arXiv:2304.02601v2 [math.OC] 7 Feb 2024

用于电阻抗断层成像应用中重建二值图像的高效基于梯度的优化

Paul R. Arbic II

数学科学系，佛罗里达理工学院

Vladislav Bukshtynov*

数学与系统工程系，佛罗里达理工学院，墨尔本，佛罗里达州 *32901*，美国

摘要

本文开发并验证了一种新颖且高效的计算框架，用于重建二值图像，适用于各种复杂度的模型，可应用于多种生物医学领域。该框架结合了近期开发的优化方法的优势，这些方法利用具有定制几何形状的样本解和多尺度控制空间缩减，并配合基于梯度的技术，从而实现了较高的计算速度和精度。控制空间根据样本的几何形状及其各自的贡献得到有效缩减。整个三步计算流程设计简单易懂，所需调节参数数量少，因此易于在各种场景中实际应用。计算梯度的方法相当直接，使该框架兼容任何优化软件，包括黑箱软件。我们使用合成模型数据以及来自医学图像的数据，对完整计算框架在电阻抗断层成像（EIT）癌症检测二维反问题中的表现进行了测试；这些医学图像呈现了不同大小和形状的癌变区域的自然发展。结果表明，新方法性能优越，并具有显著潜力，可提升基于电阻抗断层成像（EIT）的整体流程质量。

关键词： 二值图像 ∘ 电阻抗断层成像 ∘ 癌症检测问题 ∘ 基于梯度的优化 ∘ 偏微分方程约束最优控制 ∘控制空间参数化 ∘ 噪声测量值

*通讯作者：vbukshtynov@fit.edu

1 引言

在本文中，我们提出了一种新颖的计算方法，用于生物医学图像的最优重建，以辅助识别癌变区域，同时求解癌症检测反问题（IPCD）。本文主要聚焦于将这一新方法应用于电阻抗断层成像（EIT）技术。不过，这种方法也很容易推广到生物医学、物理学、地质学、化学等领域的广泛问题中。电阻抗断层成像是一种快速发展的无创成像技术，过去几十年来日益受到关注，并使各种医学应用能够开展癌症检测筛查 [1, 3, 5, 11, 25, 28, 33]。该技术基于一个众所周知的事实：不同组织的电学性质（如电导率或介电常数）在健康状态与受癌症影响时有所不同。这一现象使电阻抗断层成像能够通过解读生物组织对施加的电压（电势）或注入电流的响应，生成组织图像 [5, 11, 16]。具体而言，逆电阻抗断层成像问题通过测量放置在受测介质表面电极处的电压或电流，重建电导率。这类 Calderón 型反问题 [15]高度不适定；读者可参阅 Borcea 的专题综述论文 [10]。自20世纪80年代以来，人们提出了各种计算技术，以计算方式求解这一高度非线性的反问题；关于电阻抗断层成像及其应用的当前研究水平和现存开放问题，请参阅近期的综述论文 [4, 9, 31] 。

我们特别关注于创建一种稳健且具有计算效率的基于电阻抗断层成像的优化框架，该框架可用于医疗实践中的各种应用，适用于处理由接近二值型分布的参数（如电导率）表征的模型。近期论文 [2, 17, 23] 提出将电阻抗断层成像逆问题表述转换为偏微分方程约束最优控制框架，并在不同尺度上应用多层次控制空间降维，以提高所得二值图像的质量。在 [6, 7], 中，作者提出了一种新颖（尽管相当简单）的计算算法，该算法围绕由一组样本解支持的无导数优化构建。这些样本基于对模拟现象的某些先验知识以及所得图像预期结构所确定的几何形状，通过合成方式生成。尽管易于并行化，使得能够在非常大的样本集上执行操作，并为初始猜测提供最佳近似，但实际应用可能仅限于对具有简单几何形状的癌变斑点进行重建，例如呈圆形的斑点。该算法还需要以近似属性（电导率）的形式，预先了解模拟现象，即了解健康组织和受癌症影响区域的相关属性。

在当前工作中，我们提出了一种广义的三步优化过程，消除了这些限制，使计算框架适用于各种复杂程度的模型。这种广义方法的优越性能是通过添加以下新的计算组件实现的。

(1) 我们设计了新的梯度计算方法和验证其正确性的方法，以进一步提升步骤 2 的计算性能，相关讨论见第 3.3 节。这些梯度是针对主流程中使用的所有控制变量计算的。

优化循环（所有三个步骤）。

(2) 我们还讨论了各种基于梯度的方法（优化器）的适用性，以进一步提高优化性能。

(3) 我们在 [6,7] 中提出的简化两步法的局限性，通过在当前流程中增加一个新的（第三）步骤，即二值调优优化得以克服，具体讨论见第3.4 节。我们在粗尺度上应用了基于多尺度的后处理滤波 [17,18] ，以进一步提升通过我们新的优化流程获得的最终输出图像的质量。

所提出的计算框架具有易于遵循的设计，分为三个阶段，并通过名义上的（即最少的）计算参数数量进行调优，使得该方法对于远超生物医学成像的各种应用的实际实施变得简单。我们通过计算测试了我们新算法的性能，在癌症检测的二维逆问题应用中使用合成生成的含噪数据以及从显示人体中自然形成的各种大小和形状的癌变区域的医学图像中获得的数据。

本文的结构如下。第 2 节给出了将逆电阻抗断层成像问题表述为最优控制问题的一般数学描述。第 3 节讨论了解决该优化问题的完整计算流程。第 4 节介绍了模型描述和详细的计算结果，包括对所选方法的讨论。第 5 节给出结论。

2 逆电阻抗断层成像问题

2.1 优化的数学模型

正如在 [2,7,17,23], 中详细讨论的那样，逆电阻抗断层成像问题被表述为一个偏微分方程约束最优控制问题。这里需要指出，尽管我们在整篇论文中都以非常一般的意义提及控制理论，但我们可以将这一表述视为针对一个开放且有界的集合（区域）Ω $\subset \mathbb{R}^n,\ n = 2,$ 3的偏微分方程约束优化问题实例，该集合表示一个在点$x \in$ Ω处具有由函数 $\sigma(x)$:Ω $\to \mathbb{R}_+$给出的电导率的身体。在本文中，我们采用所谓的“电压–电流”模型，其中电压（电势） $U =(U_\ell)_{\ell=1}^m \in \mathbb{R}^m$ 被施加到m 电极（E_ℓ）$_{\ell=1}^m$ 上，其接触阻抗（Z_ℓ）$_{\ell=1}^m \in \mathbb{R}_+^m$ 满足接地（零电势）条件

$$\sum_{\ell=1}^{m} U_\ell = 0. \tag{1}$$

这些电压会通过放置在区域 Ω 边缘的相同电极产生电流 $(I_\ell)_{\ell=1}^m \in \mathbb{R}^m$ E_ℓ ∂。我们计算电流

$$I_\ell = \int_{E_\ell} \sigma(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n}\, ds, \quad \ell = 1, \ldots, m \tag{2}$$

根据电导率场 $\sigma(x)$ 和电势 $u(x)$ 的分布：$\Omega \to \mathbb{R}$，通过求解以下椭圆问题得到

$$\nabla \cdot [\sigma(x)\nabla u(x)] = 0, \quad x \in \Omega \tag{3a}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega - \bigcup_{\ell=1}^{m} E_\ell \tag{3b}$$

$$u(x) + Z_\ell \sigma(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} = U_\ell, \quad x \in E_\ell,\ \ell = 1, \ldots, m \tag{3c}$$

其中，n 是 $\partial\Omega$上的外单位法向量。有关电流计算层析成像中所用电极模型的完整描述与分析，可参见 [26]。

我们将(3)中的电导率 $\sigma(x)$设为控制变量（或优化变量；见本节开头的备注），并将逆电阻抗断层成像（电导率）问题 [15] 表述为PDE约束最优控制问题 [2]，通过考虑失配的最小二乘最小化$(I_\ell - I_\ell^*)^2,$，其中$(I_\ell^*)_{\ell=1}^m \in \mathbb{R}^m$ 是电流 I_ℓ的测量值。此外，我们必须提及一个众所周知的事实，即要在离散化区域Ω中求解的这个逆电阻抗断层成像问题是高度不适定的。因此，我们通过添加新的测量值，按照 [2] 中详细描述的“旋转方案”，将数据扩大到 m^2 的大小，同时保持未知参数的大小，即 $\sigma(x)$的离散化描述中的元素，固定不变。有了新的数据集$\mathcal{D}^* = \left\{I_\ell^{k*}\right\}_{\ell\ ,k=1}^{m}$，并且鉴于与(2)一起使用的Robin条件(3c)，我们定义了代价泛函的完整形式

$$\mathcal{J}(\sigma) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m}\left[\int_{E_\ell} \frac{U_\ell^k - u^k(x;\sigma)}{Z_\ell}\, ds - I_\ell^{k*}\right]^2 \tag{4}$$

对于最优控制问题

$$\hat{\sigma}(x) = \underset{\sigma}{\operatorname{argmin}}\ \mathcal{J}(\sigma) \tag{5}$$

由于每个函数 $u^k(\cdot;\ \sigma)\quad k = 1, \ldots, m$ 都满足椭圆PDE（前向电阻抗断层成像）问题(3)中的PDE约束。在此，我们假设 (5) 中的最优解 $\hat{}\sigma(x)$是唯一的。我们还注意到，在应用 (2)并添加一些噪声后，这些解可用于为逆EIT问题生成各种模型示例（合成数据），以恰当地模拟我们上文提到的受癌症影响区域的存在。

2.2 通过基于样本的参数化求解

鉴于我们寻求重建的解的二元类型，我们假设实际（真实）电导率 $\sigma_{true}(x)$ 表示为

$$\sigma_{true}(x) = \begin{cases} \sigma_c, & x \in \Omega_c, \\ \sigma_h, & x \in \Omega_h, \end{cases} \quad \Omega_c \cap \Omega_h = \emptyset, \tag{6}$$

其中 σ_c 和 σ_h 分别是癌变区域 Ω_c 和健康组织部分 Ω_h 的一些常数。因此，我们寻求 (5) 的解，其形式为线性（凸）组合

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i \bar{\sigma}_i(x), \qquad 0 \le \alpha_i \le 1, \qquad \sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i = 1, \tag{7}$$

其中 $\bar{\sigma}_i(x)$、 $i = 1$、.....、 N_s 是基于 (6) 中给出的解结构一般假设而合成生成的样本解；详见第 3.1 节。所提出的用于求解优化问题 (5) 的计算算法可分三步执行，并需要一个预处理阶段（步骤 0），如下简要所示，并在第 3 节中详细说明。

步骤 0： 预处理包括选择（近似）(6) 中的常数 σ_c 和 σ_h 、确定样本解 $\bar{\sigma}_i$ 的几何形状，并生成包含 N 个样本的集合 $\mathcal{C}(N)$，其对应的“测量值”通过 (2)–(3) 获得；详见第 3.1 节。

步骤 1： 样本的初始基

$$\mathcal{B}^0 = \{\bar{\sigma}_i(x)\}_{i=1}^{N_s} \subset \mathcal{C}(N) \tag{8}$$

通过从 $\mathcal{C}(N)$ 中选择就代价泛函 (4) 而言提供最佳测量拟合的 N_s 个“最佳”样本来定义（我们在第 3.2 节中进一步阐述此初始化过程）。此基将作为步骤 2 中执行的细尺度优化的初始猜测。

步骤2： 描述基 $\mathcal{B}^0$ 和权重 α_i 在 (7)–(8)中的所有参数都被设为控制变量，以执行基于梯度的优化，从而数值求解问题(5)，以在细尺度（即使用细网格，在该网格上我们˜重建电导率 $\sigma(x)$ 的图像）下，通过最优控制集$(\mathcal{B}, \hat{}\alpha)$ 找到最优解 $\hat{}\sigma(x)$，如第 3.3 节所示。

步骤3： 随后，使用多尺度优化算法，将精细尺度的最优解 $\hat{}\sigma(x)$ 从精细尺度移动到粗尺度（即 $\hat{}\sigma_b(x)$ 离开的尺度），最终进行微调，以生成最优二值图像 $\hat{}\sigma_b(x)$。此处，我们用“粗尺度”表示一个升尺度（降维）的控制空间，其中仅包含少量控制变量，分别表示每个癌变区域内部及外部的高、低电导率对应的重建值。简而言之，此步骤将通过将步骤 2 中获得的精细尺度解重新创建为分段常数重建来对其进行微调；更多详情请参阅第 3.4 节。

为了进一步评论整个方法背后的“哲学”，我们重申，步骤 2 的细尺度优化用于近似具有高电导率和低电导率值的区域的位置 $\sigma(x)$，并且在步骤3中将获得的解投影到粗尺度上，为细尺度图像提供了一种动态（锐边）滤波，这些图像经过优化以更好地表示癌变区域的结构（即其位置和边界）。

3 基于梯度的优化框架

3.1 步骤 0：样本预处理

在不损失一般性的情况下，本文讨论将新算法应用于求解二维（$n = 2$）区域中的优化问题（5），例如，

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\|^2 < R^2 \right\}, \tag{9}$$

其为半径为 R 的圆盘。不过，同一概念也可以轻松扩展到具有各种复杂程度的三维（$n = 3$）区域。

完整的 N 样本集合

$$\mathcal{C}(N) = \{\bar{\sigma}_i(x)\}_{i=1}^{N}, \qquad N \gg N_s \tag{10}$$

可以基于对具有二值类型限制的重建图像的（几何）结构所作的各种假设生成。在此，我们假设，通过组合二维中的简单凸几何形状（元素），例如三角形、正方形、圆等，可以实现对各种复杂程度的图像进行灵活重建，同时保持便捷的简洁性。例如，在本文中，$\mathcal{C}$（N）中的第 i 个样本由具有各种半径 $r \in \mathbb{R}_+$ 和中心 $x^0 =$（x^{01}, x^{02}）的 N_c^i 个圆组成，这些圆位于区域 Ω 内，即，$\in \mathbb{R}^2$

$$\bar{\sigma}_i(x) = \begin{cases} \tilde{\sigma}_c, & | \, x - x_j^0 \, |^2 \leq r_j^2, \quad j = 1, \ldots, N_c^i \\ \tilde{\sigma}_h, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{11}$$

其中，需要对式（6）中的相应 σ_c 和 σ_h 采用某些近似 $\tilde{\sigma}_c$ 和 $\tilde{\sigma}_h$，并将其视为在实践中应用该方法所需的 先验 知识。在式（11）中，所有 N_c^i 个圆（即癌变区域）均由三元组集合参数化

$$\mathcal{P}_i = \left\{ (x_j^{01}, x_j^{02}, r_j) \right\}_{j=1}^{N_c^i}, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{12}$$

在满足以下限制条件的情况下随机生成

$$\begin{aligned} | \, x_j^0 \, | &< R + r_j, \qquad j = 1, \ldots, N_c^i, \\ 1 \leq N_c^i &\leq N_{c,\max}, \qquad i = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{13}$$

式 (13) 中的参数$N_{c,\ \max}$ 定义了样本中圆的最大数量，实际上也设定了重建图像的最高复杂度（分辨率） [6, 7]有关此预处理步骤技术细节的更多信息，请参阅。

完成预处理过程需要求解正问题 (3)，并对所有样本在 $\mathcal{C}(N)$中评估代价泛函 (4) N次。使用固定的电势方案 U，全部“测量”数据 $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^{N}$（其中 $\mathcal{D}_i = I_\ell^k(\bar{\sigma}_i) \in \mathbb{R}^{m^2}$）通过 (2)–(3) 预先计算，然后存储起来，以便与不同模型多次使用。此外，该任务可以以极小的计算开销并行运行，从而能够轻松地在各种电势方案之间切换。易于并行化使得可以将 N 取为相当大的值，这有助于在继续执行步骤 2 之前，于步骤 1 中通过基 $\mathcal{B}$ 的初始状态更好地逼近解。

3.2 步骤 1：初始化样本基

我们将初始基中的样本数 N_s $\mathcal{B}^0$ 设为算法的超参数，并在对模型复杂度作出假设或经过实验后，以启发式方式确定。我们建议 N_s 应足够大，以便在步骤 2 期间充分支持对最优解 $\hat{}\sigma(x)$进行局部/全局搜索。同时，在求解问题 (5) 时，该数量应使控制变量总数与数据规模相当，即 m^2，从而满足 Hadamard 意义下优化问题解的适定性要求 [21]。

考虑结构极其复杂的模型，可能需要增加所选基 $\mathcal{B}^0$中每个样本的元素数量（在我们的例子中为圆）。在这种情况下，可以将参数 N_c^i、 $i = 1$、……， N_s重新设定为更高的值，并添加缺失的元素，例如随机生成新的圆。这会将初始基 $\mathcal{B}^0$ 投影到维度更高的新控制空间，以尽量减小初始解 $\sigma(\mathcal{B}^0$、 $\alpha^0)$质量的损失。

使用计算得到的代价泛函 (4)，将 $\mathcal{C}(N)$ 中的所有样本按升序排序，并将获得的数据 $\mathcal{D}$ 与实际测量数据中可用的真实数据 $\mathcal{D}^*$ 进行比较，即可完成步骤 1。排序后，前 N_s 个样本构成初始基 $\mathcal{B}^0$ ，用于构造解 $\sigma(\mathcal{B}^0,\ \alpha^0)$，并将其用作步骤 2 中优化的初始猜测。

3.3 步骤 2：精细尺度梯度优化

如第 3.1 节所述，在步骤 1 的排序过程中得到的基 $\mathcal{B}^0$ 的所有样本中的所有元素（圆）都由与集合 $\{\mathcal{P}_i\}_{i=1}^{N_s}$ 相关的有限个“基于样本”的参数表示。一般而言，解 $\sigma(x) = \sigma(\mathcal{P},\ \alpha)$ 可以由集合 $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_i\}_{i=1}^{N_s}$ 和权重向量 $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^{N_s}$ 唯一表示。我们用其新的等价形式替代连续形式的最优控制问题 (5)

$$(\hat{\mathcal{P}}, \hat{\alpha}) = \underset{\mathcal{P},\alpha}{\operatorname{argmin}}\ \mathcal{J}(\mathcal{P}, \alpha) \tag{14}$$

并在 PDE约束 (3)、(7) 中关于 α_i 的线性约束以及为组合控制集合 $(\mathcal{P},\ \alpha)$ 的所有分量适当设定的界限下进行数值求解。根据这种新控制的结构，参数化解空间的维数自然有上界

$$\dim(\mathcal{P}, \alpha) \leq N_s \cdot [N_{c,\max}(n+1)+1]. \tag{15}$$

为迭代求解（14），可以选择各种标准，在第 k次迭代时终止优化过程，例如，比较代价泛函 $\mathcal{J}^k$ 在完成 k 次迭代后评估得到的相对降幅

$$\frac{|\,\mathcal{J}^k - \mathcal{J}^{k-1}\,|}{\mathcal{J}^k} < \epsilon, \qquad k > 0 \tag{16}$$

使用预设容差 $\epsilon \in \mathbb{R}_+$。

先前关于使用基于样本的参数化 [6,7] 的工作采用坐标下降法 (CD) 来求解 (14)。虽然在应用于简单模型时取得了良好性能，但 CD 显然存在某些局限性，因为它一次只优化单个控制变量。在没有适当并行化的情况下，它需要大量的代价泛函评估，因此需要大量计算时间才能以合理较小的 ϵ 完成优化。相反，我们的新优化框架采用相当直接的方法来计算相对于控制集中所有控制变量的梯度 $(\mathcal{P}, \alpha)$。

我们通过参考相对于控制变量 σ获得的梯度 $\mathcal{J}'_\sigma$ 的已知结构 [2,17,23]，开始推导相对于集合 $\mathcal{P}$ 中基于样本的参数和权重 α 的梯度

$$\mathcal{J}'_\sigma = -\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{\nabla}\psi^k(x) \cdot \boldsymbol{\nabla}u^k(x) \tag{17}$$

基于以下伴随偏微分方程问题的解 $\psi^k(\cdot;\, \sigma) : \Omega \to \mathbb{R},\ k = 1, \dots, m$ 计算得出

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot [\sigma(x)\boldsymbol{\nabla}\psi(x)] &= 0, && x \in \Omega \\
\frac{\partial \psi(x)}{\partial n} &= 0, && x \in \partial\Omega - \bigcup_{\ell=1}^{m} E_\ell \\
\psi(x) + Z_\ell \frac{\partial \psi(x)}{\partial n} &= 2\beta_\ell \left[\int_{E_\ell} \frac{u(x) - U_\ell}{Z_\ell}\, ds + I^*_\ell \right], && x \in E_\ell, \\
& && \ell = 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{18}$$

首先，我们推导代价泛函 $\mathcal{J}$ 相对于控制变量 α 的梯度 $\boldsymbol{\nabla}_\alpha \mathcal{J}$。利用解 $\sigma(x)$ 与由 (7) 显式提供的单个样本 $\bar{\sigma}_i$ 权重 α_i 的连通性，偏导数

$$\frac{\partial \sigma(x)}{\partial \alpha_i} = \bar{\sigma}_i, \quad i = 1, \dots, N_s \tag{19}$$

然后用于构造梯度

$$\boldsymbol{\nabla}_\alpha \sigma = [\bar{\sigma}_1\ \bar{\sigma}_2\ \dots \bar{\sigma}_{N_s}]^T \triangleq \bar{\sigma}. \tag{20}$$

然后使用链式法则得到所求的梯度

$$\boldsymbol{\nabla}_\alpha \mathcal{J} = \boldsymbol{\nabla}_\alpha \sigma \cdot \mathcal{J}'_\sigma = \bar{\sigma} \cdot \mathcal{J}'_\sigma. \tag{21}$$

我们还注意到，在离散化设置中（当区域Ω 进行 N_Ω 分量离散化时），$\bar{\sigma}$ 和 $\mathcal{J}'_\sigma$ 分别表示为 $N_s \times N_\Omega$ 矩阵和 N_Ω 分量列向量。

最后，梯度 $\boldsymbol{\nabla}_{\mathcal{P}}\mathcal{J}$（代价泛函 $\mathcal{J}$ 关于基于样本的控制 $\mathcal{P}$）以同样的方式，利用链式法则和预先计算的梯度 $\mathcal{J}'_{\sigma}$ 推导得出。

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathcal{P}}\mathcal{J} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathcal{P}}\sigma \cdot \mathcal{J}'_{\sigma}. \tag{22}$$

由于 $\sigma(\mathcal{P}, \alpha)$ 的几何形状较为复杂，推导 $\boldsymbol{\nabla}_{\mathcal{P}}\sigma$ 似乎并不容易：它可能既没有简单明了的结构，也可能因 (11)–(13) 中所述过程具有随机性而无法获知。然而，近期研究 [24, 29] 表明，当基于伴随方法的分析中使用的某些偏导数通过数值扰动近似时，可以采用一种灵活的方法。我们可以方便地调整这一方法，因为在当前框架下，无需重新评估代价泛函：只需评估与样本解 $\bar{\sigma}_i$ 自身参数 $\mathcal{P}_i$ 相关的变化。因此，我们对控制集 $\mathcal{P}$ 中的每个参数 $\mathcal{P}_i$ 进行扰动。

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \mathcal{P}_i} \approx \frac{\Delta \sigma}{\Delta \mathcal{P}_i} = \alpha_i \frac{\Delta \bar{\sigma}_i}{\Delta \mathcal{P}_i}, \quad i = 1, \ldots, N_s \tag{23}$$

通过将所有扰动 $\Delta\mathcal{P}_i$ 设置为数值，在足够小以确保对 $\partial\sigma/\partial\mathcal{P}_i$ 进行有限差分（FD）估计的精度、同时又足够大以防止分子为零之间寻求折中。

3.4 步骤3：粗尺度二元调优优化

在最后一步中，我们采用一种近期设计的基于梯度的方法，通过结合使用主成分分析（PCA）的多层次控制空间降维与动态控制空间升尺度，支持多尺度优化 [17, 23]。如前所述，该步骤包括将细尺度解 $\hat{}\sigma(x)$ 投影到粗尺度（即新的升尺度控制空间，其控制变量数量显著减少），以对细尺度图像执行动态（锐边）滤波。由粗尺度解 $\hat{}\sigma_b(x)$ 表示的新图像经过优化，以更好地表示癌症影响区域的结构（即其位置和边界）。在 [17, 23], 中介绍的完整方法中，我们仅采用粗尺度阶段，将其应用于步骤 2 中获得的细尺度解 $\hat{}\sigma(x)$。

首先，我们必须指定癌症影响区域（高电导率区域）的最大（预期）数量 $N_{\max}$。将区域 Ω 的健康部分（低电导率区域 Ω_h）视为单个区域后，对表示区域 Ω 的细网格单元进行划分，将创建$N_\zeta = N_{\max} + 1$ 个空间子集。为了在粗尺度上进行步骤3优化，我们定义一个新的控制向量 $\zeta = (\zeta_j)_{j=1}^{2N_{\max}+1}$ ，其维度显著降低，其中第一个元素是与健康区域 Ω_h 相关联的二值电导率低值 $\sigma(x)$。接下来的 $N_{\max}$ 个控制变量是 $\sigma(x)$ 的高值，与区域 Ω_c 中受癌症影响的区域相关，即：

$$\zeta_1 = \sigma_{low}, \quad \zeta_2 = \sigma_{high,1}, \quad \zeta_3 = \sigma_{high,2}, \quad \ldots, \quad \zeta_{N_{\max}+1} = \sigma_{high,N_{\max}}. \tag{24}$$

其余 $N_{\max}$ 组件

$$\zeta_{N_{\max}+2} = \sigma_{th,1}, \quad \zeta_{N_{\max}+3} = \sigma_{th,2}, \quad \ldots, \quad \zeta_{2N_{\max}+1} = \sigma_{th,N_{\max}} \tag{25}$$

负责这些 $N_{\max}$ 癌变区域的形状。它们被设为分离阈值，用于定义低电导率区域与高电导率区域之间的边界。控制 ζ 的结构允许基于当前的细尺度参数化 $\sigma(\zeta^k) = (\sigma_i(\zeta^k))_{i=1}^{N_\Omega}$，创建第 k次迭代时控制 σ^k 的粗尺度解ζ^k 的系统表示，即，

$$\sigma_i^k = \begin{cases} \sigma_{low}^k, & \sigma_i(\zeta^k) < \sigma_{th,n}^k, \\ \sigma_{high,n}^k, & \sigma_i(\zeta^k) \geq \sigma_{th,n}^k, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, N_\Omega, \quad 1 \leq n \leq N_{\max}. \tag{26}$$

这里，$n = n(i)$ 表示根据当前建立并用于第 k 次迭代 [17] 的划分映射所定义的特定癌变区域的编号。我们还注意到

$$\begin{gathered} 0 < \sigma_{low}^k < \min_{1 \leq n \leq N_{\max}} \sigma_{high,n}^k, \\ \min_{1 \leq i \leq N_\Omega} \sigma_i(\zeta^k) < \sigma_{th,n}^k < \max_{1 \leq i \leq N_\Omega} \sigma_i(\zeta^k), \quad n = 1, \ldots, N_{\max}. \end{gathered} \tag{27}$$

简单来说，(26) 给出了一条规则，根据控制变量 ζ^k 的当前状态（第 k 次迭代），将离散化的细尺度解 $\hat{}\sigma$ 划分为细到粗的区域，其中所有空间单元 $\hat{}\sigma_i$ 均属于癌变区域 Ω_c ($\hat{}\sigma_i = \sigma_{high,\,n}$, $n = 1, \ldots N_{\max}$) 或健康组织部分 Ω_h ($\hat{}\sigma_i = \sigma_{low}$)。

在步骤3（粗尺度优化）阶段，通过求解以下 ζ 空间中的（$2N_{\max}+1$）维优化问题来更新控制变量 σ^k

$$\hat{\zeta} = \operatorname*{argmin}_{\zeta} \mathcal{J}(\zeta) \tag{28}$$

$\hat{}$ 满足 (27) 中给出的约束（边界），其最优（二元）解为 $\hat{}\sigma_b(x) = \sigma(\zeta)$。对于需要计算梯度的任意方法，要通过这些方法求解 (28)，其前 $N_{\max}+1$ 个分量可利用 [23] 中推导、并在 [17] 中针对多个癌变区域的情况加以改进的梯度求和公式轻松求得

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\zeta)}{\partial \zeta_j} = \sum_{i=1}^{N_\Omega} P_{i,j} \mathcal{J}'_{\sigma,i} \Delta_i, \quad j = 1, \ldots, N_{\max}+1. \tag{29}$$

此处，$\mathcal{J}'_{\sigma,\,i}$ 是离散梯度 $\mathcal{J}'_\sigma$ 的第 i 个分量，而 $P_{i,\,j}$ 是划分（指示）函数，定义为

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1, & \sigma_i \in C_j, \\ 0, & \sigma_i \notin C_j, \end{cases} \tag{30}$$

在采用(26)完成分区图后。在(30)中，C_1 是健康区域 Ω_h的当前表示，而 C_{n+1}、$n = 1, \ldots, N_{\max}$ 是癌症区域 Ω_c 的各个部分。

其余 $N_{\max}$ 组件可通过有限差分格式进行近似，例如一阶格式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{J}(\zeta)}{\partial \zeta_j} &= \frac{1}{\delta_\zeta}\left[\mathcal{J}\left(\sigma^k(\ldots,\zeta_j+\delta_\zeta,\ldots)\right)-\mathcal{J}\left(\sigma^k(\ldots,\zeta_j,\ldots)\right)\right]+\mathcal{O}(\delta_\zeta),\\ n&=1,\ldots,N_{\max},\quad j=n+N_{\max}+1\end{aligned} \tag{31}$$

每次优化迭代最多需要额外进行 $N_{\max}$ 次代价泛函评估。按照第 3.3 节中的相同讨论，式(31)中的参数 δ_ζ 可以通过实验确定，在足够小以确保精度与足够大以避免分子为零之间进行权衡。

事实上，公式 (26)–(28)完整描述了步骤3从细尺度到粗尺度的投影（或者，正如我们之前所称的，粗尺度二值调优），用于通过细尺度最优控制$\hat{}\sigma(x)$获得最优的（就对数据 $\mathcal{D}^*$ 的数据拟合而言）二值分布 $\hat{}\sigma_b(x)$。这里需要对步骤3的二值调优优化性能作一个重要说明。正如 $[17, 23]$, 中的多个示例所示，如果根据对相同数据 $\mathcal{D}^*$ 的数据拟合进行评估，粗尺度解 $\hat{}\sigma_b$ 的“质量”通常比细尺度图像 $\hat{}\sigma$ 的质量差。这种影响是意料之中的，因为粗尺度使用的参数数量（步骤3控制变量 ζ的分量）显著减少，实际上是在应用锐边滤波后重构电导率 $\sigma(x)$ 的分片常数表示，以便根据癌变区域的位置和边界更好地表示其结构。如果所使用的数据包含噪声，此类解甚至可能损失更多“质量”。

第4节中针对多个不同复杂度模型给出的广泛计算结果证实了整个优化框架的高效性。算法1总结了采用基于样本的参数化和多尺度控制空间降维来执行我们新的二值调优的完整计算框架。

4 计算结果

4.1 二维模型设置

我们的优化框架集成了用于求解正向偏微分方程问题(3)、伴随偏微分方程问题 (18)、根据 (4) 评估代价泛函，以及根据(17)、(21)、(22)和(29)–(31)构建梯度的计算功能。这些功能使用FreeFEM [22]集成，FreeFEM [22]是一种开源的高级集成开发环境，用于基于有限元法（FEM）获得偏微分方程的数值解。为数值求解正向偏微分方程问题(3)，通过实现有限元三角形单元进行空间离散：分别为电势 $u(x)$和电导率场 $\sigma(x)$采用 P2 分片二次（连续）表示和P0 分片常数表示。在这种离散化之后得到的代数方程组使用 UMFPACK 求解，这是一种

算法1 二值图像中基于梯度的优化计算流程

重建

设置参数： N、 N_c ，最大值， N_s

步骤0 样本预处理

对于 $i \leftarrow 1$ 至 N，**执行**

通过 (11)–(13) 生成 $\bar{\sigma}_i$({v2)

从样本 $\bar{\sigma}_i$ 通过 (2)–(3) 获得数据 $\mathcal{D}_i = I_\ell^k(\bar{\sigma}_i)$

结束循环

步骤 1 正在初始化样本基

选择模型并获取真实数据 $\mathcal{D}^*$

适用于 $i \leftarrow 1$ 到 N

根据 (4) 计算 $\mathcal{J}(\bar{\sigma}_i)$

结束 for 循环

从 $\mathcal{C}(N)$ 中按值 $\mathcal{J}(\bar{\sigma}_i)$ 选择 N_s 个最佳样本

形成初始基 $\mathcal{B}^0$

设置初始权重 α^0

通过式 (7) 使用 $\mathcal{B}^0$ 和 α^0 计算 $\sigma^0(x)$

步骤 2 细尺度优化

$k \leftarrow 0$

重复

计算状态 u^k 通过求解 (3)

通过求解 (18) 计算伴随状态 ψ^k

计算梯度 $\mathcal{J}'_\sigma$ 使用 (17)

通过(22)–(23) 和 (19)–(21) 分别获得梯度 $\boldsymbol{\nabla}_{\mathcal{P}}\mathcal{J}$ 和 $\boldsymbol{\nabla}_{\alpha}\mathcal{J}$

使用梯度 $\boldsymbol{\nabla}_{\mathcal{P}}\mathcal{J}$和 $\boldsymbol{\nabla}_{\alpha}\mathcal{J}$更新控制集 $(\mathcal{P}, \alpha)$

$k \leftarrow k + 1$

根据式 (7)，使用新的基 $\mathcal{B}^k = \mathcal{B}(\mathcal{P}^k)$ 和权重 α^k 更新 $\sigma^k(x)$

直到满足终止准则 (16)，达到给定容差 ϵ

获得最优解 $\hat{}\sigma(x) = \sigma(\hat{\mathcal{B}}, \hat{}\alpha)$

步骤3 粗尺度二值调优

$k \leftarrow 0$

$\sigma_i^0 \leftarrow (\hat{}\sigma_i)_{i=1}^{N_\Omega}$

根据 (26)–(27) 定义 ζ^0

重复

使用 (29)–(31) 计算梯度 $\boldsymbol{\nabla}_{\zeta}\mathcal{J}$

使用梯度 $\boldsymbol{\nabla}_{\zeta}\mathcal{J}$ 更新控制量 ζ

$k \leftarrow k + 1$

使用 (26) 更新 σ_i^k

直到 满足给定容差的终止准则 (16) ϵ

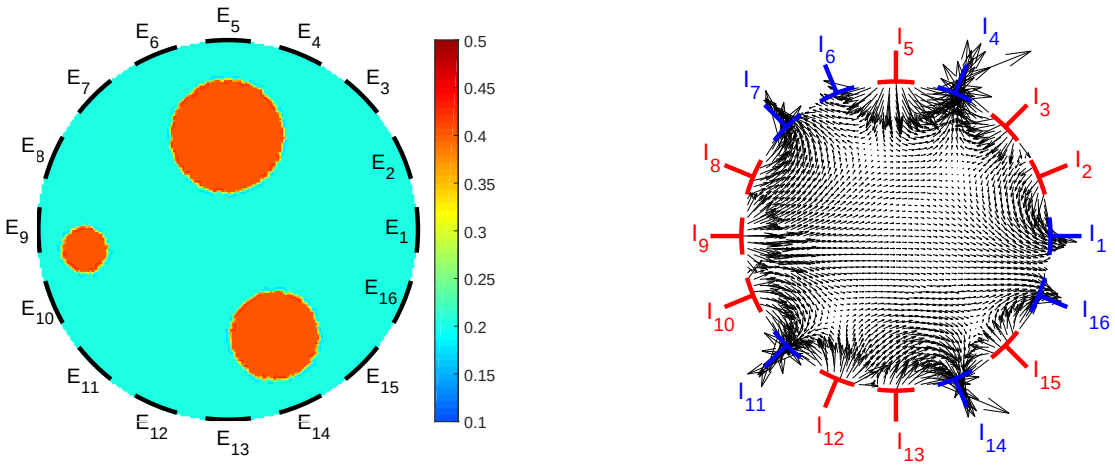
获得最优解 $\hat{}\sigma_b = \sigma_i(\hat{\zeta})$

用于非对称稀疏线性系统的求解器 [19]。同一技术也用于伴随问题的数值解 (18)。

所有计算均使用一个二维域 (9)，该区域是半径为 $R = 0.1$的圆盘，设有 $m = 16$ 个等距电极 E_ℓ，每个电极的半宽为 $w = 0.12$ 弧度，覆盖区域 $\partial\Omega$ 边界的大约 61%，如图1(a)所示。电势

$$(U_\ell)_{\ell=1}^{16} = \{-3, +1, +2, -5, +4, -1, -3, +2, +4, +3, -3, +3, +2, -4, +1, -3\}$$

按照第 2.1 节讨论的"旋转方案"向电极 E_ℓ 施加电势，并使其与接地电势条件 (1) 保持一致。图 1(b) 展示了电阻抗断层成像过程中，区域 Ω 内电势的通量分布 $\sigma(x)\nabla u(x)$ u 以及测得的电流 $(I_\ell^*)_{\ell=1}^{16}$ 的示例。在确定 (3c) 中边界条件的 Robin 部分时，我们将电极接触阻抗统一设为 $Z_\ell = 0.1$。



(a) 模型#1 (b)

图 1： (a) EIT 模型#1：真实电导率 $\sigma_{true}(x)$以及分布在边界 $\partial\Omega$ 上的等间距电极几何形状 E_ℓ。(b) 在电极 E_ℓ 处产生的电流 I_l （红色表示正电流，蓝色表示负电流）。黑色箭头显示了区域 Ω 内部电势 u 的通量 $\sigma(x)\nabla u(x)$分布。

对于每个模型，我们要重建的实际（真实）电导率 $\sigma_{true}(x)$通过设定 $\sigma_c = 0.4$ 和 $\sigma_h = 0.2$ 在公式(6)中进行解析定义，除非另有说明。步骤2 中控制量 $\mathcal{P}$ 的初始猜测由完成步骤1后获得的初始基 $\mathcal{B}^0$ 的参数化提供。对于控制量 α，初始值设为相等，即，

$\alpha_i^0 = 1/N_s$。控制 ζ 在步骤3中的初始状态近似为

$$\begin{aligned}
\sigma_{th,n}^0 &= \sigma_{ini} = \frac{1}{2}\left[\max_{1\le i\le N_\Omega} \sigma_i(\zeta^0) + \min_{1\le i\le N_\Omega} \sigma_i(\zeta^0)\right], \\
\sigma_{low}^0 &= \operatorname*{mean}_{1\le i\le N_\Omega} \left\{\sigma_i(\zeta^0) :\ \sigma_i(\zeta^0) < \sigma_{ini}\right\}, \\
\sigma_{high,n}^0 &= \operatorname*{mean}_{1\le i\le N_\Omega} \left\{\sigma_i(\zeta^0) : P_{i,n+1} = 1,\ \sigma_i(\zeta^0) \ge \sigma_{ini}\right\}, \\
n &= 1, \ldots, N_{\max}.
\end{aligned} \tag{32}$$

终止准则由式 (16)中的容差 $\epsilon = 10^{-9}$ 和代价泛函评估总次数 50,000 共同设定，以先达到者为准。

为生成第 3.1节中讨论的 $\mathcal{C}(N)$ 集合中的样本，我们使用 $N = 10,000$和$N_{c,max} = 8$。该集合使用均匀分布随机数生成器预先计算得到。因此，每个样本 $\bar{\sigma}_i(x)$“包含”一至八个带有 $\sigma_c = 0.4$ 的“癌症影响”区域。每个区域都随机位于区域 Ω 内，并由随机选择半径 $0 < r \le 0.3R$ 的圆表示，如图2 所示。此外，对于本文展示的所有数值实验，我们将样本数量 N_s 固定为10。最后，我们之前的研究结果 [6,7] 证实，我们的基于样本的参数化使所得结果对于测量值中存在的噪声具有高水平的稳定性。因此，对于本文展示的所有数值实验，我们使用受到0.5% 正态分布（高斯）噪声污染的测量数据。

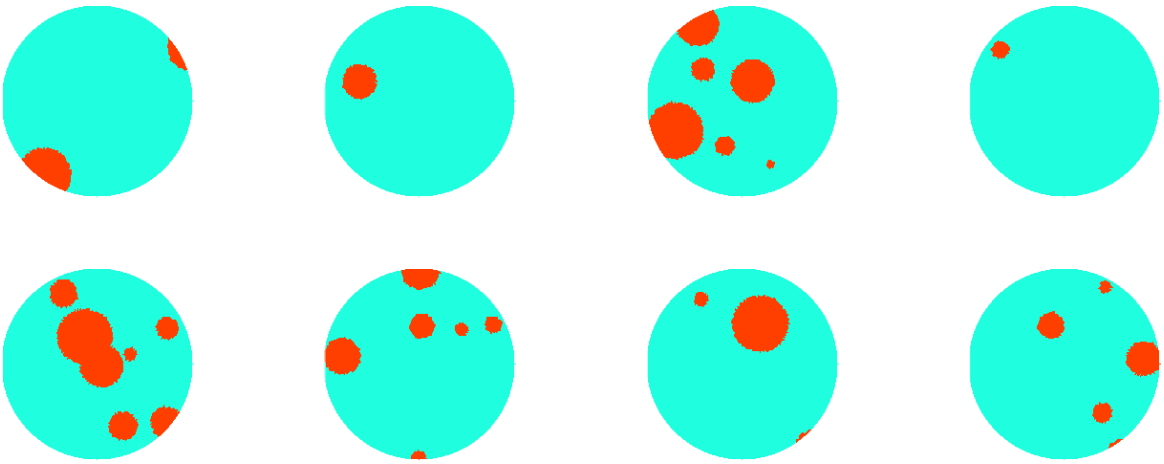


图 2： 前 8 个样本解 $\bar{\sigma}_i(x)$ $i = 1, \ldots, 8$，来自集合 $\mathcal{C}(10,000)$。

4.2 优化框架验证

为了展示第 3 节所述所提出的计算框架的适用性，并通过一系列步骤检验其在求解过程中整体表现的

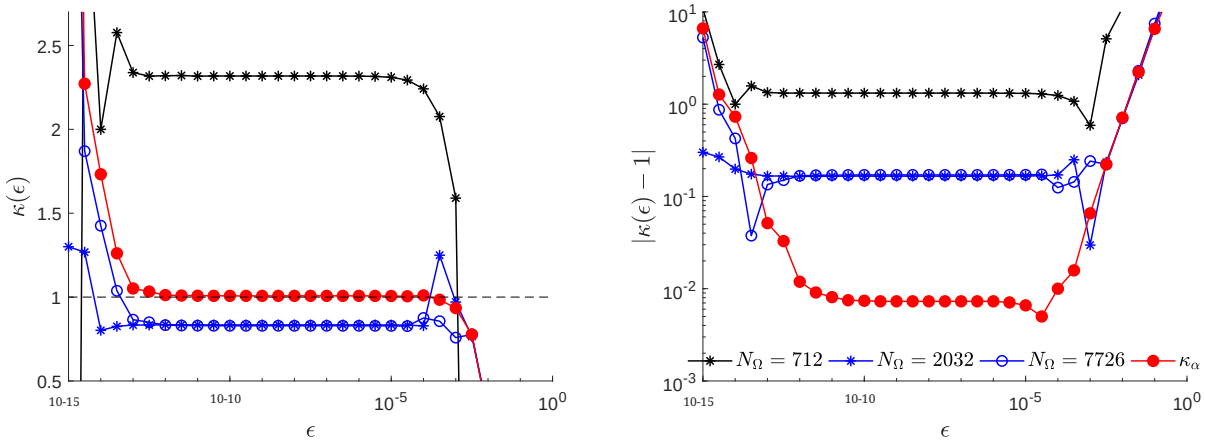
逆电阻抗断层成像问题中，我们使用模型#1，该模型包含三个大小各异的圆形癌变区域，如图1(a)所示。我们使用此模型来模拟一种典型情况：受癌症影响的生物组织中包含若干疑似为肿瘤的斑点，因此具有较高的电导率。

4.2.1 梯度验证

基于梯度的概念是所提出方法的核心；因此，我们的首批结果展示了针对各种控制变量（优化变量）计算的梯度的一致性，如第 3.3 节所述。图3和图4显示了诊断测试（κ-test）的结果，该测试常用于验证离散化梯度的正确性；参见例如 [12–14, 17]。它包括计算方向导数，例如$\mathcal{J}'(\alpha;\delta\alpha) = \langle \nabla_\alpha \mathcal{J}, \delta\alpha \rangle_{L_2}$，针对一些选定的变化（扰动） $\delta\alpha$，以两种不同的方式：即使用有限差分近似与使用（21）结合（20）和（17），然后检查这两个量的比值，即

$$\kappa_\alpha(\epsilon) = \frac{\frac{1}{\epsilon}\left[\mathcal{J}(\alpha + \epsilon\,\delta\alpha) - \mathcal{J}(\alpha)\right]}{\int_\Omega \nabla_\alpha \mathcal{J}\,\delta\alpha\,dx} \tag{33}$$

对于 ϵ 的一系列取值。如果这些梯度计算正确，那么对于 ϵ 的中间取值， $\kappa_\alpha(\epsilon)$ 将接近于 1。



(a) (b)

图 3： 在检查用于模型#1的梯度是否一致时，(a) $\kappa(\epsilon)$ 和 (b) $\log_{10}|\kappa(\epsilon) - 1|$ 随 ϵ 变化的情况。在两幅图中，红色圆表示 $\kappa_\alpha(\epsilon)$ 和 $N_\Omega = 7,726$ 的结果；其余部分则展示了对区域 Ω 中采用不同空间离散化的两个控制变量 α 和 $\mathcal{P}$ 应用 κ-检验的结果。

图 3(a) 展示了这种行为：对于 ϵ，其范围约跨越10 个数量级；对于 $\nabla_\alpha \mathcal{J}$ （红色），则按照与区域 Ω 相同的方式进行离散，例如，采用

$N_\Omega = 7,726$。正如预期，由于减法消去（舍入）误差，当 ϵ 的值非常小时，量 $\kappa(\epsilon)$ 会偏离 1；而当 ϵ 的值较大时，也会因截断误差而偏离 1（这两种效应都广为人知）。此外，图 3(b) 中绘制的量 $\log_{10}|\kappa(\epsilon)-1|$ 显示了给定梯度评估所能获得的有效精度位数。

同样地，我们对与控制量 $\mathcal{P}$相关的梯度计算中涉及的所有步骤应用相同的 κ-测试，如式（22）结合式（23）和式（17）所示。然而，正如第 3.3 节所述，计算 $\nabla_{\mathcal{P}}\mathcal{J}$涉及对 $\nabla_{\mathcal{P}}\sigma$的有限差分估计，其精度取决于扰动 $\Delta\mathcal{P}_i$的选择。图 4(a) 展示了在 $\Delta\mathcal{P}_i$ 为各分量均等于 $\delta\mathcal{P}$、且其取值介于 10^{-4} 和 10^{-1}之间的常向量时，应用 κ-测试后得到的结果。预期的“单位平台”形成了，这证实了所有计算的正确性；不过，其长度仅限于约两个数量级的 ϵ $(10^{-3} \div 10^{-1})$ 值。同样地，图 4(b) 描绘了有效精度位数。我们利用该测试的结果，通过将所有实验中的 $\delta\mathcal{P}$ 设为 10^{-3}，对我们的计算框架进行“校准”。

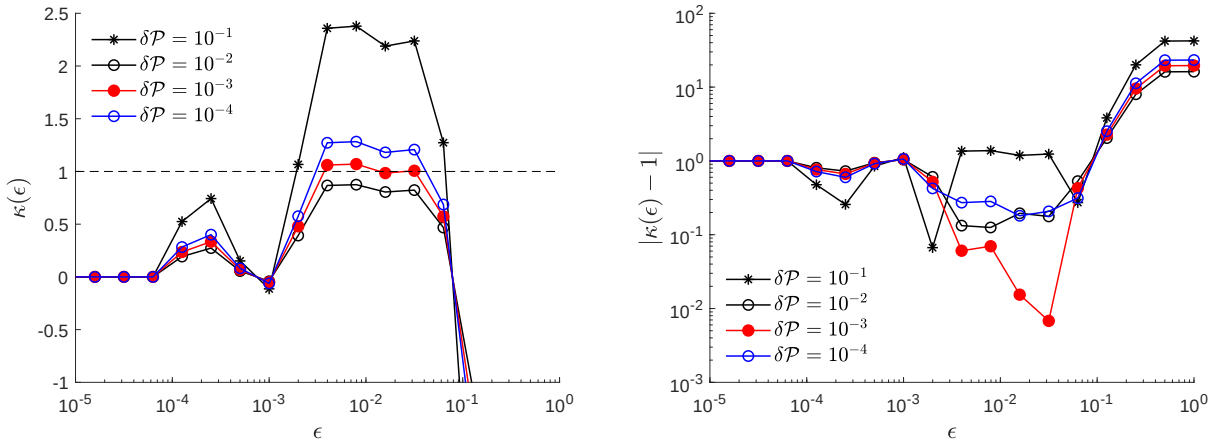


图 4：在检查模型#1 用不同参数值 $\delta\mathcal{P}$ 计算出的梯度 $\nabla_{\mathcal{P}}\mathcal{J}$ 是否一致时，(a) $\kappa_{\mathcal{P}} = \kappa(\epsilon)$ 和 (b) $\log_{10}|\kappa(\epsilon) - 1|$ 随 ϵ 变化的情况。

最后，我们探讨了将 κ-测试应用于两个控制变量（同时应用于 α 和 $\mathcal{P}$）所获得的结果，以确定区域 Ω 的适当离散化，因为在此处，通过更精细的空间离散化对连续梯度进行明显更佳的近似，会受到 $\nabla_{\mathcal{P}}\mathcal{J}$ 部分中所加入的FD 近似的影响。尽管图 3(a) 和 3(b)所提供的结果并未显示使用 $N_\Omega = 2{,}032$ 和 $N_\Omega = 7,726$ 存在显著差异，但我们将采用后者作为本文所有数值实验和所有模型中的有限元单元数量，以确保重建图像具有更高的分辨率。

4.2.2 模型#1：验证性能

在本节中，我们将证明所提出的计算框架的优越性能；该框架配备了第3节中详细介绍的细尺度基于梯度的算法和粗尺度二值调优优化算法。首先，我们参考图5；其中展示了将该方法应用于我们的模型#1所得的结果，以及采用不同优化器时所观察到的计算性能比较，即

- 基于梯度的序列二次规划、非线性内点法和序列凸规划算法，分别由 SNOPT [20]、IPOPT [30]和 MMA [27]提出，
- 之前用于 [6,7] 针对预定义控制变量顺序定制的无导数坐标下降法。

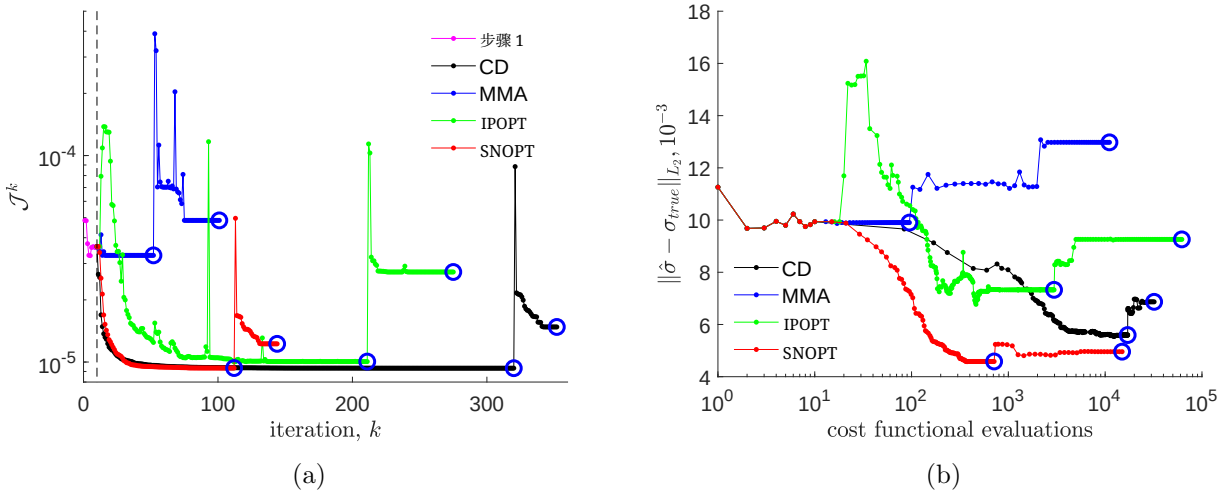


图5：模型#1的优化结果：(a) 代价泛函 $\mathcal{J}^k$ 随迭代次数 k 的变化；(b) 解误差 $\|\sigma^k - \sigma_{true}\|_{L_2}$ 随使用不同优化器（坐标下降法、 MMA、 IPOPT 和SNOPT）时评估的代价泛函次数的变化。(a)中的粉色点表示步骤1解（$k = 1$，2，……，10），(a)和(b)中的空心蓝色圆表示完成步骤 2和3阶段后得到的解。

图5(a)清晰地区分了基于梯度的方法 SNOPT 与其他方法：其代价泛函 $\mathcal{J}^k$ 在所有优化阶段（包括细尺度优化以及粗尺度上的二值调优）完成后评估，结果最佳。我们预期，SNOPT 与坐标下降法（CD）方法所得重建图像的质量相当，因为它们采用相同的核心概念，即利用具有定制几何形状的样本解。此外，我们的新方法采用多尺度控制空间约简进行二值调优，并结合基于梯度的技术。这使得基于梯度的实现（通过SNOPT）在最终解的精度和计算方面都更具优势。

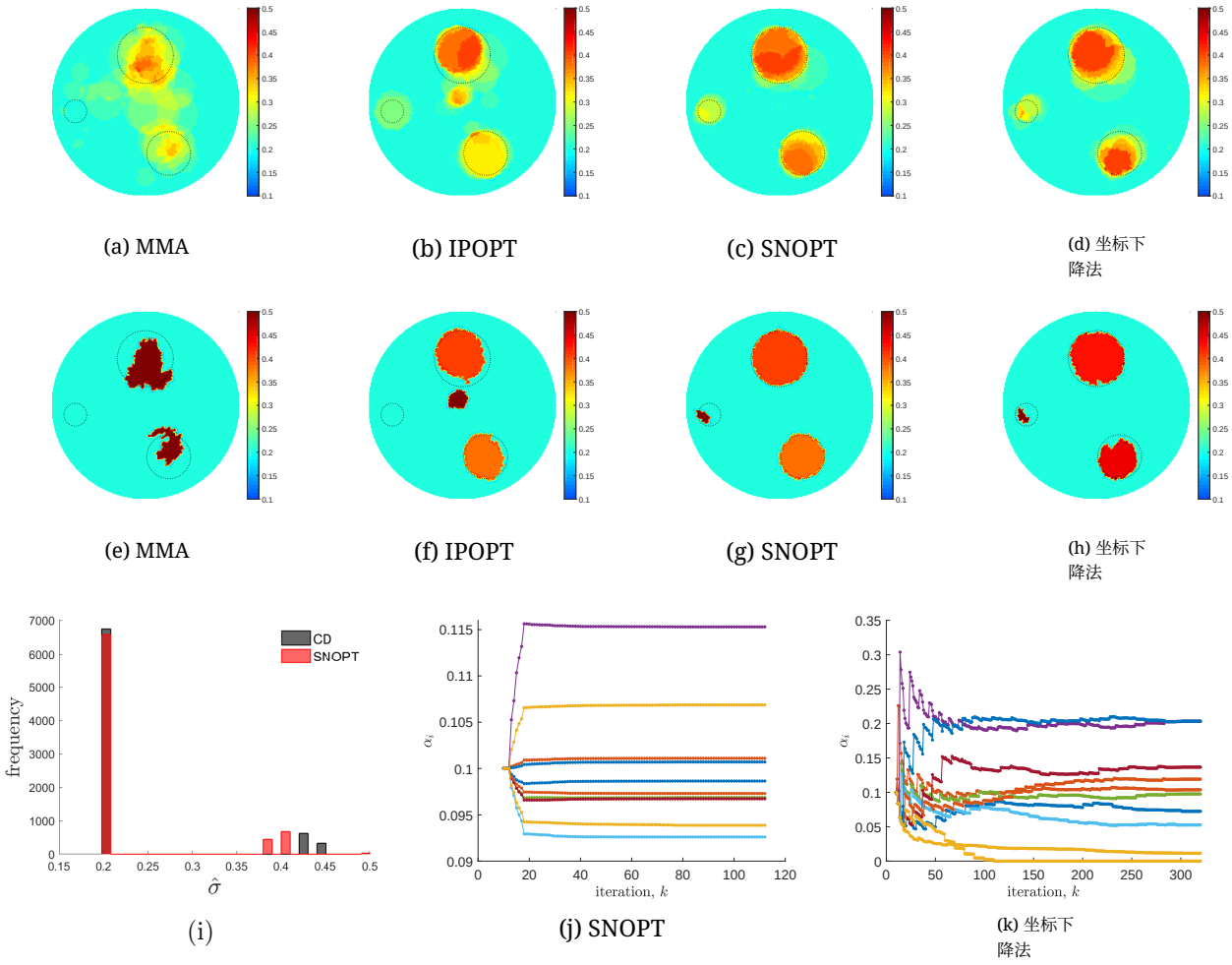
速度，如图5(b)所示，通过比较解误差 $\|\hat{\sigma}-\sigma_{true}\|_{L_2}$ 随代价泛函评估总次数的变化来进行（包括评估代价泛函$\mathcal{J}$ 以完成梯度构建计算、在基于梯度的方法中选择最优步长等情况）。我们认为，采用这一指标来考察各种方法的总体性能是合理的，因为代价泛函评估与正向电阻抗断层成像问题 (3)的数值解相结合，占据了计算负载的主要部分（事实上，所有其他部分仅需耗费 CPU 时间的一小部分即可完成）。

我们尤其关注这样一种方法：该方法能够在步骤 2 中快速、准确地获得细尺度图像，并且在应用步骤 3 调优过程后，还能使准确的粗尺度二值图像达到相当的质量。序列二次优化器 SNOPT 证明了其在这项任务中的优越适用性，同时与其前身（坐标下降法）以及其他使用相同梯度的方法展开竞争。图 6(a-h) 给出了所有所用方法在细尺度和粗尺度上的结果。图 6(g) 证实了对大斑点几乎理想的重建效果（无论是颜色还是形状），而对最小斑点图像，其质量也相当令人满意（这是由于其尺寸与所使用的边界电极尺寸相当）。图 6(i) 通过比较 $\hat{\sigma}_{high}$ 的重建值进一步支持了这一结论：在基于梯度的 SNOPT 情况下，这些重建值更接近“已知”值 $\sigma_c = 0.4$。最后，我们再次总结并说明计算速度得到提升的原因（ SNOPT 和坐标下降法分别需要 1,666 次和 18,112 次代价泛函评估）。显然，基于梯度的方法速度更快，因为它们会改变所有（或至少许多）控制变量，而坐标下降法一次只处理一个控制变量。此外，如图 6(j) 和图 6(k) 所示，坐标下降法还会花费一些时间，通过改变权重 α_i 对用于更新重建图像的所有 N_s 样本进行“重新排序”。另一方面， $\nabla_\alpha \mathcal{J}$ 提供了灵敏度， SNOPT 在步骤 2 开始时设定这些样本的“等级”，之后则专注于它们的质量。

4.3 复杂模型验证

根据上一节所述的模型#1结果，我们得出结论：采用多尺度梯度搜索和控制空间缩减进行二值调优，为所提出的计算框架带来了优异的性能。实践实验表明，前者的效果取决于特定优化器，而后者是否适用于更复杂的模型则值得商榷。因此，本节将讨论这一新框架应用于复杂度显著提高的模型时所获得的结果，以探究其适用范围。截至目前，新算法已证实能够准确重建位于多个位置、大小各异的圆形癌变区域。本节新增的复杂因素是这些区域呈非圆形，以及其电导率各不相同 σ_c。其余计算结果将基于含有 0.5% 噪声的数据，对比 SNOPT 和坐标下降法优化器的性能。

我们创建下一个模型（#2），以检验当癌症影响区域偏离圆形（例如图7(a)中所示的 C 形区域的图像）时该方法的性能。尽管使用相同的 $\mathcal{C}$(10,0000) 个样本集合（其中仅包含不同半径的圆）并未假设存在此类形状，但由二者获得的重建



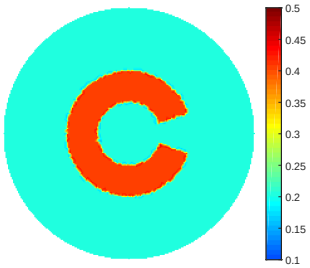
(a) MMA (b) IPOPT (c) SNOPT (d) 坐标下降法

(e) MMA (f) IPOPT (g) SNOPT (h) 坐标下降法

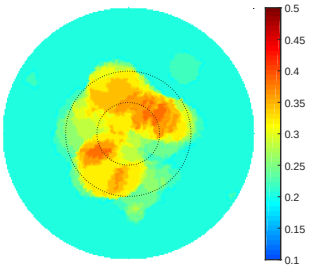
(i) (j) SNOPT (k) 坐标下降法

图6： 模型#1。（a-h）通过（a,e）MMA、（b,f） IPOPT、（c,g） SNOPT以及（d,h）坐标下降法，在完成（a-d）步骤2和（e-h）步骤3后获得的解图像。（i）通过（黑色）坐标下降法和（红色） SNOPT获得的解的直方图。虚线圆表示从图1(a)中已知的 $\sigma_{true}(x)$获取的癌变区域的位置。（j,k）应用（j） SNOPT 和（k）坐标下降法时权重 α_i 的变化历史。

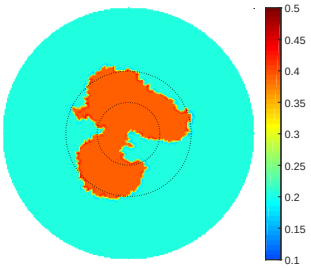
SNOPT 和坐标下降法似乎可以接受；分别参见图 7(c) 和图7(f)。与模型#1类似，基于梯度的 SNOPT 在步骤2和步骤3优化阶段的质量和计算速度方面均表现出显著更好的性能；参见图 7(d)，其中显示了解的误差，蓝点表示两个阶段完成后获得的解。步骤 2后获得的图像（图7(b) 和图7(e)）证实了使用经过步骤3调优过程改进的梯度所带来的卓越性能，表明其适用于此类形状。正如在 [6, 7], 中所探讨的，一旦增加样本中圆的最大数量$N_{c,max}$，即使存在噪声，这种性能也可能得到进一步提升。它证明了所提出的方法在具有相当



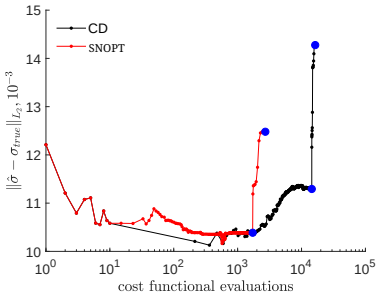
(a) 模型 #2



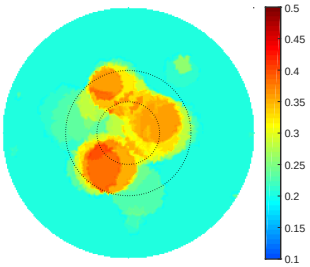
(b) SNOPT：步骤 2



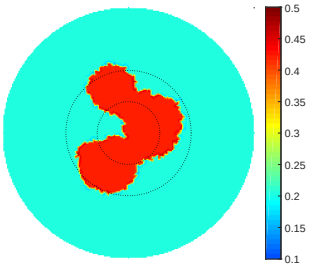
(c) SNOPT: 步骤3



(d) 解误差



(e) 坐标下降法：步骤 2



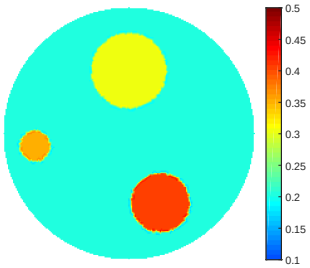
(f) 坐标下降法：步骤 3

图7： (a) 电阻抗断层成像模型#2：真实电导率 $\sigma_{true}(x)$。(b,c,e,f) 由(b,c) SNOPT 和(e,f) 坐标下降法在完成(b,e) 步骤 2和(c,f) 步骤3后获得的解图像。添加虚线圆以表示取自(a)中已知 $\sigma_{true}(x)$的癌变区域的C形。(d) 解误差 $\|\sigma^k - \sigma_{true}\|_{L_2}$ 作为采用(黑色)坐标下降法和(红色) SNOPT 优化器时评估的代价泛函评估次数的函数。蓝点表示步骤2和3阶段完成后获得的解。

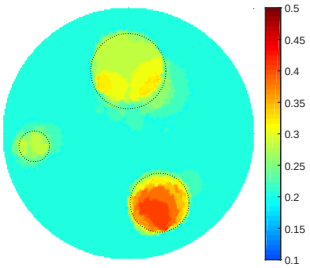
复杂几何形状。

为进一步实验所提出计算算法中各部分的适用性和性能，我们通过改变癌变斑点内部的电导率（高值）同时保持其相互位置和大小不变，修改了我们的模型#1。图8(a)显示了此次修改后的模型#1（模型#3），其中我们将大、中、小斑点的 σ_c 分别设为0.3、0.4和0.35。

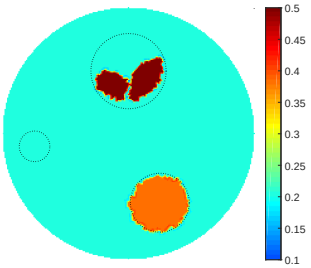
完成步骤 2 后，对使用基于梯度的（SNOPT）和无导数（坐标下降法）搜索获得的细尺度解进行视觉分析，结果表明，两种方法都能很好地恢复全部三个斑点的位置并重建其形状；分别参见图 8(b) 和图 8(e)。与之前一样，由梯度信息提供的 SNOPT 在质量（颜色匹配更佳，尤其是两个较大的斑点）和计算速度（完成步骤 2 所需的代价泛函评估次数为 683 次，而非 10,138 次）方面表现更优，这一点也得到图 8(d) 所示解误差分析的证实。本文以应用.....结束。



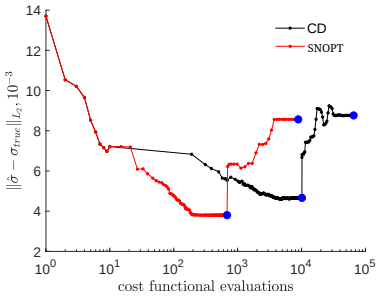
(a) 模型 #3



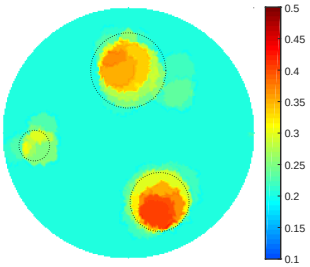
(b) SNOPT：步骤 2



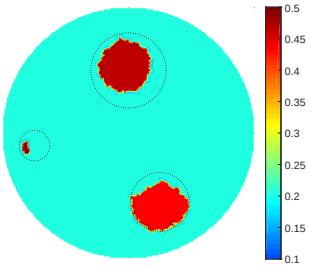
(c) SNOPT：步骤3



(d) 解误差



(e) 坐标下降法：步骤 2



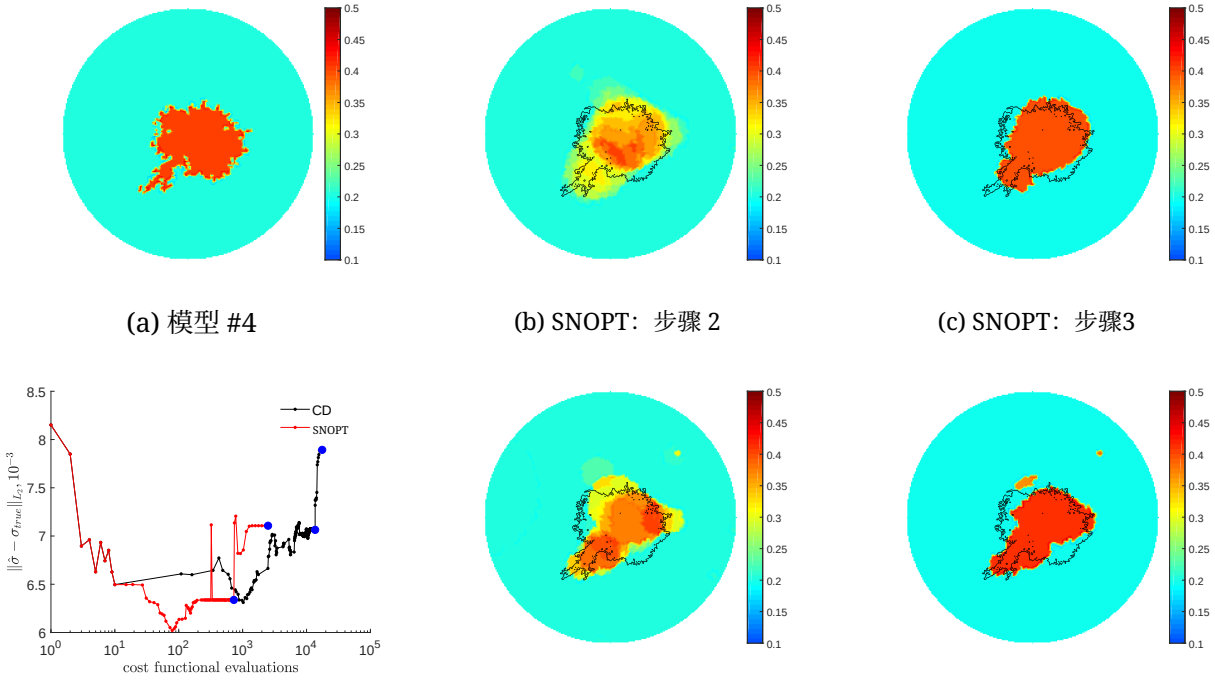
(f) 坐标下降法：步骤 3

图8： (a) 电阻抗断层成像模型 #3：真实电导率 $\sigma_{true}(x)$。(b,c,e,f) 通过(b,c) SNOPT 和(e,f) 坐标下降法分别在完成(b,e)步骤2和(c,f)步骤3后获得的解图像。虚线圆表示取自(a)中已知$\sigma_{true}(x)$的癌变区域位置。(d) 解误差 $\|\sigma^k - \sigma_{true}\|_{L_2}$ 作为采用（黑色）坐标下降法和（红色） SNOPT 优化器时评估的代价泛函评估次数的函数。蓝点表示步骤2和3阶段完成后获得的解。

所提出方法能够区分具有不同电导率的癌变斑点，尽管所使用的样本对此“毫不知情”，这使得该方法对模拟现象先验知识的依赖更低。在步骤3中对二值调优结果进行相同分析后，图8(c)和图8(f)表明，两种方法获得的图像质量均较低。我们将其解释为所提供数据中存在噪声（0.5%）所致——此前已报告过的已知影响——步骤2中的程序对噪声的灵敏度低于 $[6, 7]$ 步骤 3 [17]中的二值调优。尽管总体结果相当令人满意且充满希望，但二值调优阶段仍有进一步发展的空间，并且在从步骤 2过渡到步骤3时，各计算组件之间还需要更好的“沟通”。

4.4 癌症检测的应用

在我们针对所提出的优化框架开展的数值实验的最后一部分中，我们特别关注将其应用于癌症相关筛查过程中医疗实践中遇到的病例。我们利用最后两个模型（#4和 #5），分别基于 $[8, 32]$ 中可获得的真实乳腺癌病例的乳房X线摄影（X射线）图像和磁共振（MRI）图像；有关通过将实际图像转换为其二值版本并获取合成数据以替代真实测量值来创建这些模型的详细信息，请参阅 [17] for。模型#4 展示了一例具有不规则形状和毛刺状边缘的浸润性导管癌；见图 9(a)。我们的最终模型（#5）涉及医疗实践中遇到的更为复杂的病例，其中存在多个疑似癌变的区域，并且这些区域具有不同的大小和非平凡形状；见图 10(a)。该模型展示了多个（三个）斑点，这些斑点同样被确定为具有不规则形状和毛刺状边缘的浸润性导管癌。



(a) 模型 #4　(b) SNOPT：步骤 2　(c) SNOPT：步骤3

(d) 解误差　(e) 坐标下降法：步骤 2　(f) 坐标下降法：步骤 3

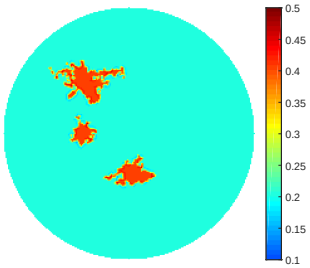
图 9： (a) 电阻抗断层成像模型 #4：真实电导率 $\sigma_{true}(x)$。(b,c,e,f) 在完成 (b,e) 步骤 2 和 (c,f) 步骤3后，分别通过 (b,c) `SNOPT` 和 (e,f) 坐标下降法得到的解图像。黑点表示从 (a) 中的已知$\sigma_{true}(x)$获得的癌变区域位置。(d) 使用（黑色）坐标下降法和（红色） `SNOPT` 优化器时，解误差 $\|\sigma^k - \sigma_{true}\|_{L_2}$ 随代价泛函评估次数变化的函数图。蓝点表示步骤2和3阶段完成后得到的解。

图9(b)和9(e)分别展示了使用基于梯度的 SNOPT 和无导数CD优化器驱动的细尺度优化过程中获得的图像。尽管由于模型#4中心处癌变斑点的复杂形状，逆电阻抗断层成像问题的求解极具挑战性，但两幅图像的质量都相当不错，并且在步骤3中应用二值调优后得到了进一步的显著改善；参见图9(c)和9(f)。在这里，与之前的结果一致， SNOPT在质量（颜色和形状均匹配得更好）和计算速度（完成步骤2和步骤3共需995次而非14,099次代价泛函评估）方面都表现出更好的重建效果，这一点也得到了基于解误差的分析的证实；见图9(d)。这里通过基于梯度的 SNOPT 获得的结果，显然比 [17] 中报告的结果质量高得多；后者采用了与额外正则化相结合的基于梯度和基于PCA的多尺度优化。

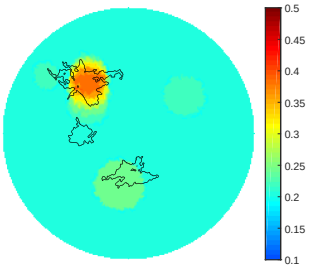
最后，我们介绍模型 #5 对最复杂病例所得的结果。图 10(b、c) 和 10(e、f) 分别展示了由 SNOPT 和 CD优化器生成的图像。我们承认，在步骤2和步骤3之后，两个优化器在重建两个斑点和最大斑点方面达到了相同水平的精度。图 10(d) 展示了解的误差，也在一定程度上证实了两者具有大致相同的性能。由于癌变斑点形状复杂且尺寸较小，该模型确实为当前提出的计算框架实现设定了限制。尽管总体性能相当适中，但这里的最终结果质量明显优于此前在 [17], 中报告的结果，后者通过应用正则化添加了额外数据。这使得我们的计算框架具有非常光明的应用前景：未来无论是在与极其复杂的医学病例相关的重建图像质量方面，还是在旨在帮助将该方法应用于医学实践的计算效率方面，都仍有充足的发展空间。

5 Concluding Remarks

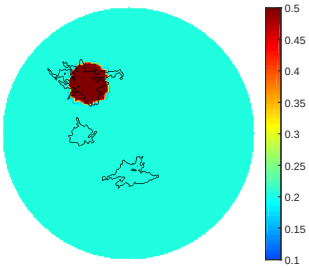
在这项工作中，我们开发并验证了一种高效的计算框架，用于重建与生物医学应用中各种模型的物理性质相关的近二值类型图像，例如，在使用电阻抗断层成像技术求解癌症检测的反问题时，协助识别癌变区域。特别地，我们探索了将所提出的求解方法应用于IPCD问题的可能性，以检测被健康组织包围的癌变区域，这些区域尺寸小且具有不规则形状的边界，这对于早期癌症检测以及轻松控制癌症发展或治疗进展的动态至关重要。我们还证明了它适用于生物医学、物理学、地质学、化学等多样化应用中所见的各种复杂度的模型。新方法在计算速度和精度方面的效率是通过结合最近开发的优化方法的优点实现的，这些方法使用具有定制几何形状的样本解和多尺度控制空间约简，并全部与基于梯度的技术配对。这种方法的实际实现具有易于遵循的设计，通过少量参数进行调整，以管理整个计算和优化功能套件。



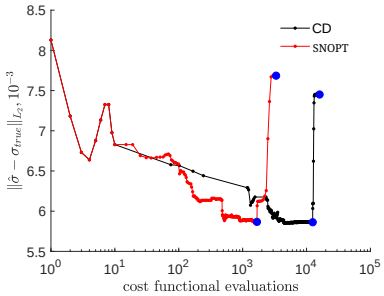
(a) 模型 #5



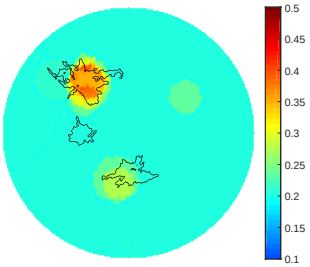
(b) SNOPT: 步骤 2



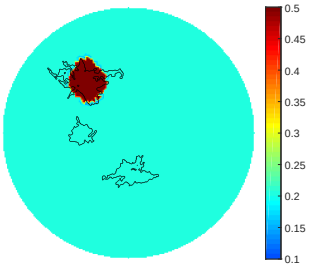
(c) SNOPT: 步骤3



(d) 解误差



(e) 坐标下降法: 步骤 2



(f) 坐标下降法：步骤 3

图 10: (a) 电阻抗断层成像模型 #5: 真实电导率 $\sigma_{true}(x)$。(b,c,e,f) 由 (b,c) SNOPT 和 (e,f) 坐标下降法在完成 (b,e) 步骤 2 和 (c,f) 步骤3 后获得的解图像。添加黑点以表示从 (a) 中已知 $\sigma_{true}(x)$ 获取的癌变区域位置。(d) 解误差 $\|\sigma^k - \sigma_{true}\|_{L_2}$ 作为在采用 (黑色) 坐标下降法和 (红色) SNOPT 优化器时评估的代价泛函评估次数的函数。蓝点表示在步骤 2和3阶段完成后获得的解。

我们得出结论，所提出的计算方法具有巨大潜力，可最大限度地减少假阳性和假阴性筛查的可能性，并提高基于电阻抗断层成像的相关流程的整体质量。

尽管所提出的框架性能优越，但仍有许多方法可以测试并进一步扩展这一优化算法，例如，采用先进的最小化技术进行局部和全局搜索，使用自适应方案使所得解在不同计算阶段之间平滑过渡，采用灵活（高效）的终止准则，以及使用不同指标评估整体重建质量。我们计划进一步研究测量结构，例如，考虑二维中的32电极方案、转向三维模型，以及通过优化可用数据的配置来提高灵敏度。我们还预计，通过将并行化应用于整个计算框架（包括求解正演EIT问题），可以进一步节省计算时间。最后，我们也有兴趣探索其他拓展方向，例如采用双峰分布和完全各向异性模型，以获得适用于近真实场景的可靠且准确的结果

模型。

致谢

我们谨向匿名审稿人致谢，感谢他们提出宝贵的意见和建议，帮助我们提升本文所述方法的清晰度和整体可读性。

参考文献

[1]Abascal, J.F.P.J., Lionheart, W.R.B., Arridge, S.R., Schweiger, M., Atkinson, D., Holder, D.S.：已知特征向量的各向异性介质中的电阻抗断层成像。《逆问题》**27(6)**, 1–17（2011年）[2] Abdulla, U.G., Bukshtynov, V., Seif, S.：通过电阻抗断层成像和最优控制理论检测癌症：理论与计算分析。《数学生物科学与工程》**18(4)**, 4834–4859（2021年）[3] Adler, A., Arnold, J., Bayford, R., Borsic, A., Brown, B., Dixon, P., Faes, T.J., Frerichs, I., Gagnon, H., G¨arber, Y., Grychtol, B., Hahn, G., Lionheart, W., Malik, A., Stocks, J., Tizzard, A., Weiler, N., Wolf, G.：GREIT：迈向肺部图像电阻抗断层成像算法共识。载于：第九届电阻抗断层成像会议（2008），2008年6月16日至18日，新罕布什尔州达特茅斯。CiteSeer^{X}，宾夕法尼亚州立大学（2008年）[4] Adler, A., Gaburro, R., Lionheart, W.：《数学成像方法手册》，第701–762页，第“电阻抗断层成像”章。施普林格纽约，纽约州纽约市（2015）[5] Adler, A., Holder, D.：《电阻抗断层成像：方法、历史与应用》，第2版。CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿（2022年）[6] Arbic II, P.R.：通过高效的基于样本的参数化重建生物医学图像的优化框架。理学硕士论文，佛罗里达理工学院，Scholarship Repository（2020）。网址：`http://hdl.handle.net/11141/3220`[7] Arbic II, P.R., Bukshtynov, V.：电阻抗断层成像应用中通过高效的基于样本的参数化重建二值图像。《国际计算数学杂志》**99(11)**, 2272–2289（2022年）[8] Bassett, L.W., Conner, K., IV, M.：异常乳房X线摄影图像。载于：《霍兰德-弗赖癌症医学》（2003年）[9] Bera, T.K.：电阻抗断层成像（EIT）的应用：简要综述。《IOP会议系列：材料科学与工程》**331**, 012,004（2018）

[10] Borcea，L.: 电气成像 p阻抗层析成像 graphy。逆问题 **18**，99–136 (2002)

[11] Brown, B.：电阻抗断层成像（EIT）：综述。Journal of Medical Engineering and Technology 27(3)，97–108（2003年）[12]Bukshtynov,V.：计算优化：实践中的成功。Chapman andHall/CRC（2023年）。网址 https://www.routledge.com/Computational-Optimization/Bukshtynov/p/book/9781032229478[13] Bukshtynov,V., Protas, B.：复杂多物理场现象中的材料属性最优重建。Journal of Computational Physics 242，889–914（2013年）[14] Bukshtynov, V.,Volkov, O., Protas, B.：关于本构关系的最优重建。Physica D: Nonlinear Phenomena 240(16)，1228–1244（2011年）[15] Calderon, A.P.：关于一个逆边界值问题。载于：连续介质物理学中的数值分析及其应用研讨会，第65–73页。Soc.Brasileirade Mathematica，里约热内卢（1980年）[16] Cheney,M.,Isaacson, D., Newell, J.：电阻抗断层成像。SIAM Review41(1)，85–101（1999年）[17] Chun,M.M., Edwards, B.L., Bukshtynov, V.：通过增强的基于多层PCA的控制空间降维进行多尺度优化，应用于电阻抗断层成像。Computers and Mathematics with Applications 157，215–234（2024年）[18] Chun, M.M.F.M.：通过基于多层PCA的控制空间缩减进行多尺度优化及其在电阻抗断层成像中的应用。理学硕士论文，佛罗里达理工学院，Scholarship Repository（2022年）。网址 http://hdl.handle.net/11141/3558[19] Davis, T.A.：算法832：UMFPACK V4.3——一种非对称模式多前沿法。ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS) 30(2)，196–199（2004年）[20] Gill, P.,Murray, W.,Saunders, M.：SNOPT第7版用户指南：大规模非线性规划软件。斯坦福大学，加利福尼亚州斯坦福（2008年）[21] Hadamard,J.：线性偏微分方程中的柯西问题讲义。耶鲁大学出版社，康涅狄格州纽黑文（1923年）[22] Hecht, F.：FreeFem中的新发展++。Journal of Numerical Mathematics20(3- 4)，251–265（2012年）[23] Koolman, P.M.,Bukshtynov,V.：使用基于多层PCA的控制空间缩减重建二值图像的多尺度优化框架。Biomedical Physics & Engineering Express7(2)，025,005（2021年）[24] Krogstad,S.,Nilsen, H.：使用流动诊断代理模型的高效基于伴随方法的井位优化。Computational Geosciences 26，883–896（2022年）

[25] Lionheart, W.: 电阻抗断层成像重建算法：陷阱、挑战和最新发展。生理测量 **25**(1), 125–142 (2004年)[26] Somersalo, E., Cheney, M., Isaacson, D.: 电流计算层析成像电极模型的存在性与唯一性。SIAM应用数学杂志**52**(4), 1023–1040 (1992)[27] Svanberg, K.: 移动渐近线方法——一种新的结构优化方法。国际工程数值方法杂志 **24**(2), 359–373 (1987)[28] Uhlmann, G.: 电阻抗断层成像与Calder´ón问题。反问题 **25**(12), 123,011 (2009)[29] Volkov, O., Bellout, M.: 基于梯度的约束井位优化。石油科学与工程杂志 **171**, 1052–1066 (2018)[30] Wachter, A., Kawajir, Y.: Ipopt简介：下载、安装和使用Ipopt的教程。COIN-OR，IBM研究 (2010)[31]Wang, Z., Yue, S., Wang, H., Yanqiu: 电阻抗断层成像数据预处理方法综述。生理测量 **41**(9), 09TR02 (2020)[32] Weinstein, S.P.: MRI在乳腺癌成像中的演变作用。PET诊所**4**(3), 241–253 (2009)[33] Zou, Y., Guo, Z.: 电阻抗技术用于乳腺癌检测的综述。医学工程与物理**25**(2), 79–90 (2003年)