arXiv:2304.02588v1 [math.PR] 5 Apr 2023

THE S_k 洗牌块动力学

Evita Nestoridi、Amanda Priestley 和 Dominik Schmid

我们介绍并分析在 N 张牌上进行的 S_k 洗牌过程，这是著名的随机相邻换位洗牌过程的一种自然推广。在 S_k 洗牌过程中，我们从 k 张连续的牌中均匀随机选出一块，并按照从 k 个元素上的对称群中均匀随机选取的一个置换来洗这些牌。我们研究当纸牌数量 N 趋于无穷时， S_k 洗牌过程的全变差混合时间，同时允许 $k = k(N)$ 随 N增长。特别地，我们证明当 $k = o(N^{\frac{1}{6}})$ 时会出现截断现象。

1. Introduction

1.1. 模型与结果。 在洗牌一副 N 纸牌时，我们的经验表明，仅涉及“局部”移动的洗牌过程，即只显著影响少量纸牌的移动，比涉及非局部移动的洗牌过程混合得更慢。随机对换 [10], 星形换位 [24], 随机到随机洗牌 [5] 是这类局部纸牌洗牌过程的例子；已知它们以 N 纸牌为 $N \log N$ 步的数量级完成洗牌。随机相邻换位甚至更慢，其混合所需步数为 $N^3 \log N$步的数量级 [17, 28]。相比之下，鸽尾洗牌以及 k-循环在 k 足够大时仅需 log 的数量级 N步 [2, 4]。在本文中，我们引入 S_k 洗牌过程这一模型，它在洗牌过程中对局部移动和全局移动进行插值，即当 $k = 2$时，它对应于相邻随机对换；而当 $k = N$时，该洗牌过程在每一步都选取一个均匀随机置换。

我们对 S_k 洗牌过程的定义受到其他研究充分的模型的块动力学启发，例如伊辛模型 [6, 15, 16, 21, 22, 29], 以及其他非局部动力学，例如 Swendsen-Wang 模型[6, 7, 20], 、随机簇模型 [13], 以及带有多重交换的伯努利-拉普拉斯模型 [1, 12]。在 S_k 洗牌过程中，每个由 k 张连续纸牌组成的块都被分配一个独立的速率为 1 的泊松时钟。每当时钟响起，我们就根据从含有 k 个元素的对称群中均匀随机选取的一个置换，对相应块中的纸牌进行洗牌。本文的主要目标是研究 $t_{\text{mix}}(\varepsilon)$，即 S_k 个 N 张纸牌的洗牌过程的全变差混合时间，其中 N 趋于无穷；相应量的正式定义见第2节。我们得到以下首个结果。

Theorem **1.1.** 对于 S_k 洗牌过程，存在一个常数 $c > 0$ 使得对于所有 $k = k(N)$满足 $k = o(N^{2/3})$ 以及所有 $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$\frac{6}{\pi^2} \leq \liminf_{N\to\infty} \frac{k(k^2-1)\cdot t_{\text{mix}}(\varepsilon)}{N^2 \log N} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{k(k^2-1)\cdot t_{\text{mix}}(\varepsilon)}{N^2 \log N} \leq c\,. \tag{1.1}$$

Date: 2023年4月6日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：60K35；次要分类：60K37，60J27。*Key words and phrases.* 混合时间，块动力学，洗牌，截断现象。

一个关键观察是， S_k 洗牌过程根据纸牌在牌堆中的位置对它们进行不同处理。人们可能会注意到，牌堆中前 k 个和后 k 个位置的纸牌比中间的移动得更慢。特别是，跟踪牌堆的第一张扑克牌，可以看出混合时间必须至少是常数阶的；精确陈述见命题 7.1。为了弥补这一效应，我们在位置 1 到 $k-1$ 以及位置 $N-k+1$ 到 N 引入额外的移动，并将前k 个和后k 个位置称为边界。更精确地，对于每个 $i \in \{2,\dots,k-1\}$，我们分别为包含牌堆前 i张纸牌的块和包含后 i 张纸牌的块分配速率为 $\delta_i^{(k)}$ 和 $\delta_{N-i+1}^{(k)}$ 的泊松时钟。每当时钟响起时，我们根据从 i 个元素的对称群中均匀随机选择的置换来洗该块中的纸牌。我们称之为 $\mathsf{S_k}$ 带边界的洗牌。 $\delta_i^{(k)}$ 的精确选择推迟到第2节，我们在那里正式引入这两个过程；另见第7节对这两个过程的比较。虽然 S_k 带边界的洗牌的 ε-混合时间 $t'_{\text{mix}}(\varepsilon)$ 仍然满足定理 1.1 中的界，但对于增长足够慢的 k，上界可以得到改进；另见当 $k = o(N^{1/2})$ 时的猜想 7.3。

THEOREM **1.2.** 对于 S_k 带边界的洗牌，假设 $k = o(N^{1/6})$，带边界的 ε-洗牌混合时间 S_k满足对所有 $\varepsilon \in (0,1)$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{k(k^2-1)\cdot t'_{\text{mix}}(\varepsilon)}{N^2 \log N} = \frac{6}{\pi^2}. \tag{1.2}$$

混合时间的主导阶不依赖于 ε 这一事实被称为截断现象。定理 1.2 与 Lacoin 在 [17] 中证明的特殊情形这一著名结果一致； $k = 2$；关于精确的下界，参见 Wilson [28] 较早的工作。虽然对于定理 1.2 ，我们遵循了 Lacoin 在 [17], 中提出的策略，但将这些论证推广到 $k \geq 3$的情形时会面临若干挑战。或许最令人意外的是，当 $k > 3$时，转移矩阵的谱隙和其他特征值都没有简单的闭式表达。相反，在适当选择边界速率的情况下，我们使用近似特征值和近似特征函数。在 [23] 研究相邻换位洗牌的一个时间非齐次版本时，首次出现了使用近似特征函数的思想。后来，这一思想被推广到连续时间马尔可夫链中，见[14] ，从而得到具有一个开放边界的对称排斥过程的精确下界。不同于上述工作，我们同时近似 S_k 带边界的洗牌过程的所有相关特征值和特征函数。这使我们能够进行近似傅里叶分析。它是定理 1.2 上界证明中的关键要素，因为该证明涉及一个离散热方程，而其解可以通过 S_k 洗牌过程给出。

在给出混合时间的精确下界时， k 较大时还会出现另一个难题：块内一次洗牌过程造成的最大位移，可能与 S_k 洗牌过程在平衡态下的涨落相当。我们借助带边界的 S_k 洗牌过程所具有的强 Rayleigh 性质来解决这一问题，这与 Salez [26] 和 Tran [27] 研究开放边界下的对称排斥过程时所采用的方法类似。此外，我们需要一个不同的 Wilson 引理推广版本；该版本追溯到最初的二阶矩方法，此方法在[11, 第 4], 节中提出，并使用了更严格的方差界。此外， S_k带边界的洗牌过程对删失的解释也与.....不同。

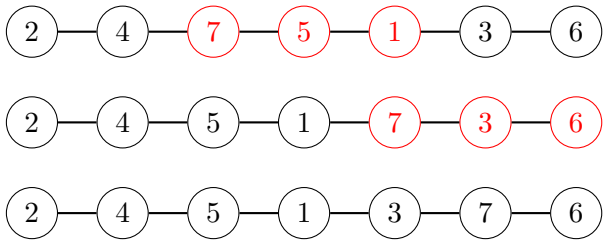


FIGURE 1. 在长度为 N 的线段上进行 S_3 洗牌过程的示例。每一步中选取进行更新的位置以红色标记。

此前 Lacoin 和 Gantert 等人曾使用过 [14, 17]。我们引入一种广义删失方案，它不仅限制移动，还会改变移动方式。最后要指出，相邻换位也可用于研究偏置洗牌方法；例如参见 [3, 30]。

1.2. 论文结构。 在第 2节中，我们给出将在全文中使用的预备定义和记号。第 3 节讨论了 S_k 洗牌过程中从 $k = 2$情形中保留下来的重要性质，这些性质在我们关于上界和下界的证明中发挥了重要作用。在第 4节中，我们使用二阶矩方法的一个推广版本，得到了 S_k 洗牌过程的混合时间下界。在第 5节中，我们为定理 1.1中的上界引入了一个耦合论证。在第 6节中，我们调整了 Lacoin 在 [17] 中的论证，从而证明了 S_k 带边界的洗牌过程的混合时间的精确上界。最后，我们在第 7节中通过比较 S_k 带边界和不带边界的洗牌过程进行讨论，并提出一个开放问题。

2. PRELIMINARIES ON THE S_k SHUFFLE

本节将正式定义有边界和无边界的 S_k 洗牌过程。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，以下记 $\mathcal{S}_n$ 为 n 个元素上的对称群，并将 $\sigma \in \mathcal{S}_N$称为 $[n] \coloneqq \{1, \dots, n\}$上的一个置换。对于整数 i、$j \in [n]$，满足 $i < j$，以及置换 $\eta \in \mathcal{S}_n$ 和 $\sigma \in \mathcal{S}_{j-i+1}$，我们将构型定义为 $\eta^{\sigma,i,j}$，其定义如下

$$\eta^{\sigma,i,j}(m) \coloneqq \begin{cases} \eta(m) & \text{if } m \notin [i,j] \cap [n] \\ \eta(\sigma(m+1-i)) & \text{if } m \in [i,j] \cap [n] \end{cases} \tag{2.1}$$

对于所有 $m \in [n]$，也就是说，我们按照 σ 对区间 $[i,j]$ 内的纸牌进行置换。对于 $N \in \mathbb{N}$和 $k \in [N]$，大小为 N 的牌堆上的 $\mathbf{S_k}$ 洗牌过程是定义在$\mathcal{S}_N$ 上的连续时间马尔可夫链，其生成元为

$$(\mathcal{L}f)(\eta) = \sum_{i=1}^{N-k} \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \Big(f(\eta^{\sigma,i,i+k-1}) - f(\eta) \Big) \tag{2.2}$$

对于所有函数 $f\colon \ \mathcal{S}_N \to \mathbb{R}$，以及 $\eta \in \mathcal{S}_N$；参见图 1 以查看可视化结果。我们将所得动力学记为 $(\eta_t)_{t \geq 0}$。对于 $\mathbf{S_k}$ 带边界的洗牌，我们设

$$\delta_{k-i}^{(k)} = \delta_{N-k+(i+1)}^{(k)} \coloneqq \frac{4k^2 - 6ik + 3i^2 - 1}{(2(k-i)+1)(2(k-i)-1)} \tag{2.3}$$

致 $i \in [1, k-2]$ 并定义动力学 $(\zeta_t)_{t\geq 0}$ 在 $\mathcal{S}_N$ 上相对于属 tor

$$(\tilde{\mathcal{L}} f)(\zeta) := (\mathcal{L} f)(\zeta) + \sum_{i=2}^{k-1} \frac{\delta_i^{(k)}}{i!} \sum_{\sigma \in S_i} \left(f(\zeta^{\sigma,1,i}) + f(\zeta^{\sigma,N-i+1,N}) - 2f(\zeta) \right) . \tag{2.4}$$

换言之，我们还以速率 i 对最前面和最后面的$\delta_i^{(k)}$ 张牌分别施加均匀随机置换。尽管乍看之下， $\delta_i^{(k)}$ 的选择可能略显不自然，但我们将看到， （2.3）中的速率选择使我们能够将 $k = 2$ 的特征值和特征函数重用为 $k \geq 3$的近似特征值和近似特征函数。

注意，这两种动力学关于 $\mathcal{S}_N$ 上的均匀测度均可逆，以下将其记为 μ_N。对于 $\mathcal{S}_N$ 上的概率测度 ν，我们定义：

$$\|\nu - \mu_N\|_{\mathrm{TV}} := \frac{1}{2} \sum_{\eta \in \mathcal{S}_N} |\nu(\eta) - \mu_N(\eta)| = \max_{A \subseteq \mathcal{S}_N} (\nu(A) - \mu_N(A)) \tag{2.5}$$

为 ν 和 μ_N 的全变差距离，并令 $(\eta_t)_{t\geq 0}$ 的 ε-混合时间为

$$t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon) := \inf \left\{ t \geq 0 : \max_{\eta \in S_N} \|\mathbb{P}(\eta_t \in \cdot \,|\, \eta_0 = \eta) - \mu_N\|_{\mathrm{TV}} < \varepsilon \right\} \tag{2.6}$$

对于所有 $\varepsilon \in (0,1)$。类似地，我们将$(\zeta_t)_{t\geq 0}$的 ε-混合时间记为 $t'_{\mathrm{mix}}(\varepsilon)$，对于所有 $\varepsilon \in (0,1)$。一个核心工具是 S_k 洗牌过程的高度函数。对于 $\sigma \in \mathcal{S}_N$，我们设

$$h_\sigma(x, y) := \left(\sum_{z=1}^{x} \mathbb{1}_{\{\sigma(z) \leq y\}} \right) - \frac{xy}{N} , \tag{2.7}$$

按照约定，对于所有 $x \in [N]$ 和 $\sigma \in \mathcal{S}_N$， $h_\sigma(x) = h_\sigma(x, \lfloor N/2 \rfloor)$。此外，略微滥用记号，对于所有 $t \geq 0$，对于 S_k洗牌过程 $(\eta_t)_{t\geq 0}$，我们写作 $h_t(x) = h_{\eta_t}(x, \lfloor N/2 \rfloor)$；类似地，对于带边界的洗牌过程，$h'_t(x) = h_{\zeta_t}(x, \lfloor N/2 \rfloor)$。注意，高度函数使得可以在状态空间 $\mathcal{S}_N$ 上定义一个偏序。我们称σ 支配 σ'，并记为 $\sigma \succeq \sigma'$，若对所有 x， $y \in [N]$,

$$h_\sigma(x, y) \geq h_{\sigma'}(x, y) . \tag{2.8}$$

注意，关于 $\succeq$ 的极大元是 $\sigma =$id，即恒等置换在 $\mathcal{S}$ $_N$.

2.1. 谱的近似。在下文中，我们讨论带边界的 S_k 洗牌过程的谱。除了特殊情形 $k = 2$ 和 $k = 3$ 外，我们将看到特征函数和特征值并没有简单的闭式表达，因此我们提出以下候选值作为近似特征值和特征函数，即设

$$\Phi_{N,y}^{(j)}(\sigma) := \sum_{x=1}^{N-1} h'_\sigma(x, y)\psi_j(x) \quad \text{where} \quad \psi_j(x) := \sin\left(\frac{xj\pi}{N} \right) , \tag{2.9}$$

约定 $\Phi_N(\sigma) = \Phi_{N,N/2}^{(1)}(\sigma)$。此外，对于所有 $j \in [N]$，我们令

$$\lambda_{N,k}^{(j)} := (k-1) - \left[2 \sum_{i=1}^{k} \frac{k-i}{k} \cos\left(\frac{ij\pi}{N} \right) \right] = \frac{kj^2\pi^2}{N^2} \left(\frac{k^2-1}{12} \right) + O\Big(\frac{k^5 j^4}{N^4} \Big) . \tag{2.10}$$

下面的引理表明，对于我们特意选择的 δ_i （在2.3）中定义的， $\Phi_N^{(j)}$ 确实是关于近似特征值 $\lambda_{N\,k}^{(j)}$的合适的近似特征函数。

LEMMA 2.1. 回顾(2.4) 中对 $\mathcal{L}$的定义。设 $k = k(N)$ 满足 $k = o(N)$。则存在某个常数 $C > 0$ 使得对于所有 $j \in [N]$，以及对于所有 $y \in [N-1]$

$$|(-\tilde{\mathcal{L}}\Phi_{N,y}^{(j)})(\sigma) - \lambda_{N,k}^{(j)}\Phi_{N,y}^{(j)}(\sigma)| \le Ck^6 j^3 N^{-3} \tag{2.11}$$

对所有 $\sigma \in \mathcal{S}_N$。

证明。我们在下文中仅考虑情况$y = \frac{N}{2}$因为其余情况类似。注意，每当我们将 $[a,b]$ 中均匀随机选择的置换应用于构型 σ，期望高度函数在位置 $x \in [a,b]$ 处的值由$(b-x)(b-a)^{-1}h_\sigma(a) + (x-a)(b-a)^{-1}h_\sigma(b)$给出。因此，通过重新索引求和˜并使用 $\mathcal{L}$的定义，我们看到

$$(\tilde{\mathcal{L}}\Phi_N^{(j)})(\sigma) = \sum_{x=1}^{N-1}(\tilde{\mathcal{L}}h)(\sigma)\psi_j(x) = \sum_{x=1}^{N-1} h_\sigma(x)a_x$$

其中我们设定

$$a_x = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{k-i}{k}(\psi_j(x-i)+\psi_j(x+i)) - (k-1)\psi_j(x) & \text{if } x \in [k, N-k] \\ \sum_{i=1}^{x-1} \frac{\delta_x^{(k)} i}{x}\psi_j(i) + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{k-i}{k}\psi_j(x+i) - \Big(x + \sum_{i=x+1}^{k-1}\delta_i^{(k)}\Big)\psi_j(x) & \text{if } x < k \\ \sum_{i=x}^{N-1} \frac{\delta_x^{(k)}(N-i)}{N-x+1}\psi_j(N-i) + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{k-i}{k}\psi_j(x-i) - \Big(x + \sum_{i=x+1}^{N-1}\delta_i^{(k)}\Big)\psi_j(x) & \text{if } x > N-k+1\,. \end{cases}$$

对于所有 $x \in [N]$，涉及三角恒等式的计算表明

$$\lambda_{N,k}^{(j)}\psi_j(x) = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{k-i}{k}(\psi_j(x-i)+\psi_j(x+i)) - (k-1)\psi_j(x)\,.$$

根据我们对 $\delta_i^{(k)}$ 在 (2.3) 中的选择，另一项计算得出

$$\frac{\delta_x^{(k)}}{x}\left(\sum_{i=1}^{x-1} i^2\right) - \Big(x-k+1+\sum_{i=x+1}^{k-1}\delta_i^{(k)}\Big)x = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{k-i}{k}(x-i) \tag{2.12}$$

对所有 $x < k$，并且当 $x > N-k+1$ 时类似。使用泰勒近似，我们得到

$$\left|\psi_j(x) - \frac{jx\pi}{N} + \frac{j^3x^3\pi}{6N^3}\right| \le C\frac{j^5k^5}{N^5} \tag{2.13}$$

对于某些 $C > 0$ 对于所有 N 足够大。通过望远镜求和，对于所有 $x < k$

$$\delta_x^{(k)} \le \frac{7k^2}{4x^2-1} \quad \text{and} \quad \left(\sum_{i=k-x}^{k-1}\delta_i^{(k)}\right) = \frac{x(4k-3x-1)}{4(k-x)+2} \le \frac{x^2}{4(k-x)} + x \tag{2.14}$$

因此，对于某些 $c_1 > 0$，以及所有 $j \geq 1$ 和 $x < k$

$$\left|\sum_{i=1}^{x-1} \frac{\delta_x^{(k)} i^4 j^3}{xN^3}\right| + \left|\frac{x^3 j^3}{N^3} \sum_{i=x+1}^{k-1} \delta_i^{(k)}\right| \leq c_1 \frac{k^4 j^3}{N^3}. \tag{2.15}$$

由于 $\max(h_\zeta(x)\ h_\zeta(N-x)) \leq x$ 对于所有 $\zeta \in \mathcal{S}_N$，我们由 (2.12)、(2.13) 和 (2.15) 得到

$$|h_\zeta(x) a_x - \lambda_{N,k}^{(j)} \psi_j(x)| \leq c_2 \frac{j^3 k^5}{N^3} \tag{2.16}$$

对于某个常数 $c_2 > 0$，在 $x \in [k-1]$ 以及 $x > N-k+1$ 上一致成立。对边界中的所有 x 求和，即得所需结果。□

2.2. S_k 洗牌过程的投影。注意，与 [17] 和 [28]，中一样， S_k 洗牌过程具有自然投影，可视为超图上的排斥过程。设 $\sigma \in \mathcal{S}_N$ 并设 $K \in [N-1]$ 固定。我们令 $\xi_\sigma^K \in \{0,1\}^N$ 为通过设置 $\xi_\sigma^K(x) = 1$ （若位置 x 处扑克牌的值至多为 K）而得到的构型。换句话说，前 K 张纸牌可视为粒子，而其余纸牌扮演空位的角色。相应的动力学 $(\xi_t^K)_{t\geq 0}$ 然后可由生成元描述：

$$(\hat{\mathcal{L}} f)(\xi) = \sum_{i=1}^{N-k} \frac{1}{k!} \sum_{\xi \in \{0,1\}^N} \Big(f(\xi^{\sigma,i,i+k-1}) - f(\xi) \Big)\,, \tag{2.17}$$

这里 f 是一个函数 $f\colon\ \{0,1\}^N \to \mathbb{R}$其中， $\xi^{\sigma,i,j}$ 按（2.1）中的定义给出，适用于 $\eta^{\sigma,i,j}$.

3. Properties Preserved by the S_k Shuffle

本节讨论 S_k 和 S_2 洗牌过程所共有的性质。 S_k 洗牌过程的平稳分布是均匀分布，这一点非常重要，因为它使我们能够将若干性质从 $k = 2$ 的情形转移到 $k \geq 3$。

3.1. 删失不等式的保持。删失不等式由 Peres 和 Winkler在[25] 中提出，此后已被用于许多场景，例如 [14] 和[17]。在本节中，我们为 S_k-洗牌过程定义一种删失方案，并证明删失不等式成立。与删失的典型用法不同，我们还会改变移动。

形式上，我们将删失方案 $\mathcal{C}\colon\ \mathbb{R}_0^+ \to \mathcal{P}(E)$ 定义为一个c`adl`ag 函数，其中$\mathcal{P}(E)$是边的幂集 $E := \{\{x, x+1\}\colon x \in [N-1]\}$。我们从 S_k 洗牌过程$(\eta_t)_{t\geq 0}$ 和一个删失方案$(\mathcal{C}_t)_{t\geq 0}$ 中得到如下删失动力学$(\eta_t^{\mathcal{C}})_{t\geq 0}$ ： 假设在时间 t，我们在一个区间 $\mathcal{I} = [i, j]$上执行洗牌过程。如果 $\mathcal{I}$ 不包含来自 $\mathcal{C}_t$的边，那么我们按照原始动力学在 $\mathcal{I}$ 上执行洗牌过程。然而，如果$\mathcal{I}$ 包含至少一条 $\mathcal{C}_t$中的边，那么我们将 $\mathcal{I}$ 划分为子区间 $(\mathcal{I}_m)_{m\geq 0}$ ，其中$\mathcal{I}_m = [i_m, i_{m+1} - 1]$ 使得

$$\mathcal{I} = \bigcup_{m\geq 0} [i_m, i_{m+1} - 1] \tag{3.1}$$

对于某个 $i_0 < i_1 < i_2 < \cdots$，并且 $\{i_m - 1, i_m\} \in \mathcal{C}_t$ 对所有 m。在每个区间 $\mathcal{I}_m$ 中，我们对元素执行独立的 $S_{|\mathcal{I}_m|}$-洗牌过程。

换言之，每当我们要沿着一条删失边执行洗牌操作时，就在各个子区间上执行相互独立的 $S.$ 洗牌过程，从而得到删失动力学。删失不等式表明，对于任意时间 $t \geq 0$，就随机序 $\succeq$ from(2.8)而言，删失动力学的分布随机支配原动力学的分布。这里，回顾一下，只要对于任意关于 $\succeq$递增的集合 $A \subseteq \mathcal{S}_N$，都有 $\mu(A) \geq \nu(A)$，测度 μ 就随机支配测度 ν on$\mathcal{S}_N$；参见 [18]的第 22.2 节。此外，这种随机支配对于跳跃时刻 $(\mathcal{T}_i^x)_{i\geq 1}^{x\in[N-1]}$ 的选择是一致的；我们在这些时刻对从 x开始的区间执行 i^{th} 更新。形式化地说，如果对于所有 $t \geq 0$ 以及任意满足 $t_i^x \geq 0$的适当族 $(t_i^x)_{i\in\mathbb{N}}^{x\in[N-1]}$，删失不等式成立，那么我们称删失不等式成立。

$$\mathbb{P}(\eta_t^{\mathcal{C}} \in \cdot \,|\, \mathcal{T}_i^x = t_i^x) \succeq \mathbb{P}(\eta_t \in \cdot \,|\, \mathcal{T}_i^x = t_i^x)\,. \tag{3.2}$$

回顾一下，函数 f 是递增的，即当 $\sigma \succeq \sigma'$ 时，$f(\sigma) \geq f(\sigma')$；并且 μ_N 表示 $\mathcal{S}_N$ 上的均匀测度。下一个引理归功于 Lacoin；参见 [17] 中的命题 3.6。

LEMMA 3.1. 令 ν_0 为 S_2 在 $\mathcal{S}_N$ 上的洗牌过程的初始分布，满足 $\sigma \mapsto \frac{\nu_0}{\mu_N}(\sigma)$是递增的。令 $\mathcal{C}$ 为删失方案，并令 $\nu_t^{\mathcal{C}}$ 为相对于 S_2 的洗牌过程的分布，其中 $\mathcal{C}$。则 $\sigma \mapsto \frac{\nu_t^{\mathcal{C}}}{\mu_N}(\sigma)$ 是递增的，并且删失不等式成立。

接下来，我们的目标是将这一结果推广到一般的 $k \geq 3$。

LEMMA 3.2. 设 $k \geq 3$ 且 ν_0 是 S_k 在其上的洗牌过程 $\mathcal{S}_N$ 使得$\sigma \mapsto \frac{\nu_0}{\mu_N}(\sigma)$ 递增。设 $\mathcal{C}$ 是一个删失方案，并设 $\nu_t^{\mathcal{C}}$ 是关于 S_k的洗牌过程相对于 $\mathcal{C}$的分布。则 $\sigma \mapsto \frac{\nu_t^{\mathcal{C}}}{\mu_N}(\sigma)$ 递增，且删失不等式成立。

我们使用 下面的引理用于近似带审查的 S_k 洗牌过程中的单次更新。 g.

LEMMA 3.3. 令 ν_t 为 S_2 洗牌过程在 $\mathcal{S}_k$ 上于时间 t的分布，则我们有

$$\lim_{t\to\infty} \|\nu_t - \mu_k\|_{\text{TV}} = 0\,. \tag{3.3}$$

证明。这是以下事实的直接结果： S_2 洗牌过程是一个不可约连续时间马尔可夫链，其唯一平稳分布为均匀分布。 □

引理证明 *3.2*。 下面我们只证明 $\sigma \mapsto \frac{\nu_t^{\mathcal{C}}}{\mu_N}(\sigma)$ 对于任意删失方案 $\mathcal{C}$都是递增的。删失不等式成立这一事实随后可由[18]中与定理22.20 相同的论证得到。为此，我们采用反证法。假设存在一个删失方案 $\mathcal{C}$、一个时间序列 $(t_i^x)_{i\geq 1}^{x\in[N-1]}$、一个时间 $t \geq 0$、某个 $\delta > 0$以及排列 $\sigma \succeq \sigma'$ 使得

$$\mathbb{P}(\eta_t = \sigma' \,|\, \mathcal{T}_i^x = t_i^x) - \mathbb{P}(\eta_t^{\mathcal{C}} = \sigma \,|\, \mathcal{T}_i^x = t_i^x) \geq \delta\,. \tag{3.4}$$

设 $M > 0$ 将在稍后选择。设 $\mathcal{J}_t := \{(x,i) : t_x^i \leq t\}$，并设 $(\tilde{\eta}_t)_{t\geq 0}$ 和 $(\tilde{\eta}_t^{\mathcal{C}})_{t\geq 0}$ 为 $\mathcal{S}_N$ 上的两个过程，定义如下。对于所有 $(x,i) \in \mathcal{J}_t$，在时间t_x^i 于 $(\tilde{\eta}_t)_{t\geq 0}$ 我们执行一系列 M 多次 (离散时间) S_2 洗牌操作于区间 $[x, x+(k-1)]$。类似地对于过程 $(\tilde{\eta}_t^{\mathcal{C}})_{t\geq 0}$，我们应用对于所有 $(x,i) \in \mathcal{J}_t$一系列 M 多次 S_2 洗牌过程，但对于分解 $\mathcal{I}$ 中定义的每个区间

(3.1) 的删失方案在 t_x^i 分别进行。根据引理3.3 以及离散时间与连续时间马尔可夫链之间的标准比较——参见 [25] 中的定理 20.3——和全变差距离的三角不等式，我们可以选择 $M = M(t、\ \mathcal{J}_t、\ \delta、\ k、\ \mathcal{C})$ 足够大，使得

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}(\tilde{\eta}_t \in \cdot \,|\, \mathcal{T}_i^x = t_i^x) - \mathbb{P}(\eta_t \in \cdot \,|\, \mathcal{T}_i^x = t_i^x)\|_{\mathrm{TV}} &\leq \frac{\delta}{4} \\ \|\mathbb{P}(\tilde{\eta}_t^{\mathcal{C}} \in \cdot \,|\, \mathcal{T}_i^x = t_i^x) - \mathbb{P}(\eta_t^{\mathcal{C}} \in \cdot \,|\, \mathcal{T}_i^x = t_i^x)\|_{\mathrm{TV}} &\leq \frac{\delta}{4}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

注意到（$\tilde{\eta}_t$）$_{t\geq 0}$分别为（$\tilde{\eta}_t^{\mathcal{C}}$）$_{t\geq 0}$，分别是 S_2 个洗牌过程，或是一个 S_2 洗牌过程，其˜对应于某个删失方案 $\mathcal{C}$。因此，利用引理3.1，并再次应用全变差距离的三角不等式，我们得到与（3.4）相矛盾的结论。□

备注 3.4。 注意，证明引理3.2 时所使用的相同论证也适用于 S_k带边界的洗牌过程，从而证明删失不等式成立。

3.2. 强 Rayleigh 性质的保持。 本节讨论强 Rayleigh 性质及其与负相关的关系。令 $n \in \mathbb{N}$，并将具有实系数的函数 $f \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ 称为实稳定的，如果对于 $1 \leq j \leq n$，当 $\mathfrak{Im}(z_j) > 0$时，$f(z_1, \ldots, z_n) \neq 0$。令 π为定义在 $\{0,1\}^n$上的概率测度。对于 $(X_1, \ldots X_N)$，若其生成多项式被称为强 Rayleigh

$$(z_1, \ldots, z_n) \longmapsto \mathbb{E}_\pi \left[\prod_{i=1}^n z_i^{X_i} \right] \tag{3.6}$$

是实稳定的。强 Rayleigh 性质由 Borcea、Br¨和´en 与 Liggett 提出，见 [8]。回顾一下 $K \in [N-1]$ 洗牌过程在前ξ_t^K张$_{t\geq 0}$ 纸牌上的投影（ S_k ），其定义见第 K节2.2。下述引理可见 [8] 中的命题 5.1。

Lemma 3.5（ [8]中的命题 5.1）。设 $K \in [N-1]$。设 ν_t 表示 S_2 洗牌过程在前 K 张纸牌上的投影所对应的分布。若 ν_0 是强 Rayleigh 的，则对所有 ν_t， $t > 0$的分布也具有强 Rayleigh 性质。

我们得到关于 S_k 洗牌过程的以下一个简单推论。

Corollary 3.6。设 K， $k \in [N-1]$。设 ν_t 表示 S_k洗牌过程在前 K 张纸牌上的投影所对应的分布。若 ν_0 是强 Rayleigh 的，则对所有 ν_t， $t > 0$的分布也具有强 Rayleigh 性质。对于 S_k 带边界和删失的洗牌过程，同样成立。

证明。对于任意 $x \in [N-i]$和 $i \geq 1$，对区间 $[x, x+i]$ 进行一次单独的 S_{i+1} 更新保持强 Rayleigh 性质，这一事实是 [9]中定理1.2的推论。利用 Trotter乘积公式——[19] 中的定理3.44——我们得到关于 S_k 洗牌的所需结论，因为带边界的洗牌和删失的生成元可以写成在删失方案保持不变的时间区间内的 S_i 洗牌操作的生成元之和。□

接下来，如果对于所有 $S \subset [n]$，我们都有，则称取值于 $\{0,1\}$ 的一组随机变量 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 是负相依的

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i\in S} X_i\right] \leq \prod_{i\in S} \mathbb{E}[X_i]. \tag{3.7}$$

在 [8] 其中证明了强Rayleigh蕴含负相关，我们将使用负相关的以下直接推论，并且不加证明地陈述它。

COROLLARY 3.7. 令 $c_i \geq 0$ 且令 $Z_n := \sum_{i=1}^n c_i X_i$ 是负相关随机变量之和 $\{X_1, \dots X_n\}$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$。则有

$$\operatorname{Var}[Z_n] \leq \sum_{i=1}^n c_i^2 \operatorname{Var}[X_i].$$

4. LOWER BOUNDS ON THE MIXING TIME OF THE S_k SHUFFLE

4.1.近似二阶矩方法。对于 S_2 洗牌过程，使用 Wilson引理可以得到精确的下界，该引理最初在 [28], 中提出，而其技术的近似版本见于 [14] 和 [23]。这里我们转而依赖二阶矩方法的一个近似版本，该方法最初由 Diaconis和 Shashahani在 [11]中提出。为了陈述这一近似二阶矩方法，考虑一个连续时间马尔可夫链 $(X_t)_{t\geq 0}$，其在有限状态空间 S上的生成元为 $\mathcal{A}$。众所周知，对于任意函数 $f: S \to \mathbb{R}$，过程 $(M_t)_{t\geq 0}$ 具有

$$M_t := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (\mathcal{A}f)(X_s)\,\mathrm{d}s \quad \text{for all } t \geq 0 \tag{4.1}$$

是一个鞅。我们得到关于 $(X_t)_{t\geq 0}$ 的混合时间的以下结果。

LEMMA 4.1. 令 $\Psi: S \to \mathbb{R}$ 满足以下条件：存在某个 $\lambda \geq c > 0$，且 $R > 0$ 有

$$|(-\mathcal{A}\Psi)(y) - \lambda\Psi(y)| \leq c \text{ 对所有 } y \in S, \quad \textit{and} \quad \operatorname{Var}[\Psi(X_t)] \leq R \text{ 对所有 } t \geq 0. \tag{4.2}$$

那么，对所有 $\varepsilon \in (0,1)$，$(X_t)_{t\geq 0}$ 的混合时间 t_{mix} 满足

$$t_{\mathrm{mix}}(1-\varepsilon) \geq \frac{1}{\lambda}\log\left(\|\Psi\|_\infty\right) - \frac{1}{2\lambda}\log\left(\frac{4\max(2R,c)}{\varepsilon}\right). \tag{4.3}$$

证明。令 $X_0 = \eta$ 几乎必然成立，且存在某个 $\eta \in S$ 满足 $|\Psi(\eta)| = \|\Psi\|_\infty$。令 μ 表示 $(X_t)_{t\geq 0}$的平稳分布，且 $X_\infty \sim \mu$。由 (4.2) 以及鞅 $(M_t)_{t\geq 0}$，结合$f := \mathbb{E}[\Psi(X_t)]$ 对所有 $t \geq 0$，可得

$$f'(t) = \mathbb{E}[(\mathcal{A}\Psi)(X_t)] \in [-\lambda f(t) - c, -\lambda f(t) + c] \text{ for all } t \geq 0.$$

应用 Gronwall 引理可得

$$f(t) \leq f(0)e^{-\lambda t} + \int_0^t ce^{-\lambda(t-s)}\mathrm{d}s \leq f(0)e^{-\lambda t} + \frac{c}{\lambda} \text{ for all } t \geq 0,$$

由此可知

$$\left|f(t) - e^{-\lambda t}f(0)\right| \leq \frac{c}{\lambda} \tag{4.4}$$

对所有 $t \geq 0$均成立，这是将 Gronwall 引理应用于 $-f$所得。令 t 等于 (4.3) 的右端。作为对 Ψ的期望的下界，我们有

$$\mathbb{E}[\Psi(X_t)] \geq e^{-\lambda t}\Psi(X_0) - \frac{c}{\lambda} = e^{-\lambda t}\|\Psi\|_\infty - \frac{c}{\lambda} \geq \frac{1}{2}e^{-\lambda t}\|\Psi\|_\infty,$$

其中 最后一个不等式源于我们要求 $\lambda \geq c > 0$，以及我们的选择 t.

代入 $t \to \infty$ 到（4.4）中，可得 $|\mathbb{E}[\Psi（X_\infty）]| \le c/\lambda$，利用 $\mathrm{Var}[\Psi（X_\infty）] \le R$。为了界定全变差距离，令 P_t^η 表示从 X_t 出发的 η的分布律，则有

$$\begin{aligned}\|P_t^\eta - \mu\|_{\mathrm{TV}} &\ge \mathbb{P}\left(\Psi(X_t) \ge \frac{1}{2}\mathbb{E}[\Psi(X_t)]\right) - \mathbb{P}\left(\Psi(X_\infty) \ge \frac{1}{2}\mathbb{E}[\Psi(X_t)]\right) \\ &\ge 1 - 4\frac{\mathrm{Var}(\Psi(X_t))}{\mathbb{E}[\Psi(X_t)]^2} - 4\frac{\mathrm{Var}(\Psi(X_\infty)) + \mathbb{E}[\Psi(X_\infty)]^2}{\mathbb{E}[\Psi(X_t)]^2}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

这里最后一行由切比雪夫不等式得出。由马尔可夫不等式

$$\mathbb{P}\left(\Psi(X_\infty) \ge \frac{1}{2}\mathbb{E}[\Psi(X_t)]\right) \le \mathbb{P}\left(\Psi(X_\infty)^2 \ge \frac{1}{4}\mathbb{E}[\Psi(X_t)]^2\right) \le 4\frac{\mathbb{E}\left[\Psi(X_\infty)^2\right]}{\mathbb{E}[\Psi(X_t)]^2}.$$

代入 t 由（4.5）可得所需结果。 □

4.2. 广义二阶矩方法给出的下界。 下面我们证明 S_k 在有边界和无边界情况下洗牌过程的混合时间下界，这给出了定理 1.1 和 1.2中的混合时间下界。回顾一下，

$$\Phi_N^{(j)}(\sigma) := \sum_{x=1}^{N-1} h'_\sigma(x)\psi_j(x) \quad \text{where} \quad \psi_j(x) := \sin\left(\frac{xj\pi}{N}\right)$$

并且，回忆第 h'_t 节$_{t\ge 0}$ 中的高度函数（2），我们设定

$$\Phi_{N,t}^{(j)} := \sum_{x=1}^{N-1} h'_t(x)\psi_j(x) \tag{4.6}$$

对所有 $t \ge 0$。下文中，我们使用 $x \sim y$ 表示 x 的阶为 y。

Lemma 4.2. 令 $\mathcal{L}$ 和 $\lambda_{N,\ k}$ 定义如 (2.4) 和 (2.10)，并令 $k = o(N^{3/4})$。则对所有 $\sigma \in S_N$

$$|(-\mathcal{L}\Phi_N^{(1)})(\sigma) - \lambda_{N,k}^{(1)}\Phi_N^{(1)}(\sigma)| \le c \tag{4.7}$$

对 $c \sim k^6\pi^3 N^{-3}$、 $R \sim N^3$和 $\|\Phi_N\|_\infty \sim N^2$成立。

证明。 由引理 2.1 和引理 4.1，可得 $c \sim k^6\pi^3 N^{-3}$。因此，只需对近似特征函数 $\Phi_{N\,t}^{(1)}$ 的方差进行界定，。注意，从恒等置换开始的初始分布是强 Rayleigh 的，因此由推论 3.6 可知，带边界的 S_k 洗牌过程在前 $N/2$ 张纸牌上的投影分布也是强 Rayleigh 的。令 $(X_1^t, \dots X_N^t)$ 为带边界的 S_k 洗牌过程的投影，其中 X_i^t 是示性函数，表示位置 i 上的纸牌标签不大于 $N/2$ 时刻 t。于是由推论 3.7

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\Phi_{N,t}^{(1)}) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{x=1}^{N-1} h'_t(x)\psi_j(x)\right) = \mathrm{Var}\left(\sum_{m=1}^{N-1}\left(\sum_{i=m+1}^{N}\psi_j(i)\right)X_m^t\right) \\ &\le \sum_{m=1}^{N-1}\left(\sum_{i=m+1}^{N}\psi_j(i)\right)^2 \mathrm{Var}(X_m^t) \le \sum_{m=1}^{N-1} m^2\,\mathrm{Var}(X_m^t) \le N^3\end{aligned} \tag{4.8}$$

因此，我们可以得出结论。 □

定理中下界的证明 *1.1* 和*1.2*。 结合引理 2.1 和 4.2 即可得到定理中 S_k 带边界的洗牌在定-理 1.2 中的混合时间的所需下界。要看出相应的下界对于 S_k 不带边界的洗牌过程同样成立，注意函数

$$\sigma \mapsto \sum_{x=1}^{N-1} h_\sigma(x)\psi_1(x) \tag{4.9}$$

关于偏序是递增的 $\succeq$ 定义于（2.8）。因此，引理 3.2 和注记 3.4，将 S_k 洗牌过程视为一个 S_k 带边界和删失的洗牌过程

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x=1}^{N-1} h_t(x)\psi_1(x)\right] \geq \mathbb{E}\left[\sum_{x=1}^{N-1} h'_t(x)\psi_1(x)\right] \tag{4.10}$$

对所有 $t \geq 0$。无边界洗牌过程混合时间的下界由切比雪夫不等式得出，使用推论 3.6 以及与引理 4.2 中相同的论证来界定函数 $\Phi_N^{(1)}$ 的t 方差，针对 S_k 带边界的洗牌过程。 □

注记 4.3。 注意，我们实际上证明了定理 1.1 和 1.2 中混合时间的下界对所有 $k = o(N^{3/4})$ 仍然有效。

5. Upper bounds on the mixing time

5.1. 洗牌过程的一般耦合。 S_k 洗牌过程。 在本节中，我们给出 S_k 洗牌过程混合时间的上界。与（2.3）中边界条件的特定选择不同，下面我们允许参数（$\delta_i^{(k)}$）有更一般的选择。

我们首先为 S_k 带边界的洗牌定义一个耦合。设$(\zeta_t)_{t\geq 0}$ 和$(\zeta'_t)_{t\geq 0}$分别表示从 ζ、$\zeta' \in \mathcal{S}_N$开始的 S_k 洗牌过程。对于这两个 S_k 洗牌过程，我们将使用相同的泊松时钟，即当我们在某个时间 $s \geq 0$对$(\zeta_t)_{t\geq 0}$ 中的某个 x 和 j更新区间 $[x, x+j]$ 时，我们在过程$(\zeta'_t)_{t\geq 0}$中做同样的事情。假设与区间 $[x, x+j]$ 相关联的时钟在时间 s响起。设$I_{x,\,s} \subseteq [N]$ 为两个构型在时间 s上一致的标签集合。对于这些$|I_{x,\,t}|$ 纸牌，从区间 $[x, x+j]$ 中的 $j+1$个位置中均匀随机选择$|I_{x,\,t}|$ 个位置，并将 ζ_s 和ζ'_s 中标签属于$I_{x,\,t}$ 的纸牌分配到这些位置。在剩余的$(j+1) - |I_{x,\,t}|$ 个位置上，我们独立地均匀随机分配两个构型 ζ_s 和 ζ'_s 中的纸牌。

我们将其称为 S_k 洗牌过程的典范耦合，并记$\mathbf{P}$ 为在该耦合下$(\zeta_t)_{t\geq 0}$ 与 $(\zeta'_t)_{t\geq 0}$ 的联合分布。令$Z_{i,t}$ 和 $Z'_{i,t}$ 分别表示在构型 ζ_t 和 ζ'_t 中标签为 i 的纸牌的位置。此外，令 τ_i 表示标签为 i 的纸牌在两种洗牌过程中位于相同位置的首次时间，并注意到标签为 i 的纸牌对所有 $s \geq \tau_i$都占据相同的位置。下一个命题给出了有边界和无边界的 S_k 洗牌过程的混合时间上界。

Proposition 5.1。 设 $\delta_i^{(k)} = \delta_{N-i}^{(k)} \in [0,1]$ 对每个 $i \in [k]$，并假设$k = o(N^{\frac{2}{3}})$。那么存在一个绝对常数 $C > 0$ 使得对所有 σ，$\sigma' \in \mathcal{S}_N$，以及

对于所有 $t \geq CN^2k^{-3}\log(N)$，我们有，对于所有 N充分大的

$$\|\mathbf{P}(\zeta'_t \in \cdot \mid \zeta'_0 = \sigma') - \mathbf{P}(\zeta_t \in \cdot \mid \zeta_0 = \sigma)\|_{\mathrm{TV}} \leq N^{-1}. \tag{5.1}$$

对于 S_k 具有边界速率的洗牌过程($\delta_i^{(k)}$)，由(2.3)给出的总变差距离上界(5.1)对于所有 $k = o(N)$以及 $t \geq CN^2k^{-3}\log(N)$均继续成立。

命题 5.1 的证明将分为两个主要部分。首先，我们研究一张扑克牌离开位置 $[4k]$和 $\{N-4k,\dots,N\}$（分别）所需的时间，这些位置靠近边界。第二步，我们建立标签为 τ_i 的纸牌的合并时间 i的尾部估计，并通过并集界得到所需的混合时间上界。

5.2. 离开边界时间的估计。下面考虑标签为 1 的纸牌的位置 $(Z_{1,\,t})_{t\geq 0}$ 和 $(Z'_{1,\,t})_{t\geq 0}$。我们分别用 P_x 和 P'_x 表示从 $x \in [N]$ 位置开始，在 ζ_0 和 ζ'_0 中移动时，标签为 1 的纸牌的分布。对于所有 $y \in [N]$，令 $\tilde{\tau}_{>y}$ 和 $\tilde{\tau}_{<y}$ 定义为以下形式。

$$\tilde{\tau}_{>y} := \inf\{t \geq 0 \colon Z_{1,t} > y\} \quad \text{and} \quad \tilde{\tau}_{<y} := \inf\{t \geq 0 \colon Z_{1,t} < y\}, \tag{5.2}$$

也就是说，分别是标签为1的扑克牌在$(\zeta_t)_{t\geq 0}$ 首次到达大于 y的位置、首次到达小于 y 的位置的时间。对于接下来的三个引理，我们假设 $k = o(N)$。

Lemma 5.2. 设 $\delta_i^{(k)} = \delta_{N-i}^{(k)} \in [0,1]$ 对每个 $i \in [k]$。则存在绝对常数c，$C > 0$使得对所有 $x \in [N]$，我们有对于所有 N充分大的

$$P_x\left(\tilde{\tau}_{>4k} > C\right) \leq c. \tag{5.3}$$

证明。使用典范耦合，不失一般性，我们可以假设 $x = 1$。由于区间 $[k]$ 以速率1 进行更新，且纸牌被分配到均匀随机选取的位置，我们看到 $P_1(\tilde{\tau}_{>k/2} > 2) \leq \frac{1}{4}$。接下来，由于根据我们的假设，所有边界速率均被 1所界定，注意到在时间 s_1之后第一次涉及纸牌 1 的更新由某个区间 $[j, j+k-1]$发起（其中某个 $j > k/4$）这一事件，对于 k一致地具有正概率。因此，我们得到，对于某些绝对常数 c_1、$c_2 > 0$

$$P_1(\tilde{\tau}_{>k/2} > c_1 \,|s_1 \leq 2) \leq c_2. \tag{5.4}$$

迭代此论证对于 $\tilde{\tau}_{>mk/4}$ 与 $m \in [2,16]$，我们得出结论。 □

我们对 S_k 洗牌过程及边界速率（$\delta_i^{(k)}$）来自（2.3）。

Lemma 5.3. 令 $(\delta_i^{(k)})$ 定义如 (2.3)所示。则存在绝对常数 $c, C > 0$使得对所有 $x \in [N]$，我们都有对所有 N 足够大的

$$P_x\left(\tilde{\tau}_{>4k} > \frac{C}{k}\right) \leq c. \tag{5.5}$$

证明。使用典范耦合，我们再次可以不失一般性地假设$x = 1$。注意，在时间 $\tilde{\tau}_{>k/4}$ 之前，对于区间 $[j]$ 的任意一次更新（其中 $j \geq k/2$ 在时间 $\tilde{\tau}_{>k/4}$ 之前），扑克牌 1 以至少 $1\,4$ 的概率被移动到某个位置 $> k/4$。由于对所有 $i \in [k]$都有 $\delta_i^{(k)} \geq 1$，且每个区间 $[j]$ 的更新速率至少为 1，

$$P_1\left(\tilde{\tau}_{>k/4} > \frac{4}{k}\right) \leq \frac{1}{8}. \tag{5.6}$$

由于对所有 $i \geq \frac{k}{4}$ 都有 $\delta_i^{(k)} \leq 8$，注意到在时间 $\tilde{\tau}_{>k/4}$ 之后，首次涉及扑克牌 1的更新由某个 $j > k/8$ 的区间 $[j, j+k-1]$ 发起这一事件的概率始终为正，与 k 无关。因此，我们得到对于某些绝对常数 c_1、$c_2 > 0$

$$P_1\left(\tilde{\tau}_{>k/2} \geq \frac{c_1}{k} \,\middle|\, \tilde{\tau}_{>k/4} \leq \frac{4}{k}\right) \geq c_2\,. \tag{5.7}$$

对 $\tilde{\tau}_{>mk/4}$ 且 $m \in [16]$ 反复应用这一论证，我们得出结论。 □

我们还需要对边界速率（$\delta_i^{(k)}$）属于 $[0,1]$时， S_k 带边界的洗牌过程的期望返回时间给出一个最后的初步估计。

LEMMA 5.4. 令 $\delta_i^{(k)} = \delta_{N-i}^{(k)} \in [0,1]$ 对每个 $i \in [k]$。则存在一个绝对常数$C > 0$ 使得对所有 $x \in [k, 2k]$，以及所有 N 足够大的

$$E_x[\tilde{\tau}_{>4k}] \leq \frac{C}{\sqrt{k}}\,, \tag{5.8}$$

其中 E_x 表示相对于 P_x的期望。

证明。 根据引理 5.2，我们得到存在某个 $C_1 > 0$ 使得对所有 $x \in [4k]$，都有 $E_x[\tilde{\tau}_{>4k}] \leq C_1$。因此，利用典范耦合可知 $E_x[\tilde{\tau}_{>4k}]$ 关于 x是递减的，并沿着 $\tilde{\tau}_{>mk/4}$ 对 $m \in [16]$ 按照（5.7）进行迭代，只需证明

$$P_x\left(\tilde{\tau}_{<\sqrt{k}} < \tilde{\tau}_{>4k}\right) \leq \frac{c_1}{\sqrt{k}} \quad \text{and} \quad E_{\sqrt{k}}\left[\tilde{\tau}_{>k/4} \leq \frac{c_2}{\sqrt{k}} \,\middle|\, Z_{1,t} \geq \sqrt{k} \text{ for all } t \in [0, \tilde{\tau}_{>k/4}]\right] \leq \frac{c_3}{\sqrt{k}}$$

对所有 $x \in [k, 2k]$ 以及常数 c_1、c_2、$c_3 > 0$。第二个不等式直接由以下事实得出：在事件 $\{Z_{1,t} \geq \sqrt{k}$ 对所有 $t \geq 0\}$ 中，以正概率， $\tilde{\tau}_{>k/4} \leq c_4 k^{-1/2}$ 对某个常数 $c_4 > 0$ 成立；只需考虑区间 $[j, j+k-1]$ 被更新的首次时间即可。为证明第一个不等式，注意对于每次包含扑克牌 1 的区间更新，无论 k 以及扑克牌 1 的位置 $x \in [\sqrt{k}, k]$ 如何，都存在一个统一的正概率，使得扑克牌 1 被移动到某个位置 $> k/4$；而将扑克牌 1 移动到前 $\sqrt{k}$ 个位置的概率至多为 $c_5 k^{-1/2}$，其中 $c_5 > 0$ 是某个绝对常数。□

5.3. 混合时间上界的证明。我们首先证明，扑克牌 1 超过 $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ 所需的时间以正概率至多为 $N^2 k^{-3}$ 阶。

LEMMA 5.5. 假设 $\delta_i^{(k)} = \delta_{N-i}^{(k)} \in [0,1]$ 对每个 $i \in [k]$，且 $k = o(N^{\frac{2}{3}})$。那么对所有 $x \in [N]$，存在正常数 $c_1, c_2 > 0$，并且当 N充分大时，

$$P_x\left(\tilde{\tau}_{>\lfloor N/2 \rfloor} > c_1 N^2 k^{-3}\right) \leq c_2\,. \tag{5.9}$$

对于 S_k 速率为 $(\delta_i^{(k)})$ 的 (2.3) 中的 (5.9) 洗牌过程，结论对所有 $k = o(N)$仍然成立。

证明。以下我们为过程 $(Z_{1,t})_{t \geq 0}$ 定义一个停时 τ_{hit}：

$$\tau_{\text{hit}} := \min\left(\tilde{\tau}_{<2k}, \tilde{\tau}_{>N-2k}\right)\,. \tag{5.10}$$

注意，$(Z_{1,t})_{t \in [0, \tau_{\text{hit}}]}$ 是一个停时鞅，并根据可选停时定理

$$P_{4k}\left(\tilde{\tau}_{<2k} < \tilde{\tau}_{>\lfloor N/2 \rfloor}\right) = \frac{2k}{\lfloor N/2 \rfloor - 2k}\,. \tag{5.11}$$

设 X 为时间量 $(Z_{1,t})_{t\geq 0}$ 花费直到时间 $\tilde{\tau}_{>4k}$ 在格点 $[2k]$. 由引理 5.3和引理 5.4, 我们得到对于某个常数 $c>0$, 以及所有 $x\in[4k]$

$$E_x[X]\leq\begin{cases}ck^{-1/2} & \text{if } \delta_i^{(k)}\in[0,1] \text{ for all } i\in[k]\\ ck^{-1} & \text{for rates } (\delta_i^{(k)}) \text{ from } (2.3)\,.\end{cases} \tag{5.12}$$

对于停时鞅 $(Z_{1,t})_{t\in[0,\tau_{\text{hit}}]}$，注意其二次变差 $(\langle Z_{1,\cdot}\rangle_t)_{t\in[0,\tau_{\text{hit}}]}$满足对于某个常数 $c'>0$ 以及所有 $t\geq 0$

$$\langle Z_{1,\cdot}\rangle_t\geq c'k^3t \tag{5.13}$$

由于扑克牌 1 以速率 k 按照方差阶为 k^2的增量移动。由鞅（M_t）$_{t\in[0,\tau_{\text{hit}}]}$ 的可选停时定理，其中 $M_t=$ （$Z_{1,\ t}$）$^2-\langle Z_{1,\ \cdot}\rangle_t$我们看到 $E_{4k}[\tau_{\text{hit}}]$ 的阶为 N^2k^{-3}。结合（5.11）和（5.12），得证。□

命题的证明 *5.1*。 下面，我们证明存在 c_1， $c_2>0$ 使得

$$\mathbf{P}(\tau_1>c_1N^2k^{-3})\leq c_2\,. \tag{5.14}$$

对于任意一对初始构型 ζ_0， ζ_0'。由于典范耦合保持纸牌的合并，因此，对所有标签位于 $[N]$中的纸牌迭代（5.14），再应用并集界，即可得到混合时间的上界。根据引理5.5，对于某个 c_3， $c_4>0$

$$\mathbf{P}(\tilde{\tau}_{>\lfloor N/2\rfloor}>c_3N^2k^{-3})\geq c_4\,. \tag{5.15}$$

由于 $(Z_{1,t})_{t\in[0,\tilde{\tau}_{<N/4}\wedge\tilde{\tau}_{>3N/4}]}$ 是一个增量由 k 界定的停时鞅,

$$\mathbf{P}\left(Z_{1,t}\in\left[\frac{N}{4},\frac{3N}{4}\right]\ \text{for all } t\in\left[\tilde{\tau}_{>\lfloor N/2\rfloor},\tilde{\tau}_{>\lfloor N/2\rfloor}+CN^2k^{-3}\right]\right)>c_5 \tag{5.16}$$

对所有 $C>0$ 以及某个 $c_5=c_5(C)>0$。以（5.16）中的事件为条件，注意到根据引理 5.5，我们可以选择 $C>0$，使得以正概率，存在某个$t_*\in[\tilde{\tau}_{>\lfloor N/2\rfloor},\tilde{\tau}_{>\lfloor N/2\rfloor}+CN^2k^{-3}]$，使得$N/5<Z'_{1、\ t_*}<4N/5$。利用耦合 P下的强马尔可夫性质，我们看到，$(Z_{1、\ t})_{t\geq t_*}$ 和 $(Z'_{1、\ t})_{t\geq t_*}$ 在到达 $2k$ 或 $N-2k$之前以正概率合并。这就得到（5.14），从而完成证明。□

6. Cutoff for the S_k shuffle with boundaries

6.1. 近似傅里叶分析。 回顾第 2 节的高度函数（h_{ζ_t}）$_{t\geq 0}$带边界的洗牌（ζ_t）$_{t\geq 0}$ 并且稍微滥用一下记号，设

$$h'_t(x,y):=h_{\zeta_t}(x,y)\,. \tag{6.1}$$

在[17], 一个关键观察是，洗牌过程的期望高度函数 $(x,y,t)\ \mapsto\ \mathbb{E}[h'_t(x,y)]$ 是一个解 f: $\{0,\dots,N\}^2\times\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ 离散热方程

$$\begin{cases}\partial_t f=\Delta_x f\\ f(0,y,t)=f(N,y,t)=0\\ f(x,y,0)=\mathbb{E}[h'_0(x,y)]\end{cases} \tag{6.2}$$

其中 Δ_x 表示离散拉普拉斯算子

$$\Delta_x(f)(x):=\frac{1}{2}f(x-1,y,t)+\frac{1}{2}f(x+1,y,t)-f(x)\,. \tag{6.3}$$

这使得可以对 $\mathbb{E}[h_t'(x,\ y)]$ 进行精确估计，这些估计适用于 S_2 洗牌过程；参见 [17]中的引理 **4.1**。接下来的引理为 S_k 带边界的洗牌，针对 $k \geq 3$ 提供了类似的结果。

LEMMA 6.1. 令 $k \geq 3$. 存在一个常数 $C > 0$ 使得对于带边界的洗牌的任意初始构型$\sigma \in \mathcal{S}_N$，对于所有 S_k，以及所有 $t \geq 0$，和 $y \in [N]$,

$$\max_{x\in\{0,\dots,N\}} \mathbb{E}[h_t'(x,y)] \leq 8\min(y, N-y)e^{-t\cdot\lambda_{1,N,k}} + Ck^3. \tag{6.4}$$

证明。通过标准的傅里叶分解，我们得到

$$\mathbb{E}[h_t'(x,y)] = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \sin\left(\frac{i\pi x}{N}\right) \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}\left[h_t'(j,y)\sin\left(\frac{ij\pi}{N}\right)\right]. \tag{6.5}$$

回顾 $\Phi_N^{(j)}$，t 由（4.6）得到，以及近似特征值 $\lambda_{j,\ N,\ k}$ 由（2.10）得到。根据引理2.1以及引理 4.1中推导（4.4）时所用的相同论证，我们可知，对所有 $y \in [N-1]$ 和 $t \geq 0$

$$\left|\mathbb{E}\left[\Phi_{N,t}^{(i)}\right] - e^{-t\cdot\lambda_{i,N,k}}\Phi_{N,0}^{(i)}(y)\right| \leq \frac{c_i}{\lambda_{i,N,k}}, \tag{6.6}$$

其中我们 集合 $c_i = Ci^3k^6N^{-3}$ 并取 C 自引理 2.1。结合（6.5），我们得到

$$|\mathbb{E}[h_t'(x,y)]| \leq \left|\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\sin\left(\frac{i\pi x}{N}\right)e^{-t\cdot\lambda_{i,N,k}}\Phi_{N,0}^{(i)}(y)\right| + \left|\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\sin\left(\frac{j\pi x}{N}\right)\right|\frac{c_j}{\lambda_{j,N,k}}\right|. \tag{6.7}$$

注意到（6.7）中的第二项从上方有 $2Ck^3$ 界。对于第一项，注意到对于所有 $y \in [N]$ 和 $i \in [N-1]$，$|\Phi_N^{(i)}(y)| \leq \min(y, N-y)N$。此外，对于所有 $j \geq 1$，$\lambda_{j,\ N,\ k} \geq j \cdot \lambda_{1,\ N,\ k}$ 成立。利用对于所有 $z \in \mathbb{R}$，$|\sin(z)| < |z|$ 这一事实，我们得到

$$\left|\mathbb{E}[h_t'(x,y)]\right| \leq 2Ck^3 + 8y\sum_{j=1}^{N-1} e^{-jt\lambda_{1,N,k}} \leq 2Ck^3 + \frac{8ye^{-t\lambda_{1,N,k}}}{1-e^{-t\lambda_{1,N,k}}}. \tag{6.8}$$

当 $e^{-t\lambda_{1\text{时},\ N,\ k}} \leq \frac{1}{2}$，由此可得（6.4）。对于 $e^{-t\lambda_{1,\ N,\ k}} > \frac{1}{2}$，（6.4）直接由以下事实得出：$\max_{x\in\{0,\dots,N\}} h_\sigma$（$x$，$y$）$\leq \min$（$y$，$N-y$）对所有 $y \in [N]$ 和 $\sigma \in \mathcal{S}_N$均成立。 □

6.2. 定理 **1.2** 中上界的证明。 由于我们在很大程度上遵循 Lacoin 在 [17], 中的论证，因此我们将给出必要的调整，而不详细展开全部论证。首先介绍主要对象，并概述证明的主要策略。固定某个 $K \in \mathbb{N}$ 稍后选取，并回顾置换 $h_\sigma(x,y)$ 的高度函数表示，见式（2.7）。此外，我们回顾 $\sigma \in \mathcal{S}_N$中的以下定义 [17]。

令 $x_i :=\lceil iN/K\rceil$ 对所有 $i \geq 0$。对于置换 $\sigma \in \mathcal{S}_N$，我们定义以下两个投影 $\widehat{\sigma}$ 和 $\bar{\sigma}$。半骨架投影 $\widehat{\sigma} = (\widehat{\sigma}_{x,\ i})_{x\in[N],\ i\in[K]}$ 和骨架投影 $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}(m,i))_{i,\ m\in[K]}$ 定义为

$$\widehat{\sigma}(x,i) = h_\sigma(x,x_i) \quad \text{and} \quad \bar{\sigma}(m,i) = h_\sigma(x_m,x_i) \tag{6.9}$$

$\widehat{\ }$ $\bar{\ }$分别。我们用 $\mathcal{S}_N$ 和 $\mathcal{S}_N$ 表示 $\mathcal{S}_N$ 在这些投影下的相应像空间。给定 $\mathcal{S}_N$上的概率测度 ν，我们分别用 $\widehat{\nu}$和 $\bar{\nu}$表示

$\widehat{\ }$ $\bar{\ }$ ν在 $\mathcal{S}_N$上的像测度，分别 $\mathcal{S}_N$，在半骨架和骨架$\widehat{\ }$ $\bar{\ }$投影下，即我们对所有 $\widehat{\sigma} \in \mathcal{S}_N$ 和 $\bar{\sigma} \in \mathcal{S}_N$设定

$$\widehat{\nu}(\widehat{\sigma}) := \nu(\{\sigma \in \mathcal{S}_N : \sigma \mapsto \widehat{\sigma}\}) \quad \text{and} \quad \bar{\nu}(\bar{\sigma}) := \nu(\{\sigma \in \mathcal{S}_N : \sigma \mapsto \bar{\sigma}\}) . \tag{6.10}$$

$\widetilde{\ }$令 $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$，并令 $\mathcal{S}_N$ 为 $\mathcal{S}_N$ 的最大子群，对于所有 $i \in [K]$, $\widetilde{\ }$在置换标签介于 $x_{i-1}+1$ 和 x_i之间的纸牌时保持不变。注意， $\mathcal{S}_N$ 同构于积空间 $\bigotimes_{i=1}^{K} \mathcal{S}_{\Delta x_i}$。对于定义在 $\mathcal{S}_N$上的概率测度 ν，我们通过对所有 $\sigma \in \mathcal{S}_N$设定测度 $\widetilde{\nu}$ 在 $\mathcal{S}_N$ 上为

$$\widetilde{\nu}(\sigma) := \frac{1}{\Pi_{i=1}^{K}(\Delta x_i)} \sum_{\widetilde{\sigma} \in \widetilde{\mathcal{S}}_N} \nu(\widetilde{\sigma} \circ \sigma) . \tag{6.11}$$

换言之，为了获得测度 $\widetilde{\nu}$（来自 ν），我们应用一个均匀选取的置换，该置换仅对标签为 $x_{i-1}+1$ 至 x_i 的所有 $i \in [K]$ 张纸牌相互进行洗牌过程。

为了证明定理中混合时间的上界 1.2，令 $\delta > 0$ 并设

$$t_1 = \frac{\delta N^2}{3k^3} \log(N) \qquad t_2 = \left(\frac{2\delta}{3} + \frac{4}{\pi^2}\right) \frac{N^2}{k^3} \log(N) \qquad t_3 = \left(\delta + \frac{4}{\pi^2}\right) \frac{N^2}{k^3} \log(N) .$$

我们考虑删失方案 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_t)_{t \geq 0}$，该方案用于由以下内容给出的 S_k 带边界的洗牌过程

$$\mathcal{C}_t := \begin{cases} \{\{x_i, x_i+1\} : i \in [K]\} & \text{if } t \in [0, t_1) \cup [t_2, t_3) \\ \emptyset & \text{if } t \notin [0, t_1) \cup [t_2, t_3) . \end{cases} \tag{6.12}$$

下文中，设 $(\nu_t)_{t \geq 0}$ 表示从恒等置换出发、采用删失方案 S_k 的带边界洗牌过程的分布，该删失方案来自 (6.12) $\mathcal{C}$；并设 $\mu = \mu_N$ 表示 $\mathcal{S}_N$上的均匀分布。证明分两步进行。首先，我们证明，到时间t_1时，对所有 $i \in [K]$, 带边界洗牌过程在删失方案 S_k 下，标签从 $x_{i-1}+1$ 到 x_i 的纸牌彼此之间已充分混合。其次，我们证明到时间 t_3 时，半骨架已充分混合。为此，关键在于验证带边界洗牌过程在删失方案 S_k 下的骨架到时间 $\mathcal{C}$ 时已充分混合。以下两个命题对这一策略进行了概述并给出了精确定义。 t_2

Proposition 6.2（ [17]命题 5.1 中的命题 5.1）。对所有 $\varepsilon > 0$, 存在某个 $N_0 = N_0(\varepsilon)$，使得对所有 $N \geq N_0$ 以及 $t \geq t_1$

$$\|\widetilde{\nu}_t - \nu_t\|_{\mathrm{TV}} \leq \varepsilon/3 . \tag{6.13}$$

命题 6.2 的证明推迟至第 6.3节。

Proposition 6.3 (命题 5.3 中 [17]). 对于所有 $\varepsilon > 0$ 和 $k = o(N^{1/6})$，存在某个 $N_1 = N_1(\varepsilon)$ 使得对于所有 $N \geq N_1$ 和 $t \geq t_3$

$$\|\widehat{\nu}_t - \widehat{\mu}\|_{\mathrm{TV}} \leq 2\varepsilon/3 . \tag{6.14}$$

命题的证明 6.3 推迟到第 6.4节。

定理中上界的证明*1.2*。 注意，由于 S_k 带边界的洗牌（ζ_t）$_{t \geq 0}$ 是传递马尔可夫链——参见 [18] 第2.6.2节——因此，只需界定从恒等置换开始时与平稳分布之间的距离。由于狄拉克

恒等置换上的测度相对于偏序是递增的 $\succeq$ 由（2.8），第一步使用删失不等式引理 3.2，第二步使用 [17] 中的引理 4.3，我们得到

$$\|\mathbb{P}(\zeta_{t_3} \in \cdot \,|\, \zeta_0 = \mathrm{id}) - \mu\|_{\mathrm{TV}} \le \|\nu_{t_3} - \mu\|_{\mathrm{TV}} \le \|\widehat{\nu}_{t_3} - \widehat{\mu}\|_{\mathrm{TV}} + \|\widetilde{\nu}_{t_3} - \nu_{t_3}\|_{\mathrm{TV}}\,. \tag{6.15}$$

由于 $\delta > 0$ 关于 t_3 是任意的，我们结合命题 6.2 和 6.3 得出结论。 □

6.3.命题6.2 的证明。在下文中，我们将仅描述为从[17] 中的命题5.1 的证明得到带边界的 S_k 洗牌过程的命题6.2所需的修改，并参阅 [17] 中的第5.3节，以了解相应 S_2 洗牌过程结果的详细证明。注意，由于我们从恒等置换上的狄拉克测度开始，测度 $\widetilde{\delta_{\mathrm{id}}}$ 可以被识别为 $\bigotimes_{i=1}^K \mathcal{S}_{\Delta x_i}$上的乘积测度 $\bigotimes_{i=1}^K \mu_{\Delta x_i}$，其中我们回顾式 (6.11)，并且 μ_i 表示 $\mathcal{S}_i$上的均匀分布。根据我们对删失方案 $\mathcal{C}$的选择，注意到对于 $t < t_1$，测度 ν_t 对应于在 $\bigotimes_{i=1}^K \mathcal{S}_{\Delta x_i}$ 上进行 K 次 S_k 洗牌过程的分布，其分布律为$(\nu_t^i)_{t\ge 0}$，并带有适当的边界参数 $(\delta_i^{(k)})$，满足命题 5.1 的假设，即对于所有满足 $j \in \{2, \dots, K-1\}$ 的 $\mathcal{S}_{\Delta x_j}$，我们都有 $\delta_i^{(k)} \in [0,1]$。利用第 5节中的典范耦合和命题 5.1，我们选择足够大的 $K = K(\delta)$，使得对于所有充分大的 N

$$\|\nu_t - \widetilde{\nu}_{t_1}\|_{\mathrm{TV}} \le \sum_{i=1}^K \|\nu_t^i - \mu_i\|_{\mathrm{TV}} \le \sum_{i=1}^K \|\nu_{t_1}^i - \mu_i\|_{\mathrm{TV}} \le \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{6.16}$$

6.4. 命题 **6.3** 的证明。 为了证明命题 6.3，我们先给出骨架投影 $\bar{\nu}_t$ 的一个上界。

Proposition 6.4（ [17]中的命题 5.2）。 对于所有 $\varepsilon > 0$ 和 $k = o(N^{1/6})$，存在某个 $N_2 = N_2(\varepsilon)$，使得对于所有 $N \ge N_2$ 和 $t \ge t_2$

$$\|\bar{\nu}_t - \bar{\mu}_t\|_{\mathrm{TV}} \le \varepsilon/3\,. \tag{6.17}$$

证明。 设 ν 是 $\mathcal{S}_N$上的一个概率测度，且关于偏序 $\succeq$递增。 [17] 中的引理 5.5 指出，若存在某个充分小的 $\kappa(\varepsilon,\ K)$，可以证明，那么对于某个 $\varepsilon > 0$，结论（6.17）成立

$$\mathbb{E}_\nu \left[\sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i}^{K-1} h_\sigma(x_i, x_j) \right] < \kappa\sqrt{N}\,, \tag{6.18}$$

这里 $\mathbb{E}_\nu$ 表示关于 ν的期望，并令 $\sigma \sim \nu$。取 $\nu = \nu_{t_2}$，注意到根据引理 3.2， ν_{t_2} 是递增的。由于 $k = o(N^{1/6})$，由引理 6.1 可知，从 ν_{t_1}开始进行带边界的 S_k 洗牌过程，对于任意 $\kappa > 0$ 以及所有充分大的 N

$$\mathbb{E}_\nu \left[\sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i}^{K-1} h_\sigma(x_i, x_j) \right] \le (K-1)^2 (2Ne^{-(t_2-t_1)\lambda_{N,k}} + ck^3)) \le \kappa\sqrt{N}\,, \tag{6.19}$$

从而得以得出结论。 □

接下来，只需由命题 6.4 推出命题 6.3。由于这与 [17], 中命题 5.3 的证明思路相同，我们仅指出所需的调整。令 $\sigma_t \sim \nu_t$ 为时刻 t洗牌过程的构型，并注意到根据我们对删失方案 $\mathcal{C}$的选择，骨架$\bar{\sigma}_{t_2}$ 在时间 $t \in [t_2, t_3]$ 内保持不变。以事件 $\{\sigma_{t_2} = \xi\}$ 为条件，其中某个 $\xi \in \mathcal{S}_N$，令 $\mu_{\bar{\xi}}$ 为集合$\bar{}$上具有骨架 ξ的排列的均匀分布。根据第一步中半骨架的定义，以及命题 5.1，再结合命题 6.2 中相同的推理，即在第二步中将 S_k 洗牌过程分解为 $i \in [K]$ 时的 K 个相互独立的 $S_{\Delta x_i}$ 洗牌过程，

$$\|\hat{\nu}_{t_3}(\cdot\,|\bar{\sigma}_{t_2} = \bar{\zeta}) - \hat{\mu}(\cdot\,|\bar{\sigma}_{t_2} = \bar{\zeta})\|_{\mathrm{TV}} \le \max_{\xi \in \mathcal{S}_N} \|\mathbb{P}(\sigma_{t_3} \in \cdot\,|\,\sigma_{t_2} = \xi) - \mu_{\bar{\xi}}\|_{\mathrm{TV}} \le \frac{\varepsilon}{3} \tag{6.20}$$

对于所有 $\zeta \in \mathcal{S}_N$ 和 N 足够大; 另见公式 (5.38) 在 [17]。由于我们有

$$2\|\hat{\nu}_{t_3} - \hat{\mu}\|_{\mathrm{TV}} \le 2\left(\|\bar{\nu}_t - \bar{\mu}_t\|_{\mathrm{TV}} + \sum_{\bar{\zeta} \in \bar{\mathcal{S}}_N} \bar{\nu}_{t_3}(\bar{\zeta})\|\hat{\nu}_{t_3}(\cdot\,|\bar{\sigma}_{t_2} = \bar{\zeta}) - \hat{\mu}(\cdot\,|\bar{\sigma}_{t_2} = \bar{\zeta})\|_{\mathrm{TV}}\right) \tag{6.21}$$

由 [17], 中的公式 (5.39)，我们结合命题 6.3 、命题 6.4 和（6.20）。

7. Comparison between the S_k shuffle with and without boundaries

在定理 1.1中，我们看到对于 $k = o(N^{2/3})$ ， S_k 洗牌过程呈现出预截止，即 ε-混合时间与 $N^2 k^{-3}\log(N)$ 之比的上下界分别为正的常数，这些常数不依赖于 $N \to \infty$，且 $\varepsilon \in (0,1)$。尽管当 S_k 时，带边界的洗牌也呈现出预截止，但 $k = o(N^{2/3})$ ，我们认为对于 $k = N^\delta$满足$\delta \in (\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$ 的情形， S_k洗牌过程与 S_k带边界的洗牌在本质上有所不同，这是由于对边界附近纸牌的处理方式不同。

Proposition 7.1. 对所有 $k = o(N^{3/4})$ 以及 $\varepsilon \in (0,1)$，混合时间 $t'_{\mathrm{mix}}(\varepsilon)$ 带边界的 S_k洗牌过程满足

$$\frac{6}{\pi^2} \le \liminf_{N\to\infty} \frac{k(k^2-1)\cdot t'_{\mathrm{mix}}(\varepsilon)}{N^2\log(N)} \le \limsup_{N\to\infty} \frac{k(k^2-1)\cdot t'_{\mathrm{mix}}(\varepsilon)}{N^2\log(N)} \le c \tag{7.1}$$

对某个常数 $c > 0$ 成立。特别地，预截止现象会出现。对于 $k = N^\delta$，当 $\delta \in (\frac{2}{3}, 1)$ 时，S_k 洗牌过程的混合时间 $t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon)$ 为常数阶，其中

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{N\to\infty} t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon) = \infty\,, \tag{7.2}$$

并且对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，存在某些 $C = C(\varepsilon) > 0$ 使得

$$\limsup_{N\to\infty} t_{\mathrm{mix}}(\varepsilon) \le C\,. \tag{7.3}$$

特别地，预截止现象不会出现。

为了证明命题 7.1，我们需要做一些准备。令 $\delta' = \frac{1}{24}(3\delta - 2) > 0$，并回顾第 5 节，我们用 $(Z_{i,t})_{t\ge 0}$ 和 $(Z'_{i,t})_{t\ge 0}$ 表示在典范耦合 P 下进行的两次 S_k 洗牌过程中标签为 i 的纸牌的位置。对于 $i \in [N]$ 和 $T \ge 0$，我们定义

$$B_{i,T} := \left\{ Z_{i,t} \in \left[N^{\frac{1}{3}+\delta'}, N - N^{\frac{1}{3}+\delta'}\right] \text{ for all } t \in \left[T, T + N^{-\delta'}\right] \right\}\,, \tag{7.4}$$

并类似地定义$B'_{i,T}$，关于（$Z'_{i,t}$）$_{t\geq 0}$。我们有以下关于典范耦合P 下标签为 $i \in [N]$ 的纸牌的合并时间 τ_i 的结果。

LEMMA 7.2. 设 $\delta > \frac{2}{3}$ 且 $i \in [N]$。那么对所有 $T \geq 0$ 以及 N 充分大的

$$\mathbf{P}\big(B_{i,T} \,\big|\, Z_{i,T} \in \big[N^{\frac{1}{3}+\delta'}, N - N^{\frac{1}{3}+\delta'}\big]\big) \geq 1 - N^{-3\delta'}\,, \tag{7.5}$$

and 同样，对于事件$B'_{i,T}$。此外，我们有，对于所有 N 足够大的 e

$$\mathbf{P}\big(\tau_i > T + N^{-\delta'} \,\big|\, B_{i,T} \cap B'_{i,T}\big) \leq N^{-2}\,. \tag{7.6}$$

证明。对于第一个陈述(7.5)，注意$Z_{i,t} < N^{\frac{1}{3}+\delta'}$ 对于某些 $t \geq T$只能通过对某个区间 $[j, j+k-1]$的更新发生，对于某些 $j < N^{\frac{1}{3}+\delta'}$。令 X_T为这些区间在时间 T和 $T + N^{-\delta'}$之间的更新总数，并注意每次这样的更新将标签为 i 的扑克牌独立地以至多 $N^{\frac{1}{3}+\delta'-\delta}$的概率放置在前 $N^{\frac{1}{3}+\delta'}$ 个位置。由于 X_T服从泊松-($N^{1/3}$)分布，我们有P($X_T \geq N^{\frac{1}{3}+\delta'}$) $\leq \frac{1}{4}N^{-3\delta'}$在 $T > 0$上一致，并且对于所有足够大的 N。因此

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(Z_{i,T} > N^{\frac{1}{3}+\delta'} \text{ for all } t \in [T, T+N^{-\delta'}] \,\big|\, Z_{i,T} \in \big[N^{\frac{1}{3}+\delta'}, N - N^{\frac{1}{3}+\delta'}\big]\big)\\ \geq \mathbf{P}(X_T \geq N^{\frac{1}{3}+\delta'}) + (1 - N^{\frac{1}{3}+\delta'-\delta})^{N^{\frac{1}{3}+\delta'}} \geq 1 - \frac{1}{2}N^{-3\delta'}\end{aligned}$$

对所有 N足够大。关于 $Z_{i,\,t} < N - N^{\frac{1}{3}+\delta'}$ 给出 B_i的概率的所需下界，T。对于第二个陈述（7.6），我们回顾引理 5.12 证明中的）5.5，这意味着对于任意初始位置 $> N^{\frac{1}{3}+\delta'}$，到达某个位置 $> k$ 所需的期望时间至多为 $N^{-\frac{1}{3}+2\delta'}$。使用与命题 5.1 证明中相同的论证，再结合以下事实：

$$\max\left(N^{-\frac{1}{3}+\delta'}\frac{N}{k}, \frac{N^2}{k^3}\right) \leq N^{-2\delta'} \tag{7.7}$$

对于所有足够大的 N，我们可以看到存在常数 c_1、$c_2 > 0$，使得

$$\mathbf{P}\big(\tau_i > T + c_1 N^{-2\delta'} \,\big|\, B_{i,T} \cap B'_{i,T}\big) \leq 1 - c_2\,. \tag{7.8}$$

迭代（7.8）现在 $N^{\delta'}$ 多次即可得到所需结果。 □

命题 7.1 的证明。注意，结合注 4.3 和命题 5.1，我们可得 (7.1)。(7.2) 中关于 S_k 洗牌过程混合时间的下界可由以下观察得出：ε 混合时间的下界为这样一段时间 T，在此期间，初始时位于位置 1 或 N 的纸牌至少有一张移动的概率至少为$1-\varepsilon$，直至时间 T。因此，剩下只需证明 (7.3)。在引理 7.2 中使用 (7.6) 后，只需证明：以至少 $1-\varepsilon/2$ 的概率，存在某个 $n \in \mathbb{N}$、某个常数$C = C(\varepsilon, n) > 0$，以及一个非负时间序列 $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$，使得

$$T_{j+1} - T_j > N^{-\delta'} \text{ for all } j \in [n-1] \quad \text{and} \quad T_n \leq C\,, \tag{7.9}$$

并且具有如下性质：对于每个 $i \in [N]$，事件 $B_{i,\,T_j}$ 中至少有一个会在某个$j = j(i) \in [n]$ 发生。为了定义这些时间 $(T_j)_{j\in[n]}$，对所有 $m \in \mathbb{N}$，考虑事件

D_m 在时间区间 $[2m-1, 2m]$ 内，区间 $[k]$ 和 $\{N-k+1, \dots, N\}$ 均收到一次更新。令 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 表示耦合 P 下的自然滤过。那么

$$\mathbf{P}(D_m \,|\, \mathcal{F}_{2m-1}) \geq \frac{1}{4} \quad \text{and} \quad \mathbf{P}(B_{i,2m} \cap B'_{i,2m} \,|\, D_m, \mathcal{F}_{2m-1}) \geq 1 - 2N^{-\delta'} \tag{7.10}$$

对所有 $m \in \mathbb{N}$，在 $i \in [N]$上一致地，迭代 (7.5)引理 7.2 以得到第二个陈述。令 T_j 为事件 D_m 发生的 j^{th} 时间。取 $C > 0$ 充分大，我们看到，对于任意固定的 $n \in \mathbb{N}$，时间 $(T_i)_{i\in[n]}$ 以至少 $1 - \varepsilon/4$的概率满足 (7.9)。为确保对于每个 $i \in [N]$，以至少 $1-\varepsilon/4$的概率，事件 $B_{i,\, T_j}$中至少有一个在某个 $j \in [n]$发生，我们令 $n = 4/\delta'$。由 (7.10)，我们看到，对于每个固定的 $i \in [N]$，以至少 $1 - N^{-2}$的概率，事件 $B_{i,\, T_j} \cap B'_{i,\, T_j}$ 对某个 $j \in [n]$成立，并且对所有充分大的 N均成立。再对所有 $i \in [N]$应用并集界，即可完成证明。□

最后，我们提出一个关于 S_k 洗牌过程在 $k = o(N^{1/2})$ 条件下的混合时间的猜想。

Conjecture 7.3. 令 $k = o(N^{1/2})$。那么对所有 $\varepsilon \in (0,1)$，我们有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{k(k^2-1)\cdot t_{\text{mix}}(\varepsilon)}{N^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{k(k^2-1)\cdot t'_{\text{mix}}(\varepsilon)}{N^2} = \frac{6}{\pi^2}\,, \tag{7.11}$$

也就是说，有边界和无边界的 S_k 洗牌过程都表现出截断现象。

References

[1] Joseph S. Alameda、Caroline Bang、Zachary Brennan、David P. Herzog、J¨urgenKritschgau 和 ElizabethSprangel。带有

O n *preprint*( ) 次交换

https://arxiv.org/abs/2203.08647 2022
的伯努利-拉普拉斯模型中的截断。 ， 。[2] DaveBayer 和Persi Diaconis。将燕尾洗牌过程引回其巢穴。 *Ann. Appl. Probab.*，2 313，1992 2 294( ): –。[3] Itai Benjamini、Noam Berger、Christopher Hoffman和 ElchananMossel。带偏置的扑克牌洗牌过程与非对称排斥过程的混合时间。*Transactions of the American Mathematical Society* 357 8 3013 3029, 2005 ，( ): –。

[4] Nathana¨el Berestycki 、 Oded Schramm 和 Ofer Zeitouni。随机 k- 循环与聚并 – 碎裂链的混合时间。 *Ann. Probab.*，39(5):1815–1843，2011年。[5] Megan Bernstein 和Evita Nestoridi。随机到随机洗牌过程的截断。 *Ann. Probab.*，47 5 3303 3320，2019年 ( ): –。[6] Antonio Blanca、Pietro Caputo、Zongchen Chen、Daniel Parisi、Daniel˘Stefankovi˘c和EricVigoda。关于马尔可夫链的混合：耦合、谱独立性与熵因子分解。*Electronic Journal of Probability* 27 1 42, 2022 ，(无): –。

[7] Antonio Blanca 、 Zongchen Chen 、 Daniel ˘Stefankovi˘c 和 EricVigoda。树上的 Swendsen–Wang 动力学。 *Random Structures & Algorithms*，2022年。[8] Julius Borcea、Petter Br¨and´en 和Thomas Liggett。负相关与多项式的几何。 *Journal of the American Mathematical Society*，22(2):521–567，2009年。[9] Julius Borcea 和 PetterBr¨and´en。Lee-Yang与P´olya-Schur 纲领。I. 保持稳定性的线性算子。 *Inventiones mathematicae*，177(3):541–569，2009年9月。[10] Persi Diaconis 和MehrdadShahshahani。通过随机换位生成随机置换。 *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*，57(2):159–179，1981。[11] PersiDiaconis和 MehrdadShahshahani。伯努利-拉普拉斯扩散模型达到平稳状态所需的时间。 *SIAM J. Math. Anal.*，18(1):208–218，1987。[12] Alexandros Eskenazis 和 EvitaNestoridi。带有 $o(n)$次交换的伯努利–拉普拉斯瓮模型的截断。*Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*，56(4):2621–2639，2020年。[13] ShirshenduGanguly 和Insuk Seo。随机簇模型中的信息渗流与截断。 *Random Structures & Algorithms*，57(3):770–822，2020年。

[14] Nina Gantert、EvitaNestoridi和 Dominik Schmid。带开放边界的简单排斥过程的混合时间。 *Ann. Appl. Probab.*, 33(2):972–1012，2023年。[15] Heng Guo 和MarkJerrum。伊辛模型的随机簇动力学具有快速混合性质。 *The Annals of Applied Probability* 28 2 1292 1313, 2018 ，( ): – 。[16] Holger Kn¨opfel、Matthias L¨owe、KristinaSchubert 和Arthur Sinulis。一般区块自旋伊辛模型的涨落结果。 *Journal of Statistical Physics*，178(5):1175–1200，2020年3月。[17] Hubert Lacoin。相邻换位洗牌和简单排斥过程的混合时间与截断。*The Annals of Probability*，44(2):1426–1487，2016年3月。[18] DavidAsher Levin。 *Markov chains and mixing times / David A. Levin Yuval Peres Elizabeth L.*，美国数学学会，罗得 *Wilmer.* 2009 岛州普罗维登斯。[19] Thomas M.Liggett。 *Continuous time Markov processes: an introduction*，第113卷。美国数学学会，2010年。[20] Yun Long、Asaf Nachmias、Weiyang Ning和Yuval Peres。 *A power law of order 1/4 for critical mean field Swendsen-Wang dynamics* 232 2014 ，第 卷。美国数学学会。

[21] F. Martinelli、A. Sinclair 和D.Weitz。树上的伊辛模型：边界条件和混合时间。载于 *44th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 2003. Proceedings.*，第628–639页，2003年。[22] FabioMartinelli。 *Lectures on Glauber Dynamics for Discrete Spin Models*，第93–191页。施普林格柏林海德堡，柏林，海德堡，1999年。[23] DannyNam和 Evita Nestoridi。循环相邻换位洗牌的截断。 *The Annals of Applied Probability* 29 6 3861 3892, 2019 ，():–。[24] Evita Nestoridi。星形换位的极限轮廓。 *preprint* https://arxiv.org/abs/2111.03622 2021 。[25] YuvalPeres和 PeterWinkler。额外更新会延迟混合吗? *Communications in Mathematical Physics* 323 3 1007 1016, 2013 ，(): –11月。[26] Justin Salez。带蓄水池的排斥过程的截断普适性。 *preprint* https://arxiv.org/abs/2201.03463 2022 。[27]

Hong-QuanTran。带蓄水池的非可逆对称简单排斥过程的截断。*preprint* https://arxiv.org/abs/2211.14687 2022 。[28] David Bruce Wilson。菱形铺砌和扑克牌洗牌马尔可夫链的混合时间。 *The Annals of Applied Probability* 14 1 274 325, 2004 ，( ):–。[29] Seoyeon Yang。一般多分量伊辛模型的截断与动力学相变。*preprint* https://arxiv.org/abs/2112.04976，2021年。[30] Lingfu Zhang。Metropolis 偏置纸牌洗牌的截断轮廓。 *preprint* https://arxiv.org/abs/2208.13383 。

致谢。本项目始于 SAMSI 组合概率虚拟研讨会，该研讨会由 NSF资助项目 DMS-1929298 支持。EN 获得了NSF 资助项目DMS-2052659的支持。AP 获得了德克萨斯大学奥斯汀分校院长战略奖学金的支持。DS 感谢 DAAD PRIME项目提供的资金支持。感谢 Jonathan Hermon 提供的宝贵意见。

Evita Nestoridi, Princeton University, Stony Brook University, United States
Email address: evrydiki.nestoridi@stonybrook.edu

Amanda Priestley, The University of Texas at Austin, United States
Email address: amandapriestley@utexas.edu

Dominik Schmid, University of Bonn, Germany
Email address: d.schmid@uni-bonn.de