用于 $(m+1)$ 维非线性时间分数阶偏微分方程的不变子空间方法

P. Prakash[1*]，K.S. Priyendhu[1]，M. Lakshmanan[21]数学系，阿姆里塔工程学院，哥印拜陀-641112，阿姆里塔维什瓦维迪亚皮瑟姆，印度。[2]非线性动力学系，巴拉蒂达桑大学，蒂鲁吉拉伯利-620 024，印度。电子邮箱：vishnuindia89@gmail.com & p_prakash@cb.amrita.edu（P Prakash）：priyendhusasikumar@gmail.com（K.S. Priyendhu）：lakshman.cnld@gmail.com（M. Lakshmanan）

*-通讯作者

arXiv:2304.02605v2 [nlin.SI] 6 Apr 2023

摘要

本文首次将不变子空间方法的理论推广至 $(m+1)$ 维非线性时间分数阶偏微分方程。具体而言，我们通过研究 $(3+1)$ 维广义非线性时间分数阶扩散-对流-波动方程及其适当的初始条件，系统地考察了该方法的适用性和有效性。这项系统研究提供了一种重要技术，可用于寻找上述方程中维数各异的多种不变子空间。此外，我们还表明，所得不变子空间有助于推导出多种精确解，这些解可表示为指数函数、三角函数、多项式和著名的 Mittag-Leffler 函数的组合。

关键词: 分数阶扩散-对流-波动方程, 高维时间分数阶偏微分方程, 精确解, 不变子空间方法, Mittag-Leffler函数

1 引言

分数阶微积分这一主题在近几十年引起了广泛关注和流行，因为它们能精确描述科学和工程中各种领域的多种现象 [1–10]。文献中存在由

Liouville、Riemann、Grunwald、Letnikov、Hadamard、Weyl、Riesz、Marchaud、Caputo 及其他科学家提出的各种类型的分数阶（非整数阶）导数和积分。需要注意的是，上述分数阶导数违反了莱布尼茨法则、链式法则和半群性质的标准形式，而这些是分数阶导数的重要特征性质。分数阶导数的这些非标准性质使我们能够描述新型且不寻常的复杂介质和系统 [4, 7, 10]。众所周知，分数阶微分算子是非局部的，它们依赖于函数的所有过去值，而不仅仅是最近的过去。因此，分数阶导数和积分被用于为复杂系统添加记忆效应 [10]。分数阶导数和积分在研究具有幂律长期记忆效应、幂律非局部性和分形性质的各种现象和系统的行为中起着重要作用 [4, 7, 10]。众所周知，许多自然现象依赖于所有过去的时间历史，而不仅仅是瞬时时间。这类过程可以通过非整数阶积分和导数理论成功建模 [1–10]。此外，我们想指出，分数阶偏微分方程提供了一种同时研究抛物型和双曲型偏微分方程的重要途径。例如，我们可以考虑以下时间分数阶偏微分方程（TFPDEs）

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = \gamma \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}},\ t > 0,\ \gamma \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha \leq 2, \tag{1.1}$$

这被称为时间分数阶扩散-波方程 [11, 12]。注意，对于下面给出的 α 的不同取值，方程（1.1）描述了不同的现象。

- 首先，我们注意到，对于 $\alpha = 1$，方程(1.1)通常被称为扩散方程。此外，我们观察到，如果$\alpha = 2$，方程 (1.1) 就变为经典波动方程。

- 此外，我们注意到，如果 $\alpha \in$ (0,1)，方程（1.1）描述了亚扩散现象 [11, 12]（粒子的缓慢运动）；而如果 $\alpha > 1$，则表示超扩散现象 [11, 12]（粒子的快速运动）。此外，应注意，方程（1.1）对于研究波动现象与扩散现象之间的中间过程 [11, 12] 如果 $\alpha \in$ (1,2) 发挥着重要作用。

我们知道，当在扩散或对流过程，或两者同时存在的情况下考察时，对流-扩散方程由系统中的热量或能量流动所支配。计算模拟中的模- 型可产生海洋波浪，石油储层模型

模拟、地下水流动、气候变化和天气预报、多孔介质中的吸附、流体黏度、种群动力学以及湍流异质物理系统通常由分数阶偏微分方程表示。由于其在科学和工程应用领域的丰富贡献，分数阶微分方程（FDEs）多年来一直是许多数学家以及物理学家的关注焦点。著名扩散-对流方程的一些特殊类型方程是理查兹方程 [15], 伯格斯方程 [15] 和泡沫排液方程[15],等等。

分数阶微分方程的研究比其经典（整数阶）微分方程更为复杂，因为违反了莱布尼茨法则、半群性质和链式法则。因此，推导分数阶微分方程的精确解是一项非常艰巨且具有挑战性的任务。由于上述原因，目前尚无定义明确的方法来系统地分析分数阶微分方程。我们知道，寻找分数阶微分方程的精确解很重要，因为它有助于理解复杂现象和系统的行为和定性特征。因此，近年来，许多研究人员和科学家致力于开发非整数阶非线性常微分方程和偏微分方程的某些精确和数值方法，例如李对称方法 [11–13, 27–33], 不变子空间方法 [16–27], 微分变换法 [36], Adomian 分解法 [34, 35], 新混合方法 [37], 变量分离法 [59] 等等。

近期研究表明，不变子空间方法是推导整数阶和非整数阶标量与耦合非线性偏微分方程精确解的一种更高效且更强大的分析工具。该方法通常被称为广义变量分离法，最初由Galaktionov和Svir- shchevskii [38] 提出，随后由Ma [42] 及许多其他学者 [14, 43–47] 进一步发展，用于整数阶非线性偏微分方程。近年来，Gazizov和Kasatkin [20] 以及其他学者 [16–19,21–27,39–41] 将不变子空间方法扩展到了标量与耦合分数阶非线性偏微分方程。2022年，Rui等人 [59] 发展了用于求解时间分数阶偏微分方程精确解的变量分离法，该方法基于不变子空间方法的思想。最近，Prakash等人 [48] 和Sangita等人[19] 研究了该方法在（$2+1$）-维标量与耦合非线性时间分数阶偏微分方程中的应用。

我们希望在此指出，据我们所知，上述不变子空间方法尚未被任何人推广到($m+1$)-维数($m>2$)非线性时间分数阶偏微分方程。因此，本工作的目的是展示如何推广该理论

用于求解（$m+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程精确解的不变子空间方法。此外，还将通过一个（3+1）维广义非线性时间分数阶扩散-对流-波动（DCW）方程，探究该方法的有效性和适用性。

$$\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}}=\sum_{r=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(P_r(u)\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)+\sum_{r=1}^{3}Q_r(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right),\ \alpha\in(0,2] \tag{1.2}$$

以及适当的初始条件，

(i) $u(x_1,x_2,x_3,0)=\varphi(x_1,x_2,x_3)$ if $0<\alpha\leq 1$,

(ii) $u(x_1,x_2,x_3,0)=\varphi(x_1,x_2,x_3)$ & $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=\phi(x_1,x_2,x_3)$ if $1<\alpha\leq 2$,

其中 $t>0, x_r\in\mathbb{R}, r=1,2,3, u=u(x_1,x_2,x_3,t)$ 和 $P_r(u)$ $Q_r(u)$ $r=1,2,3$, 分别表示扩散过程和对流过程，而 $\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}}$ 表示关于 t 、对 u 取 α 阶的 Caputo分数阶导数，其定义 $[1,2]$ 为

$$\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\dfrac{\partial^n u(x_1,x_2,\tau)}{\partial\tau^n}(t-\tau)^{n-\alpha-1}d\tau, & n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N};\\ \dfrac{\partial^n u}{\partial t^n}, & \alpha=n\in\mathbb{N}.\end{cases} \tag{1.3}$$

在本研究中，我们主要考虑 Caputo分数阶导数。本文系统地分析了如何为 $(3+1)$ 维（高维）非线性时间分数阶 DCW 方程寻找不变子空间。此外，我们还展示了如何利用所得的不变子空间，求得方程 (1.2) 的精确解及相应的初始条件。

本文组织如下：第 2节介绍如何推广不变子空间方法，以求出（3 +1）维非线性时间分数阶偏微分方程所允许的各种类型的不变子空间。此外，我们在第3节将不变子空间推广到（$4+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程。第 4 节对（$m+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程的不变子空间方法理论的推广进行了详细而系统的分析。第 5 节通过（$3+1$）维DCW 方程研究了该方法在求出各种类型不变子空间方面的有效性和适用性。利用所得到的不变子空间，我们在第6节介绍了如何为（$3+1$）维非线性时间分数阶 DCW 方程（1.2）构造各种类型的精确解，并给出适当的初始条件。最后，第7 节简要讨论了不变子空间方法对若干经典扩散型方程及其变形的适用性。同时，本文还简要给出了结论性评述。

2 广义(3+1)-维非线性时间分数阶偏微分方程：不变子空间方法

在本节中，我们将说明如何系统地求出下列涉及三个自变量的广义非线性偏微分算子的各种不变子空间。

$$\hat{\mathcal{N}_1}[u] = \hat{\mathcal{N}_1}\left(x_1, x_2, x_3, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \frac{\partial^k u}{\partial x_2^k}, \frac{\partial^k u}{\partial x_3^k}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}}\right) \quad (2.1)$$

其中 $t > 0$, $x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,3$, $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$ 以及给定的 k 阶非线性偏微分算子 $\hat{\mathcal{N}_1}[u]$ 是充分光滑的，并且 $k = \sum_{i=1}^{3} k_i$, $k_i \in \mathbb{N}, i = 1,2,3$。此外，利用所得到的不变子空间，我们介绍如何求出 $(3+1)$-维非线性时间分数阶偏微分方程的精确解。首先，我们将有限 $\hat{}$ 维线性空间 ${}_3\mathcal{W}_n$ 定义为

$${}_3\hat{\mathcal{W}}_n = \left\{ \sum_{q=1}^{n} \lambda_q \xi_q(x_1, x_2, x_3) \Big| \xi_q(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{B}, \lambda_q \in \mathbb{R}, q = 1, 2, \ldots, n \right\}, \quad (2.2)$$

其中，基集 $\mathcal{B}$ 由 $\mathcal{B} = \{\xi_1(x_1, x_2, x_3)\ \xi_2(x_1, x_2, x_3) \ldots, \xi_n(x_1, x_2, x_3)\}$ 给出，对于某些线性无关函数 $\xi_q(x_1, x_2, x_3)(q = 1, 2, \ldots, n)$，并且 n 是线性空间 ${}_3\mathcal{W}_n$的维数 $\hat{}$，即 $\dim({}_3\mathcal{W}_n) = n\ (< \infty)$。

$\hat{}$ 给定的有限维线性空间 ${}_3\mathcal{W}_n$ 在给定偏微分算子 $\hat{\mathcal{N}_1}[u]$ 下是不变的，若对于任意 $u \in {}_3$，均有 $\hat{\mathcal{N}_1}[u] \in {}_3\hat{\mathcal{W}}_n$。如果 ${}_3\hat{\mathcal{W}}_n$ 在 $\hat{\mathcal{N}_1}[u]$ 下是不变的，则得到

$$\hat{\mathcal{N}_1}[\sum_{q=1}^{n} \lambda_q \xi_q(x_1, x_2, x_3)] = \sum_{q=1}^{n} \Lambda_q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \xi_q(x_1, x_2, x_3), \quad (2.3)$$

其中，函数 $\Lambda_q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n)$ $q = 1, 2, \ldots\ldots, n,$ 是关于 $\mathcal{B}.$ 的展开系数

The定理 2.1. 考虑广义的 $(3+1)$ 维非线性 *TFPDE*

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \hat{\mathcal{N}_1}[u],\ t > 0,\ \alpha > 0, \quad (2.4)$$

其中 $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$。如果上述非线性偏微分算子 $\hat{}\ \mathcal{N}_1[u]$ 保持不变子空间 ${}_3\mathcal{W}_n$, 那么方程(2.4)存在如下形式的精确解。

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \Psi_1(t)\xi_1(x_1, x_2, x_3) + \Psi_2(t)\xi_2(x_1, x_2, x_3) + \cdots + \Psi_n(t)\xi_n(x_1, x_2, x_3), \quad (2.5)$$

其中 th e函数 $\Psi_q(t)$ $q = 1,2,\ldots,n)$ 满足分数阶常微分方程组

$$\frac{d^\alpha \Psi_q(t)}{dt^\alpha} = \Lambda_q(\Psi_1(t), \Psi_2(t), \ldots, \Psi_n(t)),\ q = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.6}$$

证明：设非线性算子 $\hat{}$ $\mathcal{N}_1[u]$ 保持(2.2)中给出的不变子空间 $\hat{}$subspace $_3\mathcal{W}_n$ 。因此，利用方程(2.3)，我们得到

$$\hat{\mathcal{N}_1}[u(x_1, x_2, x_3, t)] = \sum_{q=1}^{n} \Lambda_q(\Psi_1(t), \Psi_2(t), ..., \Psi_n(t))\xi_q(x_1, x_2, x_3). \tag{2.7}$$

计算函数 $u(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t) = \sum \Psi_q(t)\xi_q(x_1,\ x_2,\ x_3)$关于 t 的 $\alpha > 0$ 阶 Caputo 分数阶导数，我们有$_{q=1}$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \sum_{q=1}^{n} \frac{d^\alpha \Psi_q(t)}{dt^\alpha} \xi_q(x_1, x_2, x_3). \tag{2.8}$$

将方程 (2.7) 和 (2.8) 代入 (2.4)，得到如下结果。

$$\sum_{q=1}^{n} \left[\frac{d^\alpha \Psi_q(t)}{dt^\alpha} - \Lambda_q(\Psi_1(t), \Psi_2(t), \ldots, \Psi_n(t)) \right] \xi_q(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{2.9}$$

其中，$\xi_q(x_1,\ x_2,\ x_3)$（$q = 1,\ 2,\ .....,\ n$）是线性无关函数，构成线性空间 $_3\mathcal{W}_n$ 的基$\hat{}$，该线性空间见式（2.2）。因此，我们有

$$\frac{d^\alpha \Psi_q(t)}{dt^\alpha} = \Lambda_q(\Psi_1(t), \Psi_2(t), \ldots, \Psi_n(t)),\ q = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.10}$$

注1.应当注意，不变子空间方法使我们能够将一大类非线性时间分数阶偏微分方程约化为任意阶常微分方程组。如果所得的非整数阶常微分方程组可以通过众所周知的解析方法求解，那么所得的精确解可以在有限变量可分结构的框架下加以理解。

现在，我们说明如何为给定的非线性微分算子 $\hat{}$ $\mathcal{N}_1[\hat{}u]$ 定义各种类型的不变子空间。

2.1 被给定微分算子保持的不变子空间 (2.1)

现在，考虑如下形式的 n_i 阶线性齐次常微分方程

$$\mathcal{D}_{x_i}[\omega] \equiv \frac{d^{n_i}\omega}{dx_i^{n_i}} + a_{in_i-1}\frac{d^{n_i-1}\omega}{dx_i^{n_i-1}} + \cdots + a_{i0}\omega = 0,\ i = 1, 2, 3 \tag{2.11}$$

其 n_i 个线性无关解组成的集合为 ${}_3\mathcal{S}_{x_i} = \{\omega_{q_i}^i(x_i)\big|q_i = 1, 2, \ldots, n_i\}$,$a_{ij} \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, n_i - 1, \quad i = 1, 2, 3$。因此，给定的线性齐次常微分方程 (2.11) 的解空间可写为:

$$\hat{\mathcal{W}}_{n_i}^{x_i} = \mathrm{Span}({}_3\mathcal{S}_{x_i}) = \left\{ \sum_{q=1}^{n_i} \lambda_{q_i} \omega_{q_i}^i(x_i) \big| \mathcal{D}_{x_i}[\omega_{q_i}^i(x_i)] = 0, \lambda_{q_i} \in \mathbb{R}, q_i = 1, 2, \ldots, n_i \right\}. \quad (2.12)$$

现在，我们可以为式 (2.1) 中给出的非线性偏微分算子 $\hat{} \mathcal{N}_1[u]$ 定义三类不变子空间，下面将对其进行详细讨论。

第一类不变子空间 ${}_{13}\hat{}\mathcal{W}_l$ ： 首先，我们为算子 $\hat{} \mathcal{N}_1[u]$ 构造第一类线性空间，如下所示

$$\begin{aligned} {}_3^1\hat{\mathcal{W}}_l =& \mathrm{Span}({}_3\hat{\mathcal{S}}^1) = \left\{ \xi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{q_1, q_2, q_3} \lambda_{q_1, q_2, q_3} \prod_{i=1}^{3} \omega_{q_i}^i(x_i) \big| \mathcal{D}_{x_i}[\xi(x_1, x_2, x_3)] = 0, \right. \\ & \left. \lambda_{q_1, q_2, q_3} \in \mathbb{R}, q_i = 1, 2, \ldots, n_i, i = 1, 2, 3 \right\}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中，基集 ${}_3\hat{}\mathcal{S}^1 = \left\{ \prod_{i=1}^{3} \omega_{q_i}^i(x_i) \big| \omega_{q_i}^i(x_i) \in {}_1\hat{}\mathcal{S}_{x_i}, q_i = 1, 2, \ldots, n_i, i = 1, 2, 3 \right\}$，而 l 表示第一类线性空间 ${}_{13}\hat{}\mathcal{W}_l$ 的维数，即 $\dim({}_3^1\hat{}\mathcal{W}_l) = l = n_1 n_2 n_3$。

若对任意 $u \in {}_3^1\hat{}\mathcal{W}_l$，均有 $\hat{}\mathcal{N}_1[u] \in {}_3^1\hat{}\mathcal{W}_l$ ，则第一类线性空间 (2.13) 在给定的微分算子 $\hat{} \mathcal{N}_1[u]$ 下不变。因此，第一类线性空间 ${}_{13}\hat{}\mathcal{W}_l$ 的不变性判据可表示如下

$$\mathcal{D}_{x_i}\left[\hat{\mathcal{N}}_1[u]\right] = 0, \text{ whenever } \quad \mathcal{D}_{x_i}[u] = 0, \ i = 1, 2, 3 \quad (2.14)$$

以及关于 $x_i, i =$1,2,3. 的微分推论

Type-2不变子空间 ${}_{23}\hat{}\mathcal{W}_l$:现在，令 $\omega_{n_r}^r(x_r) = 1 \in {}_3\mathcal{S}_{x_r}, r = 1, 2, 3$。对于这种情况，我们可以为给定算子 $\hat{} \mathcal{N}_1[u]$ 构造 Type-2不变子空间${}_{23}\hat{}\mathcal{W}_l$ ，如下

$$\begin{aligned} {}_3^2\hat{\mathcal{W}}_l =& \mathrm{Span}({}_3\hat{\mathcal{S}}^2) = \left\{ \xi(x_1, x_2, x_3) = \lambda + \sum_{i=1}^{3} \sum_{q_i=1}^{n_i - 1} \lambda_{q_i}^i \omega_{q_i}^i(x_i) + \sum_{\substack{i<j \\ r=1 \\ r=i,j}}^{3} \sum_{\substack{q_r=1, \\ r=i,j}}^{n_r - 1} \lambda_{q_i, q_j}^{i,j} \omega_{q_i}^i(x_i) \omega_{q_j}^j(x_j) \right| \\ & \mathcal{D}_{x_i}[\xi(x_1, x_2, x_3)] = 0, a_{i0} = 0, \lambda_{q_i, q_j}^{i,j}, \lambda_{q_i}^i, \lambda \in \mathbb{R}, q_r = 1, 2, \ldots, n_r - 1, \\ & r = i, j = 1, 2, 3, \frac{\partial^3 \xi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = 0 \Bigg\}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

其中基集${}_3\hat{\mathcal{S}}^2 = \bigcup_{i<j}\left\{\omega_{q_i}^i(x_i)\omega_{q_j}^j(x_j)\middle|\omega_{q_r}^r(x_r) \in \mathcal{S}_{x_r}, q_r = 1,\ldots,n_r, r = i,j = 1,2,3\right\}$以及Type-2不变子空间的维数

$$\dim({}_3^2\hat{\mathcal{W}}_l) = l = 1 + \sum_{i=1}^{3}(n_i - 1) \ + \sum_{\substack{i<j\\ i,j=1,2,3}}(n_i - 1)(n_j - 1).$$

Thus，Type-2不变子空间 ${}_{23}\hat{}\mathcal{W}_l$ 的不变条件形式如下

$$\mathcal{D}_{x_i}\left[\hat{\mathcal{N}}_1[u]\right] = 0, a_{i0} = 0, \frac{\partial^3\hat{\mathcal{N}}[u]}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3} = 0, \text{if}\,\mathcal{D}_{x_i}[u] = 0, a_{i0} = 0, \frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3} = 0 \quad (2.16)$$

以及关于 x_i、$i = 1$、2、3。的微分推论。

Type-3不变子空间 ${}_{33}\hat{}\mathcal{W}_l$：最后，假设 $\omega_{q_r}^r(x_r) \in {}_3\mathcal{S}_{x_r}, q_r = 1,2,\ldots,n_r - 1$且 $\omega_{n_r}^r(x_r) = 1 \in {}_3\mathcal{S}_{x_r}, r = 1,2,3.$因此，我们将给定微分算子 $\hat{}\,\mathcal{N}_1[u]$ 的 Type-3 不变子空间定义为

$$\begin{aligned}{}_3^3\hat{\mathcal{W}}_l =& \text{Span}({}_3\hat{\mathcal{S}}^3) = \left\{\xi(x_1,x_2,x_3) = \lambda + \sum_{i=1}^{3}\lambda_{q_i}\omega_{q_i}^i(x_i)\middle|\mathcal{D}_{x_i}[\xi(x_1,x_2,x_3)] = 0, a_{i0} = 0,\right.\\ &\left.\frac{\partial^2\xi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_i\partial x_j} = 0, i<j, \lambda,\lambda_{q_i}\in\mathbb{R}, q_i = 1,\ldots,n_i-1, i,j = 1,2,3\right\},\end{aligned} \quad (2.17)$$

其中基集

$${}_3\hat{\mathcal{S}}^3 = \left\{1,\omega_1^1(x_1),\ldots,\omega_{n_1-1}^1(x_1),\omega_1^2(x_2),\ldots,\omega_{n_2-1}^2(x_2),\omega_1^3(x_3),\ldots,\omega_{n_3-1}^3(x_3)\right\}$$

以及线性空间 $\dim({}_3^3\hat{}\mathcal{W}_l)$ 的维数 $= l = n_1 + n_2 + n_3 - 2.$

在这种情况下，不变性条件写成如下形式

$$\mathcal{D}_{x_i}\left[\hat{\mathcal{N}}_1[u]\right] = 0, a_{i0} = 0, \frac{\partial^2\hat{\mathcal{N}}_1[u]}{\partial x_i\partial x_j} = 0, \text{if}\,\mathcal{D}_{x_i}[u] = 0, a_{i0} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} = 0 \quad (2.18)$$

以及关于 x_i，的微分推论，其中 i，$j = 1$，2，3.

注 2. 值得注意的是，如果 $1 \in {}_3^1\hat{}\mathcal{W}_l$，那么我们得到以下包含关系

$${}_3^3\hat{\mathcal{W}}_l \subseteq {}_3^2\hat{\mathcal{W}}_l \subseteq {}_3^1\hat{\mathcal{W}}_l.$$

由此可见，${}_3^j\hat{}\mathcal{W}_l$ 关于给定的微分算子$\hat{}\mathcal{N}_1[u]$是不变的，但线性空间 ${}_3^i\hat{}\mathcal{W}_l$ 在$\hat{}\,\mathcal{N}_1[u]$作用下不一定是不变的，其中 $i<j$，$(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$。

接下来，我们将详细、系统地分析如何为广义（$4+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程构造各种类型的线性空间。

3 广义$(4+1)$-维非线性时间分数阶偏微分方程：不变子空间方法

本节中，我们考虑如下形式的涉及四个自变量的广义非线性偏微分算子

$$\hat{\mathcal{N}}_2[u]\equiv\hat{\mathcal{N}}_2\left(x_1、\ \cdots\cdots、\ x_4、\ u、\ \frac{\partial u}{\partial x_1}、\ \cdots\cdots、\ \frac{\partial u}{\partial x_4}、\ \cdots\cdots、\ \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}、\ \cdots\cdots、\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}、\ \cdots\cdots、\ \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}\partial x_4^{k_4}}\right),\ \text{其中}\ u=u(x_1,x_2,x_3,x_4,t),\quad x_i\in\mathbb{R}、\ i=1、2、3、4、\tag{3.1}$$

$t>0$ 以及阶数为 k 的非线性偏微分算子 $\hat{\mathcal{N}}_2[u]$ 是给定的充分光滑算子，并且 $\sum_{i=1}^{4}k_i=k、\ \ k_i\in\mathbb{N}、\ i=1、2、3、4$。

现在，我们定义有限维线性空间

$$_4\hat{\mathcal{W}}_n=\left\{\sum_{q=1}^{n}\lambda_q\xi_q(x_1,x_2,x_3,x_4)\Big|\xi_q(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathcal{B},\lambda_q\in\mathbb{R},q=1,2,\ldots,n\right\},\tag{3.2}$$

其中 $n\ (<\infty)$ 是线性空间 $_4\mathcal{W}_n$ 的维数，而给定线性空间 (3.2) 的基集 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{B}=\{\xi_q(x_1,x_2,x_3,x_4)|q=1,2,\ldots,n\}$，其中某些线性无关函数 $\xi_q(x_1,x_2,x_3,x_4)\ q=1,2,\ldots,n$。

给定的有限维线性空间$_4\hat{\mathcal{W}}_n$ 在$\hat{\mathcal{N}}_2[u]$ 下是不变的，当$\hat{\mathcal{N}}_2[u]\in{}_4\hat{\mathcal{W}}_n$每当 $u\in{}_4\hat{\mathcal{W}}_n$. 如果算子 $\hat{\mathcal{N}}_2[u]$ 保持线性空间$_4\hat{\mathcal{W}}_n$，则有

$$\hat{\mathcal{N}}_2[\sum_{q=1}^{n}\lambda_q\xi_q(x_1,x_2,x_3,x_4)]=\sum_{q=1}^{n}\Lambda_q(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\xi_q(x_1,x_2,x_3,x_4),\tag{3.3}$$

其中，函数 $\Lambda_q(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\ q=1,2,\ldots,n,$ 是关于 $\mathcal{B}.$ 的展开系数

定理 3.1。考虑广义的$(4+1)$维非线性 *TFP* *DE*

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}=\hat{\mathcal{N}}_2[u],\ t>0,\ \alpha>0,\tag{3.4}$$

其中 $u=u(x_1,x_2,x_3,x_4,t)$。若(3.2) 中给出的线性空间 $_4\mathcal{W}_n$ 在给定算子$\hat{\mathcal{N}}_2[u]$ 作用下保持不变，则方程(3.4) 存在如下形式的精确解

$$u(x_1,x_2,x_3,x_4,t)=\sum_{q=1}^{n}\Psi_q(t)\xi_q(x_1,x_2,x_3,x_4),\tag{3.5}$$

其中，函数 $\Psi_q\ (t)\ \ q=1、2、\ldots、n$ 满足任意阶常微分方程组

$$\frac{d^\alpha\Psi_q(t)}{dt^\alpha}=\Lambda_q(\Psi_1(t),\Psi_2(t),\ldots,\Psi_n(t)),\ q=1,2,\ldots,n.\tag{3.6}$$

证明： 类似于定理 2.1 的证明。

接下来，我们将系统地分析如何定义由给定算子 $\hat{\mathcal{N}}_2[\hat{u}]$ 确定的各种类型的不变子空间，并将其作为（$3+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程（2.4）不变子空间类型的扩展。

3.1 给定微分算子允许的不变子空间 (3.1)

考虑如下形式的 n_i 阶线性齐次常微分方程

$$\mathcal{D}_{x_i}[\omega] \equiv \frac{d^{n_i}\omega}{dx_i^{n_i}} + a_{in_i-1}\frac{d^{n_i-1}\omega}{dx_i^{n_i-1}} + \cdots + a_{i0}\omega = 0, i = 1,2,3,4 \tag{3.7}$$

其 n_i 个线性无关解构成集合 ${}_4\mathcal{S}_{x_i} = \{\omega_{q_i}^i(x_i)\big|q_i = 1, 2, ..., n_i\}$ 和$a_{ij} \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, ..., n_i - 1$, $i = 1, 2, 3, 4$。给定线性齐次常微分方程（3.7）的解空间定义为

$$\hat{\mathcal{W}}_{n_i}^{x_i} = \mathrm{Span}({}_4\mathcal{S}_{x_i}) = \left\{ \sum_{q=1}^{n_i} \lambda_{q_i}\omega_{q_i}^i(x_i)\big|\mathcal{D}_{x_i}[\omega_{q_i}^i(x_i)] = 0, q_i = 1,2,\ldots,n_i \right\}. \tag{3.8}$$

现在，我们说明如何为给定的非线性偏微分算子 $\hat{\mathcal{N}}_2[u]$定义四种类型的线性空间。

第一类不变子空间 ${}_{14}\hat{\mathcal{W}}_l$**:** 让我们首先定义给定算子 $\hat{\mathcal{N}}_2[u]$ 的第一类线性子空间 ${}_4^1\hat{\mathcal{W}}_l$为

$$\begin{aligned} {}_4^1\hat{\mathcal{W}}_l =& \mathrm{Span}({}_4\hat{\mathcal{S}}^1) = \left\{ \xi(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum_{q_1,\ldots,q_4} \lambda_{q_1,q_2,q_3,q_4} \prod_{i=1}^{4} \omega_{q_i}^i(x_i)\Big| \right. \\ & \left. \mathcal{D}_{x_i}[\xi(x_1,x_2,x_3,x_4)] = 0, \lambda_{q_1,q_2,q_3,q_4} \in \mathbb{R}, q_i = 1,2,\ldots,n_i, i = 1,2,3,4 \right\}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

其中集合 ${}_4\hat{\mathcal{S}}^1 = \left\{ \prod_{i=1}^{4} \omega_{q_i}^i(x_i)\big| \ \omega_{q_i}^i(x_i) \ \in {}_4\hat{\mathcal{S}}_{x_i},\ q_i = 1,2,\ldots,n_i, i = 1,2,3,4 \right\}$ 且 l 表示空间 ${}_{14}\hat{\mathcal{W}}_l$ 的维数，即 $\dim({}_4^1\hat{\mathcal{W}}_l) = l = n_1n_2n_3n_4$.

式 (3.9) 中给出的第一类线性空间 ${}_{14}\hat{\mathcal{W}}_l$ 对给定的非线性偏微分算子 $\hat{\mathcal{N}}_2[u]$ 保持不变，当且仅当 $\hat{\mathcal{N}}_2[u] \in {}_4^1\hat{\mathcal{W}}_l$，其中 $u \in {}_4^1\hat{\mathcal{W}}_l$。因此，第一类不变子空间 ${}_{14}\hat{\mathcal{W}}_l$ 的不变性条件可写为

$$\mathcal{D}_{x_i}\left[\hat{\mathcal{N}}_2[u]\right] = 0 \text{ whenever } \mathcal{D}_{x_i}[u] = 0,\ i = 1,2,3,4, \tag{3.10}$$

以及关于 $x_i, i=1$,2,3,4.的微分推论。

Type-2不变子空间 ${}_{24}\hat{}\mathcal{W}_l$ **:** 给定非线性偏微分算子 $\hat{}\,\mathcal{N}_2[u]$ 的第二类线性空间定义如下形式

$$
\begin{aligned}
{}^2_4\hat{\mathcal{W}}_l =&\mathrm{Span}({}_4\hat{\mathcal{S}}^2) = \Bigg\{\xi(x_1,x_2,x_3,x_4) = \lambda + \sum_{i=1}^{4}\sum_{q_i=1}^{n_i-1}\lambda^i_{q_i}\omega^i_{q_i}(x_i) + \sum_{i<j}\sum_{q_i,q_j}\lambda^{i,j}_{q_i,q_j}\omega^i_{q_i}(x_i)\omega^j_{q_j}(x_j)\\
&+\sum_{i<j<s}\sum_{q_i,q_j,q_s}^{n_r-1}\lambda^{i,j,s}_{q_i,q_j,q_s}\omega^i_{q_i}(x_i)\omega^j_{q_j}(x_j)\omega^s_{q_s}(x_s)\ \Big|\ \lambda^{i,j}_{q_i,q_j},\lambda^{i,j,s}_{q_i,q_j,q_s},\lambda^i_{q_i},\lambda\in\mathbb{R},\\
&\mathcal{D}_{x_i}[\xi]=0, a_{i0}=0, \frac{\partial^4\xi}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3\partial x_4}=0, q_r=1,2,\ldots,n_r-1, r=i,j,s=1,2,3,4\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

其中的基集

$$
{}_4\hat{\mathcal{S}}^2 = \bigcup_{i<j}\Big\{\omega^i_{q_i}(x_i)\omega^j_{q_j}(x_j)\omega^s_{q_s}(x_s)\Big|\omega^r_{q_r}(x_r)\in{}_4\mathcal{S}_{x_r}, q_r=1,2,\ldots,n_r, r=i,j,s=1,2,3,4\Big\}
$$

使得 $\omega^r_{n_r}(x_r) = 1\in{}_4\mathcal{S}_{x_r},\ r=1,2,3,4,$，且线性空间${}_{24}\hat{}\mathcal{W}_l$的维数为，得到的内容为

$$
\dim({}^2_4\hat{\mathcal{W}}_l) = 1+\sum_{i=1}^{4}(n_i-1)+\sum_{\substack{i<j\\ i,j=1,2,3,4}}(n_i-1)(n_j-1)+\sum_{\substack{i<j<s\\ i,j,s=1,2,3,4}}(n_i-1)(n_j-1)(n_s-1).
$$

第二类线性空间${}_{24}\hat{}\mathcal{W}_l$ 在给定算子$\hat{}\,\mathcal{N}_2[u]$ 作用下保持不变，当且仅当$\hat{}\,\mathcal{N}_2[u]\in{}^2_4\hat{}\mathcal{W}_l$ 对于任意 $u\in{}^2_4\hat{}\mathcal{W}_l$. 均成立。因此，第二类线性空间${}_{24}\hat{}\mathcal{W}_l$ 的不变性条件如下:

$$
\mathcal{D}_{x_i}\left[\hat{\mathcal{N}}_2[u]\right]=0, \frac{\partial^4\hat{\mathcal{N}}_2[u]}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3\partial x_4}=0, a_{i0}=0\,\text{if}\,\mathcal{D}_{x_i}[u]=0, \frac{\partial^4 u}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3\partial x_4}=0, a_{i0}=0,
$$

以及关于 $x_i, i=1$,2,3,4.的微分推论。

Type-3不变子空间 ${}_{34}\hat{}\mathcal{W}_l$**:**现在，令 $\omega^r_{n_r}(x_r) = 1\in{}_4\mathcal{S}_{x_r}$ 并定义给定算子 $\hat{}\,\mathcal{N}_2[u]$ 的 Type-3 线性空间为

$$
\begin{aligned}
{}^3_4\hat{\mathcal{W}}_l = \mathrm{Span}({}_4\hat{\mathcal{S}}^3) =& \Bigg\{\xi(x_1,x_2,x_3,x_4) = \lambda + \sum_{i=1}^{4}\sum_{q_i=1}^{n_i-1}\lambda^i_{q_i}\omega^i_{q_i}(x_i)\\
&+\sum_{i<j}\sum_{q_i,q_j}\lambda^{i,j}_{q_i,q_j}\omega^i_{q_i}(x_i)\omega^j_{q_j}(x_j)\,\Big|\lambda^{i,j}_{q_i,q_j},\lambda^i_{q_i},\lambda\in\mathbb{R},\mathcal{D}_{x_i}[\xi]=0,a_{i0}=0,\\
&\frac{\partial^4\xi}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}=0, q_r=1,2,\ldots,n_r-1, i<j<s, i,j,s=1,2,3,4\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

其中，${}_{34}\hat{}\mathcal{W}_l$ 的维数为 $\dim({}_4^3\hat{}\mathcal{W}_l) = 1+\sum_{i=1}^{4}(n_i-1)+\sum_{i<j}(n_i-1)(n_j-1)$ $i,\ j=1,2,3,4$，${}_4\hat{}\mathcal{S}^3$ 为线性空间 (3.12) 的基集

$$ {}_4\hat{\mathcal{S}}^3 = \bigcup_{i<j}\left\{\omega_{q_i}^i(x_i)\omega_{q_j}^j(x_j)\big|\omega_{q_r}^r(x_r)\in {}_4\mathcal{S}_{x_r}, q_r=1,\ldots,n_r, r=i,j=1,\ldots,4\right\}. $$

Type-3 线性空间 ${}_{34}\hat{}\mathcal{W}_l$ 在 $\hat{}\,\mathcal{N}_2[u]$ 下是不变的，当 $\hat{}\,\mathcal{N}_2[u]\in {}_4^3\hat{}\mathcal{W}_l$ 时，对于 $u\in {}_4^3\hat{}\mathcal{W}_l$. 均成立。因此，Type-3 不变子空间 ${}_{34}\hat{}\mathcal{W}_l$ 的不变性条件写为

$$ \begin{aligned} &\mathcal{D}_{x_i}\left[\hat{\mathcal{N}}_2[u]\right]=0, a_{i0}=0, \frac{\partial^3\hat{\mathcal{N}}_2[u]}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}=0, i<j<s, i,j,s=1,2,3,4,\\ &\text{if } \mathcal{D}_{x_i}[u]=0, a_{i0}=0, \frac{\partial^3 u}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}=0, i<j<s, i,j,s=1,2,3,4, \end{aligned} $$

以及关于 $x_i, i=1,2,3,4.$ 的微分推论

类型 4 不变子空间 ${}_{44}\hat{}\mathcal{W}_l$：最后，给定算子 $\hat{}\mathcal{N}_2[u]$ 的类型 4 线性空间定义为以下形式。

$$ \begin{aligned} {}_4^4\hat{\mathcal{W}}_l =&\mathrm{Span}({}_4\hat{\mathcal{S}}^4)=\Bigg\{\xi(x_1,x_2,x_3,x_4)=\lambda+\sum_{i=1}^{4}\lambda_{q_i}\omega_{q_i}^i(x_i)\big|\lambda,\lambda_{q_i}\in\mathbb{R}, \mathcal{D}_{x_i}[\xi]=0,\\ &a_{i0}=0, \frac{\partial^2\xi}{\partial x_i\partial x_j}=0, i<j, q_i=1,\ldots,n_i-1, i,j=1,2,3,4\Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.13} $$

其中，基集 ${}_4\hat{}\mathcal{S}^4=\left\{1,\omega_1^1(x_1)\ldots,\omega_{n_1-1}^1(x_1)\ldots,\omega_{n_4-1}^4(x_4)\right\}$ 以及线性空间 ${}_{44}\hat{}\mathcal{W}_l$ 的维数为 $\dim({}_4^4\hat{}\mathcal{W}_l)=n_1+n_2+n_3+n_4-3.$

称 Type-4 线性空间 ${}_4^4\hat{}\mathcal{W}_l$ 在给定算子 $\hat{}\,\mathcal{N}_2[u]$ 下不变，如果 $\hat{}\mathcal{N}_2[u]\in {}_4^4\hat{}\mathcal{W}_l$ 每当 $u\in {}_4^4\hat{}\mathcal{W}_l.$。因此，Type-4 线性空间 ${}_{44}\hat{}\mathcal{W}_l$ 的不变条件读作

$$ \begin{aligned} &\mathcal{D}_{x_i}\left[\hat{\mathcal{N}}_2[u]\right]=0, \frac{\partial^2\hat{\mathcal{N}}_2[u]}{\partial x_i\partial x_j}=0, a_{i0}=0\, i<j, i,j=1,2,3,4\\ &\text{whenever}\,\mathcal{D}_{x_i}[u]=0, a_{i0}=0, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=0, i<j, i,j=1,2,3,4, \end{aligned} \tag{3.14} $$

以及关于 $x_i, i=1,2,3,4.$ 的微分推论

注 3. 有趣的是，如果 $1\in {}_4^1\hat{}\mathcal{W}_l$，则我们得到以下包含关系

$$ {}_4^4\hat{\mathcal{W}}_l\subseteq {}_4^3\hat{\mathcal{W}}_l\subseteq {}_4^2\hat{\mathcal{W}}_l\subseteq {}_4^1\hat{\mathcal{W}}_l. $$

由此可见，${}_4^j\hat{}\mathcal{W}_l$ 关于给定的微分算子 $\hat{}\mathcal{N}_2[u]$ 是不变的，但线性空间 ${}_4^i\hat{}\mathcal{W}_l$ 不一定在 $\hat{}\,\mathcal{N}_2[u]$ 作用下保持不变，其中 $i<j, i,j=1$、2、3、4。

接下来，我们将针对广义（$m+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程，发展不变子空间方法的推广形式。下一节将系统分析如何为广义（$m+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程寻找各种类型的线性空间。

4 广义$(m+1)$-维数非线性时间分数阶偏微分方程：不变子空间方法

本节中，我们考虑如下涉及 m 个自变量的、充分光滑的 k 阶广义非线性偏微分算子:

$$\hat{\mathcal{N}}_3[u] \equiv \hat{\mathcal{N}}\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_m^{k_m}}\right), \tag{4.1}$$

$_m$其中 $t>0$, $x_i \in \mathbb{R}, i=1,2,\ldots,m$, $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_m,t)$ 和 $\sum k_i = k$, $k_i \in \mathbb{N}$, $i =_{i=1}1,2,\ldots,m$。现在，我们定义由 n 个线性无关函数 $\xi_q(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ $q=1,2,\ldots,n$ 张成的 n 维线性空间，即

$$_m\hat{\mathcal{W}}_n = \mathrm{Span}(\mathcal{B}) = \left\{\sum_{q=1}^{n} \lambda_q \xi_q(x_1,x_2,\ldots,x_m) : \lambda_q \in \mathbb{R}, q=1,2,\ldots,n\right\}, \tag{4.2}$$

其中，基集 $\mathcal{B}=\{\xi_q(x_1,\ x_2、\ldots、\ x_m):\ q=1,\ 2、\ldots、\ n\}$，$n$ 是ˆ线性空间 $_m\mathcal{W}_n$ 的维数。

式 (4.1) 中给出的非线性偏微分算子 ˆ $\mathcal{N}_3[u]$ 在满足以下条件时保持线性空间 $_m$ ˆ$\mathcal{W}_n$ 不变：只要 $u \in {}_m$ ˆ$\mathcal{W}_n$.，就有 ˆ $\mathcal{N}_3[u] \in {}_m$ ˆ$\mathcal{W}_n$。若线性空间 $_m$ ˆ$\mathcal{W}_n$ 在给定的微分算子 (4.1) 作用下保持不变，则有

$$\hat{\mathcal{N}}_3\left[\sum_{q=1}^{n} \lambda_q \xi_q(x_1,x_2,\ldots,x_m)\right] = \sum_{q=1}^{n} \Lambda_q(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\xi_q(x_1,x_2,\ldots,x_m) \in {}_m\hat{\mathcal{W}}_n,$$

其中，函数 $\lambda_q \in \mathbb{R}$ 和函数 Λ_q（λ_1，λ_2，$\ldots$，λ_n） $q=1$，2，$\ldots$，n，表示相对于基 $\mathcal{B}$. 的展开系数

定理 4.1。考虑广义的$(m+1)$维非线性 *TFPDE*

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \hat{\mathcal{N}}_3[u],\ \alpha>0,\ t>0, \tag{4.3}$$

其中 $u=u$（x_1, x_2, $\ldots$, x_m, t）。如果算子 ˆ $\mathcal{N}_3[u]$ 保留式（4.2）中给出的空间 $_m$ ˆ$\mathcal{W}_n$，那么方程 （4.3）存在如下有限可分形式的精确解

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_m,t) = \sum_{q=1}^{n} \Psi_q(t)\xi_q(x_1,x_2,\ldots,x_m), \tag{4.4}$$

其中 函数 Ψ_q（t） $q=1$、2、.. . 、 n 满足任意阶常微分方程组

$$\frac{d^{\alpha}\Psi_q(t)}{dt^{\alpha}}=\Lambda_q(\Psi_1(t),\Psi_2(t),...,\Psi_n(t)),q=1,2,\ldots,n. \tag{4.5}$$

.证明： 与定理 *2.1* 的证明类似。

接下来，我们解释如何为(4.1)中给出的算子ˆ$\mathcal{N}_3[u]$定义 m-不同类型的线性空间。

4.1给定微分算子所容许的不变子空间 (4.1)

这里，我们首先考虑如下形式的 n_i 阶齐次线性常微分方程。

$$\mathcal{D}_{x_i}[\omega]\equiv\frac{d^{n_i}\omega}{dx_i^{n_i}}+a_{in_i-1}\frac{d^{n_i-1}\omega}{dx_i^{n_i-1}}+\cdots+a_{i0}\omega=0,i=1,2,\ldots,m \tag{4.6}$$

其基本解组为 ${}_m\mathcal{S}_{x_i}=\{\omega_{q_i}^i(x_i)：\ \mathcal{D}_{x_i}[\omega_{q_i}^i(x_i)]=0,q_i=1,2,..,n_i\}$和 $a_{ik}\in\mathbb{R},\ k=0,$ $1,\ldots,n_i-1,\ i=1,2,..,m.$ 因此，我们将(4.6)中给出的 n_i 阶齐次线性常微分方程的解空间定义为

$$\hat{\mathcal{W}}_{n_i}^{x_i}=\text{Span}({}_m\mathcal{S}_{x_i})=\left\{\sum_{q_i=1}^{n_i}\kappa_{q_i}\omega_{q_i}^i(x_i)|\mathcal{D}_{x_i}[\omega_{q_i}^i(x_i)]=0,\kappa_{q_i}\in\mathbb{R},q_i=1,2,\ldots,n_i\right\}. \tag{4.7}$$

现在，我们可以为(4.1)中给出的非线性偏微分算子ˆ $\mathcal{N}_3[u]$ 定义 m-不同类型的线性空间。

第一类不变子空间 ${}_m^1\hat{\mathcal{W}}_l$：首先，让我们定义第一类线性空间。 e

$$\begin{aligned}{}_m^1\hat{\mathcal{W}}_l=&\text{Span}({}_m\hat{\mathcal{S}}^1)=\left\{\xi(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\sum_{q_1,\ldots,q_m}\lambda_{q_1,q_2,\ldots,q_m}\prod_{i=1}^{m}\omega_{q_i}^i(x_i)\Big|\right.\\&\left.\mathcal{D}_{x_i}[\xi(x_1,x_2,\ldots,x_m)]=0,\lambda_{q_1,q_2,\ldots,q_m}\in\mathbb{R},q_i=1,2,\ldots,n_i,i=1,\ldots,m\right\},\end{aligned} \tag{4.8}$$

其中， l 表示线性空间 ${}_m^1\hat{\mathcal{W}}_l$ 的维数，即，$\dim({}_m^1\hat{\mathcal{W}}_l)=l=\prod_{i=1}^{m}n_i$以及基

$${}_m\hat{\mathcal{S}}^1=\left\{\prod_{i=1}^{m}\omega_{q_i}^i(x_i)\Big|\omega_{q_i}^i(x_i)\in{}_m\hat{\mathcal{S}}_{x_i},q_i=1,2,\ldots,n_i,i=1,2,\ldots,m\right\}.$$

当 ${}_m^1\hat{\mathcal{W}}_l$ 满足ˆ $\mathcal{N}_3[u]\in{}_m^1\hat{\mathcal{W}}_l$ （只要 $u\in{}_m^1\hat{\mathcal{W}}_l$·）时，第一类线性空间 ${}_m^1\hat{\mathcal{W}}_l$ 在ˆ $\mathcal{N}_3[u]$ 下是不变的。此时，得到的不变条件如下：

$$\mathcal{D}_{x_i}\left[\hat{\mathcal{N}_3}[u]\right]=0,\ \text{whenever}\quad\mathcal{D}_{x_i}[u]=0,i=1,2,\ldots,m, \tag{4.9}$$

以及关于 $x_i, i = 1, 2, \ldots, m.$ 的微分推论

Type-2不变子空间 ${}^{2}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l$: 现在，设 $\omega^r_{n_r}(x_r) = 1 \in {}_m\mathcal{S}_{x_r}, r = 1, 2, \ldots, m_\circ$ 因此，我们可以定义第二类线性空间如下:

$$
\begin{aligned}
{}^{2}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l = \mathrm{Span}({}_m\hat{\mathcal{S}}^2) = \Bigg\{ & \xi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \lambda + \sum_{i=1}^{m}\sum_{q_i=1}^{n_i-1} \lambda^i_{q_i}\omega^i_{q_i}(x_i) + \ldots \\
& + \sum_{\substack{i_j=1 \\ i_1<\cdots<i_{m-1}}}^{m} \left[\sum_{q_{i_1},\ldots,q_{i_{m-1}}} \lambda^{i_1,i_2,\ldots,i_{m-1}}_{q_{i_1},q_{i_2},\ldots,q_{i_{m-1}}} \prod_{j=1}^{m-1} \omega^{i_j}_{q_{i_j}}(x_{i_j}) \right] \Big| \mathcal{D}_{x_{i_j}}[\xi] = 0, \frac{\partial^m \xi}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} = 0, \\
& a_{i_j 0} = 0, \lambda^{i_1,i_2,\ldots,i_{m-1}}_{q_{i_1},q_{i_2},\ldots,q_{i_{m-1}}}, \ldots \lambda^i_{q_i}, \lambda \in \mathbb{R}, q_{i_j} = 1, \ldots, n_{i_j}, i_j = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, m-1 \Bigg\},
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

其中线性空间 ${}^{2}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l$ is l 的维数，即

$$
\dim({}^{2}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l) = l = 1 + \sum_{i=1}^{m}(n_i - 1) + \sum_{\substack{i_r<i_s \\ r,s=1,\ldots,m-1 \\ i_r,i_s=1,2,\ldots,m}} (n_{i_r} - 1)(n_{i_s} - 1) + \cdots + \sum_{\substack{i_r=1 \\ r=1,\ldots,m-1 \\ i_1<\cdots<i_{m-1}}}^{m} \left[\prod_{j=1}^{m-1} (n_{i_j} - 1) \right]
$$

$$
\text{and the basis set } {}_m\hat{\mathcal{S}}^2 = \bigcup_{\substack{i_j=1 \\ i_1<\cdots<i_{m-1}}}^{m} \left\{ \prod_{j=1}^{m-1} \omega^{i_j}_{q_{i_j}}(x_{i_j}) \Big| \omega^{i_j}_{q_{i_j}}(x_{i_j}) \in {}_m\mathcal{S}_{x_{i_j}}, q_{i_j} = 1, \ldots, n_{i_j}, j = 1, \ldots, m-1 \right\}.
$$

对于这种情况，算子 $\mathcal{N}_3[u]$ given in (4.1) 的不变条件如下获得:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{D}_{x_i}\left[\hat{\mathcal{N}}_3[u]\right] = 0, \frac{\partial^m \hat{\mathcal{N}}_3[u]}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} = 0, a_{i0} = 0, \text{ whenever} \\
& \mathcal{D}_{x_i}[u] = 0, \frac{\partial^m u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} = 0, a_{i0} = 0, i = 1, 2, \ldots, m,
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

以及关于 $x_i, i = 1, 2, \ldots, m.$ 的微分推论

Type-3不变子空间 ${}^{3}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l$: 设 $\omega^r_{n_r}(x_r) = 1 \in {}_m\mathcal{S}_{x_r}, r = 1, 2, \ldots, m.$ 因此，我们可以为给定的算子 (4.1) 构造Type-3不变子空间如下

$$
\begin{aligned}
{}^{3}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l = \mathrm{Span}({}_m\hat{\mathcal{S}}^3) = \Bigg\{ & \xi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \lambda + \sum_{i=1}^{m}\sum_{q_i=1}^{n_i-1} \lambda^i_{q_i}\omega^i_{q_i}(x_i) + \ldots \\
& + \sum_{\substack{i_j=1 \\ i_1<\cdots<i_{m-2}}}^{m} \left[\sum_{q_{i_1},\ldots,q_{i_{m-2}}} \lambda^{i_1,i_2,\ldots,i_{m-2}}_{q_{i_1},q_{i_2},\ldots,q_{i_{m-2}}} \prod_{j=1}^{m-2} \omega^{i_j}_{q_{i_j}}(x_{i_j}) \right] \Big| \mathcal{D}_{x_{i_j}}[\xi] = 0, \frac{\partial^{m-1} \xi}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{m-1}}} = 0, \\
& a_{i_j 0} = 0, \lambda^{i_1,i_2,\ldots,i_{m-2}}_{q_{i_1},q_{i_2},\ldots,q_{i_{m-2}}}, \ldots, \lambda^i_{q_i}, \lambda \in \mathbb{R}, q_{i_j} = 1, \ldots, n_{i_j}, i_j = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, m-2 \Bigg\},
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

其中，线性空间 ${}^{3}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l$ 的维数由下式给出

$$\dim({}^{3}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l) = l = 1 + \sum_{i=1}^{m}(n_i - 1) + \sum_{\substack{i_r<i_s \\ r,s=1,\dots,m-2 \\ i_r,i_s=1,2,\dots,m}}(n_{i_r} - 1)(n_{i_s} - 1) + \cdots + \sum_{\substack{i_r=1 \\ r=1,\dots,m-1 \\ i_1<\cdots<i_{m-2}}}^{m}\left[\prod_{j=1}^{m-2}(n_{i_j} - 1)\right]$$

and the basis set ${}_{m}\hat{\mathcal{S}}^{3} = \bigcup_{\substack{i_j=1 \\ i_1<\cdots<i_{m-2}}}^{m}\left\{\prod_{j=1}^{m-2}\omega^{i_j}_{q_{i_j}}(x_{i_j})\Big|\omega^{i_j}_{q_{i_j}}(x_{i_j}) \in {}_{m}\mathcal{S}_{x_{i_j}}, q_{i_j} = 1, 2, \dots, n_{i_j}, j = 1, \dots, m-2\right\}$.

因此，给定算子 (4.1) 的 Type-3 线性空间的不变条件如下：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_{x_{i_j}}\left[\hat{\mathcal{N}}_3[u]\right] = 0, a_{i_j0} = 0, \frac{\partial^{m-1}\hat{\mathcal{N}}_3[u]}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_{m-1}}} = 0, \text{whenever} \\
&\mathcal{D}_{x_{i_j}}[u] = 0, a_{i_j0} = 0, \frac{\partial^{m-1}u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_{m-1}}} = 0, i_j = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, m-1
\end{aligned} \tag{4.13}$$

以及关于 $x_i, i = 1, 2, \dots, m.$ 的微分推论

现在，我们可以以单一形式构造给定非线性偏微分算子（4.1）的所有可能类型的线性空间，但下面给出的第一类线性空间除外。类型-$(p+1)$ 不变子空间 ${}^{p+1}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l\,(p = 1, 2, \dots, m-1)$：现在，令 $\omega^{r}_{n_r}(x_r) = 1 \in {}_{m}\mathcal{S}_{x_r}, r = 1, 2, \dots, m$。因此，我们可以构造算子 $\hat{\mathcal{N}}_3[u]$ （4.1）中给出的类型-$(p+1)$不变子空间，如下：

$$\begin{aligned}
{}^{p+1}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l = \mathrm{Span}({}_{m}\hat{\mathcal{S}}^{p+1}) = \Bigg\{&\xi(x_1, x_2, \dots, x_m) = \lambda + \sum_{i=1}^{m}\sum_{q_i=1}^{n_i-1}\lambda^{i}_{q_i}\omega^{i}_{q_i}(x_i) + \dots \\
&+ \sum_{\substack{i_j=1 \\ j=1,\dots,m-p \\ i_1<\cdots<i_{m-p}}}^{m}\left[\sum_{q_{i_1},\dots,q_{i_{m-p}}}\lambda^{i_1,i_2,\dots,i_{m-p}}_{q_{i_1},q_{i_2},\dots,q_{i_{m-p}}}\prod_{j=1}^{m-p}\omega^{i_j}_{q_{i_j}}(x_{i_j})\right]\Big|\mathcal{D}_{x_{i_j}}[\xi] = 0, \frac{\partial^{m-p+1}\xi}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_{m-p+1}}} = 0, \\
&a_{i_j0} = 0, \lambda^{i_1,i_2,\dots,i_{m-p}}_{q_{i_1},q_{i_2},\dots,q_{i_{m-p}}}, \dots, \lambda \in \mathbb{R}, q_{i_j} = 1, \dots, n_{i_j}, i_j = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m-p\Bigg\},
\end{aligned} \tag{4.14}$$

其中线性空间 ${}^{p+1}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l$ 的维数为

$$\dim({}^{p+1}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l) = l = 1 + \sum_{i=1}^{m}(n_i - 1) + \sum_{\substack{i_r<i_s \\ r,s=1,\dots,m-p \\ i_r,i_s=1,2,\dots,m}}(n_{i_r} - 1)(n_{i_s} - 1) + \cdots + \sum_{\substack{i_r=1 \\ r=1,\dots,m-p \\ i_1<\cdots<i_{m-p}}}^{m}\left[\prod_{j=1}^{m-p}(n_{i_j} - 1)\right]$$

and the basis set ${}_{m}\hat{\mathcal{S}}^{p+1} = \bigcup_{\substack{i_j=1 \\ j=1,\dots,m-p \\ i_1<\cdots<i_{m-p}}}^{m}\left\{\prod_{j=1}^{m-p}\omega^{i_j}_{q_{i_j}}(x_{i_j})\Big|\omega^{i_j}_{q_{i_j}}(x_{i_j}) \in {}_{m}\hat{\mathcal{S}}_{x_{i_j}}, q_{i_j} = 1, \dots, n_{i_j}\right\}$, for each $p = 1, 2, \dots, m-1$.

类型为 $p+1$ 的线性空间 ${}^{p+1}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l$ 在给定的微分算子 $\hat{\mathcal{N}}_3[u]$ 作用下是不变的，当且仅当每当 $u \in {}^{p+1}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l$,时，$\hat{\mathcal{N}}_3[u] \in {}^{p+1}_{m}\hat{\mathcal{W}}$ 对于 $p = 1, 2, \ldots, m-1$ 均成立。因此，不变条件为

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_{x_{i_j}}\left[\hat{\mathcal{N}}_3[u]\right] = 0, \frac{\partial^{m-p+1}\hat{\mathcal{N}}_3[u]}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_{m-p+1}}} = 0, a_{i_j 0} = 0, \text{ whenever} \\
&\mathcal{D}_{x_{i_j}}[u] = 0, \frac{\partial^{m-p+1}u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_{m-p+1}}} = 0, a_{i_j 0} = 0, i_j = 1, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, m-p+1,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

其中 $p = 1, 2, \ldots, m-1$ 以及关于 $x_i, i =$**1**, 2, ..., m. 的微分推论

注4。 需要注意的是，如果 $1 \in {}^{1}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l$，那么我们得到以下包含关系

$$ {}^{m}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l \subseteq {}^{m-1}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l \subseteq \ldots \subseteq {}^{2}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l \subseteq {}^{1}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l.$$

由此可见，线性空间 ${}^{j}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l$ 在给定的微分算子 $\hat{\mathcal{N}}_3[u]$ 作用下是不变的，但线性空间 ${}^{i}_{m}\hat{\mathcal{W}}_l$ 未必在 $\hat{\mathcal{N}}_3[u]$ 作用下保持不变，其中 $i < j$、 i、 $j = 1$、2、.....、 m。

接下来，我们说明如何为著名的广义（$3+1$）维非线性时间分数阶 DCW 方程 (1.2) 找到不同维数的各种类型线性空间。

5 确定给定非线性时间分数阶 DCW 方程的不变子空间 (1.2)

本节给出了一种详细的算法方法，用于求出广义 $(3+1)$-维数非线性时间分数阶DCW方程(1.2) 的各种类型的不变子空间。因此，所得到的非线性微分算子形式为

$$\hat{\mathcal{H}}[u] = \sum_{r=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(P_r(u)\frac{\partial u}{\partial x_r}\right) + \sum_{r=1}^{3}Q_r(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right). \tag{5.1}$$

在本文中，我们考虑以下（n_1， n_2， n_3）取值:

$$\{(1,1,1),(2,2,2),(2,2,3),(2,3,2),(3,2,2),(2,3,3),(3,2,3),(3,3,2),(3,3,3)\}. \tag{5.2}$$

我们首先考虑 $n_i = 2, i =$ 1,2,3的情形。接下来，我们希望说明如何为给定的非线性偏微分算子 $\mathcal{H}[u]$ 构造^三类线性空间。

以算法化的方式。

定义阶数为 $n_i = 2\,(i = 1,\ 2,\ 3)$ 的线性齐次常微分方程的解空间如下:

$$\hat{\mathcal{W}}_{n_i}^{x_i} = \mathrm{Span}({}_3\mathcal{S}_{x_i}),$$

其中，${}_3S_{x_i} = \{\omega_1^i(x_i)\ \omega_2^i(x_i)\}$ 是下列阶数为 $n_i = 2\,(i = 1,\ 2,\ 3)$ 的齐次常微分方程的基本解组

$$\mathcal{D}_{x_1}[\omega] \equiv \frac{d^2\omega}{dx_1^2} + a_{11}\frac{d\omega}{dx_1} + a_{10}\omega = 0, \tag{5.3}$$

$$\mathcal{D}_{x_2}[\omega] \equiv \frac{d^2\omega}{dx_2^2} + a_{21}\frac{d\omega}{dx_2} + a_{20}\omega = 0, \tag{5.4}$$

$$\mathcal{D}_{x_3}[\omega] \equiv \frac{d^2\omega}{dx_3^2} + a_{31}\frac{d\omega}{dx_3} + a_{30}\omega = 0 \tag{5.5}$$

且 $a_{ij} \in \mathbb{R},\ \ j = 0,\ 1,\ \ i = 1,\ 2,\ 3$。

现在，我们说明如何利用得到的解空间 $\mathcal{W}_{n_i}^{x_i}(i = 1,\ 2,\ 3)$，为给定的非线性偏微分算子 (5.1) 定义三类线性空间。

第一类线性空间及其不变条件：第一类线性空间定义如下

$$\begin{aligned}{}_1^3\hat{\mathcal{W}}_l =& \mathrm{Span}\left\{\omega_1^1(x_1)\omega_1^2(x_2)\omega_1^3(x_3), \omega_2^1(x_1)\omega_1^2(x_2)\omega_1^3(x_3), \omega_1^1(x_1)\omega_2^2(x_2)\omega_1^3(x_3),\right.\\ &\omega_1^1(x_1)\omega_2^2(x_2)\omega_2^3(x_3), \omega_1^1(x_1)\omega_1^2(x_2)\omega_2^3(x_3), \omega_2^1(x_1)\omega_2^2(x_2)\omega_1^3(x_3),\\ &\left.\omega_2^1(x_1)\omega_1^2(x_2)\omega_2^3(x_3), \omega_2^1(x_1)\omega_2^2(x_2)\omega_2^3(x_3)\right\}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

需要指出的是，若算子 $\hat{}\ \mathcal{H}[u]$ 满足以下条件，则式 (5.1) 中给出的算子 $\hat{}\ \mathcal{H}[u]$ 保持式 (5.6) 中给出的线性空间 ${}_{13}\ \hat{}\mathcal{W}_l$:

$$\mathcal{D}_{x_i}[\hat{\mathcal{H}}[u]] = 0 \text{ whenever } \mathcal{D}_{x_i}[u] = 0, i = 1, 2, 3. \tag{5.7}$$

此外，我们观察到第一类不变子空间的维数为 8，即 $\dim({}_3^1\ \hat{}\mathcal{W}_l) = 8$。

第二类线性空间及其不变条件: 第二类线性空间以下列形式定义

$${}_3^2\hat{\mathcal{W}}_l = \mathrm{Span}\left\{1, \omega_1^1(x_1), \omega_1^2(x_2), \omega_1^3(x_3), \omega_1^1(x_1)\omega_1^2(x_2), \omega_1^1(x_1)\omega_1^3(x_3), \omega_1^2(x_2)\omega_1^3(x_3)\right\}. \tag{5.8}$$

$\hat{}$ 因此，若满足以下条件，式 (5.1) 中给出的非线性偏微分算子 $\mathcal{H}[u]$ 保持式 (5.8) 中给出的线性空间 ${}_{23}\ \hat{}\mathcal{W}_l$,

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}_{x_i}[\hat{\mathcal{H}}[u]] = 0, a_{i0} = 0, i = 1, 2, 3 \text{ and } \frac{\partial^3\hat{\mathcal{H}}[u]}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3} = 0\\ &\text{whenever } \mathcal{D}_{x_i}[u] = 0, a_{i0} = 0, i = 1, 2, 3 \text{ and } \frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3} = 0.\end{aligned} \tag{5.9}$$

此外，我们发现 $\dim(\hat{}\mathcal{W}_l^2) = 7$。

Type-3 线性空间及其不变条件: 最后，我们定义 Type-3 线性空间

$$^3\hat{\mathcal{W}}_l = \text{Span}\left\{1, \omega_1^1(x_1), \omega_1^2(x_2), \omega_1^3(x_3)\right\}. \tag{5.10}$$

给定的微分算子 $\hat{}\mathcal{H}[u]$ 保持式 (5.10) 中给出的第三类线性空间 $_{33}\hat{}\mathcal{W}_l$，如果它满足以下不变条件:

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}_{x_i}[\hat{\mathcal{H}}[u]] = 0, a_{i0} = 0, i = 1,2,3, \frac{\partial^2\hat{\mathcal{H}}[u]}{\partial x_1\partial x_2} = 0, \frac{\partial^2\hat{\mathcal{H}}[u]}{\partial x_1\partial x_3} = 0 \text{ and } \frac{\partial^2\hat{\mathcal{H}}[u]}{\partial x_3\partial x_2} = 0\\ &\text{whenever } \mathcal{D}_{x_i}[u] = 0, a_{i0} = 0, i = 1,2,3, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_3} = 0 \text{ and } \frac{\partial^2 u}{\partial x_3\partial x_2} = 0.\end{aligned} \tag{5.11}$$

注意，$\dim(\hat{}\mathcal{W}_l^3) = 4$。

$\hat{}$ 现在，我们的目标是找出公式（5.1）中给出的算子 $\mathcal{H}[u]$ 的Type-3不变子空间。因此，给定算子（5.1）的 Type-3不变性判据（5.11）可写成以下形式,

$$\begin{aligned}&D^{(3)}[P_1(u)]u_{x_1}^4 + \left[-5a_{11}D^{(2)}[P_1(u)] + D^{(2)}[Q_1(u)]\right]u_{x_1}^3 + \Bigg[4a_{11}^2 D[P_1(u)]\\ &- 2a_{11}D[Q_1(u)] + \sum_{i=2,3}\left(D^{(3)}[P_i(u)]u_{x_i}^2 + \left[-a_{i1}D^{(2)}[P_i(u)] + D^{(2)}[Q_i(u)]\right]u_{x_i}\right)\Bigg]u_{x_1}^2 = 0,\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}&D^{(3)}[P_2(u)]u_{x_2}^4 + \left[-5a_{21}D^{(2)}[P_2(u)] + D^{(2)}[Q_2(u)]\right]u_{x_2}^3 + \Bigg[4a_{21}^2 D[P_2(u)]\\ &- 2a_{21}D[Q_2(u)] + \sum_{i=1,3}\left(D^{(3)}[P_i(u)]u_{x_i}^2 + \left[-a_{i1}D^{(2)}[P_i(u)] + D^{(2)}[Q_i(u)]\right]u_{x_i}\right)\Bigg]u_{x_2}^2 = 0,\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}&D^{(3)}[P_3(u)]u_{x_3}^4 + \left[-5a_{31}D^{(2)}[P_3(u)] + D^{(2)}[Q_3(u)]\right]u_{x_3}^3 + \Bigg[4a_{31}^2 D[P_3(u)]\\ &- 2a_{31}D[Q_3(u)] + \sum_{i=1,2}\left(D^{(3)}[P_i(u)]u_{x_i}^2 + \left[-a_{i1}D^{(2)}[P_i(u)] + D^{(2)}[Q_i(u)]\right]u_{x_i}\right)\Bigg]u_{x_3}^2 = 0,\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}&\left[D^{(3)}[P_3(u)]u_{x_3}^2 + \left[-a_{31}D^{(2)}[P_3(u)] + D^{(2)}[Q_3(u)]\right]u_{x_3}\right]u_{x_1}u_{x_2} + \sum_{i,j=1,2}\Bigg[D^{(3)}[P_i(u)]u_{x_i}^3\\ &+ \left[-3a_{i1}D^{(2)}[P_i(u)] + D^{(2)}[Q_i(u)]\right]u_{x_i}^2\Bigg]u_{x_j} + \sum_{i=1,2}\left[a_{i1}^2 D[P_i(u)] - a_{i1}D[Q_i(u)]\right]u_{x_1}u_{x_2} = 0,\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\left[D^{(3)}[P_2(u)]u_{x_2}^2+\left[-a_{21}D^{(2)}[P_2(u)]+D^{(2)}[Q_2(u)]\right]u_{x_2}\right]u_{x_3}u_{x_1}+\sum_{i,j=1,3}\left[D^{(3)}[P_i(u)]u_{x_i}^3\right.$$
$$\left.+\left[-3a_{i1}D^{(2)}[P_i(u)]+D^{(2)}[Q_i(u)]\right]u_{x_i}^2\right]u_{x_j}+\sum_{i=1,3}\left[a_{i1}^2D[P_i(u)]-a_{i1}D[Q_i(u)]\right]u_{x_3}u_{x_1}=0, \tag{5.16}$$

$$\left[D^{(3)}[P_1(u)]u_{x_1}^2+\left[-a_{11}D^{(2)}[P_1(u)]+D^{(2)}[Q_1(u)]\right]u_{x_1}\right]u_{x_3}u_{x_2}+\sum_{i,j=2,3}\left[D^{(3)}[P_i(u)]u_{x_i}^3\right.$$
$$\left.+\left[-3a_{i1}D^{(2)}[P_i(u)]+D^{(2)}[Q_i(u)]\right]u_{x_i}^2\right]u_{x_j}+\sum_{i=2,3}\left[a_{i1}^2D[P_i(u)]-a_{i1}D[Q_i(u)]\right]u_{x_3}u_{x_2}=0, \tag{5.17}$$

其中 $u_{x_i}=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, u_{x_ix_i}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ 和 $D^{(j)}[P_i(u)], D^{(j)}[Q_i(u)]$ 表示相应函数关于 $i=1,2,3$ 和 $j=1,2,3$ 的 j^{th} 全导数。上述方程（5.12）-（5.17）给出了一个超定常微分方程组。所得的超定常微分方程组通常无法求解。因此，为简单起见，我们考虑带有三次非线性项的微分算子（5.1）。于是，我们得到函数 $P_r(u)$ 和 $Q_r(u)$（$r=1,2,3$）的形式，

$$\begin{cases}P_1(u)=\tau_{12}u^2+\tau_{11}u+\tau_{10}\\P_2(u)=\tau_{22}u^2+\tau_{21}u+\tau_{20}\\P_3(u)=\tau_{32}u^2+\tau_{31}u+\tau_{30}\end{cases}\quad\begin{cases}Q_1(u)=\rho_{12}u^2+\rho_{11}u+\rho_{10}\\Q_2(u)=\rho_{22}u^2+\rho_{21}u+\rho_{20}\\Q_3(u)=\rho_{32}u^2+\rho_{31}u+\rho_{30}\end{cases}$$

where $\tau_{ij},\rho_{ij}\in\mathbb{R} i=1,2,3, j=0,1,2.$

将上述函数 $P_i(u)$ $Q_i(u)$ $i=1,2,3$ 代入方程 (5.12)-(5.17)，我们得到以下超定方程组

$$\begin{aligned}&10a_{11}\tau_{12}-2\rho_{12}=0, 10a_{21}\tau_{22}-2\rho_{22}=0, 10a_{31}\tau_{32}-2\rho_{32}=0, 2a_{11}\tau_{12}-2\rho_{12}=0,\\&-2a_{21}\tau_{22}+2\rho_{22}=0, -2a_{31}\tau_{32}+2\rho_{32}=0, -6a_{11}\tau_{12}+\rho_{12}=0, -6a_{21}\tau_{22}+\rho_{22}=0,\\&6a_{31}\tau_{32}-\rho_{32}=0, 8a_{11}^2\tau_{12}-4a_{11}\rho_{12}=0, 8a_{21}^2\tau_{22}-4a_{21}\rho_{22}=0, 8a_{31}^2\tau_{32}-4a_{31}\rho_{32}=0,\\&4a_{11}^2\tau_{11}-2a_{11}\rho_{11}=0, 4a_{21}^2\tau_{21}-2a_{21}\rho_{21}=0, 4a_{31}^2\tau_{31}-2a_{31}\rho_{31}=0,\\&a_{11}^2\tau_{11}+a_{21}^2\tau_{21}-a_{11}\rho_{11}-a_{21}\rho_{21}=0, a_{11}^2\tau_{11}+a_{31}^2\tau_{31}-a_{31}\rho_{31}-a_{11}\rho_{11}=0,\\&a_{31}^2\tau_{31}+a_{21}^2\tau_{21}-a_{31}\rho_{31}-a_{21}\rho_{21}=0, a_{11}^2\tau_{12}+a_{21}^2\tau_{22}-a_{11}\rho_{12}-a_{21}\rho_{22}=0,\\&a_{11}^2\tau_{12}+a_{31}^2\tau_{32}-a_{31}\rho_{32}-a_{11}\rho_{12}=0, a_{31}^2\tau_{32}+a_{21}^2\tau_{22}-a_{31}\rho_{32}-a_{21}\rho_{22}=0.\end{aligned} \tag{5.18}$$

求解超定方程组后，我们得到各种类型的线性空间及其对应的非线性偏微分算子，这些内容列于表1。类似地，对于式（5.1）给出的算子，当（5.2）中所给的（n_1、n_2、n_3）取不同值时，我们可以构造具有二次和三次非线性项的各种类型的线性空间，相关内容列于表2至表9。

Table 1: Invariant subspaces and their cubic non-linear diffusion-convection-wave equation (1.2)

	$P_r(u), r = 1, 2, 3$	$Q_r(u), r = 1, 2, 3$	Invariant Subspaces
1.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{12}u^2 + \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{22}u^2 + \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{32}u^2 + \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{11}u + \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{21}u + \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{31}u + \rho_{30} \end{cases}$	${}_3^3\hat{\mathcal{W}}_4 = \text{Span}\{1, x_1, x_2, x_3\}$
2.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{12}u^2 + \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{22}u^2 + \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{11}u + \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{21}u + \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	${}_3^3\hat{\mathcal{W}}_4 = \text{Span}\{1, x_1, x_2, e^{-a_{31}x_3}\}$
3.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{12}u^2 + \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{32}u^2 + \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{11}u + \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{31}u + \rho_{30} \end{cases}$	${}_3^3\hat{\mathcal{W}}_4 = \text{Span}\{1, x_1, e^{-a_{21}x_2}, x_3\}$
4.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{22}u^2 + \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{32}u^2 + \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{21}u + \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{31}u + \rho_{30} \end{cases}$	${}_3^3\hat{\mathcal{W}}_4 = \text{Span}\{1, e^{-a_{11}x_1}, x_2, x_3\}$
5.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{12}u^2 + \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{11}u + \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	${}_3^3\hat{\mathcal{W}}_4 = \text{Span}\{1, x_1, e^{-a_{21}x_2}, e^{-a_{31}x_3}\}$
6.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{22}u^2 + \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{21}u + \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	${}_3^3\hat{\mathcal{W}}_4 = \text{Span}\{1, e^{-a_{11}x_1}, x_2, e^{-a_{31}x_3}\}$
7.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{32}u^2 + \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{31}u + \rho_{30} \end{cases}$	${}_3^3\hat{\mathcal{W}}_4 = \text{Span}\{1, e^{-a_{11}x_1}, e^{-a_{21}x_2}, x_3\}$

Table 2: Invariant subspaces and their corresponding quadratic non-linear diffusion-convection-wave equation (1.2).

	$P_r(u), r=1,2,3$	$Q_r(u), r=1,2,3$	Invariant Subspaces
1.	$\begin{cases} P_1(u) = \left(-\sum_{r=2}^{3} \frac{a_{r0}^2 \tau_{r1}}{a_{10}^2} + \sum_{r=1}^{3} \frac{a_{r0}\rho_{r1}}{2a_{10}^2}\right) u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{11}u + \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{21}u + \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{31}u + \rho_{30} \end{cases}$	${}_3^1\hat{\mathcal{W}}_1 = \text{Span}\left\{e^{-(a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + a_{30}x_3)}\right\}$
2.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{11}u + \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{31}u + \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_4 = \text{Span}\left\{1, x_1, e^{-a_{21}x_2}, x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, sin(\sqrt{a_{21}}x_2), cos(\sqrt{a_{21}}x_2), x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, x_3\right\} \end{cases}$
3.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{11}u + \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{21}u + \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_4 = \text{Span}\left\{1, x_1, x_2, e^{-a_{31}x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, x_2, sin(\sqrt{a_{31}}x_3), cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, x_2, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \end{cases}$
4.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{21}u + \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{31}u + \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_4 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{11}x_1}, x_2, x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, sin(\sqrt{a_{11}}x_1), cos(\sqrt{a_{11}}x_1), x_2, x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, x_2, x_3\right\} \end{cases}$
5.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{11}u + \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, e^{-a_{21}x_2}, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, sin(\sqrt{a_{21}}x_2), cos(\sqrt{a_{21}}x_2), x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \end{cases}$
6.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{11}u + \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, x_2, \frac{x_2^2}{2}, e^{-a_{31}a_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, x_2, \frac{x_2^2}{2}, sin(\sqrt{a_{31}}x_3), cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, x_2, \frac{x_2^2}{2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \end{cases}$
7.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{21}u + \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{11}x_1}, x_2, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, sin(\sqrt{a_{11}}x_1), cos(\sqrt{a_{11}}x_1), x_2, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_2, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \end{cases}$

Table 3: Invariant subspaces and their corresponding quadratic non-linear diffusion-convection-wave equation (1.2)

	$P_r(u), r=1,2,3$	$Q_r(u), r=1,2,3$	Invariant Subspaces
8.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{11}u+\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{21}u+\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{21}u+\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_1,\frac{x_1^2}{2},x_2,e^{-a_{31}x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6=\text{Span}\left\{1,x_1,\frac{x_1^2}{2},x_2,sin(\sqrt{a_{31}}x_3),cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6=\text{Span}\left\{1,x_1,\frac{x_1^2}{2},x_2,e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3},e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \end{cases}$
9.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{21}u+\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{31}u+\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{31}u+\rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,e^{-a_{11}x_1},x_2,\frac{x_2^2}{2},x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6=\text{Span}\left\{1,x_2,\frac{x_2^2}{2},sin(\sqrt{a_{11}}x_1),cos(\sqrt{a_{11}}x_1),x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6=\text{Span}\left\{1,x_2,\frac{x_2^2}{2},e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1},e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1},x_3\right\} \end{cases}$
10.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{11}u+\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{31}u+\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{31}u+\rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_1,\frac{x_1^2}{2},x_3,e^{-a_{21}x_2},\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6=\text{Span}\left\{1,x_1,\frac{x_1^2}{2},x_3,sin(\sqrt{a_{21}}x_2),cos(\sqrt{a_{21}}x_2)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6=\text{Span}\left\{1,x_1,\frac{x_1^2}{2},x_3,e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2},e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}\right\} \end{cases}$
11.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{21}u+\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{31}u+\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6=\text{Span}\left\{1,e^{-a_{11}x_1},x_2,\frac{x_2^2}{2},x_3,\frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_7=\text{Span}\left\{1,sin(\sqrt{a_{11}}x_1),cos(\sqrt{a_{11}}x_1),x_2,\frac{x_2^2}{2},x_3,\frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_7=\text{Span}\left\{1,e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1},e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1},x_2,\frac{x_2^2}{2},x_3,\frac{x_3^2}{2}\right\} \end{cases}$
12.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{11}u+\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{31}u+\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6=\text{Span}\left\{1,x_1,\frac{x_1^2}{2},e^{-a_{21}x_2},x_3,\frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_7=\text{Span}\left\{1,x_1,\frac{x_1^2}{2},sin(\sqrt{a_{21}}x_2),cos(\sqrt{a_{21}}x_2),x_3,\frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_7=\text{Span}\left\{1,x_1,\frac{x_1^2}{2},e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2},e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2},x_3,\frac{x_3^2}{2}\right\} \end{cases}$
13.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{11}u+\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{21}u+\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6=\text{Span}\left\{1,x_1,\frac{x_1^2}{2},x_2,\frac{x_2^2}{2},e^{-a_{31}x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_7=\text{Span}\left\{1,x_1,\frac{x_1^2}{2},x_2,\frac{x_2^2}{2},sin(\sqrt{a_{31}}x_3),cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_7=\text{Span}\left\{1,x_1,\frac{x_1^2}{2},x_2,\frac{x_2^2}{2},e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3},e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \end{cases}$

Table 4: Invariant subspaces and their corresponding quadratic non-linear diffusion-convection-wave equation (1.2)

$P_r(u), Q_r(u), r = 1, 2, 3$	Invariant Subspaces
14. $\begin{cases} P_1(u) = \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \\ Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{31}u + \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_4 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{11}x_1}, e^{-a_{21}x_2}, x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, sin(\sqrt{a_{11}}x_1), cos(\sqrt{a_{11}}x_1), e^{-a_{21}x_2}, x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-a_{21}x_2}, x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{11}x_1}, sin(\sqrt{a_{21}}x_2), cos(\sqrt{a_{21}}x_2), x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{11}x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, sin(\sqrt{a_{11}}x_1), cos(\sqrt{a_{11}}x_1), sin(\sqrt{a_{21}}x_2), cos(\sqrt{a_{21}}x_2), x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, x_3\right\} \end{cases}$
15. $\begin{cases} P_1(u) = \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{30} \\ Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{21}u + \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_4 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{11}x_1}, x_2, e^{-a_{31}x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{11}x_1}, x_2, sin(\sqrt{a_{31}}x_3), cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{11}x_1}, x_2, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_2, e^{-a_{31}x_3}, sin(\sqrt{a_{11}}x_1), cos(\sqrt{a_{11}}x_1)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_2, e^{-a_{31}x_3}, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, sin(\sqrt{a_{11}}x_1), cos(\sqrt{a_{11}}x_1), x_2, sin(\sqrt{a_{31}}x_3), cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, x_2, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \end{cases}$
16. $\begin{cases} P_1(u) = \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \\ Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{11}x_1}, e^{-a_{21}x_2}, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{11}x_1}, sin(\sqrt{a_{21}}x_2), cos(\sqrt{a_{21}}x_2), x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{11}x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{21}x_2}, sin(\sqrt{a_{11}}x_1), cos(\sqrt{a_{11}}x_1), x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{21}x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_7 = \text{Span}\left\{1, sin(\sqrt{a_{11}}x_1), cos(\sqrt{a_{11}}x_1), sin(\sqrt{a_{21}}x_2), cos(\sqrt{a_{21}}x_2), x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_7 = \text{Span}\left\{1, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \end{cases}$

Table 5: Invariant subspaces and their corresponding quadratic non-linear diffusion-convection-wave equation (1.2)

$P_r(u), Q_r(u), r = 1, 2, 3$	Invariant Subspaces
17. $\begin{cases} P_1(u) = \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{30} \\ Q_1(u) = \rho_{11}u + \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_4 = \text{Span}\{1, x_1, e^{-a_{21}x_2}, e^{-a_{31}x_3}\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, e^{-a_{31}x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, sin(\sqrt{a_{21}}x_2), cos(\sqrt{a_{21}}x_2), e^{-a_{31}x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, e^{-a_{21}x_2}, sin(\sqrt{a_{31}}x_3), cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, e^{-a_{21}x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, sin(\sqrt{a_{21}}x_2), cos(\sqrt{a_{21}}x_2), sin(\sqrt{a_{31}}x_3), cos(\sqrt{a_{31}}x_3), x_1\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, \right. \\ \left. e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}, x_1\right\} \end{cases}$
18. $\begin{cases} P_1(u) = \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{30} \\ Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{11}x_1}, x_2, \frac{x_2^2}{2}, e^{-a_{31}x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{11}x_1}, x_2, \frac{x_2^2}{2}, sin(\sqrt{a_{31}}x_3), cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{11}x_1}, x_2, \frac{x_2^2}{2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, sin(\sqrt{a_{11}}x_1), cos(\sqrt{a_{11}}x_1), x_2, \frac{x_2^2}{2}, e^{-a_{31}x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, x_2, \frac{x_2^2}{2}, e^{-a_{31}x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_7 = \text{Span}\left\{1, sin(\sqrt{a_{11}}x_1), cos(\sqrt{a_{11}}x_1), sin(\sqrt{a_{31}}x_3), cos(\sqrt{a_{31}}x_3), x_2, \frac{x_2^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_7 = \text{Span}\left\{1, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, \right. \\ \left. e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}, x_2, \frac{x_2^2}{2}\right\} \end{cases}$
19. $\begin{cases} P_1(u) = \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{30} \\ Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, e^{-a_{21}x_2}, e^{-a_{31}x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, e^{-a_{21}x_2}, sin(\sqrt{a_{31}}x_3), cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, e^{-a_{21}x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, e^{-a_{31}x_3}, sin(\sqrt{a_{21}}x_2), cos(\sqrt{a_{21}}x_2)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, e^{-a_{31}x_3}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_7 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, sin(\sqrt{a_{21}}x_2), cos(\sqrt{a_{21}}x_2), sin(\sqrt{a_{31}}x_3), cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_7 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, \right. \\ \left. e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \end{cases}$

Table 6: Invariant subspaces and their corresponding quadratic non-linear diffusion-convection-wave equation (1.2)

	$P_r(u), r = 1, 2, 3$	$Q_r(u), r = 1, 2, 3$	Invariant Subspaces
20.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{11}u + \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{21}u + \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{31}u + \rho_{30} \end{cases}$	${}^{3}_{3}\hat{\mathcal{W}}_4 = \text{Span}\{1, x_1, x_2, x_3\}$
21.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{21}u + \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{31}u + \rho_{30} \end{cases}$	${}^{3}_{3}\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, x_2, x_3\right\}$
22.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{11}u + \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{31}u + \rho_{30} \end{cases}$	${}^{3}_{3}\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, x_2, \frac{x_2^2}{2}, x_3\right\}$
23.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{11}u + \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{21}u + \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	${}^{3}_{3}\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, x_2, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\}$
24.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{11}u + \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	${}^{3}_{3}\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, x_2, \frac{x_2^2}{2}, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\}$
25.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{21}u + \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	${}^{3}_{3}\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, x_2, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\}$
26.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{31}u + \rho_{30} \end{cases}$	${}^{3}_{3}\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, x_2, \frac{x_2^2}{2}, x_3\right\}$
27.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	${}^{3}_{3}\hat{\mathcal{W}}_7 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, x_2, \frac{x_2^2}{2}, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\}$

Table 7: Invariant subspaces and their corresponding cubic non-linear diffusion-convection-wave equation (1.2)

	$P_r(u), r=1,2,3$	$Q_r(u), r=1,2,3$	Invariant Subspaces
1.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{12}u^2+\tau_{11}u+\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{22}u^2+\tau_{21}u+\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{31}u+\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{11}u+\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{21}u+\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{30} \end{cases}$	${}^3_3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_1,x_2,x_3,\frac{x_3^2}{2}\right\}$
2.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{12}u^2+\tau_{11}u+\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{21}u+\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{32}u^2+\tau_{31}u+\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{11}u+\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{31}u+\rho_{30} \end{cases}$	${}^3_3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_1,x_2,\frac{x_2^2}{2},x_3\right\}$
3.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{11}u+\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{22}u^2+\tau_{21}u+\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{32}u^2+\tau_{31}u+\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{21}u+\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{31}u+\rho_{30} \end{cases}$	${}^3_3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_1,\frac{x_1^2}{2},x_2,x_3\right\}$
4.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{12}u^2+\tau_{11}u+\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{32}u^2+\tau_{31}u+\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{31}u+\rho_{30} \end{cases}$	${}^3_3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_1,\frac{x_1^2}{2},e^{a_{21}x_2},x_3\right\}$
5.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{12}u^2+\tau_{11}u+\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{21}u+\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{31}u+\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{11}u+\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{30} \end{cases}$	${}^3_3\hat{\mathcal{W}}_6=\text{Span}\left\{1,x_1,x_2,\frac{x_2^2}{2},x_3,\frac{x_3^2}{2}\right\}$
6.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{11}u+\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{22}u^2+\tau_{21}u+\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{31}u+\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{21}u+\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{30} \end{cases}$	${}^3_3\hat{\mathcal{W}}_6=\text{Span}\left\{1,x_1,\frac{x_1^2}{2},x_2,x_3,\frac{x_3^2}{2}\right\}$
7.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{11}u+\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{21}u+\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{32}u^2+\tau_{31}u+\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{31}u+\rho_{30} \end{cases}$	${}^3_3\hat{\mathcal{W}}_6=\text{Span}\left\{1,x_1,\frac{x_1^2}{2},x_2,\frac{x_2^2}{2},x_3\right\}$
8.	$\begin{cases} P_1(u)=\frac{-1}{3a_{10}^2}\left(\sum_{r=2}^{3}3a_{r0}^2\tau_{r2}-\sum_{r=1}^{3}a_{r0}\rho_{r2}\right)u^2 \\ -\frac{1}{2a_{10}^2}\left(\sum_{r=2,3}2a_{r0}^2\tau_{r1}-\sum_{r=1}^{3}a_{r0}\rho_{r1}\right)u+\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{21}u^2+\tau_{21}u+\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{31}u^2+\tau_{31}u+\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{11}u^2+\rho_{11}u+\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{21}u^2+\rho_{21}u+\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{31}u^2+\rho_{31}u+\rho_{30} \end{cases}$	${}^1_3\hat{\mathcal{W}}_1=\text{Span}\left\{e^{-(a_{10}x_1+a_{20}x_2+a_{30}x_3)}\right\}$

Table 8: Invariant subspaces and their corresponding cubic non-linear diffusion-convection-wave equation (1.2)

	$P_r(u), r=1,2,3$	$Q_r(u), r=1,2,3$	Invariant Subspaces
9.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{12}u^2+\tau_{11}u+\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{22}u^2+\tau_{21}u+\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{11}u+\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{21}u+\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_1,x_2,sin(\sqrt{a_{31}}x_3),cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_1,x_2,e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3},e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \end{cases}$
10.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{22}u^2+\tau_{21}u+\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{32}u^2+\tau_{31}u+\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{21}u+\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{31}u+\rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,sin(\sqrt{a_{11}}x_1),cos(\sqrt{a_{11}}x_1),x_2,x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1},e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1},x_2,x_3\right\} \end{cases}$
11.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{12}u^2+\tau_{11}u+\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{32}u^2+\tau_{31}u+\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{11}u+\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{11}u+\rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_1,sin(\sqrt{a_{21}}x_2),cos(\sqrt{a_{21}}x_2),x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_1,e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2},e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2},x_3\right\} \end{cases}$
12.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{22}u^2+\tau_{21}u+\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{21}u+\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_2,sin(\sqrt{a_{11}}x_1),cos(\sqrt{a_{11}}x_1),e^{-a_{31}x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_2,e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1},e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1},e^{-a_{31}x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,e^{-a_{11}x_1},x_2,sin(\sqrt{a_{31}}x_3),cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,e^{-a_{11}x_1},x_2,e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3},e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \end{cases}$
13.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{12}u^2+\tau_{11}u+\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{11}u+\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_1,sin(\sqrt{a_{21}}x_2),cos(\sqrt{a_{21}}x_2),e^{-a_{31}x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_1,e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2},e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2},e^{-a_{31}x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_1,e^{-a_{21}x_2},sin(\sqrt{a_{31}}x_3),cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_1,e^{-a_{21}x_2},e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3},e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \end{cases}$
14.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{32}u^2+\tau_{31}u+\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{31}u+\rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,e^{-a_{21}x_2},sin(\sqrt{a_{11}}x_1),cos(\sqrt{a_{11}}x_1),x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,e^{-a_{21}x_2},e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1},e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1},x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,e^{-a_{11}x_1},e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2},e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2},x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,e^{-a_{11}x_1},sin(\sqrt{a_{21}}x_2),cos(\sqrt{a_{21}}x_2),x_3\right\} \end{cases}$
15.	$\begin{cases} P_1(u)=\tau_{12}u^2+\tau_{11}u+\tau_{10} \\ P_2(u)=\tau_{21}u+\tau_{20} \\ P_3(u)=\tau_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} Q_1(u)=\rho_{11}u+\rho_{10} \\ Q_2(u)=\rho_{20} \\ Q_3(u)=\rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\left\{1,x_1,x_2,\frac{x_2^2}{2},e^{-a_{31}x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6=\text{Span}\left\{1,x_1,x_2,\frac{x_2^2}{2},sin(\sqrt{a_{31}}x_3),cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6=\text{Span}\left\{1,x_1,x_2,\frac{x_2^2}{2},e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3},e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \end{cases}$

Table 9: Invariant subspaces and their corresponding cubic non-linear diffusion-convection-wave equation (5.1)

	$P_r(u)$, $Q_r(u), r = 1, 2, 3$	Invariant Subspaces
16.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{12}u^2 + \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$ $\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{11}u + \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, e^{-a_{21}x_2}, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, sin(\sqrt{a_{21}}x_2), cos(\sqrt{a_{21}}x_2), x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \end{cases}$
17.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{22}u^2 + \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$ $\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{21}u + \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{11}x_1}, x_2, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, sin(\sqrt{a_{11}}x_1), cos(\sqrt{a_{11}}x_1), x_2, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, x_2, x_3, \frac{x_3^2}{2}\right\} \end{cases}$
18.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{32}u^2 + \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$ $\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{31}u + \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, e^{-a_{11}x_1}, x_2, \frac{x_2^2}{2}, x_3\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_2, \frac{x_2^2}{2}, x_3, sin(\sqrt{a_{11}}x_1), cos(\sqrt{a_{11}}x_1)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_2, \frac{x_2^2}{2}, x_3, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}\right\} \end{cases}$
19.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{22}u^2 + \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{30} \end{cases}$ $\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{21}u + \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, x_2, e^{-a_{31}x_3}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, x_2, sin(\sqrt{a_{31}}x_3), cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, x_2, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \end{cases}$
20.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{32}u^2 + \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$ $\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{31}u + \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, x_3, e^{-a_{21}x_2}\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, x_3, sin(\sqrt{a_{21}}x_2), cos(\sqrt{a_{21}}x_2)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, \frac{x_1^2}{2}, x_3, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}\right\} \end{cases}$
21.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{12}u^2 + \tau_{11}u + \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{30} \end{cases}$ $\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{11}u + \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, sin(\sqrt{a_{21}}x_2), cos(\sqrt{a_{21}}x_2), sin(\sqrt{a_{31}}x_3), cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_1, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, \right. \\ \left. e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \end{cases}$
22.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{22}u^2 + \tau_{21}u + \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{30} \end{cases}$ $\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{21}u + \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_2, sin(\sqrt{a_{11}}x_1), cos(\sqrt{a_{11}}x_1), sin(\sqrt{a_{31}}x_3), cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, \right. \\ \left. x_2, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}-\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}, e^{-\frac{1}{2}(a_{32}+\sqrt{a_{32}^2-4a_{31}})x_3}\right\} \end{cases}$
23.	$\begin{cases} P_1(u) = \tau_{10} \\ P_2(u) = \tau_{20} \\ P_3(u) = \tau_{32}u^2 + \tau_{31}u + \tau_{30} \end{cases}$ $\begin{cases} Q_1(u) = \rho_{10} \\ Q_2(u) = \rho_{20} \\ Q_3(u) = \rho_{31}u + \rho_{30} \end{cases}$	$\begin{cases} {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, x_3, sin(\sqrt{a_{21}}x_2), cos(\sqrt{a_{21}}x_2), sin(\sqrt{a_{11}}x_1), cos(\sqrt{a_{11}}x_1)\right\} \\ {}_3^3\hat{\mathcal{W}}_6 = \text{Span}\left\{1, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, e^{-\frac{1}{2}(a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-4a_{11}})x_1}, \right. \\ \left. x_3, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}-\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}, e^{-\frac{1}{2}(a_{22}+\sqrt{a_{22}^2-4a_{21}})x_2}\right\} \end{cases}$

6(1.2) 的精确解

本节说明如何利用上一节列出的不变子空间，求出给定方程 (1.2) 的精确解及其适当的初始条件。在此，我们说明如何利用各种类型的不变子空间，为所研究的方程构造多种精确解。首先考虑指数型不变子空间及其对应的非线性时间分数阶 DCW 方程 (1.2)。

6.1 利用指数子空间求解(1.2)的精确解

现在，让我们首先考虑一维指数线性空间。

$$ {}_{3}^{1}\hat{\mathcal{W}}_1 = \mathrm{Span}\left\{e^{-(a_{10}x_1+a_{20}x_2+a_{30}x_3)}\right\}, \tag{6.1} $$

ˆ 其相对于给定的非线性偏微分算子 $\mathcal{H}[u]$如果

$P_1(u) = \left(-\sum_{i=2}^{3}\frac{a_{i0}^2\tau_{i1}}{a_{10}^2}+\sum_{i=1}^{3}\frac{a_{i0}\rho_{i1}}{2a_{10}^2}\right)u+\tau_{10}$, $P_2(u)=\tau_{21}u+\tau_{20}$, $P_3(u)=\tau_{31}u+\tau_{30}$ and $Q_j(u)=\rho_{j1}u+\rho_{j0}$, $j=1,2,3$, because

$$ \hat{\mathcal{H}}[\delta e^{-(a_{10}x_1+a_{20}x_2+a_{30}x_3)}] = \left(\sum_{i=1}^{3}a_{i0}^2\tau_{i0}-\sum_{i=1}^{3}a_{i0}\rho_{i0}\right)\delta e^{-(a_{10}x_1+a_{20}x_2+a_{30}x_3)} \in {}_{3}^{1}\hat{\mathcal{W}}_1,\ \delta\in\mathbb{R}. $$

上述情况列于案例 1 的表 2 中。对于此情况，给定方程 (1.2) 化简为

$$ \begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \hat{\mathcal{H}}[u] \equiv & \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(\left[-\sum_{i=2}^{3}\frac{a_{i0}^2\tau_{i1}}{a_{10}^2}+\sum_{i=1}^{3}\frac{a_{i0}\rho_{i1}}{2a_{10}^2}\right]u+\tau_{10}\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[(\tau_{21}u+\tau_{20})\frac{\partial u}{\partial x_2}\right] \\ & +\frac{\partial}{\partial x_3}\left[(\tau_{31}u+\tau_{30})\frac{\partial u}{\partial x_3}\right]+\sum_{i=1}^{3}(\rho_{i1}u+\rho_{i0})\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \alpha\in(0,2] \end{aligned} \tag{6.2} $$

具有初始条件

$$ \begin{aligned} &(i)\ u(x_1,x_2,x_3,0)=\varphi(x_1,x_2,x_3) \text{ if } 0<\alpha\le 1, \\ &(ii)\ u(x_1,x_2,x_3,0)=\varphi(x_1,x_2,x_3)\ \&\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\phi(x_1,x_2,x_3) \text{ if } 1<\alpha\le 2. \end{aligned} \tag{6.3} $$

因此，我们寻找(6.2)的精确解如下

$$ u(x_1,x_2,x_3,t)=\Psi(t)e^{-(a_{10}x_1+a_{20}x_2+a_{30}x_3)}. \tag{6.4} $$

将 (6.4) 代入 (6.2)，我们得到

$$\frac{d^{\alpha}\Psi(t)}{dt^{\alpha}} = \left(\sum_{i=1}^{3} a_{i0}^{2}\tau_{i0} - \sum_{i=1}^{3} a_{i0}\rho_{i0}\right)\Psi(t). \tag{6.5}$$

我们知道，$G(y)$的Caputo任意阶导数的拉普拉斯变换为 [1, 2]

$$L\left[\frac{d^{\alpha}G(y)}{dy^{\alpha}}\right] = s^{\alpha}L[G(y)] - \sum_{m=0}^{n-1} s^{\alpha-(m+1)}G^{(m)}(0),\ Re(s) > 0,\ \alpha \in (n-1, n],\ n \in \mathbb{N},$$

其中 $G^{(m)}(0) = \left.\frac{d^{m}G(y)}{dy^{m}}\right|_{y=0}$，$y \in [0, \infty)$，且 $L[G(y)] = \tilde{G}(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st}G(r)dr.$

首先考虑整数阶情形 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$。因此，与给定线性空间 (6.1) 相对应的 (6.2) 的精确解如下

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{cases} \gamma e^{At-(a_{10}x_1+a_{20}x_2+a_{30}x_3)}, \text{ if } \alpha = 1, \\ \left(\gamma cosh(\sqrt{A}t) + \frac{\beta}{\sqrt{A}} sinh(\sqrt{A}t)\right) e^{-(a_{10}x_1+a_{20}x_2+a_{30}x_3)}, \text{ if } \alpha = 2, \end{cases} \tag{6.6}$$

其中 γ，$\beta \in \mathbb{R}$ 且 $A = \left(\sum_{i=1}^{3} a_{i0}^{2}\tau_{i0} - \sum_{i=1}^{3} a_{i0}\rho_{i0}\right)$. 现在，令 $\alpha \in (0, 1]$。对方程 (6.5) 两边应用拉普拉斯变换，得到

$$L\left[\frac{d^{\alpha}\Psi(t)}{dt^{\alpha}}\right] = L\left[A\Psi(t)\right] \quad \text{which gives} \quad s^{\alpha}\tilde{\Psi}(s) - s^{\alpha-1}\Psi(0) = A\tilde{\Psi}(s), \tag{6.7}$$

其中 $\Psi(0) = \gamma$和 $A = \left(\sum_{i=1}^{3} a_{i0}^{2}\tau_{i0} - \sum_{i=1}^{3} a_{i0}\rho_{i0}\right)$. 重新排列各项，并对方程（6.7）两边进行拉普拉斯逆变换，我们得到

$$\Psi(t) = \gamma E_{\alpha,1}(At^{\alpha}),\ \alpha \in (0, 1], \tag{6.8}$$

其中 $E_{\alpha,r}(t^{\alpha})$ 是双参数 Mittag-Leffler函数，其定义为 [2, 49]

$$E_{\alpha,r}(t^{\alpha}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t^{\alpha})^{m}}{\Gamma(m\alpha + r)}.$$

接下来，我们考虑情形 $\alpha \in (1, 2]$。对于此情形，我们再次对方程 (6.5) 的两边应用拉普拉斯变换，得到

$$L\left[\frac{d^{\alpha}\Psi(t)}{dt^{\alpha}}\right] = L\left[A\Psi(t)\right], \text{ implying } s^{\alpha}\tilde{\Psi}(s) - s^{\alpha-1}\Psi(0) - s^{\alpha-2}\Psi'(0) = A\tilde{\Psi}(s). \tag{6.9}$$

重新排列各项，并对上述最后一个方程的两边进行拉普拉斯逆变换，可得

$$\Psi(t) = \gamma E_{\alpha,1}(At^{\alpha}) + \beta t E_{\alpha,2}(At^{\alpha}),\ \alpha \in (1, 2], \tag{6.10}$$

其中 $\gamma = \Psi(0)$ 和 $\beta = \Psi'(0)$。因此，方程 (6.2) 得到的精确解如下。 ,

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{cases} \gamma E_{\alpha,1}(At^\alpha) e^{-(a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + a_{30}x_3)}, & \text{if } \alpha \in (0, 1], \\ \left(\gamma E_{\alpha,1}(At^\alpha) + \beta t E_{\alpha,2}(At^\alpha)\right) e^{-(a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + a_{30}x_3)}, & \text{if } \alpha \in (1, 2], \end{cases}$$

其中 $\gamma = \Psi(0)$、$\beta = \Psi'(0)$ 和 $A = \left(\sum_{i=1}^{3} a_{i0}^2 \tau_{i0} - \sum_{i=1}^{3} a_{i0}\rho_{i0} \right)$。 (6.11)

注意，解 (6.11) 满足给定的初始条件 (6.3)。进一步 ,

(a) 在 $t = 0$, $E_{\alpha,1}(0) = 1$。因此，我们得到 $u(x_1, x_2, x_3, 0) = \gamma e^{-(a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + a_{30}x_3)}$, 若$\alpha \in (0, 1]$。

(b) 现在，令 $\alpha \in (1, 2]$。在 $t = 0$ 处，我们得到

$$u(x_1, x_2, x_3, 0) = \gamma e^{-(a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + a_{30}x_3)} \ \& \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \beta e^{-(a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + a_{30}x_3)}, \text{ because}$$

$$E_{\alpha,1}(0) = 1, \frac{d}{dt}\left(E_{\alpha,1}(At^\alpha)\right) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha) \text{ and } \frac{d}{dt}\left(tE_{\alpha,2}(At^\alpha)\right) = E_{\alpha,1}(At^\alpha).$$

根据上述得到的条件，我们得到 $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \gamma e^{-(a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + a_{30}x_3)}$ 以及$\phi(x_1, x_2, x_3) = \beta e^{-(a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + a_{30}x_3)}$. 此外，应注意，当 $\alpha = 1$且 $\alpha = 2$ 并利用以下 Mittag-Leffler函数性质 [49]

$$E_{1,1}(y) = e^y, E_{2,1}(y^2) = cosh(y) \text{ and } E_{2,2}(y^2) = \frac{sinh(y)}{y}, \tag{6.12}$$

所得解 (6.11) 与所得整数阶解 (6.6) 完全相同。

注 5。 我们想指出，当 $\alpha \in (0, 1]$, 给定方程 (6.2) 被称为时间分数阶扩散-对流方程，而当 $\alpha \in (1, 2]$时，它是扩散-对流波动方程。对于这两种情况，我们推导出了给定方程 (6.2)的精确解 (6.11) 以及适当的初始条件。

现在，我们考虑如下（3+1）维二次非线性时间分数阶扩散-对流-波动方程。对于 $\alpha \in (0, 2]$, ，我们有

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(\frac{\rho_{11}}{a_{10}}u + \tau_{i0}\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] + \sum_{i=2}^{3} \tau_{i0}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + (\rho_{11}u + \rho_{10})\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \sum_{i=2}^{3} \rho_{i0}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \tag{6.13}$$

具有适当的初始条件

$$\begin{aligned} &(i)\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = \varphi(x_1, x_2, x_3) \text{ if } 0 < \alpha \leq 1, \\ &(ii)\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = \varphi(x_1, x_2, x_3) \ \& \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \phi(x_1, x_2, x_3) \text{ if } 1 < \alpha \leq 2. \end{aligned} \tag{6.14}$$

对于给定的方程 (6.13)，我们得到形式为

$$\hat{\mathcal{H}}[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(\frac{\rho_{11}}{a_{10}}u+\tau_{i0}\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]+\sum_{i=2}^{3}\tau_{i0}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+(\rho_{11}u+\rho_{10})\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\sum_{i=2}^{3}\rho_{i0}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

其具有线性空间

$$ {}_3^1\hat{\mathcal{W}}_4 = \mathrm{Span}\{e^{-a_{10}x_1}, e^{-(a_{10}x_1+a_{21}x_2)}, e^{-(a_{10}x_1+a_{31}x_3)}, e^{-(a_{10}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3)}\}, \tag{6.15}$$

因为

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}[u] &= \hat{\mathcal{H}}[\delta_1 e^{-a_{10}x_1}+\delta_2 e^{-(a_{10}x_1+a_{21}x_2)}+\delta_3 e^{-(a_{10}x_1+a_{31}x_3)}+\delta_4 e^{-(a_{10}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3)}]\\ &= \left(\tau_{10}a_{10}^2-\rho_{10}a_{10}\right)\delta_1 e^{-a_{10}x_1}+\left(\tau_{10}a_{10}^2-\rho_{10}a_{10}+\tau_{20}a_{21}^2-\rho_{20}a_{21}\right)\delta_2 e^{-(a_{10}x_1+a_{21}x_2)}\\ &+\left(\tau_{10}a_{10}^2-\rho_{10}a_{10}+\tau_{20}a_{21}^2-\rho_{20}a_{21}\tau_{30}a_{31}^2-\rho_{30}a_{31}\right)\delta_4 e^{-(a_{10}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3)}\\ &+\left(\tau_{10}a_{10}^2-\rho_{10}a_{10}+\tau_{30}a_{31}^2-\rho_{30}a_{31}\right)\delta_3 e^{-(a_{10}x_1+a_{31}x_3)} \in {}_3^1\hat{\mathcal{W}}_4.\end{aligned}$$

因此，我们可以将 (6.13) 的一个精确解写为

$$u(x_1,x_2,x_3,t)=\sum_{q=1}^{4}\Psi_q(t)\xi_q(x_1,x_2,x_3), \tag{6.16}$$

其中函数 $\xi_1(x_1,x_2,x_3)=e^{-a_{10}x_1}$, $\xi_2(x_1,x_2,x_3)=e^{-(a_{10}x_1+a_{21}x_2)}$, $\xi_3(x_1,x_2,x_3)=e^{-(a_{10}x_1+a_{31}x_3)}$, $\xi_4(x_1,x_2,x_3)=e^{-(a_{10}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3)}$ 以及函数 $\Psi_q(t)(q=1,2,3,4)$ 满足以下任意阶常微分方程,

$$\frac{d^\alpha \Psi_q(t)}{dt^\alpha}=A_q\Psi_q(t),\ q=1,2,3,4, \tag{6.17}$$

其中 $A_1=\tau_{10}a_{10}^2-\rho_{10}a_{10}$, $A_2=\tau_{10}a_{10}^2-\rho_{10}a_{10}+\tau_{20}a_{21}^2-\rho_{20}a_{21}$, $A_3=\tau_{10}a_{10}^2-\rho_{10}a_{10}+\tau_{30}a_{31}^2-\rho_{30}a_{31}$ 以及 $A_4=\tau_{10}a_{10}^2-\rho_{10}a_{10}+\tau_{20}a_{21}^2-\rho_{20}a_{21}\tau_{30}a_{31}^2-\rho_{30}a_{31}$。

注意，对于整数阶情形 $\alpha=1$ 和 $\alpha=2$，我们可得到与线性空间 (6.15) 相关的 (6.13) 的解如下,

$$u(x_1,x_2,x_3,t)=\begin{cases}\sum\limits_{q=1}^{4}\gamma_q e^{A_q t}\xi_q(x_1,x_2,x_3), \text{ if}\,\alpha=1,\\ \sum\limits_{q=1}^{4}\left[\gamma_q cosh(\sqrt{A_q}t)+\dfrac{\beta_q}{\sqrt{A_q}}sinh(\sqrt{A_q}t)\right]\xi_q(x_1,x_2,x_3), \text{ if}\,\alpha=2,\end{cases} \tag{6.18}$$

其中 $\gamma_q,\beta_q\in\mathbb{R}$. 按照之前的方法，我们得到 (6.13) 对于 $\alpha\in(0,2]$ 的精确解，形式为:

$$u(x_1,x_2,x_3,t)=\begin{cases}\sum\limits_{q=1}^{4}\gamma_q E_{\alpha,1}(A_q t^\alpha)\xi_q(x_1,x_2,x_3), \quad \alpha\in(0,1],\\ \sum\limits_{q=1}^{4}\left[\gamma_q E_{\alpha,1}(A_q t^\alpha)+\beta_q t E_{\alpha,2}(A_q t^\alpha)\right]\xi_q(x_1,x_2,x_3), \quad \alpha\in(1,2],\end{cases} \tag{6.19}$$

其中 $\gamma_q = \Psi_q(0)$ 和 $\beta_q = \Psi_q'(0)$ $q = 1,2,3,4$. 现在，容易验证，(6.13) 的解 (6.19) 满足以下初始条件，

$$\begin{aligned} &(i)\ u(x_1,x_2,x_3,0) = \varphi(x_1,x_2,x_3) \text{ if } 0 < \alpha \le 1, \\ &(ii)\ u(x_1,x_2,x_3,0) = \varphi(x_1,x_2,x_3)\ \&\ \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = \phi(x_1,x_2,x_3) \text{ if } 1 < \alpha \le 2, \end{aligned} \tag{6.20}$$

4 4其中 $\varphi(x_1,x_2,x_3) = \sum \gamma_q \xi_q(x_1,x_2,x_3)$
且 $\phi(x_1,x_2,x_3) = \sum \beta_q \xi_q(x_1,x_2,x_3)$.$q=1$ $q=1$
我们也观察到，当 $\alpha = 1$ and $\alpha = 2$ and使用(6.12)中给出的Mittag-Leffler函数的性质时，解(6.19)与(6.18)中给出的整数阶解完全相同。

6.2(1.2)使用多项式子空间的精确解

这里我们考虑（3+1）维二次非线性时间分数阶 DCW 方- 程

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \hat{\mathcal{H}}[u] \equiv \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_r}\left[(\tau_{r1}u + \tau_{r0})\frac{\partial u}{\partial x_r}\right] + \sum_{r=1}^{3} \rho_{r0}\left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right), \alpha \in (0,2] \tag{6.21}$$

以及初始条件

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ u(x_1,x_2,x_3,0) = \varphi(x_1,x_2,x_3) \text{ if } \alpha \in (0,1], \\ &\text{(ii)}\ u(x_1,x_2,x_3,0) = \varphi(x_1,x_2,x_3)\ \&\ \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = \phi(x_1,x_2,x_3) \text{ if } \alpha \in (1,2]. \end{aligned}$$

ˆ 给定的非线性偏微分算子 $\mathcal{H}[u]$ 具有 4 维多项式空间

$$\hat{\mathcal{W}}_4 = \mathrm{Span}\{1, x_1, x_2, x_3\}, \tag{6.22}$$

其中列于案例20的表6中。当 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$时，与线性空间(6.22)相关的(6.21)的精确解如下:

$$u(x_1,x_2,x_3,t) = \begin{cases} \gamma_0 t + \gamma_1 + \gamma_2 x_1 + \gamma_3 x_2 + \gamma_4 x_3, & \text{if } \alpha = 1, \\ \sum_{i=1}^{3} A_i \dfrac{t^{1+i}}{(1+i)!} + \gamma_1 + t\beta_1 + \sum_{i=1}^{3} (\gamma_{i+1} + t\beta_{i+1})\, x_i, & \text{if } \alpha = 2, \end{cases} \tag{6.23}$$

33 3其中 $A_1 = \sum (\tau_{i1}\gamma_{i+1}^2 + \rho_{i0}\gamma_{i+1})$, $A_2 = \sum(2\tau_{i1}\gamma_{i+1}\beta_{i+1} + \rho_{i0}\beta_{i+1})$
和 $A_3 = \sum \tau_{i1}\beta_{i+1}^2$,$i=1$ $i=1$ $i=1\gamma_0, \gamma_i, \beta_i \in \mathbb{R}, i = 1,$
2,3,4. 如前所述，我们得到该方程的精确解。

给定方程 (6.21)，如下所示：

$$u(x_1,x_2,x_3,t)=\begin{cases}\gamma_0\dfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\gamma_1+\gamma_2x_1+\gamma_3x_2+\gamma_4x_3, & \text{if } \alpha\in(0,1],\\ \sum\limits_{i=1}^{3}A_i\dfrac{t^{\alpha+i-1}}{\Gamma(\alpha+i)}+\gamma_1+t\beta_1+\sum\limits_{i=1}^{3}\left(\gamma_{i+1}+t\beta_{i+1}\right)x_i, & \text{if } \alpha\in(1,2].\end{cases}\tag{6.24}$$

我们希望指出，所得到的精确解满足给定的适当初始条件。此外，我们注意到 $\varphi(x_1,x_2,x_3)=\gamma_1+\gamma_2x_1+\gamma_3x_2+\gamma_4x_3$并且 $\phi(x_1,x_2,x_3)=\beta_1+\beta_2x_1+\beta_3x_2+\beta_4x_3$.应当注意，当 $\alpha=1$并且 $\alpha=2$并使用伽马函数的性质时，所得到的解 (6.24) 与整数阶解 (6.23) 完全相同。

6.3 精确解的(1.2) 使用三角函数和多项式子空间的组合

考虑 5 维线性空间

$${}_3^3\hat{\mathcal{W}}_5=\mathrm{Span}\{\xi_n(x_1,x_2,x_3):n=1,2,3,4,5\}=\mathrm{Span}\{1,x_1,x_2,sin(\sqrt{a_{31}}x_3),cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\},\tag{6.25}$$

ˆ 在 (5.1) 中给出的 $\mathcal{H}[u]$ 以及 $P_i(u)=\tau_{i1}u+\tau_{i0},\ i=1,2,P_3(u)=\tau_{30},\ Q_i(u)=\rho_{i0},\ (i=1,2)$ 和 $Q_3(u)=0$ 下保持不变。此情形列于情形 3 的表 2 中（此外，我们选择 $\rho_{11}=\rho_{21}=\rho_{30}=0$）。因此，给定方程 (1.2) 化简为

$$\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}}=\hat{\mathcal{H}}[u]\equiv\sum_{r=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_r}\left[\left(\tau_{r1}u+\tau_{r0}\right)\frac{\partial u}{\partial x_r}\right]+\tau_{30}\frac{\partial^2u}{\partial x_3^2}+\sum_{r=1}^{2}\rho_{r0}\left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right),\alpha\in(0,2]\tag{6.26}$$

具有适当的初始条件

(i) $u(x_1,x_2,x_3,0)=\varphi(x_1,x_2,x_3)$ if $0<\alpha\le1$,

(ii) $u(x_1,x_2,x_3,0)=\varphi(x_1,x_2,x_3)$ & $\dfrac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=\phi(x_1,x_2,x_3)$ if $1<\alpha\le2$.

对于整数阶情形 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$，我们得到与线性空间 $_{33}\hat{}\mathcal{W}_5$ 相关的（6.26）的精确解，形式如下

$$\begin{aligned}
u(x_1,x_2,x_3,t) =& A_1 t + \gamma_1 + \gamma_2 x_1 + \gamma_3 x_2 \\
&+ e^{-\tau_{30} t}\left[\gamma_4 sin(\sqrt{a_{31}}x_3) + \gamma_5 cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right], \text{if}\, \alpha = 1, \\
u(x_1,x_2,x_3,t) =& \sum_{i=1}^{3} A_i \frac{t^{i+1}}{(1+i)!} + \gamma_1 + t\beta_1 + (\gamma_2 + t\beta_2)\, x_1 + (\gamma_3 + t\beta_3)\, x_2 \\
&+ cosh(\sqrt{-\tau_{30}}t)\left[\gamma_4 sin(\sqrt{a_{31}}x_3) + \gamma_5 cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right] \\
&+ \frac{sinh(\sqrt{-\tau_{30}}t)}{\sqrt{-\tau_{30}}}\left[\beta_4 sin(\sqrt{a_{31}}x_3) + \beta_5 cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right], \text{if}\, \alpha = 2,
\end{aligned} \tag{6.27}$$

$_2$ $_2$其中 $A_1 = \sum\left(\tau_{i1}\gamma_{i+1}^2 + \rho_{i0}\gamma_{i+1}\right)$、$A_2 = \sum($ $2\tau_{i1}\gamma_{i+1}\beta_{i+1} + \rho_{i0}\beta_{i+1}$) 以及 $A_3 = \beta_2^2 + {}_{i=1}$ ${}_{i=1}\beta_3^2, \gamma_i, \beta_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2,$ 3, 4, 5.

如前所述，我们得到 (6.26) 的精确解，形式为

$$\begin{aligned}
u(x_1,x_2,x_3,t) =& A_1 \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \gamma_1 + \gamma_2 x_1 + \gamma_3 x_2 \\
&+ E_{\alpha,1}(-\tau_{30} t^{\alpha})\left[\gamma_4 sin(\sqrt{a_{31}}x_3) + \gamma_5 cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right], \quad \text{if}\ \alpha \in (0,1], \\
u(x_1,x_2,x_3,t) =& \sum_{i=1}^{3} A_i \frac{t^{\alpha+i-1}}{\Gamma(\alpha+i)} + \gamma_1 + t\beta_1 + (\gamma_2 + t\beta_2)\, x_1 + (\gamma_3 + t\beta_3)\, x_2 \\
&+ E_{\alpha,1}(-\tau_{30} t^{\alpha})\left[\gamma_4 sin(\sqrt{a_{31}}x_3) + \gamma_5 cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right] \\
&+ t E_{\alpha,2}(-\tau_{30} t^{\alpha})\left[\beta_4 sin(\sqrt{a_{31}}x_3) + \beta_5 cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right], \quad \text{if}\ \alpha \in (1,2].
\end{aligned} \tag{6.28}$$

此外，很容易验证解 (6.28) 满足给定的适当初始 con-$_5$ditions。另外，我们观察到 φ $(x_1, x_2, x_3) = \sum \gamma_i \xi_i(x_1, x_2, x_3)$ 以及 $\phi(x_1, x_2, x_3) = {}_{i=1}\sum^{5} \beta_i \xi_i(x_1, x_2, x_3)$. 我们还观察到，当 $\alpha = 1$ and $\alpha = 2$ and 利用 $_{i=1}$gamma 和米塔格-莱夫勒函数的性质时，上述得到的解 (6.28) 与整数阶解 (6.27) 完全相同。

6.4 利用指数、三角函数和多项式子空间的组合求解(1.2) 的精确解

最后，我们考虑(3+1)-维数二次非线性时间分数阶扩散-对流-波动方程

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = \hat{\mathcal{H}}[u] \equiv \tau_{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\left[\tau_{21}u + \tau_{20}\right]\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \tau_{30}\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \sum_{i=1}^{2}\rho_{i0}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \alpha \in (0,2] \tag{6.29}$$

具有初始条件

$$\text{(i)}\ \ u(x_1,x_2,x_3,0)=\varphi(x_1,x_2,x_3)\ \text{if}\ \alpha\in(0,1],$$

$$\text{(ii)}\ \ u(x_1,x_2,x_3,0)=\varphi(x_1,x_2,x_3)\ \&\ \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=\phi(x_1,x_2,x_3)\ \text{if}\ \alpha\in(1,2],$$

它存在一个 5 维线性空间

$$\overset{3}{_3}\hat{\mathcal{W}}_5=\text{Span}\{\xi_n(x_1,x_2,x_3):n=1,2,3,4,5\}=\text{Span}\{1,e^{-a_{11}x_1},x_2,sin(\sqrt{a_{31}}x_3),cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\}. \tag{6.30}$$

此情形列于情形 15 的表 4 中（此外，我们可以选择 $\rho_{21}=\rho_{30}=0$））。对于整数阶情形 $\alpha=1$ 和 $\alpha=2$，我们得到与线性空间 $_{33}\hat{}\mathcal{W}_5$ 相关的 (6.29) 的精确解，如下所示:

$$\begin{aligned}
u(x_1,x_2,x_3,t)=&A_1t+\gamma_1+\gamma_2e^{At}e^{-a_{11}x_1}+\gamma_3x_2\\
&+e^{-\tau_{30}t}\left[\gamma_4sin(\sqrt{a_{31}}x_3)+\gamma_5cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right],\ \text{if}\,\alpha=1,\\
u(x_1,x_2,x_3,t)=&\sum_{i=1}^{3}A_i\frac{t^{i+1}}{(1+i)!}+\gamma_1+t\beta_1+\left[\gamma_2cosh(\sqrt{A}t)+\frac{\beta_2}{\sqrt{A}}sinh(\sqrt{A}t)\right]e^{-a_{11}x_1}\\
&+(\gamma_3+t\beta_3)\,x_2+cosh(\sqrt{-\tau_{30}}t)\left[\gamma_4sin(\sqrt{a_{31}}x_3)+\gamma_5cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right]\\
&+\frac{sinh(\sqrt{-\tau_{30}}t)}{\sqrt{-\tau_{30}}}\left[\beta_4sin(\sqrt{a_{31}}x_3)+\beta_5cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right],\ \text{if}\,\alpha=2.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

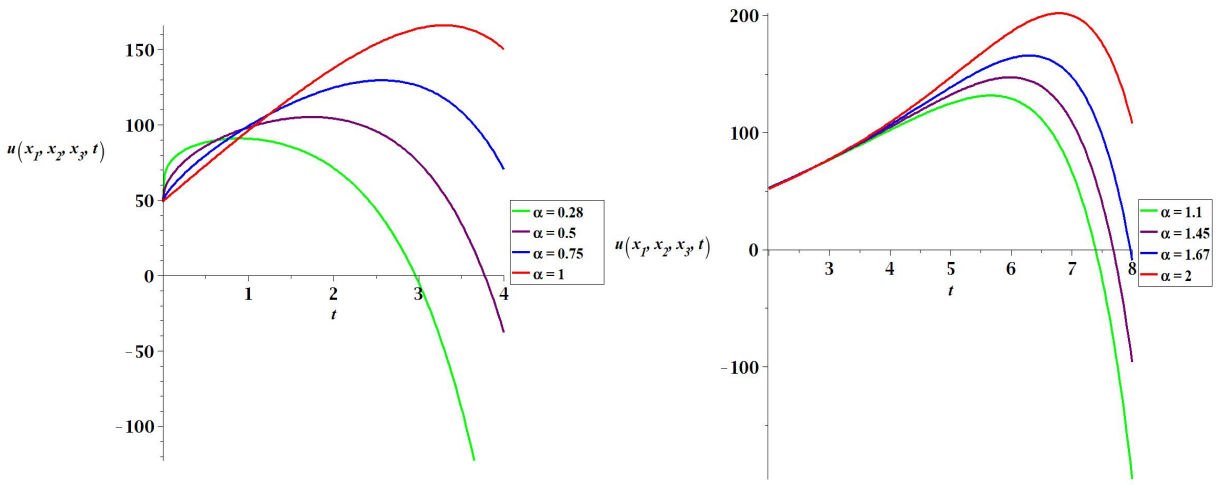
其中 $A=(\tau_{10}a_{11}^2-\rho_{10}a_{11})$、$A_1=(\tau_{21}\gamma_3^2+\rho_{20}\gamma_3)$、$A_2=(2\tau_{21}\gamma_3\beta_3+\rho_{20}\beta_3)$ 和 $A_3=\beta_3^2$，γ_i，$\beta_i\in\mathbb{R}$，$i=1$，2，3，4，5。对于任意阶情形，我们得到 (6.29) 的精确解如下,

$$\begin{aligned}
u(x_1,x_2,x_3,t)=&A_1\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\gamma_1+\gamma_2E_{\alpha,1}(At^\alpha)e^{-a_{11}x_1}+\gamma_3x_2\\
&+E_{\alpha,1}(-\tau_{30}t^\alpha)\left[\gamma_4sin(\sqrt{a_{31}}x_3)+\gamma_5cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right],\quad \text{if}\ \alpha\in(0,1],\\
u(x_1,x_2,x_3,t)=&\sum_{i=1}^{3}A_i\frac{t^{\alpha+i-1}}{\Gamma(\alpha+i)}+\gamma_1+t\beta_1+\left[\gamma_2E_{\alpha,1}(At^\alpha)+t\beta_2E_{\alpha,2}(At^\alpha)\right]e^{-a_{11}x_1}\\
&+(\gamma_3+t\beta_3)\,x_2+E_{\alpha,1}(-\tau_{30}t^\alpha)\left[\gamma_4sin(\sqrt{a_{31}}x_3)+\gamma_5cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right]\\
&+tE_{\alpha,2}(-\tau_{30}t^\alpha)\left[\beta_4sin(\sqrt{a_{31}}x_3)+\beta_5cos(\sqrt{a_{31}}x_3)\right],\quad \text{if}\ \alpha\in(1,2].
\end{aligned} \tag{6.32}$$

此外，可以验证，解(6.32) 满足给定的相应初始条件。此外，我们还发现，$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\sum\gamma_i\xi_i(x_1,x_2,x_3)$，并且 $\phi(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{5}\beta_i\xi_i(x_1,x_2,x_3)$。我们还注意到，当 $\alpha=1$ 且 $\alpha=2$ 且利用$\sum_{i=1}$的性质时

米塔格-莱夫勒函数和伽马函数，解（6.32）与整数阶解（6.31）完全相同。

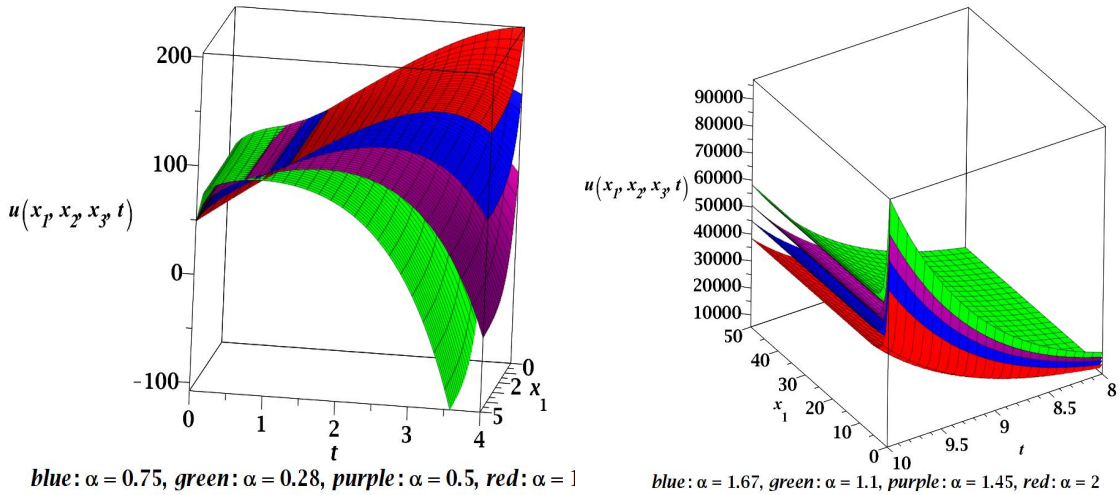
为了阐明所得解 (6.32) 的动力学行为，我们给出在某些参数取值下 $\alpha \in (0, 2]$ 的不同取值对应的解的二维 (2D) 和三维 (3D) 图形表示，$A_1 = 50$，$\gamma_1 = \gamma_2 = a_{11} =$1，$\gamma_3 = 10$，$\gamma_4 = 3$，$\gamma_5 = 2$ 如图 1 至图 4 所示。



(a) (t,u) 平面（$x_1 = 4$，$x_2 = 5$，$x_3 = 8$）

(b) (t,u) 平面（$x_1 = 4$，$x_2 = 5$，$x_3 = 8$）

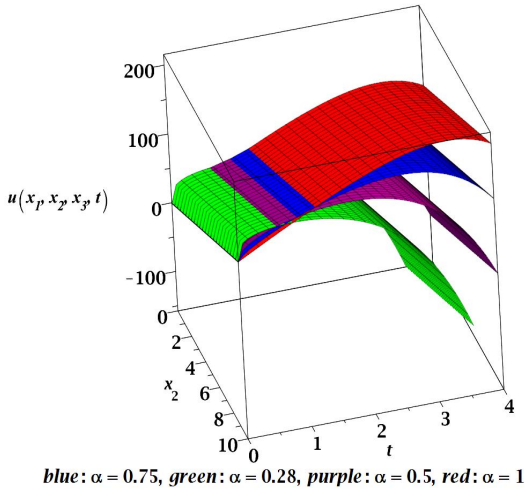
Fig图 1：当 α 取不同值时，解 (6.32) 的二维图形表示 .



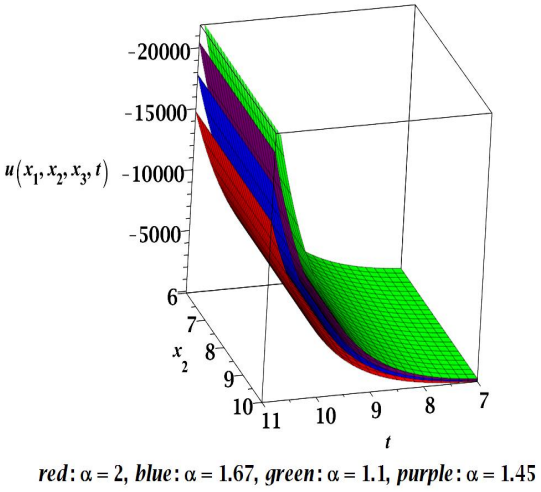
(a) $x_2 = 5$，$x_3 = 8$

(b) $x_2 = 5$，$x_3 = 8$

图 2：当 α 取不同值时，解 (6.32) 在 (x_1，t，u) 空间中的三维图形表示。

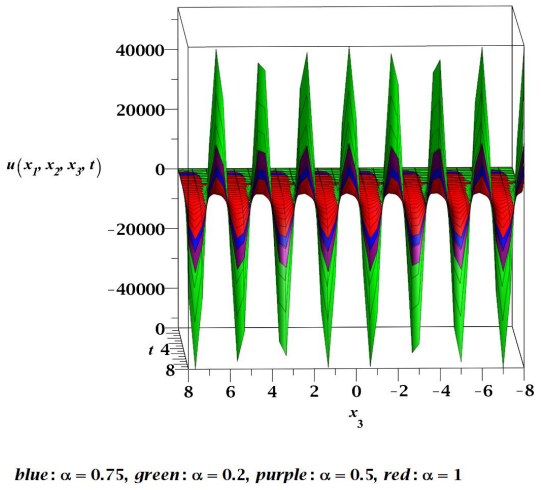


(a) $x_1 = 4,\ \ x_3 = 8$

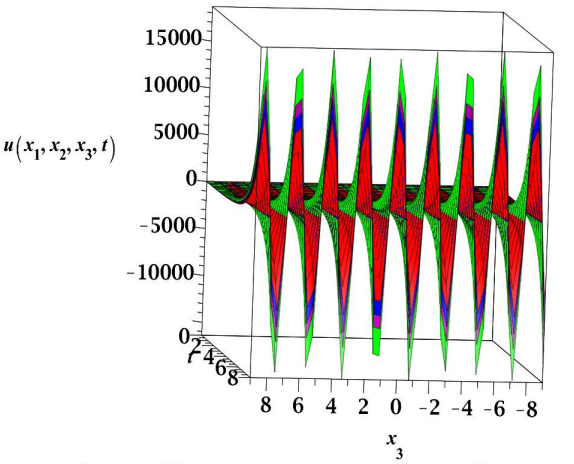


(b) $x_1 = 4,\ \ x_3 = 8$

图3：在 (α 的 (x_2, t, u) 空间中，不同取值下解（6.32）的三维图形表示。



(a) $x_1 = 4, x_2 = 5$



(b) $x_1 = 4,\ \ x_2 = 5$

图4：不同取值下解（6.32）在（x_3、 t、 u）空间中的三维图形表示。

7 讨论与结语

最后，本文对上述发展的不变子空间方法应用于不同空间维数中的各种类型的整数阶和分数阶扩散方程及其变体所产生的影响进行了批判性讨论。此外，还简要给出了结论性 remarks。

7.1 讨论

在本小节中，我们简要总结不变子空间方法对若干著名经典扩散型方程及其修正形式的适用性，以强调本文主体部分所推导的一般方法的重要性。众所周知，经典扩散方程具有如下形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ k \in \mathbb{R}. \tag{7.1}$$

土壤中的水分运动自古以来一直是讨论的话题，其实际意义毋庸置疑。即使在引入多年之后，作为达西定律延伸的土壤水分建模仍然引起了许多科学家的极大兴趣。$(1+1)$-维垂直流动导致了以下整数阶$(1+1)$-维对流-扩散方程的构建，该方程可视为水质量守恒的连续性方程与非饱和流动的白金汉-达西定律的结合 [50],

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(A(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)}_{\uparrow\text{capillarity}} - \underbrace{\frac{dB(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial x}}_{\uparrow\text{gravity}}, \tag{7.2}$$

其中 $u = u(x,t)$ 给出了给定时间 t 在距土壤表面深度x 处的体积含水量，而函数 $A(u)$ & $B(u)$ 分别提供浓度相关的土壤水扩散率和电导率。此外，$\frac{\partial}{\partial x}\left(A(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$表示毛细作用的影响，而 $dB(u)/du\ \partial u/\partial x$ 表示重力对土壤中水分运动的影响，因为

(i) 非饱和流的 Buckingham-Darcy 定律：$F = -A(u)\frac{\partial u}{\partial x} + B(u)$。

(ii) 水质量守恒连续性方程：$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x}$。

方程 (7.2) 也描述了许多非线性物理情况，这些情况发生在不同情境中，如半导体扩散率、多孔介质流动等。方程 (7.2) 的精确解已在 [46, 50] 中进行了研究。在文献中，$(1+1)$-维广义非线性对流-反应-扩散方程 [14, 38] 如下所示：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + C(u)\frac{\partial u}{\partial x} + R(u), \tag{7.3}$$

其中函数 $A(u)$、 $C(u)$ 和 $R(u)$ 分别表示扩散、对流和反应现象。方程 (7.3) 的精确解已通过不变子空间方法在 [14]中导出。Galaktionov 和 Svirshchevskii [38] 已使用下面给出的不变子空间研究了 (7.3) 特定类型的精确解。

(i)当 $A(u) = u^{\sigma}$、 $C(u) = 0$ 以及 $R(u) = -u^{1-\sigma}$ 时，上述方程（7.3）化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u^{1-\sigma},\ \sigma > 0, \tag{7.4}$$

该方程被称为著名的扩散-吸收方程。上述方程 (7.4) 在二维线性空间 $\mathcal{W}_2 =$张成空间 $\{1, x\}$ 的基础上，结合压力变换 $v = u^{\sigma}$，具有精确解。

(ii)如果 $A(u) = u^{-\frac{4}{3}}$, $C(u) = 0$且 $R(u) = u^{\frac{7}{3}}$，则方程 (7.3) 变为反应-扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{-\frac{4}{3}}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + u^{\frac{7}{3}}, \tag{7.5}$$

其存在与五维线性空间$\hat{\mathcal{W}}_5 =$张成空间 $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ 相关联的精确解，以及压力变换 $v = u^{-\frac{4}{3}}$。

(iii)若 $A(u) = u^{-\frac{4}{3}}$, $C(u) = 0$且 $R(u) = -u^{-\frac{1}{3}}$，则方程（7.3）化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{-\frac{4}{3}}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u^{-\frac{1}{3}}, \tag{7.6}$$

这被称为反应-吸收方程。上述方程（7.6）存在一个基于五维线性空间的精确解

$$\hat{\mathcal{W}}_5 = \mathrm{Span}\{1, sin(\frac{2}{\sqrt{3}}x), sin(\frac{4}{\sqrt{3}}x), cos(\frac{2}{\sqrt{3}}x), cos(\frac{4}{\sqrt{3}}x)\},$$

以及压力变换 $v = u^{-\frac{4}{3}}$。

(iv)当 $A(u) = u^{-\frac{3}{2}}$, $C(u) = 0$和 $R(u) = 0$时，则方程 (7.3) 变为快速扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{7.7}$$

$\hat{}$ 其基于五维线性空间 $\mathcal{W}_5 =$张成空间 $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ 以及压力变换 $v = u^{-\frac{3}{2}}$，可以得到精确解。

最一般的 $(n+1)$ 维非线性对流-反应-扩散方程 [13] 可表示为以下形式。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \bigtriangledown \cdot (A(u) \bigtriangledown u) + B(u) \cdot \bigtriangledown u + C(u), \tag{7.8}$$

其中，$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$、$\bigtriangledown = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$，以及“$\cdot$”表示标量积。注意，$(2+1)$–维对流-反应-扩散方程的李对称性已在 [13]中讨论过。此外，我们还想指出，$(2+1)$维对流-扩散方程的精确解已通过李对称性方法在 [13, 50, 56]中得到研究。

应当注意的是，经典扩散方程（7.1）的形式基于对均方位移的考察，该位移是线性且随时间变化的（即，$< x^2(t) > \sim kt$）。这里我们希望指出，非整数阶导数被用于对反常扩散进行建模，尤其是，分数阶动力学方程已在 [51–55, 57, 58] 中得到研究，这在反常扩- 散的语境下是有用的。反常扩散可以通过均方位移的渐近长时间非线性行为来表征，其形式为

$$< x^2(t) > \sim kt^{\alpha},\ \alpha \in (0, 2],\ t \to \infty, \tag{7.9}$$

并且可以分为两类，即：（i）当 $0 < \alpha \leq 1$时为亚扩散，以及（ii）当 $1 < \alpha \leq 2$时为超扩散。因此，反常扩散方程的控制方程如下

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < \alpha \leq 2, k \in \mathbb{R}. \tag{7.10}$$

Metzler 和Klafter [57] 研究了分数阶扩散方程，描述了一种具有记忆效应的非马尔可夫扩散过程。Ginoa等人 [58] 讨论了描述复杂黏弹性材料中弛豫现象的分数阶扩散方程。

在文献中，$(1+1)$-维非线性时间分数阶偏微分方程的不变子空间方法已在 [16, 17, 20–25, 27, 39, 40]中进行了讨论。让我们考虑 $(1+1)$-维非线性时间分数阶偏微分方程

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = \mathbf{H}[u], \alpha > 0, \tag{7.11}$$

其中 $u = u(x, t)$ $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ 且 $\mathbf{H}[u]$ 是充分光滑的 k阶非线性微分算子，即 $\mathbf{H}[u] = \mathbf{H}\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$. 现在，我们定义n维线性空间 $\mathcal{W}_n =$ 张成空间$\{\xi_q(x) \big| q = 1, 2, \ldots, n\}$, 其中 $\{\xi_q(x)\}_{q=1}^{n}$ 是一个线性

独立集。假设 $\mathcal{W}_n(n < \infty)$ 在给定的微分算子 $\mathbf{H}[u]$. 下是不变的。因此，我们有

$$\mathbf{H}\left[\sum_{q=1}^{n}\kappa_q\xi_q(x)\right] = \sum_{q=1}^{n}\mathcal{K}_q\left(\kappa_1,\ldots,\kappa_n\right)\xi_q(x), \kappa_q \in \mathbb{R}, \tag{7.12}$$

其中函数 $\mathcal{K}_q(\kappa_1,\ldots,\kappa_n)\ (q = 1, 2, \ldots, n)$ 是关于基集 $\{\xi_q(x)\}_{q=1}^{n}$. 的展开系数。上述方程（7.12）可以写成 $\mathbf{H}[\mathbf{u}] \in \mathcal{W}_n$ ，只要 $u \in \mathcal{W}_n$。那么，对于给定的方程（7.11），存在以下有限可分离形式的精确解，

$$u(x,t) = \sum_{q=1}^{n}\Psi_q(t)\xi_q(x)$$

如果函数 $\Psi_q(t)$ 满足分数阶常微分方程组

$$\frac{d^\alpha\Psi_q(t)}{dt^\alpha} = \Lambda_q(\Psi_1(t),\ldots,\Psi_n(t)), q = 1, 2, \ldots, n.$$

我们知道，$(1+1)$ 维广义时间分数阶反应-对流-扩散-波动方程如下所示，

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + C(u)\frac{\partial u}{\partial x} + R(u), \alpha \in (0, 2], \tag{7.13}$$

其中，$u = u(x,t)$ $x \in \mathbb{R}, t > 0$, 函数 $A(u)$ $C(u)$ 和 $R(u)$ 如上文方程 (7.8) 所述。通过采用不变子空间方法 [16, 17, 21, 39]，研究了在函数 $A(u)$ $C(u)$ 和 $R(u)$ 取不同形式时方程 (7.13) 的精确解。此外，文献 [48] 将所讨论的方法推广到了 $(2+1)$ 维非线性时间分数阶偏微分方程。我们还想指出，$(2+1)$ 维时间分数阶反应-对流-扩散-波动方程的精确解

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \sum_{r=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(A_r(u)\frac{\partial u}{\partial x_r}\right) + \sum_{r=1}^{2}B_r(u)\frac{\partial u}{\partial x_r} + C(u),\ 0 < \alpha \le 2, \tag{7.14}$$

以及适当的初始条件

(i) $u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2)$ if $0 < \alpha \le 1$,

(ii) $u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2)$ & $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \phi(x_1, x_2)$ if $1 < \alpha \le 2$,

已通过 [48] 中的不变子空间方法推导得出。

7.2 总结

本文首次将不变子空间方法推广至（$m+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程。具体而言，我们通过（$3+1$）维非线性时间分数阶扩散-对流波动方程及其适当的初始条件，系统地研究了该方法的有效性和适用性。这项系统研究提供了一种方法，可为所研究的非线性时间分数阶偏微分方程寻找一大类不同类型、不同维数的线性子空间。此外，我们还表明，所得不变子空间有助于推导出多种精确解，这些解可表示为指数函数、三角函数、多项式和著名的 Mittag-Leffler 函数的组合。此外，我们认为，现有文献尚未讨论过针对（$m+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程所获得的结果和方法概念。我们知道，由于分数阶导数不满足标准性质，目前不存在能够对其进行系统分析的定义良好的解析方法。因此，上述系统化步骤将有助于今后寻找各种类型的标量及耦合非线性分数阶偏微分方程的精确解。综上，这些研究表明，不变子空间方法是一种非常有效且强大的数学工具，可用于推导具有适当初始条件的高维标量及耦合非线性分数阶偏微分方程的精确解。

致谢

M. L. 的研究工作得到 DST-SERB 国家科学讲席项目的支持。

参考文献

[1] I. Podlubny，《分数阶微分方程》，Academic Press，纽约，1999年。[2] K. Diethelm，《分数阶微分方程分析》，Springer，柏林，2010年。[3] A.A. Kilbas，J.J. Trujillo，H.M.Srivastava，《分数阶微分方程理论与应用》，Elseiver，阿姆斯特丹，2006年。

[4] V.E. Tarasov，《分数阶动力学：分数阶微积分在粒子、场和介质动力学中的应用》，非线性物理科学，Springer，海德堡，德国，2011年。[5] H.G. Sun，Y. Zhang，D. Baleanu，W. Chen，Y.Q. Chen，《分数阶微积分在科学与工程领域真实应用的新集锦》，《非线性科学与数值模拟通讯》64(2018年) 213-231。[6] F. Mainardi，《分数阶微积分：连续介质力学与统计力学中的若干基本问题》。载于：A. Carpinteri，F. Mainardi（编），《连续介质力学中的分形与分数阶微积分》，Springer，维也纳，1997年，第291-348页，数字对象标识符：10.1007/978-3-7091-2664-6 7。[7] V.E. Tarasov，J.J. Trujillo，《电动力学中的分数幂律空间色散》，《物理学年鉴》334(2013年) 1-23。[8] C. Ionescu，A. Lopes，D. Copot，J.A.T. Machado，J.H.T. Bates，《分数阶微积分在生物现象建模中的作用：综述》，《非线性科学与数值模拟通讯》51(2017年) 141-159。[9] R.L. Bagley，P.J. Torvik，《真实材料行为中分数阶导数的出现》，《美国机械工程师学会应用力学杂志》51(1984年) 294-298。[10] V.E. Tarasov，《若干有前景的分数阶物理模型综述》，《国际现代物理B辑》27(2013年) 1330005。[11] T. Bakkyaraj，R. Sahadevan，《李变换群形式体系在时间分数阶偏微分方程中的应用》，《Pramana物理学杂志》85(2015年) 849-860。[12]S. Yu. Lukashchuk，《时间分数阶次扩散方程与扩散波方程的守恒律》，《非线性动力学》80(2015年) 791-802。[13] R. Cherniha，M. Serov，Y. Prystavka，《一类(1+2)维反应-扩散-对流方程的完整李对称分类》，《非线性科学与数值模拟通讯》92(2021年) 105466。[14] P. Prakash，《广义对流-反应-扩散方程的新精确解》，《欧洲物理学杂志Plus》134(2019年) 261。

[15]T. Harko, M.K. Mak, 非线性反应-对流-扩散方程的精确行波解——基于 Abel 方程的方法, 《数学物理杂志》56(2015) 111501。[16] R. Sahadevan, T. Bakkyaraj, 某些非线性时间分数阶偏微分方程的不变子空间方法与精确解, 分形微积分与应用分析 18(2015) 146-162。[17] R. Sahadevan, P. Prakash, 某些时间分数阶非线性偏微分方程的精确解, 《非线性动力学》85(2016) 659-673。[18] R. Sahadevan, P. Prakash, 时间分数阶耦合非线性偏微分方程的精确解及不变子空间的最大维数, 《非线性科学与数值模拟通讯》42(2017) 158-177。[19] S. Choudhary, P. Prakash, V. Daftardar-Gejji, 高维分数阶偏微分方程组的不变子空间与精确解, 《计算与应用数学》38(2019) 126。[20] R.K. Gazizov, A.A. Kasatkin, 利用不变子空间方法构造分数阶微分方程的精确解。《计算与应用数学》66(2013) 576-584。[21] P. Artale Harris, R. Garra, 利用不变子空间方法求解非线性分数阶 Burgers 型方程的解析解, 《非线性研究》20(2013) 471-481。[22] S. Choudhary, V. Daftardar-Gejji, 不变子空间方法：求解分数阶偏微分方程的工具, 分形微积分与应用分析 20(2017) 477-493。[23] P. Prakash, 若干类型标量及耦合时空分数阶扩散方程的不变子空间与精确解, 《Pramana物理学杂志》94 (2020) 103(18页)。[24] P. Prakash, S. Choudhary, V. Daftardar-Gejji, 带时滞的广义非线性时间分数阶反应-扩散方程的精确解, 《欧洲物理学杂志Plus》135(2020) 490(24页)。[25] W. Rui, 将不变子空间思想与初等积分法相结合, 研究时间分数阶非线性偏微分方程的精确解, 《应用数学与计算》339(2018) 158-171。

[26] R. Sahadevan, P. Prakash，耦合时间分数阶偏微分方程的李对称分析与不变子空间方法，《混沌、孤子与分形》104(2017) 107-120。[27] P. Prakash，时间分数阶 Kudryashov-Sinelshchikov 方程的群分析、守恒律与精确解，《计算与应用数学》40(2021) 162。[28]R. Sahadevan, T. Bakkyaraj，时间分数阶广义 Burgers 方程与 Korteweg-de Vries 方程的不变性分析，《数学分析及其应用》393(2012) 341-347。[29] R.K. Gazizov, A.A. Kasatkin, S.Yu. Lukashchuk，分数阶扩散方程的对称性，《物理学文摘》T136(2009) 014016 (5页)。（数字对象标识符: 10.1088/0031- 8949/ 2009/T136/014016）[30] P. Prakash, R. Sahadevan，某些分数阶常微分方程的李对称分析与精确解，《非线性动力学》89(2017) 305-319。[31] R. Sahadevan, P. Prakash，某些时间分数阶偏微分方程的李对称分析与守恒律，《国际动力系统与微分方程杂志》9(2019) 44-64。[32] A.M. Nass，具有中立型时滞的分数阶常微分方程的李对称分析与精确解，《应用数学与计算》347(2019) 370-380。[33] K. Sethukumarasamy, P. Vijayaraju, P. Prakash，某些耦合分数阶常微分方程的李对称分析，《非线性数学物理》28(2021) 219-241。[34] V. Daftardar-Gejji, H. Jafari，Adomian 分解：求解分数阶微分方程组的工具，《数学分析及其应用》301(2005) 508-518。[35] S. Momani, Z. Odibat，利用 Adomian 分解法求解时间分数阶 Navier-Stokes 方程的解析解，《应用数学与计算》177(2006) 488-494。[36] Z. Odibat, S. Momani，线性分数阶偏微分方程的广义微分变换法，《应用数学快报》21(2008) 194-199。[37] W.X. Ma, M.M. Mousa, M.R. Ali，新混合方法在天体物理学奇异分数阶 Lane-Emden 型方程求解中的应用，《现代物理学快报B》34(2020) 2050049(10页)。

[38] V.A. Galaktionov, S.R. Svirshchevskii, 《力学与物理学中的非线性偏微分方程精确解与不变子空间》, Chapman and Hall/CRC，伦敦，2007年。[39] P. Artale Harris, R. Garra，具有记忆效应的非线性热传导方程：物理意义与解析结果，《数学物理杂志》58(2017) 063501。[40] R. Garra, Z. Tomovski，若干非线性 Laguree 型扩散方程的精确结果，《数学建模与分析》26(2021) 72-81。[41] A. H. A. Kader, M. S. A. Latif, D. Baleanu，变系数分数阶生物种群模型的一些精确解，《数学方法与应用科学》44(2021) 4701-4714。[42] W.X. Ma，改进的不变子空间方法及其在演化方程中的应用，《中国科学：数学》55(2012) 1769-1778。[43] W.X. Ma, Y. Liu，一类色散演化方程的不变子空间与精确解，《非线性科学与数值模拟通讯》17(2012) 3795-3801。[44] W.X. Ma, Y. Zhang, Y. Tang, J. Tu，具有解线性子空间的 Hirota 双线性方程，《应用数学与计算》218(2012) 7174-7183。[45] Y. Ye, W.X. Ma, S. Shen, D. Zhang，一类具有不变子空间及相关约化的三阶非线性演化方程，《非线性数学物理》21(2014) 132-148。[46] H. Liu，广义非线性 D-C 方程的不变子空间分类与精确解，《应用数学快报》83(2018) 164-168。[47] C. Zhu, C. Qu，二维非线性演化方程的不变子空间，《Symmetry》8(2016) 128。[48] P. Prakash, K.S. Priyendhu, K.M. Anjitha，$(2+1)$维时间分数阶广义对流–反应–扩散波方程的初值问题：不变子空间与精确解，《计算与应用数学》41(2022) 30。[49] A.M. Mathai, H.J. Haubold，《应用科学家的特殊函数》。Springer，纽约，2008年。

[50] M.P. Edwards，非线性扩散-对流方程的精确解，博士论文，卧龙岗大学，1997年。[51]A. Hanyga，空间分数阶扩散方程的多维解，伦敦皇家学会会刊 A 辑457(2001) 2993-3005。[52] A. Hanyga，时空分数阶扩散方程的多维解，伦敦皇家学会会刊 A 辑458(2002) 429-450。[53] L.R. Evangelista, E.K. Lenzi，《分数阶扩散方程与反常扩散》，剑桥大学出版社，2018年。[54] E.K. Lenzi, H.V. Ribeiro, A.A. Tateishi, R.S. Zola, L.R. Evangelista，膜分隔的非均匀系统中的反常扩散与输运，英国皇家学会会刊 A 辑472(2016) 20160502。[55]S. Vitali, V. Sposini, O. Sliusarenko, P. Paradisi, G. Castellani, G. Pagnini，复杂介质中的朗之万方程与反常扩散，英国皇家学会界面科学期刊15(2018) 20180282。[56] E. Demetriou, N.M. Ivanova, C. Sophocleous，(2+1)维和(3+1)维扩散-对流方程的群分析，《数学分析及其应用》348(2008) 55-65。[57] R. Metzler, J. Klafter，反常扩散随机游走指南：分数阶动力学方法，《物理学报告》339(2000) 1-77。[58] M. Ginoa, S. Cerbelli, H. E. Roman，复杂黏弹性材料中的分数阶扩散方程与弛豫，物理学 A 191(1992) 449-453。[59] W. Rui, X. Yang, F. Chen，研究时间分数阶福克-普朗克方程精确解与动力学性质的变量分离法，物理学 A 595(2022) 127068。