，math.stackexchange.com。[Koz] Koziol K.: *Pro-p-Iwahori invariants for SL_2 and L-packets of Hecke modules*。International Math. ResearchNotices4,1090- 1125 (2016) [LMB] Moret-Bailly, L.: 概形的余等化子是否可能不是满射？，math.stackexchange.com。[Lou] LoudenK.: *Stable torsion and the spectrum of an FBN ring*。J. Pure Appl. Algebra 15, 173 - 180 (1979) [ ] *Algebraic Geometry II* 2015 [ ] *Commutative ring theory* MO Mumford D., Oda T.: 。Hindustan Book Agency Mat Matsumura H.: 。Cambridge Studies in Advanced Math. 8,Cambridge Univ. Press 1986

[ ] *Noncommutative Noetherian Rings* 2001 MCR [ ] *An inverse Satake isomorphism in characteristic p* 21 3 McConnell J.C., Robson J.C.: 。American Math. Soc. Oll OllivierR.: 。Selecta Math.New Ser. (), 727 - 761 (2015) [OS18] Ollivier R., Schneider P.: *A canonical torsion theory for pro-p Iwahori-Hecke modules*。Adv.Math. 327, 52 - 127 (2018) [OS19] OllivierR., Schneider P.: *The modular pro-p Iwahori-Hecke Ext-algebra* *Representations of Reductive Groups* 。In (编者: Aizenbud, Gourevitch, Kazhdan, Lapid), Proc.Symp. PureMath. pp. - 308 (2019) [OS22] OllivierR., Schneider P.: *On the pro-p Iwahori Hecke Ext-algebra of* SL$_2$(Q$_p$)。M´emoires Soc. Math. France 175 (2022) [Pas] Pa˘sk⁻unasV.: *The image of Colmez's Montreal functor*。Publ. Math. IHES 118, 1 - 191 (2013)

[ ] *Abelian categories with Applications to Rings and Modules* 1973 Pop [ ] *Smooth representations and Hecke modules in characteristic p* Popescu N.: 。Academic Press SchSchneider P.: 。Pacific J. Math. 279, 447 - 464 (2015)

[ ] *Trees* 1980 Ser Serre J-P.: 。Springer Sta Stacks项目。

[ ]

[ ] ¨ *Rings of Quotients* 217 1975 SteStenstrom Bo: 。

[ ] ´ *Pro-p-Iwahori Hecke ring and supersingular* $_p$*-representations* Grundlehren math. Wiss. 。Springer Vig VignerasM.-F.: F。Math. Ann. 331, 523 - 556 (2005)，勘误 333(3), 699 - 701

Mathematical Institute, Woodstock Road, University of Oxford, Oxford OX2 6GG, UK
Email address: ardakov@maths.ox.ac.uk*URL*: http://people.maths.ox.ac.uk/ardakov/

Universität Münster, Mathematisches Institut, Einsteinstr. 62, 48149 Münster, Germany
Email address: pschnei@wwu.de*URL*: https://www.uni-muenster.de/Arithm/schneider/