二元输入高斯信道上的无源随机接入能效

Anton Glebov、Pavel Rybin、Kirill Andreev、Alexey Frolov

arXiv:2304.02598v1 [cs.IT] 5 Apr 2023

摘要

我们研究二元输入高斯信道上无源随机接入的基本极限。所谓基本极限，是指达到目标用户错误概率所需的最小每比特能量。Y. Polyanskiy 于 2017 年提出的原始方法基于 Gallager 技巧，但不适用于二进制信号传输。我们采用 Fano 方法，该方法基于对所谓“良好”区域的选取。我们将此方法应用于高斯码本和二进制码本两种情形，并得到两个可达性界。第一个界与 Polyanskiy 的界非常接近，但并未带来任何改进。与此同时，数值结果表明，二元情形下的界实际上与高斯码本的界一致。因此，我们得出结论：二元调制不会导致性能下降，而且确实存在采用二元调制的高能效方案。

索引词

无线通信；无源随机接入；能效；二进制输入高斯信道。

I. 引言

该论文讨论了无用户识别随机接入（URA）——这是 [1]针对海量机器类通信（mMTC）提出的一种新范式。mMTC带来的挑战包括：（a）需要处理大量设备，（b）短数据包，以及（c）随机接入。

Anton Glebov、Pavel Rybin、Kirill Andreev 和 Alexey Frolov 就职于俄罗斯莫斯科的斯科尔科沃科学技术研究院下一代无线与物联网中心（NGW）（电子邮箱：anton.glebov@skoltech.ru、p.rybin@skoltech.ru、k.andreev@skoltech.ru、al.frolov@skoltech.ru）。本研究在斯科尔科沃科学技术研究院开展，并由俄罗斯科学基金会资助（项目编号：18-19-00673），https://rscf.ru/en/project/18-19-00673/

无用户识别随机接入采用免授权传输，这意味着数据包无需事先与基站通信即可发送到网络，并且所有用户使用相同的编码器（或等价地，使用相同的码本）。这一决策基于以下事实：使用不同的编码器会增加接收机的复杂度，因为解码器必须首先识别使用了哪些编码器。相同码本的假设将用户识别和译码任务解耦，而无用户识别随机接入接收机只需译码消息，无需识别发送这些消息的用户。

在 [1], 中，从信息论视角阐述了无用户识别随机接入（URA）问题。高斯多址信道（MAC）的基本极限见 [1]。渐近改进结果发表于 [2]。这两篇论文均考虑活跃用户数量固定且接收机已知的情况。在 [3], 中，这些结果被扩展到活跃用户数量随机且接收机未知的场景。针对高斯多址信道，已有多种低复杂度无用户识别随机接入方案被提出。主要方法包括 T折不规则重复时隙ALOHA协议及其冲突消解 [4]–[6],稀疏交织分多址（IDMA）方案 [7],随机扩频和基于相关性的能量检测 [8]–[10]以及编码压缩感知 [11]–[14]。方案 [10] 在高斯多址信道中实现了当前最先进的性能。文献中还研究了更为现实的信道模型，例如单天线准静态瑞利衰落信道和多输入多输出信道。在本文中，我们重点关注高斯多址信道，关于衰落信道的更多细节请参阅 [15], [16]。

我们注意到，许多实用方案（例如 [4]–[7]）采用二进制信号传输（或二进制相移键控调制）。与此同时，与使用高斯码本的方案 [8]–[10] 相比，这些方案的能效较低。因此，一个自然的问题随之而来：二进制信号传输是否会限制能效？据我们所知，文献中尚未探讨这一问题。下文旨在确立二进制输入高斯多址信道的基本极限。 [1] 中基于 Gallager ρ 技巧的原始方法并不适用于二进制输入高斯多址信道。原因在于，该方法需要依次计算关于错误码字、漏检码字和噪声的多个期望，而这对于二进制信号传输情形似乎是一个难题。我们受到 [17] 中所提出方法的启发，分析采用多输入多输出接收机的无用户识别随机接入的能效。该方法通过引入一个“良好”区域来估计每用户错误概率（PUPE），从而能够计算该区域内发生错误事件的概率，并将落在该区域之外的概率作为其余错误事件概率的估计。我们的贡献如下。我们从高斯码本出发，获得了一个新的能效

可达性界，适用于高斯多址信道上的无用户识别随机接入。该界接近 [1] 中的界（差距不超过 0.06 dB），但并未带来任何改进。与此同时，这种新方法使我们能够分析二进制信号传输，并推导出二进制码本的可达性界。数值实验表明，得到的两个界实际上几乎重合。因此，我们得出结论：对于给定的系统参数，采用二进制码本的无用户识别随机接入，其能效几乎与采用高斯码本时相同；也就是说，二进制信号传输不会带来任何额外限制。

本文的结构如下。第二节介绍系统模型。第三节介绍基于Fano方法的方法、译码错误概率和区域的条件，以及采用高斯码本和二进制码本的高斯 URA 信道的可达性界。第四节展示本文所得界以及 Polyanskiy 界的数值结果，并对结果进行分析。

符号说明：在本文中，我们将实数集合记为 $\mathbb{R}$。标量值用非粗体字母表示，例如 x 或 X，而向量用小写粗体字母表示，例如 $\boldsymbol{x}$ （此处我们将向量视为列向量），矩阵则用大写粗体字母表示，例如 $\boldsymbol{X}$。大小为 $n \times n$ 的单位矩阵记为 $\boldsymbol{I}_n$。向量 $\boldsymbol{x}$ 的欧几里得范数记为 $\|\boldsymbol{x}\|$。花体字母（例如 $\mathcal{X}$）用于表示集合和系综。我们保留字母 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{U}$ 表示事件，并使用 $\mathcal{E}^c$ 表示事件 $\mathcal{E}$的补事件。希腊字母用于表示实数、辅助系数和函数，例如 α和 ϕ（·）。对于任意正整数 n，我们使用记号 $[n] = \{1, \ldots, n\}$。我们使用记号 $\mathcal{N}$（$\mathbf{0}$，$\boldsymbol{I}_n$）表示标准正态随机向量。最后，我们使用符号 $\mathbb{E}$表示期望算子，并用Pr $[\mathcal{E}]$ 表示事件 $\mathcal{E}$发生的概率。

II. 系统模型

本文聚焦于 [1]中提出的部分活跃模型。在该模型中，共有 K_{tot} 个用户，但在任意给定时刻只有 K_a 个用户处于活跃状态，其中 $K_a \ll K_{tot}$。我们假设接收机知道活跃用户的数量 K_a，并且通信以帧同步方式进行，其中每个帧的长度为 n 信道使用次数。每个活跃用户在一个帧内传输 k 比特，其中 $M = 2^k$。所有用户使用相同的消息集 $[M]$和编码函数 $f\colon\ [M] \to \mathbb{R}^n$，并满足功率约束 $\|f(W)\|^2 \leq nP$，对所有$W \in [M]$均成立。令 $\mathcal{S} = \{W_1, \ldots, W_{K_a}\}$表示已发送消息的集合。信道输出

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 由下式给出

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{K_a} f(W_i) + \mathbf{z}, \tag{1}$$

其中，$\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ 是加性白高斯噪声（加性白高斯噪声）。

ˆ 译码的目标是输出一个大小为 K_a 的集合 $\mathcal{S} \subseteq [M]$，表示经过置换后的已发送消息集合。所使用的主要性能指标是每用户错误概率（PUPE）

$$P_e = \frac{1}{K_a} \sum_{i=1}^{K_a} \Pr\left[W_i \notin \hat{\mathcal{S}}\right].$$

本文的重点是在给定消息集 $[M]$、编码序列长度 n以及活跃用户数量 K_a的条件下，最小化每个用户所消耗的每比特能量（$E_b/N_0 = Pn/k$，其中 $k = \log_2 M$），同时满足 $P_e \leq \epsilon$ 的限制。本文考虑了满足这些条件的两种随机接入码系综:

定义1。令 $\mathcal{G}$（M, n, P）表示大小为 $n \times M$ 的高斯码本系综，其中每个元素均独立同分布地从 $\mathcal{N}$（0，P）中采样。

定义 2. 设 $\mathcal{B}(M, n, P)$ 为大小为 $n \times M$ 的二进制码本系综，其中每个元素独立同分布地从 $\left\{-\sqrt{P}, \sqrt{P}\right\}$ 以概率 $1/2$ 采样。

III. 可达性界

在本节中，我们获得高斯 URA 信道上使用高斯码本和二进制码本的可达性界。首先，我们介绍一些在 ˆ 相应证明中使用的通用符号和引理。回想一下，$\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}$ 是发送和接收消息的集合。ˆˆˆ 设 $\mathcal{M} = \mathcal{S} \backslash \mathcal{S}$、$\mathcal{F} = \mathcal{S} \backslash \mathcal{S}$ 和 $\mathcal{C} = \mathcal{S} \bigcap \mathcal{S}$ 分别为漏检、误检和正确接收的消息的集合。对于 $\mathcal{I} \subseteq [M]$，我们引入

$$\mathbf{c}_{\mathcal{I}} = \sum_{W \in \mathcal{I}} f(W).$$

下文中，我们假设 t 表示漏检和错误码字的数量。注意，由于接收机知道活跃用户的数量 K_a 且 $\left|\hat{\mathcal{S}}\right| = K_a$。

令 $\mathcal{U}_e(t) = \{|\mathcal{M}| = t\}$ 表示 t-错误事件。根据 [1]，我们按以下方式估计 P_e

$$P_e \leq \sum_{t=1}^{K_a} \frac{t}{K_a} \Pr\left[\mathcal{U}_e(t)\right] + p_0,$$

其中

$$p_0 = \Pr\left[\left[\bigcup_{i\neq j}\{W_i = W_j\}\right] \cup \left[\bigcup_{i\in[K_a]} \{\|f(W_i)\|^2 > Pn\}\right]\right]$$

是不同用户从码本中选择相同码字或信号功率超过 Pn 的概率。显然，第二个条件仅对高斯码本需要。

让我们更详细地考虑错误事件。在最大似然 (ML) ˆ 译码的情况下，如果存在消息集合 $\mathcal{S}$ 使得相应码字的和比对应于已发送消息 $\mathcal{S}$ 的码字的和更接近接收序列$\mathbf{y}$，则我们得到译码错误：

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{c}_{\mathcal{S}}\|^2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{c}_{\hat{\mathcal{S}}}\|^2 .$$

因此，我们得到以下译码错误条件 $\|\mathbf{z}\|^2 \geq \|\mathbf{c}_{\mathcal{M}} - \mathbf{c}_{\mathcal{F}} + \mathbf{z}\|^2$。因此，让我们引入以下错误事件：

$$\mathcal{E}_e = \left\{\|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{c}_{\mathcal{M}} - \mathbf{c}_{\mathcal{F}} + \mathbf{z}\|^2 \geq 0\right\}.$$

仅基于此条件估计错误概率时，我们必须在最后一步应用并集界。众所周知，这会导致概率的高估。减少这种高估的一个好方法是使用 Fano 方法。为此，我们引入“好”区域（对噪声范数的一些限制），在其中应用上述错误条件：

$$\|\mathbf{z}\|^2 < \alpha \|\mathbf{c}_{\mathcal{M}} + \mathbf{z}\|^2 + \beta n.$$

注释 1. 下面对“良好”区域的选择作一些说明：

- 将$\mathbf{c}_{\mathcal{C}}$ 加入区域描述中并不会改善性能，
- 区域描述中不包含$\mathbf{c}_{\mathcal{F}}$，以避免出现巨大的二项式系数 $\binom{M-K_a}{t}$。

因此，我们引入“良好”区域事件：

$$\mathcal{E}_r = \left\{\alpha \|\mathbf{c}_{\mathcal{M}} + \mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{z}\|^2 + \beta n > 0\right\}$$

以及“坏”（补）事件：

$$\mathcal{E}_r^c = \left\{\|\mathbf{z}\|^2 - \alpha \|\mathbf{c}_{\mathcal{M}} + \mathbf{z}\|^2 - \beta n \geq 0\right\}.$$

因此，我们可以引入以下并集：

$$\mathcal{U}_e(t) = \bigcup_{\mathcal{M},\mathcal{F}:|\mathcal{M}|=|\mathcal{F}|=t} \mathcal{E}_e,$$

$$\mathcal{U}_{e,r}(t) = \bigcup_{\mathcal{M},\mathcal{F}:|\mathcal{M}|=|\mathcal{F}|=t} \mathcal{E}_e \cap \mathcal{E}_r,$$

$$\mathcal{U}_r^c(t) = \bigcup_{\mathcal{M}:|\mathcal{M}|=t} \mathcal{E}_r^c.$$

在 [1], 中，主要结果是通过结合 Gallager 的几种 ρ 技巧，使用并集界估计 $\Pr[\mathcal{U}_e(t)]$ 得出的。本文中，我们以下述方式估计错误概率：

$$\Pr[\mathcal{U}_e(t)] \leq \inf_{\alpha>0,\beta>0} \left(\Pr[\mathcal{U}_{e,r}(t)] + \Pr[\mathcal{U}_r^c(t)]\right),$$

其中我们应用并集界来估计 $\Pr[\mathcal{U}_{e,r}(t)]$ 和 $\Pr[\mathcal{U}_r^c(t)]$

$$\Pr[\mathcal{U}_{e,r}(t)] \leq \binom{M-K_a}{t}\binom{K_a}{t}\Pr[\mathcal{E}_e \cap \mathcal{E}_r],$$

$$\Pr[\mathcal{U}_r^c(t)] \leq \binom{K_a}{t}\Pr[\mathcal{E}_r^c].$$

为了找到 $\Pr[\mathcal{E}_e \cap \mathcal{E}_r]$ 和 $\Pr[\mathcal{E}_r^c]$ 的良好估计，我们使用切尔诺夫界 [18] 以及来自 [19], 的定理 3.2a.1，我们将其表述如下

引理 1（切尔诺夫界，[18]）。设 χ_1 和 χ_2 为任意随机变量，则对于任意 u，$v > 0$以下界成立：

$$\Pr[\chi_1 \geq 0] \leq \mathbb{E}_{\chi_1}[\exp(u\chi_1)]$$

and

$$\Pr[\chi_1 \geq 0, \chi_2 \geq 0] \leq \mathbb{E}_{\chi_1,\chi_2}[\exp(u\chi_1 + v\chi_2)].$$

引理 2（定理 3.2a.1, [19]）。设 $\boldsymbol{\eta} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$，$\mathbf{b}$ 为长度为 n 的任意向量，$\mathbf{A}$为大小为 $n \times n$ 的对称矩阵且 $\lambda_{min}(\mathbf{I}_n - 2\mathbf{A}) > 0$ 则

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\boldsymbol{\eta}} \exp\left[\boldsymbol{\eta}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{b}^T\boldsymbol{\eta}\right] = \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\log\det(\mathbf{I}_n - 2\mathbf{A}) + \frac{1}{2}\mathbf{b}^T(\mathbf{I}_n - 2\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\right].\end{aligned}$$

A. 高斯码本

定理 1。固定 $P' < P$。存在一个高斯码本随机接入码，其来自$\mathcal{G}(M, n, P')$，适用于满足功率约束 P 的 K_a 用户高斯 *URA* 信道，并且具有

$$P_e \leq \sum_{t=1}^{K_a} \frac{t}{K_a} \inf_{\alpha,\beta>0} \left[\binom{M-K_a}{t}\binom{K_a}{t}p_t + \binom{K_a}{t}q_t\right] + p_0,$$

其中

$$p_0 = \frac{\binom{K_a}{2}}{M} + K_a \Pr\left[\frac{1}{n}\|\mathbf{z}\|^2 > \frac{P^{'}}{P}\right],$$

$$p_t = \inf_{u,v>0} \exp\left[-\frac{n}{2}\log\det\left(\mathbf{I}_3 - 2\mathbf{A}\right) + v\beta n\right],$$

$$q_t = \inf_{\delta>0} \exp\left[-\frac{n}{2}\log\det\left(\mathbf{I}_2 - 2\delta\mathbf{B}\right) - \delta\beta n\right],$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (\alpha-1)\,v & (\alpha v - u)\sqrt{P't} & u\sqrt{P't} \\ (\alpha v - u)\sqrt{P't} & (\alpha v - u)\,P't & uP't \\ u\sqrt{P't} & uP't & -uP't \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & -\alpha\sqrt{P't} \\ -\alpha\sqrt{P't} & -\alpha P't \end{pmatrix},$$

且满足以下条件

$$\lambda_{min}\left(\mathbf{I}_3 - 2bA\right) > 0 \textit{ and } \lambda_{min}\left(\mathbf{I}_2 - 2\delta\mathbf{B}\right) > 0.$$

证明。考虑系综 $\mathcal{G}(M,\ n,\ P')$。我们引入以下向量

$$\boldsymbol{\eta}^T = \left(\mathbf{z}^T,\, \mathbf{c}_{\mathcal{M}}^T/\sqrt{P't},\, \mathbf{c}_{\mathcal{F}}^T/\sqrt{P't}\right)$$

$\boldsymbol{\eta} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{3n})$。利用这一记号，我们可以将事件 $\mathcal{E}_e$、 $\mathcal{E}_r$ 和 $\mathcal{E}_r^c$ 重写如下:

$$\mathcal{E}_e = \left\{\boldsymbol{\eta}^T\mathbf{A}_e\boldsymbol{\eta} \geq 0\right\},$$

$$\mathcal{E}_r = \left\{\boldsymbol{\eta}^T\mathbf{A}_r\boldsymbol{\eta} + \beta n > 0\right\},$$

$$\mathcal{E}_r^c = \left\{\boldsymbol{\eta}^T\mathbf{A}_r^c\boldsymbol{\eta} - \beta n \geq 0\right\},$$

其中 $\mathbf{A}_r^c = -\mathbf{A}_r$ 和

$$\mathbf{A}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sqrt{P't}\mathbf{I}_n & \sqrt{P't}\mathbf{I}_n \\ -\sqrt{P't}\mathbf{I}_n & -P't\mathbf{I}_n & P't\mathbf{I}_n \\ \sqrt{P't}\mathbf{I}_n & P't\mathbf{I}_n & -P't\mathbf{I}_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} (\alpha-1)\,\mathbf{I}_n & \alpha\sqrt{P't}\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \alpha\sqrt{P't}\mathbf{I}_n & \alpha P't\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

现在，我们可以利用联合事件的切尔诺夫界来估计概率 $\Pr\left[\mathcal{E}_e \cap \mathcal{E}_r\right]$：

$$\Pr\left[\mathcal{E}_e \cap \mathcal{E}_r\right] \leq \inf_{u,v>0} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\eta}} \exp\left[\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{A}_n \boldsymbol{\eta} + v\beta n\right],$$

其中 $\mathbf{A}_n = u\mathbf{A}_e + v\mathbf{A}_r$，并使用引理2（其中 $\mathbf{b}$ 等于零向量），我们得到期望 $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\eta}}$:

$$\Pr\left[\mathcal{E}_e \cap \mathcal{E}_r\right] \leq \inf_{u,v>0} \exp\left[-\frac{1}{2}\log\det\left(\mathbf{I}_{3n} - 2\mathbf{A}_n\right) + v\beta n\right]$$

对于 $\lambda_{min}(\mathbf{I}_{3n} - 2\mathbf{A}_n) > 0$.

请注意，通过重新排列矩阵$\mathbf{A}_n$ 的列和行，可以将其表示为$\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}$ 。因此，我们可以将（$\mathbf{I}_{3n} - 2\mathbf{A}_n$）表示为$\mathbf{I}_n \otimes$（$\mathbf{I}_3 - 2\mathbf{A}$），显然 $-\frac{1}{2}\log\det$（$\mathbf{I}_{3n} - 2\mathbf{A}_n$） $=-\frac{n}{2}\log\det$（$\mathbf{I}_3 - 2\mathbf{A}$）。因此，$\Pr\left[\mathcal{E}_e \cap \mathcal{E}_r\right] \leq p_t$。

同样，我们有 $\Pr\left[\mathcal{E}_r^c\right] \leq q_t$对于 $\lambda_{min}(\mathbf{I}_2 - 2\delta\mathbf{B}) > 0$。这是由于对矩阵 $(\mathbf{I}_{3n} - 2\delta\mathbf{A}_r^c)$的最后一个分块列（分块行）进行拉普拉斯（余子式）展开，以及我们上文使用的行列重排所致。

最后，应用并集界，我们得到 P_e 的估计，其中 p_0 先前已定义。 □

注 2. 我们注意到，可以利用*[2],*中的思想来考虑包含$\mathbf{c}_{\mathcal{F}}$ 的区域，即让我们考虑以下区域

$$\mathcal{E}_r = \{\|\mathbf{c}_{\mathcal{F}}\| \geq \sqrt{\beta n}\},$$

我们有

$$\begin{aligned}\Pr\left[\mathcal{U}_r^c(t)\right] &= \Pr\left[\bigcup_{\mathcal{F}\subset[M]\setminus[K_a]} \{\|\mathbf{c}_{\mathcal{F}}\| < \sqrt{\beta n}\}\right] \\ &= \Pr\left[\min_{\mathcal{F}\subset[M]\setminus[K_a]} \|\mathbf{c}_{\mathcal{F}}\| < \sqrt{\beta n}\right].\end{aligned}$$

利用集中性质和戈登不等式 *[20]*，可以对高斯过程最小值的期望中的后一项给出上界。因此， *[2]* 中的技术可以改写为 *Fano* 方法的一个实例。同时，我们注意到，我们未能在有限长度区间取得任何改进。

B. 二进制码本

定理 2. 存在一个二进制码本的随机接入码，其参数为 $\mathcal{B}(M, n, P)$，适用于K_a用户高斯 *URA* 信道，满足功率约束 P，并且具有

$$P_e \leq \sum_{t=1}^{K_a} \frac{t}{K_a} \inf_{\alpha,\beta>0} \left[\binom{M-K_a}{t} \binom{K_a}{t} p_t + \binom{K_a}{t} q_t \right] + p_0,$$

其中 $p_0 = \binom{K_a}{2} M$ 以及

$$p_t = \inf_{u,v>0} \Bigg[\exp\left[-n\zeta\left(\alpha,\beta,v\right)\right] \times \times \left(\sum_{m=-t}^{t} \sum_{f=-t}^{t} \rho_m \rho_f \exp\left[P\phi\left(\alpha,u,v,m,f\right)\right] \right)^n \Bigg]$$

其中

$$\zeta(\cdot) = \frac{1}{2}\log\left(1-2v\left(\alpha-1\right)\right) - \beta v,$$

$$\phi(\cdot) = \left(2\frac{\left(\alpha v m - u\left(m-f\right)\right)^2}{1-2v\left(\alpha-1\right)} + \alpha v m^2 - u\left(m-f\right)^2 \right),$$

and

$$q_t = \inf_{\delta>0} \Bigg[\exp\left[-n\xi\left(\alpha,\beta,\delta\right)\right] \times \times \left(\sum_{m=-t}^{t} \rho_m \exp\left[P\psi\left(\alpha,\delta,m\right)\right] \right)^n \Bigg],$$

其中

$$\xi(\cdot) = \frac{1}{2}\log\left(1-2\delta\left(1-\alpha\right)\right) + \delta\beta,$$

$$\psi(\cdot) = \delta\alpha\frac{2\delta-1}{1-2\delta\left(1-\alpha\right)} m^2,$$

并且其中

$$\rho_i = \begin{cases} \binom{t}{\frac{1}{2}(i+t)} 2^{-t}, & i \in \{2j-t,\, \forall j : 0 \leq j \leq t\} \\ 0, & \textit{otherwise} \end{cases}$$

并且以下条件成立

$$1-2v\left(\alpha-1\right) > 0 \textit{ and } 1-2\delta\left(1-\alpha\right) > 0.$$

证明。 展开范数的括号后，让我们按如下方式重写事件 $\mathcal{E}_e, \mathcal{E}_r$ 和 $\mathcal{E}_r^c$：

$$\mathcal{E}_e = \left\{-2\left(\mathbf{c}_{\mathcal{M}} - \mathbf{c}_{\mathcal{F}}\right)^T \mathbf{z} - \left\|\mathbf{c}_{\mathcal{M}} - \mathbf{c}_{\mathcal{F}}\right\|^2 > 0\right\},$$
$$\mathcal{E}_r = \left\{(\alpha - 1)\left\|\mathbf{z}\right\|^2 + 2\alpha \mathbf{c}_{\mathcal{M}}^T \mathbf{z} + \alpha\left\|\mathbf{c}_{\mathcal{M}}\right\|^2 + \beta n > 0\right\},$$
$$\mathcal{E}_r^c = \left\{(1 - \alpha)\left\|\mathbf{z}\right\|^2 - 2\alpha \mathbf{c}_{\mathcal{M}}^T \mathbf{z} - \alpha\left\|\mathbf{c}_{\mathcal{M}}\right\|^2 - \beta n > 0\right\}.$$

因此，我们可以通过以下方式，使用切尔诺夫界估计联合事件的概率 $\Pr\left[\mathcal{E}_e \cap \mathcal{E}_r\right]$：

$$\begin{aligned}\Pr\left[\mathcal{E}_e \cap \mathcal{E}_r\right] \leq \inf_{u,v>0} \mathbb{E}_{\mathbf{z},\mathbf{c}_{\mathcal{M}},\mathbf{c}_{\mathcal{F}}} \exp\big[&(\alpha - 1) v\left\|\mathbf{z}\right\|^2 \\ &+2\left(\alpha v \mathbf{c}_{\mathcal{M}}^T - u\left(\mathbf{c}_{\mathcal{M}} - \mathbf{c}_{\mathcal{F}}\right)^T\right)\mathbf{z} \\ &+\alpha v\left\|\mathbf{c}_{\mathcal{M}}\right\|^2 - u\left\|\mathbf{c}_{\mathcal{M}} - \mathbf{c}_{\mathcal{F}}\right\|^2 + \beta v n\big].\end{aligned}$$

首先，在固定 $\mathbf{z}$ 、$\mathbf{c}_{\mathcal{M}}$ 和 $\mathbf{c}_{\mathcal{F}}$ 的情况下，求期望值。为此我们应用引理 2：

$$\begin{aligned}\Pr\left[\mathcal{E}_e \cap \mathcal{E}_r\right] \leq \inf_{u,v>0} \mathbb{E}_{\mathbf{c}_{\mathcal{M}},\mathbf{c}_{\mathcal{F}}} \exp\Big[&-\frac{n}{2}\log\left(1 - 2(\alpha - 1) v\right) \\ &+2\frac{\left\|\alpha v \mathbf{c}_{\mathcal{M}} - u\left(\mathbf{c}_{\mathcal{M}} - \mathbf{c}_{\mathcal{F}}\right)\right\|^2}{1 - 2(\alpha - 1) v} \\ &+\alpha v\left\|\mathbf{c}_{\mathcal{M}}\right\|^2 - u\left\|\mathbf{c}_{\mathcal{M}} - \mathbf{c}_{\mathcal{F}}\right\|^2 + \beta v n\Big]\end{aligned}$$

为了求得关于 $\mathbf{c}_{\mathcal{M}}$ 和 $\mathbf{c}_{\mathcal{F}}$ 的期望值，我们来考虑 $\mathbf{c}_{\mathcal{M}} = (c_{\mathcal{M},1}, c_{\mathcal{M},2}, \ldots, c_{\mathcal{M},n})$（对于 $\mathbf{c}_{\mathcal{F}}$，后续论证类似），即 t 个码字之和（每个坐标均满足功率约束 P）。那么，$c_{\mathcal{M},l} \in \left\{(2j - t)\sqrt{P}, \forall j: \ 0 \leq j \leq t\right\}, \forall l \in [n]$，因为改变 j 项的符号会使总和的绝对值改变 $2j\sqrt{P}$，例如，若所有 t 项的值均为 $-\sqrt{P}$，且我们随机选取 j 项，将它们的值改为 $\sqrt{P}$，那么总和将为 $(2j - t)\sqrt{P}$。因此，得到总和 $c_{\mathcal{M},l} = (2j - t)\sqrt{P}, \forall j: \ 0 \leq j \leq t$ 的方法数为 $\binom{t}{j}$，而每项有两种可能取值的 t 项的所有可能组合总数为 2^t。因此，我们可以引入 $c_{\mathcal{M},l}$ 等于 $i\sqrt{P}$ 的概率，如下所示

$$\rho_i = \Pr\left[c_{\mathcal{M},l} = i\sqrt{P}\right] = \frac{1}{2^t}\binom{t}{\frac{i+t}{2}}$$

对于 $i \in \{2j - t, \forall j: \ 0 \leq j \leq t\}$，否则为 0。现在，让我们考虑该项

$$\exp\left[\left\|\mathbf{c}_{\mathcal{M}}\right\|^2\right] = \exp\left[\sum_{l=1}^{n} c_{\mathcal{M},l}^2\right] = \prod_{l=1}^{n} \exp\left[c_{\mathcal{M},l}^2\right].$$

设 $c_{\mathcal{M},l} = i_l\sqrt{P}$, 则这样的向量 $\mathbf{c}_{\mathcal{M}}$ 的概率等于 $\Pr\left[\|\mathbf{c}_{\mathcal{M}}\|^2 = \sum_{l=1}^{n} i_l^2 P\right] = \prod_{l=1}^{n} \rho_{i_l}$。因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left[\|\mathbf{c}_{\mathcal{M}}\|^2\right]\right] &= \sum_{\|\mathbf{c}_{\mathcal{M}}\|^2} \Pr\left[\|\mathbf{c}_{\mathcal{M}}\|^2\right] \exp\left[\|\mathbf{c}_{\mathcal{M}}\|^2\right] \\ &= \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} \prod_{l=1}^{n} \rho_{i_l} \exp\left[i_l^2 P\right] = \left(\sum_{i=-t}^{t} \rho_i \exp\left[i^2 P\right]\right)^n.\end{aligned}$$

因此，将此估计应用于 $\mathbf{c}_{\mathcal{M}}$ 和 $\mathbf{c}_{\mathcal{F}}$，得到 $\Pr\left[\mathcal{E}_e \cap \mathcal{E}_r\right] \le p_t$。类似地，有 $\Pr\left[\mathcal{E}_r^c\right] \le q_t$。

□

IV. 数值结果

本节给出上一节针对采用高斯码本和二进制码本的高斯 URA 信道推导出的可达界的数值结果。我们假设通信系统的帧长为 $n = 30000$ 次信道使用，每个用户发送 $k = 100$ 比特。图 1 展示了不同方案的能效随活跃用户数 K_a 变化的情况。能效定义为使每用户错误概率达到 $P_e < 0.05$所需的最小 E_b/N_0。如图 1 所示，高斯码本（定理 1）和二进制码本（定理 2）得到的结果几乎相同，且非常接近 [1] 给出的原始可达性界（例如，对于 250 个活跃用户，这些值分别为 1.210 dB、1.211 dB 和 1.154 dB）。现在来考察 [7], [8], [10]中一些实用方案的能效仿真结果。需要注意的是，[8]、[10] 中的方案虽然分别基于二进制极化码和低密度奇偶校验码，但由于它们在传输时使用基于高斯信号传输的扩频序列，因此采用的是高斯码本。相比之下，[7] 的方案使用二进制码本，并针对采用二进制相移键控调制的二进制输入加性高斯白噪声信道得出结果。可以看出，实用方案采用高斯码本时的能效远高于采用二进制码本时的能效。然而，我们的可达性界表明，对于所考虑的参数范围，二进制码本不会对能效造成任何额外限制。未来的一个研究方向是将 Fano 方法应用于活跃用户数量随机的情况，并将结果与 [3]进行比较。

参考文献

[1] Y. Polyanskiy，“大规模随机接入的视角”，载于信息论（*ISIT*），*2017 IEEE* 国际研讨会。IEEE，2017 年，第 2523–2527 页。

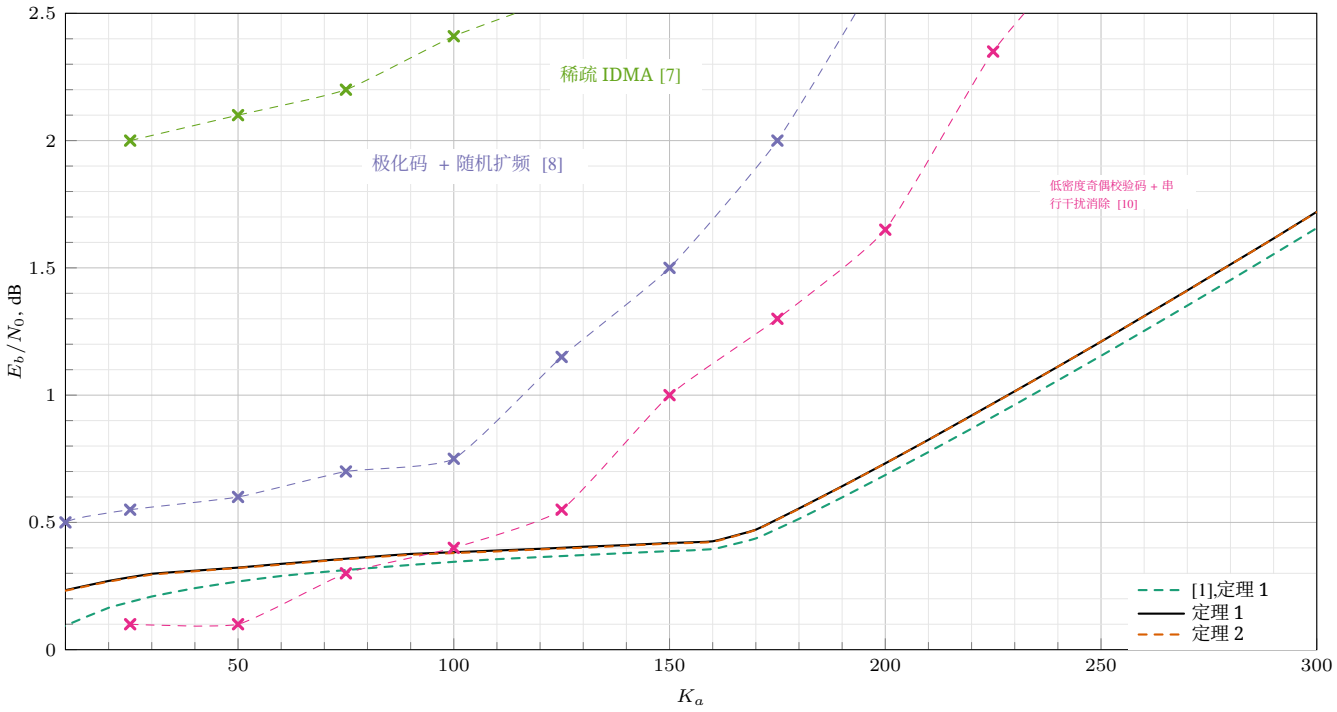


图 1. 加性高斯白噪声多址信道可达性界，针对 $k = 100$ 信息比特，帧长 $n = 30000$, $P_e = 0.05$。

[2] I. Zadik, Y. Polyanskiy,和C.Thrampoulidis，“通过高斯不等式改进高斯多址信道和稀疏回归的界”，载于*2019*年 *IEEE*信息论国际研讨会（*ISIT*）。IEEE，2019年。[3] K.-H. Ngo、A. Lancho、G. Durisi和A. Graell i Amat，“具有随机用户活动的无源多址接入”，*IEEE*信息论汇刊，第 1–1 页，2023年。[4] O.Ordentlich 和 Y. Polyanskiy，“随机接入高斯信道的低复杂度方案”，载于 *IEEE* 信息论国际研讨会（*ISIT*）论文集。IEEE，2017年，第 2528–2532页。[5] A. Vem、K. R. Narayanan、J.Cheng和J.-F.Chamberland，“一种用于无源随机接入高斯信道的与用户无关的串行干扰消除编码方案”，载于 *IEEE*信息论研讨会（*ITW*）论文集。IEEE，2017年，第 121–125页。[6] E. Marshakov、G. Balitskiy、K.Andreev 和A. Frolov，“基于极化码的高斯多址信道无源随机接入”，载于*IEEE* 第*90*届车辆技术大会（*VTC2019-Fall*）论文集，2019年9 月，第 1–5 页。[7] A. K. Pradhan、V. K. Amalladinne、A. Vem、K. R.Narayanan 和J.-F.Chamberland，“稀疏 IDMA：一种用于无源随机接入的联合图编码方案”，*IEEE* 通信汇刊，第70 卷，第11期，第 7124–7133页，2022年。[8] A. K. Pradhan、V. K. Amalladinne、K. R.Narayanan 和 J.-F.Chamberland，“无源多址接入的极化编码和随机扩频”，载于*ICC 2020- 2020*年 *IEEE* 国际通信会议（*ICC*），2020年，第 1–6 页。[9] M.J.Ahmadi和 T. M. Duman，“具有功率分集的无源多址信道随机扩频”，*IEEE* 通信快报，第 25 卷，第12期，第 3995–3999页，2021年。[10] A. K. Pradhan、V. K. Amalladinne、K. R.Narayanan和J.-F. Chamberland，“带软干扰消除的低密度奇偶校验码-

用于非协调无源多址接入，”载于*ICC2021- IEEE*国际通信会议，2021年，第1–6 页。[11] V. K. Amalladinne、J.-F. Chamberland和K. R. Narayanan，“用于无源多址接入的编码压缩感知方案”，*IEEE* 信息论汇刊，第66卷，第 10 期，第 6509–6533 页，2020年。[12] A.Fengler、P.Jung 和 G. Caire，“用于无源随机接入的稀疏伪随机码”，*IEEE* 信息论汇刊，第67卷，第 10 期，第 6894–6915页，2021年。[13] V. K. Amalladinne、A. K. Pradhan、C. Rush、J.-F. Chamberland 和K.R. Narayanan，“采用编码压缩感知的无源随机接入：集成近似消息传递和置信传播”，*IEEE* 信息论汇刊，第68 卷，第 4期，第 2384–2409 页，2022年。[14] J. R.Ebert、V. K. Amalladinne、S. Rini、J.-F.Chamberland 和 K.R.Narayanan，“无源随机接入的编码解混”，2022年。 [在线]。可访问：https://arxiv.org/abs/2203.00239[15] M. Gkagkos、K. R.Narayanan、J.-F. Chamberland和 C. N. Georghiades，“FASURA：准静态大规模 MIMO 无源随机接入信道的一种方案”，2022年。 [在线]。可访问：https://arxiv.org/abs/2202.11042[16] K. Andreev、P. Rybin和A.Frolov，“采用列表可恢复码的无源随机接入编码压缩感知”，*IEEE* 通信汇刊，第70 卷，第12 期，第7886–7898 页，2022年。[17] J. Gao、Y. Wu、S. Shao、W. Yang和H.Vincent Poor，“有限码长下 MIMO 准静态瑞利衰落信道中大规模随机接入的能效”，*IEEE* 信息论汇刊，第 1–1页，2022年。[18] T. M. Cover 和 J. A. Thomas，《信息论基础》。John Wiley& Sons，2012年。[19] A. Mathai和 S. Provost，《随机变量的二次型》，统计学：教材与专著系列。Taylor & Francis，1992年。[20] Y.Gordon，“关于 Milman 不等式及穿过网格逃逸的随机子空间 $\mathbb{R}^n$”，载于泛函分析的几何方面，J.Lindenstrauss 和 V.D. Milman 编。柏林，海德堡：Springer 柏林海德堡，1988 年，第 84–106 页。