高维非线性时间分数阶偏微分方程初边值问题的不变子空间法

K.S. Priyendhu[1], P. Prakash[1*], M. Lakshmanan[2]1数学系，Amrita School of Engineering，Coimbatore-641112，Amrita Vishwa Vidyapeetham，印度。2非线性动力学系，Bharathidasan University, Tiruchirappalli-620 024，印度。电子邮箱：vishnuindia89@gmail.com & p_prakash@cb.amrita.edu（P Prakash）：priyendhusasikumar@gmail.com（K.S. Priyendhu）：lakshman.cnld@gmail.com（M. Lakshmanan）

*-通讯作者

arXiv:2304.02607v1 [nlin.SI] 5 Apr 2023

摘要

本文系统地详细阐述了如何运用变量变换和不变子空间法，求解 $(k+1)$ 维非线性时间分数阶偏微分方程的精确解。具体而言，我们展示了如何通过变量变换过程，将给定的 $(k+1)$ 维非线性时间分数阶偏微分方程变换为 $(1+1)$ 维非线性时间分数阶偏微分方程。此外，我们还说明了如何运用不变子空间法推导约化方程的精确解。此外，在这项细致且系统的研究中，我们将首次探讨如何求得 $(3+1)$ 维非线性时间分数阶对流扩散反应方程在适当初始和边界条件下的各种类型的精确解。此外，上述方程的精确解可以用多项式、指数函数、三角函数、双曲函数和Mittag-Leffler函数表示。最后，我们将所讨论的方法推广至含有若干线性时滞的 $(k+1)$ 维非线性时间分数阶偏微分方程，并推导出 $(3+1)$ 维非线性时间分数阶时滞对流扩散反应方程的精确解。

关键词： 初边值问题，时间分数阶扩散-对流-反应方程，非线性时间分数阶偏微分方程，精确解，不变子空间法，Mittag-Leffler函数

1 引言

过去几十年来，分数阶微分方程理论与应用因能够精确描述科学与工程领域中的各种反常现象 [1–8]，从物理和数学角度都受到广泛关注并日益重要。非整数阶导数（分数阶导数）已成功用于描述复杂系统中的记忆效应，因为非整数阶导数取决于相关函数过去的所有取值，而不仅仅是紧邻当前时刻的取值。因此，非整数阶模型已被有效用于研究系统的反常行为。相关现象可分为幂律长期记忆、分形性质和长程相互作用 [4, 7, 8]。此外，值得注意的是，非整数阶导数具有一系列非标准（不同寻常）的性质，例如不满足标准形式的链式法则、莱布尼茨法则和半群性质；这些都是非整数阶导数的重要基本性质，使我们能够在复杂系统中引入记忆效应 [4, 7–9]。由于非整数阶导数具有这些不同寻常的性质，求解非整数阶非线性偏微分方程的精确解非常复杂。

在文献中，由于上述原因，目前尚无定义明确的解析方法可用于求解非整数阶非线性偏微分方程的精确解。因此，构造此类非整数阶非线性偏微分方程的精确解是一项具有挑战性且困难的任务。求解非线性非整数阶偏微分方程的精确解非常重要，这有助于我们分析和预测复杂系统的定性和定量性质。近年来，许多研究人员通过发展解析和数值方法，对非线性分数阶微分方程解的构造作出了卓越贡献，例如微分变换法 [21], 阿多米安分解法 [19, 20], 李对称分析 [11–13, 22–29], 新混合法 [30],不变子空间法 [29, 31–40,42–44, 50, 51, 65–67], 变量分离法[59, 60] 等。

近期的讨论表明，由于分数阶导数具有独特的性质，不变子空间法是求解非线性分数阶偏微分方程精确解的一种非常有效且强大的解析方法。Galaktionov 和 Svirshchevskii [41]最初对不变子空间法进行了详细研究，用于求解整数阶非线性演化偏微分方程的精确解；该方法通常称为广义变量分离法。此后，Ma 等人 [45–49, 62–64]进一步研究了该方法，并将其用于标量与耦合非线性偏微分方程。近年来，Gazizov 和 Kasatkin [36], 以及其他研究者 [29, 32–35, 37–40, 50] 扩展了该方法，用于求解分数阶标量方程以及

耦合非线性高维偏微分方程的精确解。

众所周知，对于$(1+1)$维非线性偏微分方程 [61] ，存在以下类型的一般可分离解和函数可分离解:

(i) $u(x,t)=\sum_{r=1}^{n}\varphi_r(t)\psi_r(x)$ and

(ii) $u(x,t)=U(z),\ z=\sum_{r=1}^{n}\varphi_r(t)\psi_r(x),$

其中，函数 $\varphi_r(t)$和 $\psi_r(x)$有待确定，其取决于所考虑的方程。上述解（i）和（ii）分别可由广义可分离方法和函数可分离方法导出。

由于非整数阶导数具有特殊性质，包含分数阶时间导数的（$1+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程不可能存在函数可分离解（ii）。然而，对于上述类型的解可由不变子空间法导出的（1+1）维非线性时间分数阶偏微分方程，则可能存在广义可分离解（i）。在 [49], ，Zhu和Qu利用不变子空间法研究了二维非线性演化方程的精确解。2021年，Abdel Kader等人[44] 结合不变子空间法和变量变换，推导出了（$2+1$）维非线性时间分数阶变系数生物种群模型的精确解。同年，Prakash 等人 [50] 采用不变子空间法的直接方法，在不进行任何变量变换的情况下，研究了（2+1）维非线性时间分数阶偏微分方程的精确解。最近，Prakash 等人 [51] 推广了（$k+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程的不变子空间法理论。由此，我们可以预期存在如下形式的精确解

$$u(x_1,\ldots,x_k,t)=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\psi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(t)\left(\prod_{r=1}^{k}\varphi_{i_r}^{r}(x_r)\right),\ i_r=1,2,\ldots,n_r,\ r=1,2,\ldots,k, \tag{1.1}$$

其中，函数 $\psi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(t)$ 和 $\varphi_{i_r}^{r}(x_r)$ 待确定，具体取决于所考虑的方程。本文的主要目标是将结合变量变换的不变子空间法应用于求解以下类型的 $(k+1)$ 维非线性时间分数阶偏微分方程的精确解:

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_k,t)=\sum_{r=1}^{n}F_r(t)G_r(z),\ z=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_kx_k, \tag{1.2}$$

其中 $\lambda_i\in\mathbb{R},i=1,2,\ldots,k,$并且函数 $F_r(t)$ 和 $G_r(z)$ 是未知的，需要根据所考虑的方程来确定。

最常研究的模型是异常扩散波动方程 [11, 12]由时间分数阶导数生成，可以读作如下，

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = A\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}, \quad \alpha \in (0, 2]. \tag{1.3}$$

我们想指出，上述方程 (1.3) 同时描述抛物型和双曲型过程，因为当$\alpha = 2$时，它表示经典波动方程；当 $\alpha = 1.$ 时，它表示扩散（热）方程。此外，我们注意到，当 $0 < \alpha < 1$ 时，方程 (1.3) 描述异常亚扩散过程；当 $1 < \alpha < 2$时，则描述超扩散过程。超扩散现象研究的是系统波动行为与扩散行为之间的中间特性。大量研究致力于探讨这一类广为人知的对流-扩散-反应方程，它们出现在流体动力学、生物种群、数理金融、生态学、海洋波浪研究等所有主要领域。研究人员通过定性、定量和渐近方法考察了非线性对流-扩散-反应方程。在文献中，Cherniha 等人 [13] 讨论了 $(n + 1)$ 维广义对流-扩散-反应方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \bigtriangledown \cdot (F(u) \bigtriangledown u) + K(u) \cdot \bigtriangledown u + R(u), \tag{1.4}$$

其中，$u = u(x_1、 ...、 x_n、 t)$ $\bigtriangledown = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}、 ...、 \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$、$t > 0$、$x_r \in \mathbb{R}$、$r = 1$、2、...、$n$、以及函数 $F(u) > 0$ 表示扩散率，向量 $K(u) = (K_1(u)...、 K_n(u))$ 表示介质的对流输运，通常指速度，而$R(u)$是反应项。此外，他们研究了方程 (1.4) 在 $n = 2.$ 下的李对称性。1983年，Dorodnitsyn 等人 [14]研究了（n+1）维广义扩散-反应方程。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_r}\left[F_r(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)\right] + R(u), \quad F_r(u) > 0, r = 1, \ldots, n, \tag{1.5}$$

其中 $u = u(x_1, ..., x_n, t)$ $x_r \in \mathbb{R}$, $t > 0$ 以及函数 $F_r(u)$ $r = 1, ..., n,$ 和 $R(u)$分别描述了这些过程的扩散率和动力学。对于 $n = 2$ 和$n = 3,$ 他们给出了方程（1.5）的群性质。此外，我们注意到，Polyanin 和 Zaitsev [15] 利用分离变量法结合各种变换，推导出了上述方程（1.5）在 $n = 3$ 条件下的各种类型的精确解。

在本研究中，我们考虑如下形式的最一般形式的 $(3 + 1)$ 维非线性时间分数阶对流-扩散-反应（CDR）方程

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_r}\left(F_r(u)\frac{\partial u}{\partial x_r}\right) + \sum_{r=1}^{3} K_r(u)\frac{\partial u}{\partial x_r} + R(u), \alpha \in (0, 2] \tag{1.6}$$

该方程定义在空间有界区域 $\Omega \times [0,\infty) \subset \mathbb{R}^4$ 上，并满足适当的初始和边界条件

$$u(x_1,x_2,x_3,0)=\xi(x_1,x_2,x_3),\alpha\in(0,1], \tag{1.7}$$

$$u(x_1,x_2,x_3,0)=\xi(x_1,x_2,x_3)\ \&\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\eta(x_1,x_2,x_3),\alpha\in(1,2], \tag{1.8}$$

and

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2,x_3,t)\Big|_{\sum\limits_{i=1}^{3}\lambda_i x_i=0} &= \begin{cases} \delta_1(t), \text{if}\,\alpha\in(0,1], \\ \delta_2(t), \text{if}\,\alpha\in(1,2], \end{cases} \\ \&\, u(x_1,x_2,x_3,t)\Big|_{\sum\limits_{i=1}^{3}\lambda_i x_i=l} &= \begin{cases} \delta_3(t), \text{if}\,\alpha\in(0,1], \\ \delta_4(t), \text{if}\,\alpha\in(1,2], \end{cases} \end{aligned} \tag{1.9}$$

其中，阶数为 $\alpha>0$ 的分数阶导数记为$\partial^\alpha(\cdot)\,\partial t^\alpha$ ，采用 Caputo 意义定义 [1–3]为

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}=\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(p-\alpha)}\displaystyle\int_0^t \frac{\partial^p u(x_1,x_2,x_3,\tau)}{\partial\tau^p}(t-\tau)^{p-\alpha-1}d\tau, & p-1<\alpha<p,\ p\in\mathbb{N}; \\ \dfrac{\partial^p u}{\partial t^p}, & \alpha=p\in\mathbb{N}; \end{cases} \tag{1.10}$$

3 和 $\Omega=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\middle|0\le\sum\lambda_r x_r\le l,\ x_r,\lambda_r,l\in\mathbb{R},r=1,2,3\right\}$，函数$_{r=1}$ $F_r(u)$ $K_r(u)$和 $R(u)$分别表示所研究物理系统中的扩散过程、对流过程和反应动力学，其中 $u=u(x_1,x_2,x_3,t)$ $t>0$，函数 $\delta_1(t)$ $\delta_3(t)\in C^1([0,\infty))$，而 $\delta_2(t)$ $\delta_4(t)\in C^2([0,\infty))$。近期，Prakash 等人 [51] 通过不变子空间法的直接方法（无需任何变量变换），讨论了方程 (1.6) 在 $R(u)=0$ 条件下的初值问题的精确解。这里我们想指出，当 $\alpha\in(1,2]$, 时，上述方程 (1.6) 称为时间分数阶对流-扩散-反应（CDR）波动方程，有助于同时研究扩散与波动现象之间的中间过程。

据我们所知，尚无人探讨过结合变量变换的不变子空间法，以求解给定方程（1.6）的初边值问题的精确解。本研究的目标之一，是通过结合变量变换的不变子空间法，求出给定方程（1.6）的各种维数不变子空间。利用所得的不变子空间，我们的第二个目标是推导出方程（1.6）初边值问题的以下类型的精确解：

$$u(x_1,x_2,x_3,t)=\sum_{r=1}^{n}F_r(t)G_r(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3),\lambda_i\in\mathbb{R},i=1,2,3. \tag{1.11}$$

本文的结构如下：第2节描述如何应用与变量变换相关联的不变子空间法来处理（$k+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程。此外，我们还详细研究了如何利用不变子空间构造精确解。第3节描述了如何估计（$3+1$）维非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程的不同维数的不变子空间。第4节说明了如何利用不变子空间推导（$3+1$）维非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程初边值问题的精确解。第5节研究了与变量变换相关联的不变子空间法向具有多个时滞的（$k+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程的扩展，同时推导了（$3+1$）维时滞非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程的精确解。随后，在第6节中，我们简要介绍前几节所建立理论的应用。最后，第7节给出了简要讨论和总结性说明。

2 与$(k+1)$维非线性时间分数阶偏微分方程相关的不变子空间法

本节将介绍如何求出与以下 $k+1$ 维非线性时间分数阶偏微分方程相关的不变子空间

$$\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}}=\boldsymbol{F}[u],\alpha>0,t\geq 0, \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{F}[u]$ 是一个涉及 k 个独立空间变量的足够光滑的 m阶非线性偏微分算子，使得

$$\boldsymbol{F}[u]=\boldsymbol{F}\big(x_1,x_2,\ldots,x_k,u,u_1^{(1)},\ldots,u_k^{(1)},u_{11}^{(2)},\ldots,u_{r_1r_2}^{(2)},\ldots,u_{r_1r_2\cdots r_m}^{(m)}\big). \tag{2.2}$$

这里 $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_k,t)$ $u_r^{(1)}=\dfrac{\partial u}{\partial x_r},u_{r_1r_2}^{(2)}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_{r_1}\partial x_{r_2}},\ldots,u_{r_1r_2\cdots r_m}^{(m)}=\dfrac{\partial^m u}{\partial x_{r_1}\partial x_{r_2}\cdots\partial x_{r_m}}$，$x_{r_s}\in\mathbb{R},r,r_s=1,2,\ldots,k,s=1,2,\ldots,m,$和 $k,m\in\mathbb{N}$.现在，我们寻找如下形式的特解

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_k,t)=w(z,t),z=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_kx_k, \tag{2.3}$$

其中 $\lambda_r\in\mathbb{R}$，$r=1$，2，.....，k，$k\in\mathbb{N}$. 利用拟设 (2.3) 和不变子空间方法，求解 (2.1) 精确解的步骤可概括如下：

步骤 1：利用拟设 (2.3)，给定的 $(k+1)$ 维方程 (2.1) 可约化为以下 $(1+1)$ 维非线性时间分数阶偏微分方程:

$$\frac{\partial^{\alpha} w}{\partial t^{\alpha}}=\boldsymbol{F}_{T}[w], \alpha>0, \tag{2.4}$$

其中$\boldsymbol{F}_{T}[w]$是给定的变换后的常微分算子】【。

$$\boldsymbol{F}_{T}[w]=\boldsymbol{F}_{T}\left(z, w, w_{z}^{(1)}, \ldots, w_{z}^{(m)}\right), w_{z}^{(j)}=\frac{\partial^{j} w}{\partial z^{j}}, j=1,2, \ldots, m. \tag{2.5}$$

步骤-2：应用不变子空间法于上述降阶（$1+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程（2.4），以寻找不变子空间。

步骤 3：利用所得到的不变子空间，给定的 $(1+1)$ 维非线性时间分数阶偏微分方程 (2.4) 可化简为一个分数阶常微分方程组。

步骤-4：接下来，可以对所得的分数阶常微分方程组应用众所周知的解析方法。由此，我们可以寻找如下形式的精确解:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_k, t)=w(z, t)=\sum_{s=1}^{n} C_s(t)\phi_s(z),$$

其中 $z=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_k x_k, n \in \mathbb{N}.$

现在，使用 Galaktionov和Svir- shchevskii 所介绍的不变子空间法 [41], 让我们说明如何为方程（2.4）寻找不变子空间。首先，我们考虑 n 阶线性齐次常微分方程

$$\frac{d^{n} y}{d z^{n}}+p_{n-1}(z) \frac{d^{n-1} y}{d z^{n-1}}+\cdots+p_0(z) y=0, \tag{2.6}$$

其中，函数 $p_s(z)$ $s=0$、1、2、.....、$n-1$ 均为 z 的连续函数。于是，对于上述常微分方程（2.6），存在 n 个线性无关解，记为 $\phi_s(z)$ $s=1$、2、.....、n。令$\mathbf{V}_n$ 为上述线性无关函数 $\phi_s(z)$ $s=1$、2、.....、n 所张成的线性空间，可简写为

$$\mathbf{V}_n=\operatorname{Span}\{\phi_s(z) | s=1,2, \ldots, n\}. \tag{2.7}$$

上述线性空间（解空间）$\mathbf{V}_n$ 在非线性常微分算子$\boldsymbol{F}_{T}[w]$下是不变的，若其由（2.5）给出，并且 $w \in \mathbf{V}_n$意味着$\boldsymbol{F}_{T}[w] \in \mathbf{V}_n$.换句话说，我们可以写成如下形式:

$$w=\sum_{s=1}^{n} C_s \phi_s(z) \text{ implies that } \boldsymbol{F}_{T}[w]=\sum_{s=1}^{n} \Omega_s(C_1, C_2, \ldots, C_n)\phi_s(z), \tag{2.8}$$

其中 $C_s \in \mathbb{R}$，以及函数 $\Omega_s(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ $s = 1, 2, \ldots, n$，表示关于基组 $\{\phi_s(z)|s = 1, 2, \ldots, n\}$. 的展开系数
此外，我们希望指出线性空间 $\mathbf{V}_n$ 在(2.7)中给出的在非线性偏微分算子下是不变的$\boldsymbol{F}[u]$ 在(2.2)中给出的如果 $w \in \mathbf{V}_n$ 意味着$\boldsymbol{F}_T[w] \in \mathbf{V}_n$. 这意味着如果变换后的非线性常微分算子$\boldsymbol{F}_T[w]$ 承认线性空间 $\mathbf{V}_n$, 那么线性空间 $\mathbf{V}_n$ 在给定的非线性偏微分算子下也是不变的$\boldsymbol{F}[u]$ 反之亦然。

以下定理有助于求出给定非线性微分算子（2.5）的线性空间的最大维数。

定理2.1. *[41]* 如果 n 维线性（向量）空间在给定的 m 阶非线性常微分算子 $\boldsymbol{F}_T[w] = \boldsymbol{F}_T\left(z, w, w_z^{(1)}, \ldots, w_z^{(m)}\right)$ 下是不变的，那么 $n \leq 2m + 1$.

更准确地说，根据最大维数定理 2.1，给定的 m 阶非线性常微分算子$\boldsymbol{F}_T[w]$ 的线性空间的可能维数为 $1, 2, \ldots, 2m + 1$.

现在，我们展示如何使用下文讨论的给定微分算子 $\mathbf{V}_n$ 的不变子空间，求出方程 (2.1) 的精确解。

定理 2.2。 设$\mathbf{V}_n = Span\{\phi_s(z)|s = 1, 2, \ldots, n\}$ 为一个 n 维线性空间。假设 $\mathbf{V}_n$ 在 $\boldsymbol{F}_T[w]$ （见 (2.5)）给出的常微分算子下是不变的。那么该 $(1 + 1)$维非线性时间分数阶偏微分方程

$$\frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} = \boldsymbol{F}_T[w], \alpha > 0, \tag{2.9}$$

存在有限可分形式的精确解

$$w(z, t) = \sum_{s=1}^{n} C_s(t)\phi_s(z), \tag{2.10}$$

当且仅当 $(k + 1)$ 维非线性时间分数阶偏微分方程

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \boldsymbol{F}[u], \alpha > 0, \tag{2.11}$$

可得到有限可分形式的精确解

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_k, t) = w(z, t) = \sum_{s=1}^{n} C_s(t)\phi_s(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k), \tag{2.12}$$

其中 $z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k$. 此外，函数 $C_s(t)$ $s = 1, 2, \ldots, n$ 满足以下分数阶常微分方程组。

$$\frac{d^\alpha C_s(t)}{dt^\alpha} = \Omega_s(C_1(t), C_2(t), \ldots, C_n(t)), s = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.13}$$

接下来，我们将针对寻找（3 + 1）维广义非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程（1.6）的不变子空间和精确解，给出一项具体研究。

3 与（3+1）维广义非线性时间分数阶 CDR 方程（1.6）相关的不变子空间

本节将详细介绍寻找（3+1）维广义非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程（1.6）不变子空间的算法。因此，非线性偏微分算子如下：

$$\mathbf{F}[u]=\sum_{r=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(F_r(u)\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)+\sum_{r=1}^{3}K_r(u)\frac{\partial u}{\partial x_r}+R(u). \tag{3.1}$$

现在，利用带有 $k=3$, 的拟设(2.3)，我们可以将具有三个独立空间变量的给定偏微分算子(3.1)化为具有一个新独立空间变量的常微分算子。因此，我们将方程 (1.6) 的特解考虑为 $u(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)=w(z,\ t)\ z=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3$。于是，给定的$(3+1)$维广义非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程 (1.6)被变换为如下形式的 $(1+1)$ 维广义非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程

$$\frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha}=\boldsymbol{F}_T[w]\equiv\frac{\partial}{\partial z}\left(F(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right)+K(w)\frac{\partial w}{\partial z}+R(w),\alpha\in(0,2], \tag{3.2}$$

相应的初始和边界条件（1.7）—（1.9）可考虑如下：

$$w(z,0)=\xi(z),\qquad \alpha\in(0,1], \tag{3.3}$$

$$w(z,0)=\xi(z)\ \ \&\ \ \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=\eta(z),\quad \alpha\in(1,2], \tag{3.4}$$

and

$$w(z,t)\Big|_{z=0}=\begin{cases}\delta_1(t),\text{if}\,\alpha\in(0,1],\\ \delta_2(t),\text{if}\,\alpha\in(1,2],\end{cases}\quad\&\quad w(z,t)\Big|_{z=l}=\begin{cases}\delta_3(t),\text{if}\,\alpha\in(0,1],\\ \delta_4(t),\text{if}\,\alpha\in(1,2],\end{cases} \tag{3.5}$$

[3] [3]其中函数 $F(w)=\sum\lambda_r^2F_r(w)$ 和 $K(w)=\sum\lambda_rK_r(w)$. 接下来，我们给出$_{r=1}$ $_{r=1}$一项详细的算法研究以寻找有限维不变子空间用于

式（3.2）中给出的非线性微分算子 $\boldsymbol{F}_T[w]$。现在，我们引入 n 维线性空间

$$\mathbf{V}_n = \mathrm{Span}\{\phi_s(z)|s = 1, 2, \ldots, n\}, \tag{3.6}$$

其中函数 $\phi_s(z)$ $s = 1, 2, \ldots, n,$ 是下列 ODE 的线性无关解：

$$D_n[y] \equiv \left[\frac{d^n}{dz^n} + p_{n-1}(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \cdots + p_0(z)\right] y = 0. \tag{3.7}$$

这里函数 $p_s(z)$ $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$ 是 z 的连续函数。解空间 $\mathbf{V}_n$ 在下列非线性微分算子下不变

$$\boldsymbol{F}_T[w] = \frac{\partial}{\partial z}\left(F(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right) + K(w)\frac{\partial w}{\partial z} + R(w), \tag{3.8}$$

如果 $\boldsymbol{F}_T[w] \in \mathbf{V}_n$ 对所有 $w \in \mathbf{V}_n$. 因此，我们得到下列不变性条件

$$\begin{aligned} D_n\big[\boldsymbol{F}_T[w]\big] \equiv & \left[\frac{d^n}{dz^n} + p_{n-1}(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \cdots + p_0(z)\right] \boldsymbol{F}_T[w] = 0 \\ \text{whenever} \quad D_n[w] \equiv & \left[\frac{d^n}{dz^n} + p_{n-1}(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \cdots + p_0(z)\right] w = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

根据最大维数定理 2.1，给定微分算子 $\boldsymbol{F}_T[w]$ 的线性空间 $\mathbf{V}_n$的可能维数为 $n = 1, 2, 3, 4, 5,$ 因为 $\dim(\mathbf{V}_n) \leq 5.$

为了确定未知函数 $F_r(w)$ $K_r(w)$ $R(w)$ $r = 1, 2, 3,$ 以及$p_s(z)$ $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$ 及其对应的不同维数的不变子空间，我们代入

$$\frac{d^n w}{dz^n} = -\left[p_{n-1}(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \cdots + p_0(z)\right] w \tag{3.10}$$

并将算子(3.8)代入方程(3.9)，我们得到一个超定方程组。求解所得方程组，我们得到微分算子及其对应的线性空间。

现在，我们给出如何确定二维不变线性空间及其对应的微分算子。

定理 3.1. 考虑二维线性空间 $\mathbf{V}_2$ 定义为二阶线性齐次常微分方程的解空间

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p_1(z)\frac{dy}{dz} + p_0(z)y = 0, \tag{3.11}$$

则存在非线性微分算子 $\boldsymbol{F}_T[w]$ 它保持由*ODE* (3.11) 定义的线性空间，当 $p_1(z)p_0(z) = 0.$

二维不变线性空间及其相应微分算子的完整描述$\boldsymbol{F}_T[w]$ 列于表*1*中。

证明。 设 $\mathbf{V}_2 = \mathrm{Span}\{\phi_1(z)\ \phi_2(z)\}$. 因此， $\dim(\mathbf{V}_n) = n = 2$.
对于 $n = 2$, 不变性条件 (3.9) 可以如下解读:

$$D_2\big[\boldsymbol{F}_T[w]\big] \equiv \left[\frac{d^2}{dz^2} + p_1(z)\frac{d}{dz} + p_0(z)\right]\boldsymbol{F}_T[w] = 0, \qquad (3.12)$$
$$\text{whenever } \frac{d^2w}{dz^2} = -p_1(z)\frac{dw}{dz} - p_0(z)w.$$

简化上述不变条件(3.12)并将 w_z,$(w_z)^2$,等的系数分别等于零，我们得到以下方程组:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}^{(3)}(F(w)) = 0, -5\mathbf{D}^{(2)}(F(w))p_1(z) + \mathbf{D}^{(2)}(K(w)) = 0, -6\mathbf{D}^{(2)}(F(w))p_0(z)w - \\
&\mathbf{D}(F(w))\left(4\frac{d}{dz}p_1(z) + 3p_0(z) - 4p_1^2(z)\right) - 2p_1(z)\mathbf{D}(K(w)) + \mathbf{D}^{(2)}(R(w)) = 0, \\
&-\mathbf{D}(F(w))\left(4w\frac{d}{dz}p_0(z) - 7wp_0(z)p_1(z)\right) - 3wp_0(z)\mathbf{D}(K(w)) - F(w)\left(2\frac{d}{dz}p_0(z)\right. \\
&\left.-2p_1(z)\frac{d}{dz}p_1(z) + \frac{d^2}{dz^2}p_1(z)\right) - K(w)\frac{d}{dz}p_1(z) = 0, 3\mathbf{D}(F(w))w^2p_0^2(z) - K(w)w\frac{d}{dz}p_0(z) \\
&+ F(w)\left(-w\frac{d^2}{dz^2}p_0(z) + 2p_0(z)w\frac{d}{dz}p_1(z)\right) + \mathbf{D}(R(w))wp_0(z) + R(w)p_0(z) = 0,
\end{aligned} \qquad (3.13)$$

其中$\mathbf{D}^{(i)}(\cdot)$表示相应函数的 i阶全导数， $i = 1, 2, 3$, 函数 $F(w) = \sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2F_r(w)$, 和 $K(w) = \sum_{r=1}^{3}\lambda_rK_r(w)$. 将 $F(w)$和$K(w)$代入 (3.13)，我们得到以下方程:

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2\mathbf{D}^{(3)}F_r(w) = 0, -5\left(\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2\mathbf{D}^{(2)}F_r(w)\right)p_1(z) + \sum_{r=1}^{3}\lambda_r\mathbf{D}^{(2)}K_r(w) = 0, \\
&-\left(\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2\mathbf{D}F_r(w)\right)\left(4\frac{d}{dz}p_1(z) + 3p_0(z) - 4p_1^2(z)\right) - 6\left(\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2\mathbf{D}^{(2)}F_r(w)\right)p_0(z)w \\
&+\mathbf{D}^{(2)}(R(w)) - 2p_1(z)\left(\sum_{r=1}^{3}\lambda_r\mathbf{D}K_r(w)\right) = 0, -\left(\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2\mathbf{D}F_r(w)\right)\Big(4w\frac{d}{dz}p_0(z) \\
&-7wp_0(z)p_1(z)\Big) - 3wp_0(z)\left(\sum_{r=1}^{3}\lambda_r\mathbf{D}K_r(w)\right) - \left(\sum_{r=1}^{3}\lambda_rK_r(w)\right)\frac{d}{dz}p_1(z) \\
&-\left(\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2F_r(w)\right)\left(2\frac{d}{dz}p_0(z) - 2p_1(z)\frac{d}{dz}p_1(z) + \frac{d^2}{dz^2}p_1(z)\right) = 0, 3\left(\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2\mathbf{D}F_r(w)\right)w^2p_0^2(z) \\
&+\left(\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2F_r(w)\right)\left(-\frac{d^2}{dz^2}p_0(z) + 2p_0(z)\frac{d}{dz}p_1(z)\right)w - \left(\sum_{r=1}^{3}\lambda_rK_r(w)\right)w\frac{d}{dz}p_0(z) \\
&+\mathbf{D}(R(w))wp_0(z) + R(w)p_0(z) = 0,
\end{aligned} \qquad (3.14)$$

其中$\mathbf{D}^{(i)}(\cdot)$表示相应函数的 i阶全导数， $i = 1, 2$. 一般而言，上述系统（3.14）不可解。因此，我们取 $p_1(z) =$

0或 $p_0(z) = 0$. 我们首先考虑 $p_1(z) = 0$. 的情形。因此，我们得到一个二维线性空间$\mathbf{V}_2 = \text{Span}\{sin(\sqrt{\rho_0}z)\ cos(\sqrt{\rho_0}z)\}$ 及其对应的微分算子$\boldsymbol{F}_T[w] = \lambda_1^2 \frac{\partial}{\partial z}\Big(\big(\frac{\mu_1 w^2}{3\lambda_1^2\rho_0} + \mu_4\big)\frac{\partial w}{\partial z}\Big) + \lambda_1\mu_3\frac{\partial w}{\partial z} + \mu_1\overline{w^3} + \mu_2\overline{w}$.接下来，我们考虑 $\overline{p_0(z)} = 0$. 的情形。在这种情况下，我们得到四个不同的二维线性空间及其对应的不同微分算子$\boldsymbol{F}_T[w]$.对于这两种情况，我们已在表1中列出所得的二维不变子空间及其对应的微分算子。

□

类似地，我们可以求出其他维数的线性空间及其对应的微分算子$\boldsymbol{F}_T[w]$.例如，我们考虑维数为 1、3 和 4 的线性空间。对于这些情形，所得线性空间及其对应的微分算子$\boldsymbol{F}_T[w]$列于表 2 和表 3 中。

此外，我们还可以考虑 $F_r(w)$ $K_r(w)$ $r = 1$，2，3，以及 $R(w)$ 的特定形式，如下所示：

$$\begin{aligned}
F_1(w) &= \beta_2 w^2 + \beta_1 w + \beta_0,\\
F_2(w) &= \kappa_2 w^2 + \kappa_1 w + \kappa_0,\\
F_3(w) &= \zeta_2 w^2 + \zeta_1 w + \zeta_0,\\
K_1(w) &= f_2 w^2 + f_1 w + f_0,\\
K_2(w) &= g_2 w^2 + g_1 w + g_0,\\
K_3(w) &= h_2 w^2 + h_1 w + h_0,\\
R(w) &= r_3 w^3 + r_2 w^2 + r_1 w + r_0,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

其中，β_i，κ_i，ζ_i，f_i，g_i，h_i，$i = 0$，1，2，以及 r_j，$j = 0$，1，2，3，均为实数任意常数。对于这种情形，给定的微分算子$\boldsymbol{F}_T[w]$可表示为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_T[w] = \frac{\partial}{\partial z}\Big[\Big(\lambda_1^2(\beta_2 w^2 + \beta_1 w + \beta_0) + \lambda_2^2(\kappa_2 w^2 + \kappa_1 w + \kappa_0) + \lambda_3^2(\zeta_2 w^2 + \zeta_1 w + \zeta_0)\Big)\frac{\partial w}{\partial z}\Big]\\
+ \big[\lambda_1(f_2 w^2 + f_1 w + f_0) + \lambda_2(g_2 w^2 + g_1 w + g_0) + \lambda_3(h_2 w^2 + h_1 w + h_0)\big]\frac{\partial w}{\partial z}\\
+ r_3 w^3 + r_2 w^2 + r_1 w + r_0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

现在考虑 $\dim(\mathbf{V}_n)=2$ 和 $\dim(\mathbf{V}_n)=3$。对于这些情形，我们得到各种类型的二维和三维线性空间$\mathbf{V}_n$，及其对应的二次和三次非线性微分算子，这些算子列于表 4 和表 5 中。

[{"id":0,"output":"在此，我们想指出，以类似的方式，我们可以找到与具有不同非线性的微分算子 $\boldsymbol{F}_T[w]$ 相对应的各种其他维数的线性空间。"}]

Table 1: Two-dimensional invariant subspaces for the differential operator $\boldsymbol{F}_T[w]$ given in (3.8).

Cases	Coefficients of the operator (3.8)	Invariant Subspaces
1.	$F(w)=\lambda_1^2\left(\frac{1}{2}\mu_5 w^2+\mu_6 w+\mu_7\right), K(w)=\lambda_1\left(\mu_3 w+\mu_4\right), R(w)=\mu_1 w+\mu_2$	$\mathbf{V}_2=\text{Span}\{1,z\}$
2.	$F(w)=\lambda_1^2\left(-\frac{1}{12}\left(\frac{-6\mu_5\rho_1\lambda_1 w-\mu_1 w^2+3\mu_2 w}{\rho_1^2\lambda_1^2}\right)+\mu_7\right)$ $K(w)=\lambda_1\left(\frac{5}{12}\frac{\mu_1 w^2}{\rho_1\lambda_1}+\mu_5 w+\mu_6\right), R(w)=\frac{1}{6}\mu_1 w^3+\frac{1}{2}\mu_2 w^2+\mu_3 w+\mu_4$	$\mathbf{V}_2=\text{Span}\{1,e^{-\rho_1 z}\}$
3.	$F(w)=\lambda_1^2(\frac{\mu_1 w^2}{3\lambda_1^2\rho_0}+\mu_4), K(w)=\lambda_1\mu_3, R(w)=\mu_1 w^2+\mu_2$	$\mathbf{V}_2=\text{Span}\{sin(\sqrt{\rho_0}z), cos(\sqrt{\rho_0}z)\}$
4.	$F(w)=\lambda_1^2\left(\mu_4 w+\mu_5\right), K(w)=0, R(w)=\mu_2 w+\mu_3$	$\mathbf{V}_2=\text{Span}\{1,(z-\mu_1)^2\}$
5.	$F(w)=\lambda_1^2\left(\frac{\mu_1^2\mu_3}{4\lambda_1^2}w+\mu_6\right), K(w)=0, R(w)=\frac{1}{2}\mu_3 w^2+\mu_4 w+\mu_5$	$\mathbf{V}_2=\text{Span}\{1,sin(\frac{z+\mu_2}{\mu_1})\}$

Here, we consider $\mu_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\ldots,7$.

Table 2: Different dimensional invariant subspaces for the differential operator $\boldsymbol{F}_T[w]$ given in (3.8) .

Cases	Coefficients of the operator (3.8)	Invariant Subspaces
6.	$F(w)=\lambda_1^2\left(\frac{\mu_1 w}{2\lambda_1\rho_0}+\mu_3\right), K(w)=\lambda_1\left(\mu_1 w+\mu_2\right), R(w)=\mu_0 w$	$\mathbf{V}_1=\text{Span}\{e^{-\rho_0 z}\}$
7.	$F(w)=\lambda_1^2\left(\mu_4 w+\mu_5\right), K(w)=\lambda_1\mu_3, R(w)=\mu_1 w+\mu_2$	$\mathbf{V}_3=\text{Span}\{1,z,\frac{1}{2}z^2\}$
8.	$F(w)=\lambda_1^2\left(\frac{1}{4}\frac{\mu_1 w}{\lambda_1^2\rho_1}+\mu_5\right), K(w)=\lambda_1\mu_4, R(w)=\frac{1}{2}\mu_1 w^2+\mu_2 w+\mu_3$	$\mathbf{V}_3=\text{Span}\{1,sin(\sqrt{\rho_1}z), cos(\sqrt{\rho_1}z)\}$
9.	$F(w)=\lambda_1^2\mu_5, K(w)=0, R(w)=\mu_3 w+\mu_4$	$\mathbf{V}_3=\text{Span}\{1,z,-\mu_1^2 cos(\frac{\mu_2+z}{\mu_1})\}$
10.	$F(w)=\lambda_1^2\left(\frac{\mu_1 w}{6\lambda_1^2\rho_1}+\mu_4\right), K(w)=\lambda_1\left(\frac{7\sqrt{2}}{12\lambda_1\sqrt{p_1}}\mu_1 w+\mu_4\right), R(w)=\frac{1}{2}\mu_1 w^2+\mu_2 w+\mu_3$	$\mathbf{V}_3=\text{Span}\{1,e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2p_1}z},e^{-\sqrt{2p_1}z}\}$
11.	$F(w)=\frac{\lambda_1\mu_2}{\rho_2}, K(w)=0, R(w)=\mu_1 w$	$\mathbf{V}_4=\text{Span}\{1,z,sin(\sqrt{\rho_2}z), cos(\sqrt{\rho_2}z)\}$

Here, we consider $\mu_i\in\mathbb{R}, i=0,1,2,\ldots,5$.

Table 3: Different dimensional invariant subspaces for the differential operator $\boldsymbol{F}_T[w]$ given in (3.8).

Cases	Coefficients of the operator (3.8)	Invariant Subspaces
12.	$F(w)=\lambda_1^2\mu_4, K(w)=\lambda_1\mu_3, R(w)=\mu_1 w+\mu_2$	$\mathbf{V}_3=\text{Span}\{1, e^{-\frac{1}{2}(\rho_1+\sqrt{p_1^2-4p_1})z}, e^{-\frac{1}{2}(\rho_1-\sqrt{p_1^2-4p_1})z}\}$ $\mathbf{V}_3=\text{Span}\{1, cosh(\sqrt{\rho_2}z), sinh(\sqrt{\rho_2}z)\}$ $\mathbf{V}_3=\text{Span}\{1, z, e^{-\rho_1 z}\}$ $\mathbf{V}_4=\text{Span}\{1, z, cos(\sqrt{\rho_2}z), sin(\sqrt{\rho_2}z)\}$ $\mathbf{V}_4=\text{Span}\{1, z, z^2, e^{\rho_3 z})\}$ $\mathbf{V}_4=\text{Span}\{1, z, z^2, z^3\}$
13.	$F(w)=\lambda_1\frac{\mu_3}{2\rho_3}, K(w)=-\lambda_1\mu_3, R(w)=\mu_1 w+\mu_2$	$\mathbf{V}_3=\text{Span}\Big\{1, z, 4cosh\big[\frac{1}{2}(\frac{\rho_1}{\rho_2}+\frac{z}{\rho_1})\big]\big(cosh(\rho_3 z)-sinh(\rho_3 z)\big)$ $+2sinh\big[\frac{1}{2}(\frac{\rho_1}{\rho_2}+\frac{z}{\rho_1})\big]\big(cosh(\rho_3 z)-sinh(\rho_3 z)\big)\Big\}$ $\mathbf{V}_3=\text{Span}\Big\{1, z, -\frac{2\rho_1^2}{(2\rho_1\rho_3+1)^2}sinh\big(\frac{(2\rho_1\rho_3+1)(z+\rho_2)}{2\rho_1}\big)$ $-\frac{2\rho_1^2}{(2\rho_1\rho_3-1)^2}\Big[sinh\big(\frac{(2\rho_1\rho_3-1)(z+\rho_2)}{2\rho_1}\big)-cosh\big(\frac{(2\rho_1\rho_3-1)(z+\rho_2)}{2\rho_1}\big)\Big]$ $+\frac{2\rho_1^2}{(2\rho_1\rho_3+1)^2}cosh\big(\frac{(2\rho_1\rho_3+1)(z+\rho_2)}{2\rho_1}\big)\Big\}$ $\mathbf{V}_4=\text{Span}\Big\{1, z, z^2, \frac{4\rho_1^3}{(2\rho_1\rho_3+1)^3}sinh\big(\frac{(2\rho_1\rho_3+1)(z+\rho_2)}{2\rho_1}\big)$ $+\frac{4\rho_1^3}{(2\rho_1\rho_3-1)^3}\Big[\sinh\big(\frac{(2\rho_1\rho_3-1)(z+\rho_2)}{2\rho_1}\big)-cosh\big(\frac{(2\rho_1\rho_3+1)(z+\rho_2)}{2\rho_1}\big)\Big]$ $-\frac{4\rho_1^3}{(2\rho_1\rho_3-1)^3}cosh\big(\frac{(2\rho_1\rho_3-1)(z+\rho_2)}{2\rho_1}\big)\Big\}$

Here, we consider $\mu_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\ldots 4$.

Table 4: Different dimensional invariant subspaces for the differential operator $\boldsymbol{F}_T[w]$ given in (3.16) with quadratic nonlinearity.

Cases	Coefficients of the operator (3.16)	Invariant Subspaces
1.	$F(w) = \lambda_1^2(\beta_1 w + \beta_0) + \lambda_2^2(\kappa_1 w + \kappa_0) + \lambda_3^2(\zeta_1 w + \zeta_0)$ $K(w) = \lambda_1(f_1 w + f_0) + \lambda_2(g_1 w + g_0) + \lambda_3(h_1 w + h_0), R(w) = r_1 w + r_0$ $F(w) = \lambda_1^2(\beta_1 w + \beta_0) + \lambda_2^2(\kappa_1 w + \kappa_0) + \lambda_3^2(\zeta_1 w + \zeta_0)$ $K(w) = \lambda_1 f_0 + \lambda_2 g_0 + \lambda_3 h_0, R(w) = 0$	$\mathbf{V}_2 = \text{Span}\{1, z\}$
2.	$F(w) = \lambda_1^2(\beta_1 w + \beta_0) + \lambda_2^2(\kappa_1 w + \kappa_0) + \lambda_3^2(\zeta_1 w + \zeta_0)$ $K(w) = \lambda_1(f_1 w + f_0) + \lambda_2(g_1 w + g_0) + \lambda_3(h_1 w + h_0)$ $R(w) = \big[-2(\beta_1\lambda_1^2 + \kappa_1\lambda_2^2 + \zeta_1\lambda_3^2)\rho_1^2 + \rho_1(f_1\lambda_1 + g_1\lambda_2 + h_1\lambda_3)\big]w^2 + r_1 w + r_0$ $F(w) = \lambda_1^2(\frac{\beta_1}{\lambda_1^2} w + \beta_0) + \lambda_2^2(\kappa_1 w + \kappa_0) + \lambda_3^2(\zeta_1 w + \zeta_0)$ $K(w) = \lambda_1(\frac{2\beta_1\rho_1}{\lambda_1} w + f_0) + \lambda_2 g_0 + \lambda_3 h_0, R(w) = 0$	$\mathbf{V}_2 = \text{Span}\{1, e^{-\rho_1 z}\}$
3.	$F(w) = \lambda_1^2(\beta_1 w + \beta_0) + \lambda_2^2(\kappa_1 w + \kappa_0) + \lambda_3^2(\zeta_1 w + \zeta_0)$ $K(w) = \lambda_1\big[\big(\frac{7(\beta_1\lambda_1^2 + \kappa_1\lambda_2^2 + \zeta_1\lambda_3^2) - 3(g_1\lambda_2 + h_1\lambda_3)}{3\lambda_1}\big)w + f_0\big] + \lambda_2(g_1 w + g_0) + \lambda_3(h_1 w + h_0)$ $R(w) = \big[\frac{2}{3}(\beta_1\lambda_1^2 + \kappa_1\lambda_2^2 + \zeta_1\lambda_3^2)\rho_1^2\big]w^2 + r_1 w$	$\mathbf{V}_2 = \text{Span}\{e^{-\frac{1}{3}\rho_1 z}, e^{-\frac{2}{3}\rho_1 z}\}$
4.	$F(w) = \lambda_1^2(\beta_1 w + \beta_0) + \lambda_2^2(\kappa_1 w + \kappa_0) + \lambda_3^2(\zeta_1 w + \zeta_0)$ $K(w) = \lambda_1 f_0 + \lambda_2 g_0 + \lambda_3 h_0$ $R(w) = 2(\beta_1\lambda_1^2 + \kappa_1\lambda_2^2 + \zeta_1\lambda_3^2)\rho_1 w^2 + r_1 w + r_0$	$\mathbf{V}_3 = \text{Span}\{1, sin(\sqrt{\rho_1} z), cos(\sqrt{\rho_1} z)\}$

Table 5: Different dimensional invariant subspaces for the cubic nonlinear differential operator $\boldsymbol{F}_T[w]$ given in (3.16).

Cases	Coefficients of the operator (3.16)	Invariant Subspaces
5.	$F(w) = \lambda_1^2(\beta_2 w^2 + \beta_1 w + \beta_0) + \lambda_2^2(\kappa_2 w^2 + \kappa_1 w + \kappa_0) + \lambda_3^2(\zeta_2 w^2 + \zeta_1 w + \zeta_0)$ $K(w) = \lambda_1\Big[\big(\frac{5(\beta_2\lambda_1^2+\kappa_2\lambda_2^2+\zeta_2\lambda_3^2)\rho_1-(g_1\lambda_2+h_1\lambda_3)}{\lambda_1}\big)w^2 + f_1 w + f_0\Big]$ $+\lambda_2(g_2 w^2 + g_1 w + g_0) + \lambda_3(h_2 w^2 + h_1 w + h_0)$ $R(w) = \big[2(\beta_2\lambda_1^2 + \kappa_2\lambda_2^2 + \zeta_2\lambda_3^2)\rho_1^2\big]w^3 + \big[-2(\beta_1\lambda_1^2 + \kappa_1\lambda_2^2 + \zeta_1\lambda_3^2)\rho_1^2$ $+(f_1\lambda_1 + g_1\lambda_2 + h_1\lambda_3)\rho_1\big]w^2 + r_1 w$ $F(w) = \lambda_1^2\Big(\big[\frac{r_3}{2\lambda_1^2\rho_1^2}\big]w^2 + \big[\frac{(\lambda_1 f_1+\lambda_2 g_1+\lambda_3 h_1)-r_2}{2\lambda_1^2\rho_1}\big]w + \beta_0\Big) + \lambda_2^2\kappa_0 + \lambda_3^2\zeta_0$ $K(w) = \lambda_1\Big[\big(\frac{5r_3}{2\lambda_1\rho_1}\big)w^2 + f_1 w + f_0\Big] + \lambda_2(g_1 w + g_0) + \lambda_3(h_1 w + h_0)$ $R(w) = r_3 w^3 + r_2 w^2 + r_1 w + r_0$	$\mathbf{V}_2 = \mathrm{Span}\{1, e^{-\rho_1 z}\}$
6.	$F(w) = \lambda_1^2(\beta_2 w^2 + \beta_1 w + \beta_0) + \lambda_2^2(\kappa_2 w^2 + \kappa_1 w + \kappa_0) + \lambda_3^2(\zeta_2 w^2 + \zeta_1 w + \zeta_0)$ $K(w) = \lambda_1(f_1 w + f_0) + \lambda_2(g_1 w + g_0) + \lambda_3(h_1 w + h_0)$ $R(w) = r_1 w + r_0$	$\mathbf{V}_2 = \mathrm{Span}\{1, z\}$

4 方程(1.6) 的精确解

本节将介绍如何利用表1–5 中列出的不变线性空间，构造给定的$(3+1)$ 维广义非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程 (1.6) 的不同类型精确解。

4.1 非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程的各种精确解

在本小节中，我们首先利用所得到的线性空间构造非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程（1.6）的精确解，所得到的线性空间将在下文中详细讨论。

例 1。 我们首先考虑 $(3+1)$维非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程(1.6)，其形式为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}} =&\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(-\frac{\lambda_2^2F_2(u)+\lambda_3^2F_3(u)}{\lambda_1^2}+\frac{\mu_1}{2\lambda_1\rho_0}u+\mu_3\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\\&+\sum_{r=2}^{3}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(F_r(u)\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)+\left(-\frac{\lambda_2K_2(u)+\lambda_3K_3(u)}{\lambda_1}+\mu_1u+\mu_2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\\&+\sum_{r=2}^{3}K_r(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)+\mu_0u,\alpha\in(0,2],\end{aligned}\tag{4.1}$$

连同适当的初始和边界条件 (1.7)-(1.9). 这里 $F_r(u)$ 和$K_r(u)$ $r=2,3$ 是 u和 $\mu_i\in\mathbb{R}$, $i=0,1,2,3$的任意函数. 对于这种情况，变换后的非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程 (3.2)如下所示:

$$\frac{\partial^{\alpha}w}{\partial t^{\alpha}}=\boldsymbol{F}_T[w]\equiv\lambda_1^2\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\mu_1}{2\lambda_1\rho_0}w+\mu_3\right)\frac{\partial w}{\partial z}\right]+\lambda_1\left(\mu_1w+\mu_2\right)\frac{\partial w}{\partial z}+\mu_0w,\alpha\in(0,2],\tag{4.2}$$

以及以下初始和边界条件:

$$w(z,0)=\xi(z),\qquad\alpha\in(0,1],\tag{4.3}$$

$$w(z,0)=\xi(z)\ \ \&\ \ \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=\eta(z),\quad\alpha\in(1,2],\tag{4.4}$$

and

$$w(z,t)\Big|_{z=0}=\begin{cases}\delta_1(t),if\alpha\in(0,1],\\ \delta_2(t),if\alpha\in(1,2],\end{cases}\quad\&\quad w(z,t)\Big|_{z=l}=\begin{cases}\delta_3(t),if\alpha\in(0,1],\\ \delta_4(t),if\alpha\in(1,2],\end{cases}\tag{4.5}$$

它保持一维线性空间 $\mathbf{V}_1=$*Span*$\{e^{-\rho_0z}\}$. 。注意，此情形列于表 *2* 的情形 *6* 中。因此，对于 $w=Ce^{-\rho_0z}\in\mathbf{V}_1$, ，我们得到

$$\boldsymbol{F}_T[Ce^{-\rho_0z}]=C\big(\rho_0^2\lambda_1^2\mu_3-\lambda_1\mu_2\rho_0+\mu_0\big)e^{-\rho_0z}\in\mathbf{V}_1.$$

那么，(4.2)存在如下精确解

$$w(z,t) = C(t)e^{-\rho_0 z}, \tag{4.6}$$

其中

$$\frac{d^\alpha C(t)}{dt^\alpha} = \gamma C(t), \gamma = \rho_0^2\lambda_1^2\mu_3 - \lambda_1\mu_2\rho_0 + \mu_0. \tag{4.7}$$

对于整数阶 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$，我们得到 (4.2) 的精确解为

$$w(z,t) = \begin{cases} A_0 e^{-\rho_0 z+\gamma t}, if\alpha = 1, \\ \big[A_0 cosh\big(\sqrt{\gamma}t\big) + \dfrac{A_1}{\sqrt{\gamma}} sinh\big(\sqrt{\gamma}t\big)\big]e^{-\rho_0 z}, if\alpha = 2. \end{cases} \tag{4.8}$$

接下来，我们解释如何推导(4.2) 的精确解，其中阶数任意为 $\alpha, \alpha \in (0, 2]$.。在此，我们知道 α 阶 ***Caputo*** 分数阶导数 *[52]* 的拉普拉斯变换如下:

$$\mathcal{L}\{\frac{d^\alpha \tau(t)}{dt^\alpha}; s\} = s^\alpha \mathcal{L}\{\tau(t); s\} - \sum_{k=0}^{q-1} s^{\alpha-k-1}\frac{d^k\tau(t)}{dt^k}\Big|_{t=0}, q-1 \le \alpha < q, q \in \mathbb{N}.$$

首先，令 $\alpha \in (0, 1]$. 因此，对(4.7)应用拉普拉斯变换和逆拉普拉斯变换，我们得到

$$C(t) = C(0)E_{\alpha,1}\big(\gamma t^\alpha\big), \tag{4.9}$$

其中$E_{\alpha_1,\alpha_2}\big(\xi\big)$ 是 2参数 ***Mittag-Leffler*** 函数 *[52],* 定义为 $E_{\alpha_1,\alpha_2}\big(\xi\big) = \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma \quad \xi^s$ (

$\alpha_1 s + \alpha_2) \mathcal{R}(\alpha_i) > 0, i = 1, 2$。

接下来，对于 $\alpha \in (1, 2]$, 对方程 (4.7) 应用拉普拉斯变换后，我们得到

$$\mathcal{L}\{C(t); s\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \gamma}C(0) + \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha - \gamma}C'(0). \tag{4.10}$$

对上述方程进行拉普拉斯逆变换，可得

$$C(t) = C(0)E_{\alpha,1}\big(\gamma t^\alpha\big) + C'(0)tE_{\alpha,2}\big(\gamma t^\alpha\big). \tag{4.11}$$

代入 ***ing*** (4.9) 和 (4.11) 代入 (4.6)，我们得到 (4.2) 的精确解，形式为

$$w(z,t) = \begin{cases} A_0 E_{\alpha,1}\big(\gamma t^\alpha\big)e^{-\rho_0 z}, \alpha \in (0, 1], \\ \big[A_0 E_{\alpha,1}\big(\gamma t^\alpha\big) + A_1 tE_{\alpha,2}\big(\gamma t^\alpha\big)\big]e^{-\rho_0 z}, \alpha \in (1, 2], \end{cases} \tag{4.12}$$

where $A_0 = C(0), A_1 = C'(0)$, *and* $\gamma = \rho_0^2\lambda_1^2\mu_3 - \lambda_1\mu_2\rho_0 + \mu_0$. *Since* $E_{\alpha,1}\big(0\big) = 1, \dfrac{d}{dt}[E_{\alpha,1}\big(\gamma t^\alpha\big)] = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\big(\gamma t^\alpha\big)$, $\dfrac{d}{dt}[tE_{\alpha,2}\big(\gamma t^\alpha\big)] = E_{\alpha,1}\big(\gamma t^\alpha\big)$ *and* $\dfrac{d}{dt}[t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}\big(\gamma t^\alpha\big)] =$

$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\gamma t^{\alpha}\right)$ 它们在 *[52]*中给出。此外，精确解(4.12)满足给定的初始和边界条件(4.3)-(4.5)以及

$$\begin{aligned}
&\xi(z) = A_0 e^{-\rho_0 z}, \qquad \eta(z) = A_1 e^{-\rho_0 z},\\
&\delta_1(t) = A_0 E_{\alpha,1}\left(\gamma t^{\alpha}\right), \quad \delta_2(t) = A_0 E_{\alpha,1}\left(\gamma t^{\alpha}\right) + A_1 t E_{\alpha,2}\left(\gamma t^{\alpha}\right),\\
&\delta_3(t) = A_0 e^{-\rho_0 l} E_{\alpha,1}\left(\gamma t^{\alpha}\right), \; and \; \delta_4(t) = \left[A_0 E_{\alpha,1}\left(\gamma t^{\alpha}\right) + A_1 t E_{\alpha,2}\left(\gamma t^{\alpha}\right)\right] e^{-\rho_0 l}.
\end{aligned}$$

此外，我们希望指出，所得到的整数阶解 (4.8) 与分数阶精确解 (4.12) 当 $\alpha = 1$ ***and*** $\alpha = 2$ 时分别重合。

此外，我们想指出，***Prakash*** 等人*[51]* 已经利用一维线性子空间$\mathbf{V}_1$ =***Span*** $\{e^{-(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)}\}$，推导出了方程 (4.1) 以及 $F_r(u) = c_{r1}u + c_{r0}$, $K_r(u) = l_{r1}u + l_{r0}$, $c_{ri}, l_{ri} \in \mathbb{R}, i = 0,1, r = 2,3$和 $\mu_0 = 0$ 的精确解，该线性子空间由不变子空间法的直接方法得到。所得到的解(4.12) 与 *[51]*中得到的解相似。然而，采用变量变换的不变子空间法易于用于求解非线性时间分数阶偏微分方程的精确解。

例2. 现在，我们考虑以下二次非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} =& \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(\frac{\beta_1}{\lambda_1^2}u + \beta_0\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] + \kappa_0\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \zeta_0\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\\
&+ \left(\frac{2\beta_1\rho_1}{\lambda_1}u + f_0\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + g_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + h_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right), \alpha \in (0,2],
\end{aligned} \tag{4.13}$$

以及相应的初始和边界条件 (1.7)-(1.9)。上述方程(4.13)转化为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{\alpha} w}{\partial t^{\alpha}} = \boldsymbol{F}_T[w] \equiv& \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\beta_1 w + \lambda_1^2\beta_0 + \lambda_2^2\kappa_0 + \lambda_3^2\zeta_0\right)\frac{\partial w}{\partial z}\right]\\
&+ \left(2\beta_1\rho_1 w + \lambda_1 f_0 + \lambda_2 g_0 + \lambda_3 h_0\right)\frac{\partial w}{\partial z}, \alpha \in (0,2],
\end{aligned} \tag{4.14}$$

以及给定的初始和边界条件(3.3)-(3.5)。

这里，微分算子$\boldsymbol{F}_T[w]$ 具有二维指数线性空间$\mathbf{V}_2$ =***Span***$\{1, e^{-\rho_1 z}\}$，该空间列于表***4***的情形***2***中。对于 $\alpha \in (0,2],$，我们得到方程(4.14)的精确解如下：

$$w(z,t) = \begin{cases} b_0 + a_0 E_{\alpha,1}(\gamma t^{\alpha}) e^{-\rho_1 z}, \; if \quad \alpha \in (0,1], \\ b_1 t + b_0 + C_1(t) e^{-\rho_1 z}, \; if \quad \alpha \in (1,2], \end{cases} \tag{4.15}$$

其中 $\gamma = \rho_1^2(\beta_0\lambda_1^2 + \kappa_0\lambda_2^2 + \zeta_0\lambda_3^2 - \beta_1 b_0) - \rho_1(f_0\lambda_1 + g_0\lambda_2 + h_0\lambda_3)$ 以及函数 $C_1(t)$满足以下分数阶常微分方程

$$\frac{d^{\alpha} C_1(t)}{dt^{\alpha}} = -\rho_1^2\beta_1(b_1 t + b_0)C_1(t) + \rho_1 C_1(t)\left[\rho_1(\lambda_1^2\beta_0 + \lambda_2^2\kappa_0 + \lambda_3^2\zeta_0) - (f_0\lambda_1 + g_0\lambda_2 + h_0\lambda_3)\right],$$

这在一般情况下可能无法求解。若选择 $b_1 = 0$，则得到 $C_1(t) = a_0 E_{\alpha,1}(\gamma_2 t^\alpha) + a_1 t E_{\alpha,2}(\gamma t^\alpha)$ 当 $\alpha \in (1, 2]$. 对于这种情况，我们得到 (4.14) 的精确解如下：

$$w(z,t) = b_0 + \left[a_0 E_{\alpha,1}(\gamma t^\alpha) + a_1 t E_{\alpha,2}(\gamma t^\alpha)\right] e^{-\rho_1 z}, if \alpha \in (1, 2].$$

注意 t 当 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$时，所得到的（4.14） 精确解如下：

$$w(z,t) = \begin{cases} b_0 + e^{\gamma t - \rho_1 z}, \ if \alpha = 1, \\ b_0 + \left[a_0 cosh(\sqrt{\gamma} t) + \frac{a_1}{\sqrt{\gamma}} sinh(\sqrt{\gamma} t)\right] e^{-\rho_1 z}, \ if \alpha = 2. \end{cases} \tag{4.16}$$

此外，我们注意到，分数阶精确解 (4.15) 与整数阶精确解 (4.16) 在 $\alpha = 1$且 $\alpha = 2$. 时重合。还可以观察到，所得解(4.15)满足给定的初始和边界条件 (3.3)-(3.5) 以及

$$\begin{aligned} &\xi(z) = b_0 + a_0 e^{-\rho_1 z}, \qquad \eta(z) = a_1 e^{-\rho_1 z}, \delta_1(t) = b_0 + a_0 E_{\alpha,1}(\gamma t^\alpha) \ \delta_2(t) \\ &= b_0 + a_0 E_{\alpha,1}(\gamma t^\alpha) + a_1 t E_{\alpha,2}(\gamma t^\alpha), \delta_3(t) = b_0 + a_0 e^{-\rho_1 l} E_{\alpha,1}(\gamma t^\alpha), \text{ and } \delta_4(t) \\ &= b_0 + \left[a_0 E_{\alpha,1}(\gamma t^\alpha) + a_1 t E_{\alpha,2}(\gamma t^\alpha)\right] e^{-\rho_1 l}. \end{aligned}$$

此外，我们注意到，利用由不变子空间法直接方法得到的 *4* 维线性空间 $\mathbf{V}_4 = Span\{e^{-2\rho_1\lambda_1 x_1}, e^{-(2\rho_1\lambda_1 x_1 + a_2 x_2)}, e^{-(2\rho_1\lambda_1 x_1 + a_3 x_3)}, e^{-(2\rho_1\lambda_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)}\}$，推导出了上述方程 (4.13)在初始条件下的 *[51],* 精确解。

例 3. 考虑如下形式的非线性时间分数阶对流扩散方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} =& \frac{\partial}{\partial x_1}\left[(\beta_1 u + \beta_0)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[(\kappa_1 u + \kappa_0)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3}\left[(\zeta_1 u + \zeta_0)\frac{\partial u}{\partial x_3}\right] + f_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + g_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + h_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right), \alpha \in (0, 2], \end{aligned} \tag{4.17}$$

以及适当的初始和边界条件 (1.7)-(1.9)。经过变换 (2.3)，上述方程 (4.17)转化为以下形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} \equiv \boldsymbol{F}_T[w] =& \frac{\partial}{\partial z}\left[\left((\lambda_1^2\beta_1 + \lambda_2^2\kappa_1 + \lambda_3^2\zeta_1)w + \lambda_1^2\beta_0 + \kappa_0\lambda_2^2 + \lambda_3^2\zeta_0\right)\frac{\partial w}{\partial z}\right] \\ &+ (\lambda_1 f_0 + \lambda_2 g_0 + \lambda_3 h_0)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right), \alpha \in (0, 2], \end{aligned} \tag{4.18}$$

以及以下初始和边界条件：

$$w(z,0) = \xi(z), \qquad \alpha \in (0, 1], \tag{4.19}$$

$$w(z,0) = \xi(z) \ \& \ \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \eta(z), \quad \alpha \in (1, 2], \tag{4.20}$$

and

$$w(z,t)\Big|_{z=0}=\begin{cases}\delta_1(t), if\alpha\in(0,1],\\ \delta_2(t), if\alpha\in(1,2],\end{cases}\quad\&\quad w(z,t)\Big|_{z=l}=\begin{cases}\delta_3(t), if\alpha\in(0,1],\\ \delta_4(t), if\alpha\in(1,2].\end{cases}\tag{4.21}$$

微分算子 $\boldsymbol{F}_T[w]$ 在(4.18) 容许一个*2*维线性空间 $\mathbf{V}_2$ =*Span*$\{1,z\}$，其列于表*4*的情形*1*中。对于整数值 $\alpha=1$ 和 $\alpha=2$，我们得到(4.18)的精确解如下，

$$w(z,t)=\begin{cases}b_0(\gamma_1b_0+\gamma_2)t+a_0+b_0z, if\alpha=1,\\ \frac{1}{12}t^4b_1^2\gamma_1+t^3(\frac{1}{3}b_1b_0\gamma_1+\frac{1}{6}b_1\gamma_2)\\ +\frac{1}{2}b_0(b_0\gamma_1+\gamma_2)t^2+a_1t+a_0+(b_1t+b_0)z, if\alpha=2,\end{cases}\tag{4.22}$$

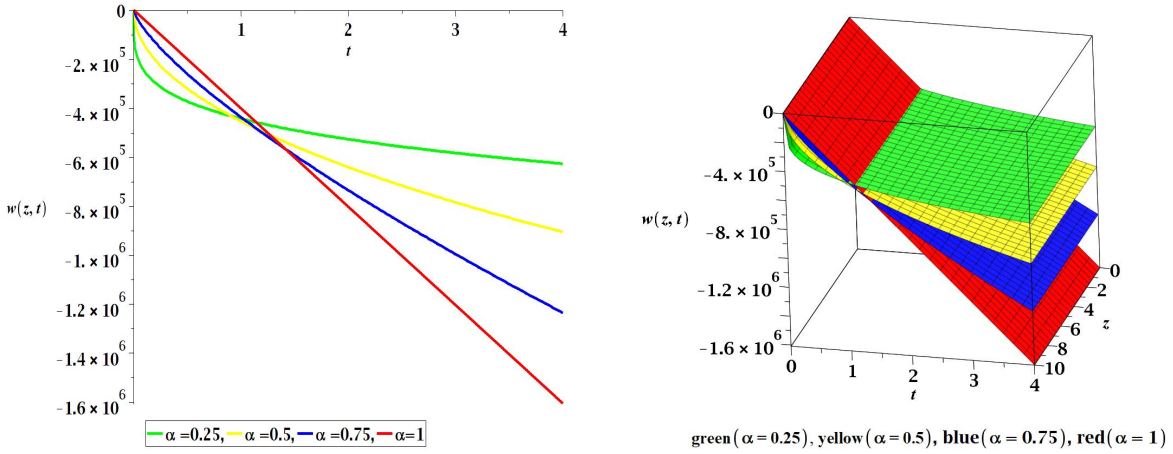
其中 $\gamma_1=\lambda_1^2\beta_1+\lambda_2^2\kappa_1+\lambda_3^2\zeta_1$ 和 $\gamma_2=\lambda_1f_0+\lambda_2g_0+\lambda_3h_0.$
对于 $\alpha\in$ $(0,2],$，方程 （4.18）的精确解如下所示，

$$w(z,t)=\begin{cases}b_0(\gamma_1b_0+\gamma_2)\dfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+a_0+b_0z,\ if\alpha\in(0,1],\\ \dfrac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}b_1^2\gamma_1+\dfrac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}(2b_1b_0\gamma_1+b_1\gamma_2)\\ +b_0(b_0\gamma_1+\gamma_2)\dfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+a_1t+a_0+(b_1t+b_0)z,\ if\alpha\in(1,2].\end{cases}\tag{4.23}$$

上述解 （4.23）在 $\alpha=1$ 和$\alpha=2$时与整数阶解 （4.22）一致。此外，我们注意到，精确解 （4.23）满足给定的初始和边界条件 （4.19）-（4.21），其中

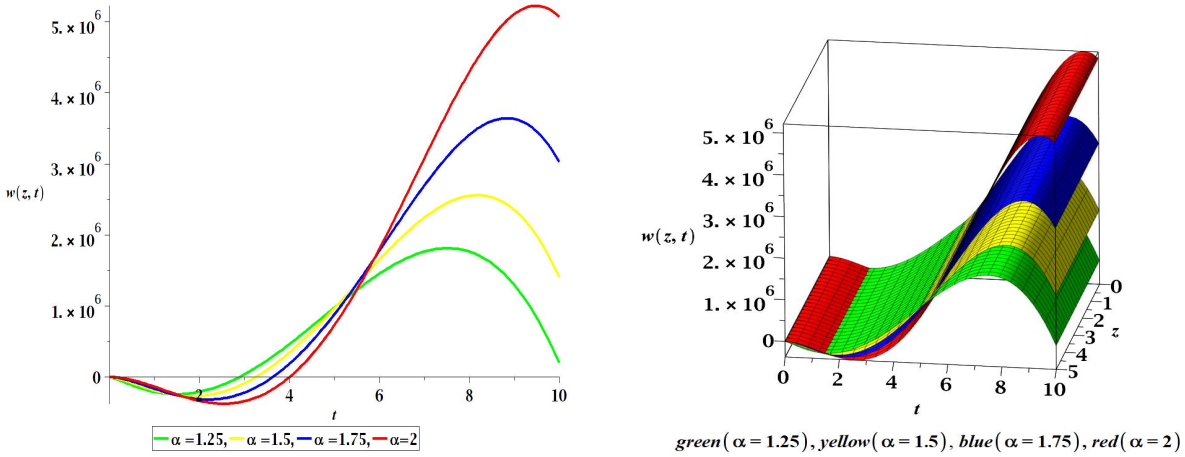
$$\begin{aligned}&\xi(z)=a_0+b_0z,\qquad \eta(z)=a_1+b_1z,\\ &\delta_1(t)=b_0(\gamma_1b_0+\gamma_2)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+a_0,\\ &\delta_2(t)=\frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}b_1^2\gamma_1+\frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}(2b_1b_0\gamma_1+b_1\gamma_2)+b_0(b_0\gamma_1+\gamma_2)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+a_1t+a_0,\\ &\delta_3(t)=b_0(\gamma_1b_0+\gamma_2)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+a_0+b_0l,\ and\\ &\delta_4(t)=\frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}b_1^2\gamma_1+\frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}(2b_1b_0\gamma_1+b_1\gamma_2)+b_0(b_0\gamma_1+\gamma_2)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\\ &\qquad+a_1t+a_0+(b_1t+b_0)l.\end{aligned}$$

此外，我们展示了任意阶精确解 (4.23) 在不同的α、 $\alpha\in(0,2]$,及参数值 $\gamma_1=\gamma_2=-10$、 $a_0=a_1=10$、 $b_0=200$、 $b_1=-100$下的二维（*2D*）和三维（*3D*）图形表示，见图*1*和图*2*。此外，我们注意到，(4.17) 的精确解是在*[51]* 利用四维不变子空间 $\mathbf{V}_4=$ *Span*$\{1,x_1,x_2,x_3\}$推导得到的，它是



(a) (b)

图1：对于 α、 $\alpha \in (0,1]$的不同取值，任意阶精确解（4.23）的（a）二维和（b）三维图形表示。



(a) (b)

图2：对于 α、 $\alpha \in (1,2]$的不同取值，任意阶精确解（4.23）的（a）二维和（b）三维图形表示。

通过不变子空间法的直接方法进行了讨论。由此可观察到，与变量变换技术相关的不变子空间法易于应用于求解高维非线性时间分数阶偏微分方程的精确解，因为变量变换可以将高维非线性时间分数阶偏微分方程降阶为$(1+1)$维非线性时间分数阶偏微分方程

注 1。图形描绘展示了所获得的精确解对于所研究的时间分数阶对流-反应-扩散方程的物理相关性。我们

主要观察到，所得精确解在 $\alpha \in (0,2]$, 随着 α 变化的不同范围内表现不同。此外，我们注意到，图*1*和图*2*分别展示了缓慢扩散过程和快速扩散过程。

例 4. 考虑以下变换后的非线性时间分数阶扩散-反应方程

$$\frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} = \boldsymbol{F}_T[w] \equiv \lambda_1^2 \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{1}{4}\frac{\mu_1}{\lambda_1^2\rho_1}w + \mu_5\right)\frac{\partial w}{\partial z}\right] + \frac{1}{2}\mu_1 w^2 + \mu_2 w + \mu_3, \alpha \in (0,2], \tag{4.24}$$

其中 $\mu_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, 5$，以及以下初始和边界条件:

$$w(z,0) = \xi(z), \qquad \alpha \in (0,1], \tag{4.25}$$

$$w(z,0) = \xi(z) \ \ \& \ \ \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \eta(z), \quad \alpha \in (1,2], \tag{4.26}$$

and

$$w(z,t)\Big|_{z=0} = \begin{cases} \delta_1(t), if \alpha \in (0,1], \\ \delta_2(t), if \alpha \in (1,2], \end{cases} \quad \& \quad w(z,t)\Big|_{z=l} = \begin{cases} \delta_3(t), if \alpha \in (0,1], \\ \delta_4(t), if \alpha \in (1,2]. \end{cases} \tag{4.27}$$

非线性微分算子 $\boldsymbol{F}_T[w]$ 保持三维三角函数线性空间 $\mathbf{V}_3 = Span\{1, sin(\sqrt{\rho_1}z)\ cos(\sqrt{\rho_1}z)\}$ 不变，如表 *2* 的情形 *8*所示，这有助于将给定方程 (4.24)化为

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha C_1(t)}{dt^\alpha} &= \frac{1}{4}\mu_1(C_1(t)^2 + C_2(t)^2 + C_3(t)^2) + \mu_2 C_1(t) + \mu_3, \\ \frac{d^\alpha C_r(t)}{dt^\alpha} &= -\lambda_1^2\mu_5\rho_1 C_r(t) + \frac{3}{4}\mu_1 C_1(t)C_r(t) + \mu_2 C_r(t), r = 2,3. \end{aligned}$$

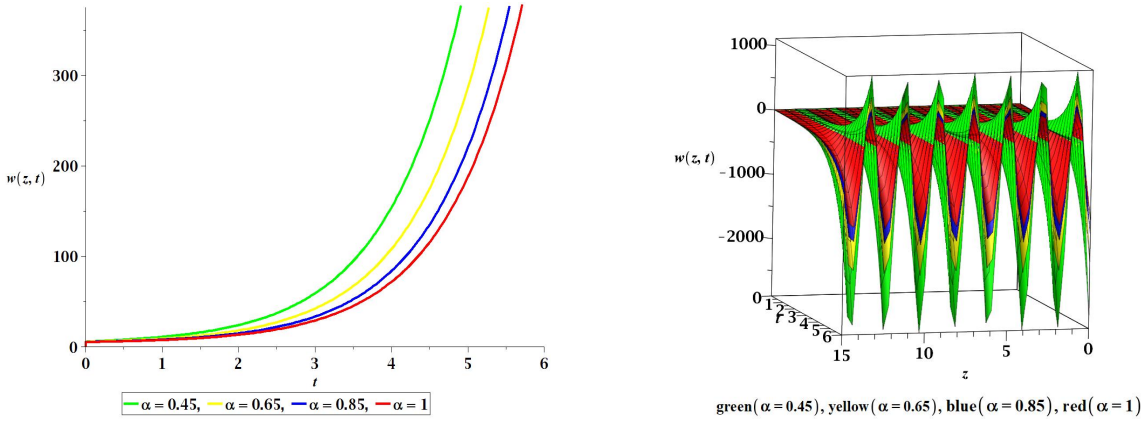
上述分数阶常微分方程组一般可能无法求解。若取 $\mu_1 = 0$，则可得到 (4.24)的精确解如下，

$$w(z,t) = \begin{cases} a_1 E_{\alpha,1}(\mu_2 t^\alpha) + \mu_3 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_2 t^\alpha) + E_{\alpha,1}(\gamma t^\alpha)\big[A_1 sin(\sqrt{\rho_1}z) \\ + A_2 cos(\sqrt{\rho_1}z)\big], if \alpha \in (0,1], \\ E_{\alpha,1}(\gamma t^\alpha)\big[A_1 sin(\sqrt{\rho_1}z) + A_2 cos(\sqrt{\rho_1}z)\big] \\ + t E_{\alpha,2}(\gamma t^\alpha)\big[A_3 sin(\sqrt{\rho_1}z) + A_4 cos(\sqrt{\rho_1}z)\big] \\ + \mu_3 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_2 t^\alpha) + a_1 E_{\alpha,1}(\mu_2 t^\alpha) + a_2 t E_{\alpha,2}(\mu_2 t^\alpha), if \alpha \in (1,2], \end{cases} \tag{4.28}$$

其中 $a_1, a_2, A_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,3,4$，以及 $\gamma = \mu_2 - \lambda_1^2\mu_5\rho_1$. 上述精确解 (4.28)满足给定的初始和边界条件 (4.25)-(4.27)，并且

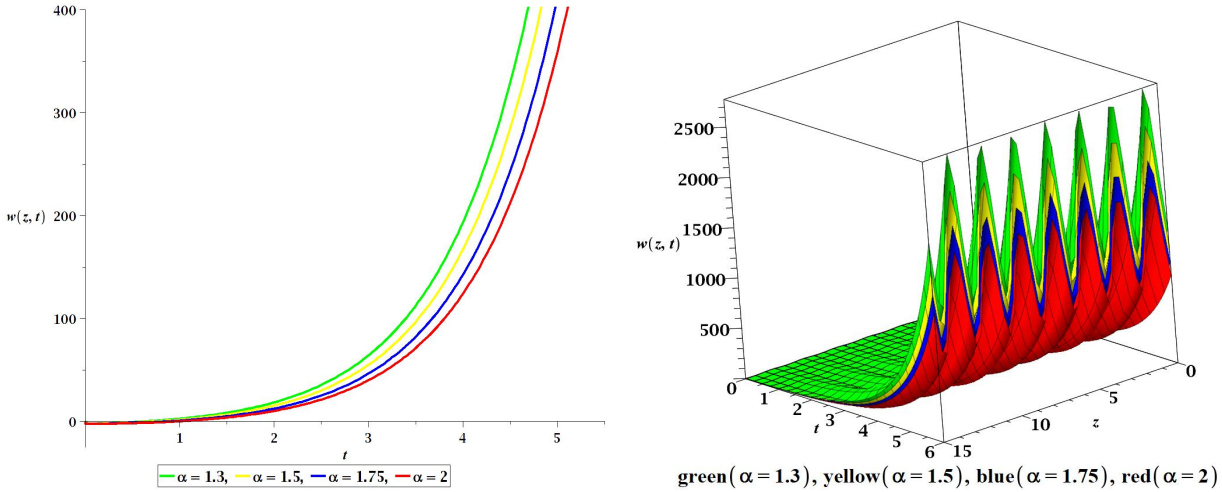
$\xi(z) = a_1 + A_1 sin(\sqrt{\rho_1}z) + A_2 cos(\sqrt{\rho_1}z), \eta(z) = a_2 + A_3 sin(\sqrt{\rho_1}z) + A_4 cos(\sqrt{\rho_1}z), \delta_1(t) = a_1 E_{\alpha,1}(\mu_2 t^\alpha) + \mu_3 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_2 t^\alpha) + E_{\alpha,1}(\gamma t^\alpha)A_2, \delta_2(t) = A_2 E_{\alpha,1}(\gamma t^\alpha) + t E_{\alpha,2}(\gamma t^\alpha) A_4 + \mu_3 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_2 t^\alpha) + a_1 E_{\alpha,1}(\mu_2 t^\alpha) + a_2 t E_{\alpha,2}(\mu_2 t^\alpha), \delta_3(t) = a_1 E_{\alpha,1}(\mu_2 t^\alpha) + \mu_3 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_2 t^\alpha) + A E_{\alpha,1}(\gamma t^\alpha)$, 和$\delta_4(t) = A E_{\alpha,1}(\gamma t^\alpha) + B t E_{\alpha,2}(\gamma t^\alpha) + \mu_3 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_2 t^\alpha) + a_1 E_{\alpha,1}(\mu_2 t^\alpha) + a_2 t E_{\alpha,2}(\mu_2 t^\alpha)$,

其中 $A = A_1\overline{sin}(\sqrt{\rho_1}l) + A_2\overline{cos}(\sqrt{\rho_1}l)$，以及 $B = A_3\overline{sin}(\sqrt{\rho_1}l) + A_4\overline{cos}(\sqrt{\rho_1}l)$。这里，我们还展示了不同 α、$\alpha \in (0, 2]$, 取值下任意阶精确解 (4.28) 的二维和三维图形表示，见图*3*和图*4*。



(a) (b)

图3: （a）和（b）分别为任意阶精确解（4.28）的二维和三维图形表示，其参数值为 $A_1 = 1, A_2 = -2, a_1 = 3, \gamma = \mu_2 = 1, \mu_3 = -4, \rho_1 = 9,$，对于 α、 $\alpha \in$ 的各种取值 $(0, 1]$.



(a) (b)

图4: （a）二维图形表示和（b）三维图形表示的任意阶精确解（4.28），其参数值为 $A_1 = A_3 = \gamma = \mu_2 = 1$, $A_2 = -2$, $A_4 = -1$, $a_2 = -3$, $a_1 = 3$, $\mu_3 = 4$, $\rho_1 = 9$, 对于 α、$\alpha \in$ 的各种取值（1, 2].

4.2 方程 (1.6 的若干线性情形的各类精确解)

Exam例 5. 考虑以下变换后的线性时间分数阶 *CDR* 方程 n

$$\frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} = \boldsymbol{F}_T[w] \equiv \lambda_1^2\mu_4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \lambda_1\mu_3\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu_1 w + \mu_2, \alpha \in (0,2], \tag{4.29}$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{R}$，并满足以下初始和边界条件:

$$w(z,0) = \xi(z), \qquad \alpha \in (0,1], \tag{4.30}$$

$$w(z,0) = \xi(z) \ \& \ \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \eta(z), \quad \alpha \in (1,2], \tag{4.31}$$

and

$$w(z,t)\Big|_{z=0} = \begin{cases} \delta_1(t), if\alpha \in (0,1], \\ \delta_2(t), if\alpha \in (1,2], \end{cases} \quad \& \quad w(z,t)\Big|_{z=l} = \begin{cases} \delta_3(t), if\alpha \in (0,1], \\ \delta_4(t), if\alpha \in (1,2]. \end{cases} \tag{4.32}$$

给定方程 (4.29) 保留$(n+1)$维指数不变子空间$\mathbf{V}_{n+1} = Span\{1, e^{-\rho_1 z}, \ldots, e^{-\rho_n z}\}$. 对于 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$，给定方程 (4.29)具有以下精确解，

$$w(z,t) = \begin{cases} a_1 e^{\mu_1 t} + \mu_2(e^{\mu_1 t} - 1) + \sum\limits_{s=1}^{n} A_s e^{\gamma_s t - \rho_s z}, \ if\alpha = 1, \\ a_1 cosh(\sqrt{\mu_1}t) + \frac{a_2}{\sqrt{\mu_1}} sinh(\sqrt{\mu_1}t) + \frac{\mu_2}{\mu_1} cosh(\sqrt{\mu_1}t) \\ + \sum\limits_{s=1}^{n} \Big(A_s cosh(\sqrt{\gamma_s}t) + \frac{B_s}{\sqrt{\gamma_s}} sinh(\sqrt{\gamma_s}t)\Big) e^{-\rho_s z}, \ if\alpha = 2, \end{cases} \tag{4.33}$$

其中 $a_1, a_2, A_s, B_s \in \mathbb{R}, s = 1, 2 \ldots, n$，以及 $\gamma_s = \lambda_1^2\rho_s^2\mu_4 - \lambda_1\mu_3\rho_s + \mu_1, s = 1, 2, \ldots, n, n \in \mathbb{N}$. 因此，我们得到方程 (4.29)的精确解如下，

$$w(z,t) = \begin{cases} a_1 E_{\alpha,1}(\mu_1 t^\alpha) + \mu_2 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_1 t^\alpha) + \sum\limits_{s=1}^{n} A_s E_{\alpha,1}(\gamma_s t^\alpha) e^{-\rho_s z}, if\alpha \in (0,1], \\ \sum\limits_{s=1}^{n} \big(A_s E_{\alpha,1}(\gamma_s t^\alpha) + B_s t E_{\alpha,2}(\gamma_s t^\alpha)\big) e^{-\rho_s z} + \mu_2 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_1 t^\alpha) \\ + a_1 E_{\alpha,1}(\mu_1 t^\alpha) + a_2 t E_{\alpha,2}(\mu_1 t^\alpha), if\alpha \in (1,2]. \end{cases} \tag{4.34}$$

这里还应注意到，所得到的精确解(4.34) 满足给定的初始和边界条件 (4.30)-(4.32)，使得

$$\xi(z) = a_1 + \sum_{s=1}^{n} A_s e^{-\rho_s z}, \qquad \eta(z) = a_2 + \sum_{s=1}^{n} B_s e^{-\rho_s z},$$

$$\delta_1(t) = a_1E_{\alpha,1}(\mu_1t^\alpha) + \mu_2t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_1t^\alpha) + \sum_{s=1}^{n} A_sE_{\alpha,1}(\gamma_st^\alpha),$$

$$\delta_2(t) = a_1E_{\alpha,1}(\mu_1t^\alpha) + a_2tE_{\alpha,2}(\mu_1t^\alpha) + \mu_2t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_1t^\alpha) + \sum_{s=1}^{n} \big(A_sE_{\alpha,1}(\gamma_st^\alpha) + B_stE_{\alpha,2}(\gamma_st^\alpha)\big),$$

$$\delta_3(t) = a_1E_{\alpha,1}(\mu_1t^\alpha) + \mu_2t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_1t^\alpha) + \sum_{s=1}^{n} \hat{A}_sE_{\alpha,1}(\gamma_st^\alpha),$$

$$\delta_4(t) = a_1E_{\alpha,1}(\mu_1t^\alpha) + a_2tE_{\alpha,2}(\mu_1t^\alpha) + \mu_2t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_1t^\alpha) + \sum_{s=1}^{n} \big(\hat{A}_sE_{\alpha,1}(\gamma_st^\alpha) + \hat{B}_stE_{\alpha,2}(\gamma_st^\alpha)\big),$$

其中 $\hat{} \ A_s = A_se^{-\rho_sl}$，且$\hat{} \ B_s = B_se^{-\rho_sl}, s = 1、2、\ldots、 n.$ 此外，还可以观察到，非整数阶解 (4.34) 与整数阶解 (4.33)一致，如果 $\alpha = 1$ 且 $\alpha = 2.$

Exam例 6。 考虑以下线性时间分数阶扩散-反应方程。 n

$$\frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} = \lambda_1^2\mu_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \mu_1 w + \mu_2, \alpha \in (0, 2], \tag{4.35}$$

其中 μ_1、 μ_2、 $\mu_3 \in \mathbb{R}$，以及给定的初始和边界条件 (3.3)-(3.5)。给定方程 (4.35) 存在一个$(2n + 1)$维双曲线性空间。

$$\mathbf{V}_{2n+1} = Span\{1, sinh(\rho_1z), cosh(\rho_1z), \ldots, sinh(\rho_nz), cosh(\rho_nz)\}.$$

For $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$，给定方程 (4.35) 得到如下精确解 $s,$

$$w(z,t) = \begin{cases} a_1e^{\mu_1t} + \mu_2(e^{\mu_1t} - 1) + \sum_{s=1}^{n} e^{\gamma_st}\big[A_{2s-1}sinh(\rho_sz) + A_{2s}cosh(\rho_sz)\big], if\alpha = 1, \\ a_1cosh(\sqrt{\mu_1}t) + \frac{a_2}{\sqrt{\mu_1}}sinh(\sqrt{\mu_1}t) + \frac{\mu_2}{\mu_1}cosh(\sqrt{\mu_1}t) \\ + \sum_{s=1}^{n}\big[A_{2s-1}sinh(\rho_sz) + A_{2s}cosh(\rho_sz)\big]cosh(\sqrt{\gamma_s}t) \\ + \frac{1}{\sqrt{\gamma_s}}sinh(\sqrt{\gamma_s}t)\big[B_{2s-1}sinh(\rho_sz) + B_{2s}cosh(\rho_sz)\big], if\alpha = 2, \end{cases} \tag{4.36}$$

其中 a_1、 a_2、 A_s、 $B_s \in \mathbb{R}$、 $s = 1、2、\ldots、 2n$ 以及 $\gamma_s = \lambda_1^2\mu_3\rho_s^2 + \mu_1$、$s = 1、2、\ldots、 n$。因此，我们以如下形式得到方程(4.35) 的精确解

$$w(z,t) = \begin{cases} \sum_{s=1}^{n} E_{\alpha,1}(\gamma_st^\alpha)\big[A_{2s-1}sinh(\rho_sz) + A_{2s}cosh(\rho_sz)\big] \\ + a_1E_{\alpha,1}(\mu_1t^\alpha) + \mu_2t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_1t^\alpha), if\alpha \in (0, 1], \\ \sum_{s=1}^{n} E_{\alpha,1}(\gamma_st^\alpha)\big[A_{2s-1}sinh(\rho_sz) + A_{2s}cosh(\rho_sz)\big] + a_1E_{\alpha,1}(\mu_1t^\alpha) \\ + a_2tE_{\alpha,2}(\mu_1t^\alpha) + \sum_{s=1}^{n} tE_{\alpha,2}(\gamma_st^\alpha)\big[B_{2s-1}sinh(\rho_sz) + B_{2s}cosh(\rho_sz)\big] \\ + \mu_2t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_1t^\alpha), \ if\alpha \in (1, 2]. \end{cases} \tag{4.37}$$

上述解(4.37) 满足给定的初始和边界条件(3.3)-(3.5)以及

$$\xi(z) = a_1 + \sum_{s=1}^{n} \big[A_{2s-1} sinh(\rho_s z) + A_{2s} cosh(\rho_s z)\big],$$
$$\eta(z) = a_2 + \sum_{s=1}^{n} \big[B_{2s-1} sinh(\rho_s z) + B_{2s} cosh(\rho_s z)\big],$$
$$\delta_1(t) = a_1 E_{\alpha,1}(\mu_1 t^\alpha) + \mu_2 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_1 t^\alpha) + \sum_{s=1}^{n} E_{\alpha,1}(\gamma_s t^\alpha) A_{2s},$$
$$\delta_2(t) = a_1 E_{\alpha,1}(\mu_1 t^\alpha) + a_2 t E_{\alpha,2}(\mu_1 t^\alpha) + \mu_2 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_1 t^\alpha) + \sum_{s=1}^{n} \left[E_{\alpha,1}(\gamma_s t^\alpha) A_{2s} + t E_{\alpha,2}(\gamma_s t^\alpha) B_{2s}\right],$$

$$\delta_3(t) = a_1 E_{\alpha,1}(\mu_1 t^\alpha) + \mu_2 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_1 t^\alpha) + \sum_{s=1}^{n} E_{\alpha,1}(\gamma_s t^\alpha) \hat{A}, \ and$$
$$\delta_4(t) = a_1 E_{\alpha,1}(\mu_1 t^\alpha) + a_2 t E_{\alpha,2}(\mu_1 t^\alpha) + \mu_2 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_1 t^\alpha) + \sum_{s=1}^{n} \left[E_{\alpha,1}(\gamma_s t^\alpha) \hat{A} + t E_{\alpha,2}(\gamma_s t^\alpha) \hat{B}\right],$$

其中 $\hat{A} = \sum_{s=1}^{n} \big[A_{2s-1} sinh(\rho_s l) + A_{2s} cosh(\rho_s l)\big]$和 $\hat{B} = \sum_{s=1}^{n} \big[B_{2s-1} sinh(\rho_s l) + B_{2s} cosh(\rho_s l)\big]_{s=1}$需要注意的是，精确解 (4.37) 与整数阶解(4.36) 在 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$. 时重合

Exam例 7. 考虑以下线性时间分数阶扩散-反应方程

$$\frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} = -\mu_2 \lambda_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \mu_1 w, \quad \alpha \in (0, 2], \tag{4.38}$$

其中 $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$，以及给定的初始和边界条件 (3.3)-(3.5)。给定的方程 (4.38) 容许 $(3n+1)$-维三角和指数不变子空间

$$\mathbf{V}_{3n+1} = Span\{1, e^{\varrho_1 z}, \ldots, e^{\varrho_n z}, sin(\sqrt{\rho_1} z), cos(\sqrt{\rho_1} z), \ldots, sin(\sqrt{\rho_n} z), cos(\sqrt{\rho_n} z)\}.$$

因此，对于 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$，所得到的(4.38) 精确解如下，

$$w(z,t) = \begin{cases} a_1 e^{\mu_1 t} + \sum_{s=1}^{n} B_s e^{\beta_s t - \varrho_s z} + \sum_{s=1}^{n} e^{\gamma_s t} \big[A_{2s-1} sin(\sqrt{\rho_s} z) + A_{2s} cos(\sqrt{\rho_s} z)\big], \ if \alpha = 1, \\ a_1 cosh(\sqrt{\mu_1} t) + a_2 \dfrac{sinh(\sqrt{\mu_1} t)}{\sqrt{\mu_1}} + \sum_{s=1}^{n} cosh(\sqrt{\gamma_s} t) \big[A_{2s-1} sin(\sqrt{\rho_s} z) \\ + A_{2s} 3cos(\sqrt{\rho_s} z)\big] + \sum_{s=1}^{n} \dfrac{sinh(\sqrt{\gamma_s} t)}{\sqrt{\gamma_s}}) \big[M_{2s-1} sin(\sqrt{\rho_s} z) \\ + M_{2s} cos(\sqrt{\rho_s} z)\big] + \sum_{s=1}^{n} \big[B_s cosh(\sqrt{\beta_s} t) + N_s \dfrac{sinh(\sqrt{\beta_s} t)}{\sqrt{\beta_s}})\big] e^{\varrho_s z}, if \alpha = 2, \end{cases} \tag{4.39}$$

其中 a_1、a_2、A_s、B_s、M_s、$N_s \in \mathbb{R}$ 和 $\gamma_s = \lambda_1^2\mu_2\rho_s + \mu_1$、$s = 1$、2、...、$n$.现在，对于 $\alpha \in (0,2]$, 我们得到(4.38) 的精确解如下:

$$w(z,t) = \begin{cases} a_1E_{\alpha,1}(\mu_1t^\alpha) + \sum\limits_{s=1}^{n} B_sE_{\alpha,1}(\beta_st^\alpha)e^{\varrho_sz} + \sum\limits_{s=1}^{n} E_{\alpha,1}(\gamma_st^\alpha)\big[A_{2s-1}sin(\sqrt{\rho_s}z) \\ +A_{2s}cos(\sqrt{\rho_s}z)\big], if\alpha \in (0,1], \\ a_1E_{\alpha,1}(\mu_1t^\alpha) + a_2tE_{\alpha,2}(\mu_1t^\alpha) + \sum\limits_{s=1}^{n}\big[B_sE_{\alpha,1}(\beta_st^\alpha) + N_stE_{\alpha,2}(\beta_st^\alpha)\big]e^{\varrho_sz} \\ + \sum\limits_{s=1}^{n} E_{\alpha,1}(\gamma_st^\alpha)\big[A_{2s-1}sin(\sqrt{\rho_s}z) + A_{2s}3cos(\sqrt{\rho_s}z)\big] \\ + \sum\limits_{s=1}^{n}\big[M_{2s-1}sin(\sqrt{\rho_s}z) + M_{2s}cos(\sqrt{\rho_s}z)\big]tE_{\alpha,2}(\gamma_st^\alpha), if\alpha \in (1,2]. \end{cases} \tag{4.40}$$

所得的精确解（4.40）满足给定的初始和边界条件（3.3）-（3.5）以及

$$\xi(z) = a_1 + \sum_{s=1}^{n}\big(B_se^{\varrho_sz} + A_{2s-1}sin(\sqrt{\rho_s}z) + A_{2s}cos(\sqrt{\rho_s}z)\big),$$

$$\eta(z) = a_2 + \sum_{s=1}^{n}\big(N_se^{\varrho_sz} + M_{2s-1}sin(\sqrt{\rho_s}z) + M_{2s}cos(\sqrt{\rho_s}z)\big),$$

$$\delta_1(t) = a_1E_{\alpha,1}(\mu_1t^\alpha) + \sum_{s=1}^{n}\big[A_{2s}E_{\alpha,1}(\gamma_st^\alpha) + B_sE_{\alpha,1}(\beta_st^\alpha)\big],$$

$$\delta_2(t) = a_1E_{\alpha,1}(\mu_1t^\alpha) + a_2tE_{\alpha,2}(\mu_1t^\alpha) + \sum_{s=1}^{n}\big[A_{2s}E_{\alpha,1}(\gamma_st^\alpha) + B_sE_{\alpha,1}(\beta_st^\alpha)\big] + \sum_{s=1}^{n}\big[M_{2s}tE_{\alpha,2}(\gamma_st^\alpha) + N_stE_{\alpha,2}(\beta_st^\alpha)\big],$$

$$\delta_3(t) = a_1E_{\alpha,1}(\mu_1t^\alpha) + \sum_{s=1}^{n} B_sE_{\alpha,1}(\beta_st^\alpha) + A\sum_{s=1}^{n} E_{\alpha,1}(\gamma_st^\alpha),$$

$$\delta_4(t) = a_1E_{\alpha,1}(\mu_1t^\alpha) + a_2tE_{\alpha,2}(\mu_1t^\alpha) + B\sum_{s=1}^{n} B_sE_{\alpha,1}(\beta_st^\alpha) + A_1\sum_{s=1}^{n} E_{\alpha,1}(\gamma_st^\alpha) + B\sum_{s=1}^{n} N_stE_{\alpha,2}(\beta_st^\alpha) + A_2\sum_{s=1}^{n} tE_{\alpha,2}(\gamma_st^\alpha),$$

其中 $B = \sum_{s=1}^{n} e^{\varrho_sl}$、$A = \sum_{s=1}^{n} A_{2s}$、$A_1 = \sum_{s=1}^{n}\big[A_{2s-1}sin(\sqrt{\rho_s}l) + A_{2s}cos(\sqrt{\rho_s}l)\big]$, 以及 $A_2 = \sum_{s=1}^{n}\big[M_{2s-1}sin(\sqrt{\rho_s}l) + M_{2s}cos(\sqrt{\rho_s}l)\big]$.

例 8. 最后，我们考虑如下形式的线性时间分数阶扩散-对流方程

$$\frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} = \lambda_1^2\mu_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \lambda_1\mu_1\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right), \alpha \in (0,2], \tag{4.41}$$

其中 μ_1、 $\mu_2 \in \mathbb{R}$ 满足给定的初始和边界条件 (3.3)-(3.5)。上述方程 (4.41) 保持线性空间 $\mathbf{V}_n = Span\{1, z, z^2, z^3, \ldots, z^{n-1}\} Let \ n = 5$。方程 (4.41) 的整数阶解如下:

$$
w(z,t) = \begin{cases}
\sum\limits_{r=1}^{5} A_r z^{5-r} + t(\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_3 z + \gamma_6) + \dfrac{t^2}{2}(\gamma_2 z^2 + \gamma_4 z + \gamma_7) \\
+\dfrac{t^3}{6}(\gamma_5 z + \gamma_8) + \lambda_1\mu_1\gamma_5\dfrac{t^4}{24}, if\alpha = 1, \\
\sum\limits_{r=1}^{5}(A_r + B_r t) z^{5-r} + \dfrac{t^2}{2!}(\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_3 z + \gamma_6) \\
+\dfrac{t^3}{3!}(\beta_0 z^3 + \beta_1 z^2 + \beta_3 z + \beta_6) + \dfrac{t^4}{4!}(\gamma_2 z^2 + \gamma_4 z + \gamma_7) + \dfrac{t^5}{5!}(\beta_2 z^2 \\
+\beta_4 z + \beta_7) + \dfrac{t^6}{6!}(\gamma_5 z + \gamma_8) + \dfrac{t^7}{7!}(\beta_5 z + \beta_8) + \lambda_1\mu_1\gamma_5\dfrac{t^8}{8!} \\
+\lambda_1\mu_1\beta_5\dfrac{t^9}{9!}, if\alpha = 2,
\end{cases} \tag{4.42}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\gamma_8 = 2\lambda_1^2\mu_2\gamma_2 + \lambda_1\mu_1\gamma_4, && \beta_8 = 2\lambda_1^2\mu_2\beta_2 + \lambda_1\mu_1\beta_4, \\
&\gamma_7 = 2\lambda_1^2\mu_2\gamma_1 + \lambda_1\mu_1\gamma_3, && \beta_7 = 2\lambda_1^2\mu_2\beta_1 + \lambda_1\mu_1\beta_3, \\
&\gamma_6 = 2\lambda_1^2\mu_2 A_3 + \lambda_1\mu_1 A_4 + \mu_2, && \beta_6 = 2\lambda_1^2\mu_2 B_3 + \lambda_1\mu_1 B_4, \\
&\gamma_5 = 2\lambda_1\mu_1\gamma_2, && \beta_5 = 2\lambda_1\mu_1\beta_2, \\
&\gamma_4 = 24\lambda_1^3\mu_2\mu_1 A_1 + 2\lambda_1\mu_1\gamma_1, && \beta_4 = 24\lambda_1^3\mu_2\mu_1 B_1 + 2\lambda_1\mu_1\beta_1, \\
&\gamma_3 = 6\lambda_1^2\mu_2 A_2 + 2\lambda_1\mu_1 A_3, && \beta_3 = 6\lambda_1^2\mu_2 B_2 + 2\lambda_1\mu_1 B_3, \\
&\gamma_2 = 12\lambda_1^2\mu_1^2 A_1, && \beta_2 = 12\lambda_1^2\mu_1^2 B_1, \\
&\gamma_1 = 12\lambda_1^2\mu_2 A_1 + 3\lambda_1\mu_1 A_2, && \beta_1 = 12\lambda_1^2\mu_2 B_1 + 3\lambda_1\mu_1 B_2, \\
&\gamma_0 = 4\lambda_1\mu_1 A_1, && \beta_0 = 4\lambda_1\mu_1 B_1,
\end{aligned}
$$

以及 $A_r, B_r \in \mathbb{R}, r = 1, 2, \ldots, 5.$

对于 $\alpha \in (0, 2]$, 所得到的(4.41) 的精确解形式为

$$
\begin{aligned}
w(z,t) = &\sum_{r=1}^{5} A_r z^{5-r} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_3 z + \gamma_6) \\
&+ \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}(\gamma_2 z^2 + \gamma_4 z + \gamma_7) + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}(\gamma_5 z + \gamma_8) \\
&+ \lambda_1\mu_1\gamma_5\frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)}, if\alpha \in (0, 1],
\end{aligned} \tag{4.43}
$$

$$
\begin{aligned}
w(z,t) =& \sum_{r=1}^{5}(A_r + B_r t)z^{5-r} + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(\gamma_0 z^3 + \gamma_1 z^2 + \gamma_3 z + \gamma_6) \\
&+ \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}(\beta_0 z^3 + \beta_1 z^2 + \beta_3 z + \beta_6) + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}(\gamma_2 z^2 + \gamma_4 z + \gamma_7) \\
&+ \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)}(\beta_2 z^2 + \beta_4 z + \beta_7) + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}(\gamma_5 z + \gamma_8) \\
&+ \frac{t^{3\alpha+1}}{\Gamma(3\alpha+2)}(\beta_5 z + \beta_8) + \lambda_1\mu_1\gamma_5\frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} \\
&+ \lambda_1\mu_1\beta_5\frac{t^{4\alpha+1}}{\Gamma(4\alpha+2)}, if \alpha \in (1,2].
\end{aligned} \tag{4.44}
$$

上述分数阶精确解 (4.44)-(4.44) 满足给定的初始和边界条件 (3.3)-(3.5)以及

$$
\begin{aligned}
&\xi(z) = \sum_{r=1}^{5} A_r z^{5-r}, \qquad \eta(z) = \sum_{r=1}^{5} B_r z^{5-r}, \\
&\delta_1(t) = A_5 + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\gamma_6 + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\gamma_7 + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}\gamma_8 + \lambda_1\mu_1\gamma_5\frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)}, \\
&\delta_2(t) = A_5 + B_5 t + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\gamma_6 + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}\beta_6 + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\gamma_7 + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)}\beta_7 \\
&\qquad + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}\gamma_8 + \frac{t^{3\alpha+1}}{\Gamma(3\alpha+2)}\beta_8 + \lambda_1\mu_1\gamma_5\frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} + \lambda_1\mu_1\beta_5\frac{t^{4\alpha+1}}{\Gamma(4\alpha+2)}, \\
&\delta_3(t) = a_1 + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}a_2 + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}a_3 + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}a_4 + \lambda_1\mu_1\gamma_5\frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)}, \\
&\delta_4(t) = a_1 + b_1 t + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}a_2 + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}b_2 + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}a_3 + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)}b_3 \\
&\qquad + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}a_4 + \frac{t^{3\alpha+1}}{\Gamma(3\alpha+2)}b_4 + \lambda_1\mu_1\gamma_5\frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} + \lambda_1\mu_1\beta_5\frac{t^{4\alpha+1}}{\Gamma(4\alpha+2)},
\end{aligned}
$$

^{5} ^{5}其中 $a_1 = \sum A_r l^{5-r}$、 $b_1 = \sum B_r l^{5-r}$、 $a_2 = \gamma_0 l^3 + \gamma_1 l^2 + \gamma_3 l + \gamma_6$、 $b_2 = \beta_0 l^3 + \beta_1 l^2 + \beta_3 l + \beta_6$、 $r=1$ $r=1$$a_3 = \gamma_2 l^2 + \gamma_4 l + \gamma_7$、 $b_3 = \beta_2 l^2 + \beta_4 l + \beta_7$、 $a_4 = \gamma_5 l + \gamma_8$ 和 $b_4 = \beta_5 l + \beta_8$。此外，我们注意到，当 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 2$ 时，分数阶精确解 (4.44)-(4.44)与整数阶解 (4.42)一致。

5 与变量变换相关的不变子空间法向涉及多个线性时滞的$(k+1)$维非线性时间分数阶偏微分方程的扩展

本节介绍如何将结合变量变换的不变子空间法推广到具有多个线性时滞的 $(k+1)$ 维非线性时间分数阶偏微分方程。

5.1 与变量变换相关的$(k+1)$维非线性时间分数阶偏微分方程中涉及多个线性时滞的不变子空间的估计

考虑如下带有多个线性时滞的广义（$k+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}}=\tilde{\mathbf{F}}[u, \tilde{u_i}] \equiv \boldsymbol{F}[u]+\sum_{i=1}^{N} \kappa_i \tilde{u_i}, \ \alpha>0, \ t>0, \\ &u(x_1, \ldots, x_k, t)=\nu(x_1, \ldots, x_k, t) \quad \text{if } t \in[-\hat{\tau}, 0], \end{aligned} \tag{5.1}$$

其中 $\kappa_i>0, i=1, \ldots, N$, $N \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{F}[u]$ 如(2.2)所示， $u=u(x_1, \ldots, x_k, t)$ ， $\tilde{u_i}=u(x_1, \ldots, x_k, t-\tau_i)$ $\tau_i>0$ 以及 $\hat{}\tau=max\{\tau_i: \ i=1, \ldots, N\}$， $x_i \in \mathbb{R}, i=1, \ldots, k$. 这里，与该变换相关的不变子空间法的方法论与第 2 节前面所讨论的相同。使用拟设(2.3)，微分$\tilde{}$算子 $\mathbf{F}[u, \tilde{u_i}]$被变换为

$$\tilde{\boldsymbol{F}}_T[w, \hat{w_i}]=\boldsymbol{F}_T\left(z, w, w_z^{(1)}, \ldots, w_z^{(m)}\right)+\sum_{i=1}^{N} \kappa_i \hat{w_i}, w_z^{(j)}=\frac{\partial^j w}{\partial z^j}, \tag{5.2}$$

其中 $\hat{}w_i=w(z, t-\tau_i)$ $\tau_i>0, \hat{}\tau=max\{\tau_i: \ i=1,2,..,N\}, j=1,2, \ldots, m.$ 因此，式（2.7）中给出的线性空间$\mathbf{V}_n(n<\infty)$是非线性微分$\tilde{}$ $\tilde{}$算子$\mathbf{F}_T[w, \hat{} w_i]$ 在式（5.2）中的不变子空间，当$\mathbf{F}_T[\mathbf{V}_n] \subseteq \mathbf{V}_n$. 因此，当 $w=\sum C_s \phi_s(z)$,$_{s=1}$

$$\tilde{\mathbf{F}}_T\left[\sum_{s=1}^{n} C_s \phi_s(z), \sum_{s=1}^{n} \tilde{C}_s \phi_s(z)\right]=\sum_{s=1}^{n} \Omega_s(C_1, C_2, \ldots, C_n) \phi_s(z)+\sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{n} \kappa_i \tilde{C}_s \phi_s(z),$$

其中 $\tilde{C_s}, C_s \in \mathbb{R}$ 和 Ω_s 表示相对于基组 $\left\{\phi_s\Big(\sum_{r=1}^{k} \lambda_r x_r\Big) \Big| s=1,2, \ldots, n\right\}$. 的系数。我们想指出，式 (2.7) 中给出的线性空间 $\mathbf{V}_n$ 在非线性常微分算子 $\mathbf{F}_T[w, \hat{} w_i]$ 作用下保持不变，当且仅当

˜非线性偏微分算子 $\mathbf{F}[u,\tilde{u}_i]$ 在变量变换 $z=\sum\lambda_r x_r$ 的作用下保持式 (2.7) 中给出的线性空间 $\mathbf{V}_{nk}$不变，反之亦然。$_{r=1}$

接下来，我们将详细研究如何利用与变量变换 $z=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3$ 相关的不变子空间法，求解时滞（$3+1$）维广义非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程的初边值问题的精确解。

5.2 与变量变换相关的时滞 $(3+1)$维广义非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程的不变子空间的估计

考虑如下形式的带有多个线性时滞的（3+1）维广义非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程,

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}=\tilde{\mathbf{F}}[u,\tilde{u}_i]\equiv\sum_{r=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(F_r(u)\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)+\sum_{r=1}^{3}K_r(u)\frac{\partial u}{\partial x_r}+R(u)+\sum_{i=1}^{N}\kappa_i\tilde{u}_i,\alpha\in(0,2],\tag{5.3}$$
$$u(x_1,x_2,x_3,t)=\nu(x_1,x_2,x_3,t)\quad\text{if } t\in[-\hat{\tau},0],\hat{\tau}=max\{\tau_i:i=1,2,..,N\},$$

其中 $F_r(u)$ $K_r(u)$ $R(u)$ 和 $\tilde{u}_i=u(x_1,x_2,x_3,t-\tau_i)$ $\tau_i>0,i=1,2,\ldots,N,r=1,2,3$,分别表示扩散、对流以及涉及时滞的反应项。
使用拟设 (2.3)with $k=3$，给定的(3+1) 维广义时间分数阶时滞对流-扩散-反应方程 (5.3)被变换为如下 $(1+1)$ 维广义非线性时间分数阶时滞对流-扩散-反应方程:

$$\frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha}=\tilde{\mathbf{F}}_T[w,\hat{w}_i]\equiv\frac{\partial}{\partial z}\left(F(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right)+K(w)\frac{\partial w}{\partial z}+R(w)+\sum_{i=1}^{N}\kappa_i\hat{w}_i,\alpha\in(0,2],\tag{5.4}$$
$$w(z,t)=\nu(z,t)\quad\text{if } t\in[-\hat{\tau},0],\hat{\tau}=max\{\tau_i:i=1,2,..,N\}.$$

3 3 这里 $F(w)=\sum\lambda_r^2F_r(w)$ $K(w)=\sum\lambda_rK_r(w)$ $w(z,t)=u(x_1,x_2,x_3,t)$，且 $\hat{}w_i=_{r=1}w(z,t-\tau_i)=u(x_1,x_2,x_3,t-\tau_i)$，其中 $z=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3,\tau_i>0,i=1,2,\ldots,N$.接下来，我们将讨论不变子空间法结合变量变换在求解具有线性时滞的（$3+1$）维广义非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程初边值问题的精确解方面的有效性和适用性。

5.3 时滞非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程初边值问题的精确解

(5.4)

考虑　　如下形式的时滞非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} = \tilde{\boldsymbol{F}}_T[w,\hat{w}] \equiv & \lambda_1^2\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\mu_1}{2\lambda_1\rho_0}w+\mu_3\right)\frac{\partial w}{\partial z}\right]+\lambda_1\left(\mu_1 w+\mu_2\right)\frac{\partial w}{\partial z}\\ & +\mu_0 w+\kappa w(z,t-\tau),\\ & w(z,t)=\nu(z,t)=\delta_0(t)e^{-\rho_0 z}\quad \text{if } t\in[-\tau,0],\tau>0,\alpha\in(0,2],\end{aligned}\tag{5.5}$$

其中 $\kappa,\ \mu_i\in\mathbb{R}, i=0,1,2,3$, 以及适当的初边值条件　　s

$$w(z,0)=\xi(z),\qquad \alpha\in(0,1],\tag{5.6}$$

$$w(z,0)=\xi(z)\ \ \&\ \ \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=\eta(z),\quad \alpha\in(1,2],\tag{5.7}$$

and

$$w(z,t)\Big|_{z=0}=\begin{cases}\delta_1(t),\text{if}\,\alpha\in(0,1],\\ \delta_2(t),\text{if}\,\alpha\in(1,2],\end{cases}\quad\&\quad w(z,t)\Big|_{z=l}=\begin{cases}\delta_3(t),\text{if}\,\alpha\in(0,1],\\ \delta_4(t),\text{if}\,\alpha\in(1,2].\end{cases}\tag{5.8}$$

˜很容易观察到，上述给定的算子 $\boldsymbol{F}_T[w,\hat{}w]$ 保持线性空间$\mathbf{V}_1$ =Span$\{e^{-\rho_0 z}\}$, 这在表2的情形6中列出，没有时滞项。

类似上述方法，对于 $\alpha\in(0,2]$, (5.5)的精确解得到为

$$w(z,t)=\begin{cases}e^{-\rho_0 z}\Big\{A\sum\limits_{m=0}^{n}\kappa^m(t-m\tau)^{\alpha m}E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+1}(\gamma(t-m\tau)^\alpha)\\ +\left[\sum\limits_{m=0}^{n}\kappa^{m+1}(t-m\tau)^{\alpha(m+1)-1}E^{m+1}_{\alpha,\alpha(m+1)}(\gamma(t-m\tau)^\alpha)\right]\\ *[\delta_0(t-\tau)T(t-\tau)]\Big\},\alpha\in(0,1],\\ e^{-\rho_0 z}\Big\{A\left(E^1_{\alpha,1}(\gamma t^\alpha)+\sum\limits_{m=1}^{n}\kappa^m(t-m\tau)^{\alpha m}E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+1}(\gamma(t-m\tau)^\alpha)\right)\\ +\hat{A}\left(tE^1_{\alpha,2}(\gamma_2 t^\alpha)+\sum\limits_{m=1}^{n}\kappa^m(t-m\tau)^{\alpha m+1}E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+2}(\gamma(t-m\tau)^\alpha)\right)\\ +\int_0^t\Big(\sum\limits_{m=0}^{n}\kappa^{m+1}(y-m\tau)^{\alpha(m+1)-1}E^{m+1}_{\alpha,\alpha(m+1)}(\gamma_2(y-m\tau)^\alpha)\\ \times\delta_0(t-\tau-y)T(t-\tau-y)\Big)dy\Big\},\alpha\in(1,2],\end{cases}\tag{5.9}$$

其中 $\gamma=\rho_0^2\lambda_1^2\mu_3-\lambda_1\mu_2\rho_0+\mu_0,\ A,\hat{}A\in\mathbb{R},\ n-1<\frac{t}{\tau}\le n,\ 0<\left|\frac{\kappa e^{-\tau s}}{s^\alpha-\gamma}\right|<1,\ T(t)=$

$\begin{cases}1, & t<0,\\ 0 & t\ge 0\end{cases}$，以及 $,_b(y)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(\quad c_{\ m}y^m)!}{m\,\Gamma}$ $(am+b)$ 是广义三参数

Mittag-Leffler 函数，其中 $(c)_m=\frac{\Gamma}{}(c+m)\,\Gamma(c)\ m\in\mathbb{N}$. 此外，　$*$ 表示卷积

y函数定义为 $a(y) * b(y) = \int a(y-x)b(x)dx$。

所得到的精确解满足初始和边界条件 (5.6)-(5.8)，其中 $\hat{\xi}(z) = Ae^{-\rho_0 z}, \eta(z) = Ae^{-\rho_0 z}$,

$$\delta_1(t) = A\sum_{m=0}^{n}\kappa^m(t-m\tau)^{\alpha m}E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+1}(\gamma(t-m\tau)^\alpha) + \left[\sum_{m=0}^{n}\kappa^{m+1}(t-m\tau)^{\alpha(m+1)-1} E^{m+1}_{\alpha,\alpha(m+1)}(\gamma(t-m\tau)^\alpha)\right] * [\delta_0(t-\tau)T(t-\tau)],$$

$$\delta_2(t) = A\left(E^1_{\alpha,1}(\gamma t^\alpha) + \sum_{m=1}^{n}\kappa^m(t-m\tau)^{\alpha m}E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+1}(\gamma(t-m\tau)^\alpha)\right) + \hat{A}\left(tE^1_{\alpha,2}(\gamma_2 t^\alpha) + \sum_{m=1}^{n}\kappa^m(t-m\tau)^{\alpha m+1}E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+2}(\gamma(t-m\tau)^\alpha)\right) + \int_0^t\Big(\sum_{m=0}^{n}\kappa^{m+1} (y-m\tau)^{\alpha(m+1)-1}E^{m+1}_{\alpha,\alpha(m+1)}(\gamma_2(y-m\tau)^\alpha)\delta_0(t-\tau-y)T(t-\tau-y)\Big)dy,$$

$$\delta_3(t) = B\sum_{m=0}^{n}\kappa^m(t-m\tau)^{\alpha m}E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+1}(\gamma(t-m\tau)^\alpha) + \left[\sum_{m=0}^{n}\kappa^{m+1}(t-m\tau)^{\alpha(m+1)-1} E^{m+1}_{\alpha,\alpha(m+1)}(\gamma(t-m\tau)^\alpha)\right] * [\delta_0(t-\tau)T(t-\tau)],$$

$$\delta_4(t) = B\left(E^1_{\alpha,1}(\gamma t^\alpha) + \sum_{m=1}^{n}\kappa^m(t-m\tau)^{\alpha m}E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+1}(\gamma(t-m\tau)^\alpha)\right) + \hat{B}\left(tE^1_{\alpha,2}(\gamma_2 t^\alpha) + \sum_{m=1}^{n}\kappa^m(t-m\tau)^{\alpha m+1}E^{m+1}_{\alpha,\alpha m+2}(\gamma(t-m\tau)^\alpha)\right) + \int_0^t\Big(\sum_{m=0}^{n}\kappa^{m+1} (y-m\tau)^{\alpha(m+1)-1}E^{m+1}_{\alpha,\alpha(m+1)}(\gamma_2(y-m\tau)^\alpha)\delta_0(t-\tau-y)T(t-\tau-y)\Big)dy,$$

其中 $B = Ae^{-\rho_0 l}$，且 $\hat{B} = \hat{A}e^{-\rho_0 l}$。

6 应用

扩散方程是物理科学中最基本的方程类别之一。因此，对于这类方程的推广形式的行为和渐近性质的研究，长期以来一直是科学家们感兴趣的研究领域。菲克基于这样一个事实发展了扩散过程：各向同性介质中的浓度梯度与扩散粒子通过单位面积的输运速率成正比，这在数学上被视为 [10] 即

$$\mathbf{F} = D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

其中**F** 是单位面积上的传递速率， u 是空间变量为 x 、扩散系数为D。当假设扩散仅沿 x方向进行时，菲克提出的一维扩散方程如下，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right). \tag{6.1}$$

与傅里叶最初提出的热传导方程的直接类比是当时一个显著的观察。对于一维垂直流动，可以考虑水质量守恒的连续性方程的组合 [53]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) \tag{6.2}$$

以及非饱和流的 Buckingham-Darcy 定律 [53]

$$R = -F(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q(u). \tag{6.3}$$

上述方程（6.2）-（6.3）导出（1+1）维对流-扩散方程 [53]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \underset{\uparrow\text{capillarity}}{} \left(\frac{dQ(u)}{du}\right)\underset{\uparrow\text{gravity}}{}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{6.4}$$

可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + K(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{6.5}$$

其中， $K(u) = -\left(\frac{dQ(u)}{du}\right)$， $u = u(x,t)$是土壤表面以下深度 x 处、时间 t的体积含水量， $F(u)$ 是浓度相关的土壤水扩散率，而 $Q(u)$ 是浓度相关的导水率。注意，Liu[62] 已使用不变子空间方法讨论了方程（6.4）的各种精确解。方程（6.5）称为广义（$1+1$）维非线性对流-扩散方程。在科学与工程中，上述类型方程的大多数应用都用于建模，例如扩散、扩散-对流（或平流）以及扩散-反应（或吸收）方程。广义（$1+1$）维非线性对流-扩散-反应方程如下所示 [31, 54],

$$u_t = (F(u)u_x)_x + K(u)u_x + R(u), \quad u = u(x,t), x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \tag{6.6}$$

其中 $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $F(u)$ 是扩散系数， $K(u)$ 是对流项且$R(u)$ 给出了系统的动力学。方程 (6.6) 简化为以下著名的非线性反应-扩散方程 [54]:

当 $F(u) = 1, K(u) = 0$，且 $R(u) = u(1-u)$，方程 (6.6) 被称为著名的费希尔方程或逻辑斯蒂方程 [54]。

(2) 当 [54] if $F(u) = 1, \quad K(u) = 0$，且 $R(u) = u(1-u^2)$时，上述方程（6.6）变为Newell-Whitehead方程或振幅方程。

(3) 如果 $F(u) = 1, \quad K(u) = 0$，且 $R(u) = u^2(1-u)$，那么上述方程（6.6）称为Zeldovich方程 [54]。

(4) 当 [54] if $F(u) =$1，$K(u) = 0$，且 $R(u) = u(1-u)(u-\beta)$，其中 $\beta \in$ (0，1)时，方程（6.6）称为 Nagumo方程或双稳态方程。

(5) 当 $F(u) = 1, \quad K(u) = 0$，且 $R(u)$任意时，方程（6.6）可视为 KPP方程 [54], ，它是费希尔方程、Newell-Whitehead方程、Zeldovich方程和 Nagumo方程的推广。

(6) 当 $F(u) = mu^{m-1}, \quad K(u) = 0$，且 $R(u) = \pm u^p, m, \quad p > 0$ 时，方程 (6.6) 称为带吸收（源项）的多孔介质方程 [54] 。

在此，我们希望指出如下所讨论的不变子空间法在上述方程（6.5）和（6.6）中的一些应用。

(a)当 $F(u) = c_1$时，方程（6.5）化为广义Burgers方程 [54],，当 $K(u) = c_2 u$ 时，该方程拥有二维线性空间$\mathbf{V}_2 =$张成 $\{1, x\}$。

(b) 如果 $F(u) = u^{-\frac{3}{2}}$且 $K(u) = 0$，那么上述方程（6.5）被称为快速扩散方程 [41], 它具有一个基于线性空间$\mathbf{V}_4 =$张成 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 且与 $v = u^{-\frac{3}{2}}$.相关的精确解

(c) 当 $F(u) = u^{-\frac{4}{3}}, \quad K(u) = 0$，且 $R(u) = u^{\frac{7}{3}}$ 时，方程 (6.6) 被称为带反应项的快速扩散方程 [41], ，其精确解基于线性空间 $\mathbf{V}_5 =$Span $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ 以及 $v = u^{-\frac{4}{3}}$。

(d) If $F(u) = u^{-\frac{4}{3}}, K(u) = 0,$以及 $R(u) = -u^{-\frac{1}{3}}$，则方程(6.6) 称为带吸收项的快速扩散方程 [41], ，其具有基于线性空间 $\mathbf{V}_5 =$Span $\left\{1, \cos(\frac{4}{\sqrt{3}}x), \sin(\frac{4}{\sqrt{3}}x), \cos(\frac{2}{\sqrt{3}}x), \sin(\frac{2}{\sqrt{3}}x)\right\}$以及 $v = u^{-\frac{4}{3}}$ 的精确解。

(e) 对于 $F(u) = u^\sigma, K(u) = 0, R(u) = -u^{1-\sigma}, \sigma > 0$，上述方程 (6.6) 表示一个带吸收项的多孔介质方程 [41] ，它具有基于线性空间 $\mathbf{V}_2 =$ Span$\{1, x^2\}$ 的精确解，以及 $v = u^\sigma$.

最近，文献 [31]讨论了具有幂律非线性的（$1+1$）维广义非线性对流-扩散-反应方程（6.6）的不变子空间和精确解。在相关文献中，可以看到一些关于推导下述高维非线性对流-扩散-反应方程精确解的重要研究工作。

- 二次波动方程的精确解 [41] 具有（$2+1$）维， $u_{tt} = \bigtriangledown \cdot (u \bigtriangledown u) + bu + a$, 已基于三维不变子空间$\mathbf{V}_3 =$ 张成$\{1, x_1^2, x_2^2\}$ 在 [41], 其中 $u = u(x_1, x_2, t)$ $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, t \geq 0.$

- 多孔介质方程的 [41] 不变子空间$N+1 u_t = \bigtriangledown \cdot (u^\sigma \bigtriangledown u) + au^{1-\sigma} + bu$， $\sigma \neq 0$, 为$\mathbf{V}_{N+1} =$ 张成$\{1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_N^2\}$，其中$u = u$($x_1$， x_2，……， x_N， t) $x_i \in \mathbb{R}$， $i = 1$, 2，……， N， $t \geq 0.$

- 9维线性子空间 $\mathbf{V}_9 =$ 张成$\{1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1r, x_2r, r^2\}, r =$($x_1+x_2$)^2 可用于展示 (2+1)维快速扩散方程的解 [41] $u_t = \bigtriangledown \cdot (\frac{1}{u} \bigtriangledown u)$ $u = u$($x_1, x_2,$ t).

–

然而，在复杂系统中，人们观察到扩散过程是不可预测的（反常的），因为它并不总是遵循高斯统计或菲克定律，而高斯统计和菲克定律是正常布朗扩散的特征。在许多物理学和生物学复杂系统中，可以看到反常扩-散占主导地位 [16, 17]。Metzler 和 Klafter [18] have通过连续时间随机游走方案，以分数阶导数的形式从数学上推导出了反常扩散过程，其形式为

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u_0(x) = \mathcal{H}_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \tag{6.7}$$

其中， u_0(x)是扩散的初始值， $\mathcal{H}_\alpha$ 是广义扩散系数。反常行为的特征是均方位移随时间呈非线性幂律变化，即

$$\left\langle x^2(t) \right\rangle = \frac{2\mathcal{H}_\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha.$$

注意，扩散指数 α (> 0) 将反常扩散 [18]的范围划分为三种类型：(i)如果 $\alpha \in$ (0,1), 该过程表示亚扩散；(ii) 当 $\alpha \in (1, 2]$, 该过程表示弹道（超）扩散；(iii)当 $\alpha = 1$ 时，该过程表示正常布朗扩散（时间相关且均方位移呈线性，即 $\left\langle x^2(t) \right\rangle \sim kt$ ）。

由于反常扩散及其推广在科学和工程的所有领域中具有广泛应用，许多科学家投入时间研究其结构

以及动力学性质。研究人员采用了不同的数值方法来揭示复杂系统中扩散的反常行为，例如蒙特卡洛模拟、前向欧拉差分公式 [58], 格林函数法 [55], 等。近期，文献 [11]通过李对称性研究了时间分数阶线性扩散方程的精确解。Sahadevan 和 Prakash [26]研究了变系数时间分数阶线性扩散方程的李对称性。在 [33],中，Sahadevan 和 Prakash 通过不变子空间法研究了 $(1+1)$ 维时间分数阶反应扩散方程和 $(1+1)$ 维时间分数阶对流扩散方程的精确解。此外，文献 [39]通过不变子空间法推导了带时滞方程的 $(1+1)$ 维时间分数阶广义非线性反应扩散方程的精确解。$(2+1)$ 维生物种群模型的精确解

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}}=\frac{\partial^{2}(u^{2})}{\partial x_{1}^{2}}+\frac{\partial^{2}(u^{2})}{\partial x_{2}^{2}}+\kappa u^{a}(1-\gamma u^{a})$$

针对 κ， a， γ的各种参数值，采用分离变量法 [59], 不变子空间法结合变量变换[44] 以及不变子空间法的直接方法 [50]进行了广泛研究。

7 讨论和结论性备注

本文系统地研究了如何应用结合变量变换的不变子空间法，详细推导（$k+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程的精确解。此外，这项详细的具体研究还用于显式求得（$3+1$）维非线性时间分数阶对流-扩散-反应方程在适当初始和边界条件下的各种类型精确解。此外，我们注意到，上述方程所获得的精确解可以用多项式函数、指数函数、三角函数、双曲函数和Mittag-Leffler函数表示。另外，将所讨论的方法推广到了具有多个线性时滞的（$k+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程，并且利用所讨论的方法推导出了（$3+1$）维非线性时间分数阶时滞对流扩散反应方程的精确解。众所周知，非整数阶导数具有一些不同寻常的性质，例如违反莱布尼茨法则、链式法则和半群性质的标准形式。由于这些原因，对于非线性非整数阶偏微分方程，不存在定义良好的解析方法。

我们希望指出，在 [51], Prakash 等人研究了无需任何变量变换来求解（$k+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程的精确解的不变子空间法-

分数阶偏微分方程。此外，他们还使用不变子空间法的直接方法，推导出了（$3+1$）维非线性时间分数阶对流-扩散方程的多种类型精确解。基于此，我们可以寻找形如（1.1）的（$k+1$）维非线性时间分数阶偏微分方程的精确解。随后，有研究利用结合变量变换的不变子空间法，推导高维时间分数阶方程的精确解，进一步拓展了这一工作。此外，Abdel Kader等人[44]利用结合变量变换的不变子空间法，研究了具有变系数的非线性时间分数阶（$2+1$）维生物种群模型的精确解。因此，根据这些研究，对于（k+1）维时间分数阶偏微分方程，我们可以预期精确解的特定形式（1.2）。对于高维非线性时间分数阶偏微分方程，使用无需任何变量变换的不变子空间法推导精确解可能并不直接。然而，由于该方法能够将（$k+1$）维方程降阶为（1+1）维方程，因此很容易将本研究应用于高维情形。由此，这些研究表明，所讨论的方法是推导科学与工程中非线性时间分数阶高维偏微分方程初边值问题精确解的一种非常重要、高效且强大的解析工具。该方法对于时间-空间分数阶非线性偏微分方程的适用性已在文献[37, 38]中讨论过。在一些附加假设下，所讨论的方法还可用于系统地求解空间分数阶非线性偏微分方程的精确解，这将留待未来研究。

致谢

M. L. 的工作得到了DST-SERB国家科学讲席的支持。

参考文献

[1] I.Podlubny，《分数阶微分方程》，学术出版社，纽约，1999年。[2] K.Diethelm，《分数阶微分方程分析》，Springer，柏林，2010年。[3] A.A. Kilbas，J.J.Trujillo，H.M.Srivastava，《分数阶微分方程理论与应用》，Elseiver，阿姆斯特丹，2006。

[4] V.E. Tarasov，《分数阶动力学：分数阶微积分在粒子、场与介质动力学中的应用》，非线性物理科学，Springer，海德堡，德国，2011年。[5] H.G.Sun，Y. Zhang，D.Baleanu，W. Chen，Y.Q.Chen，科学与工程中分数阶微积分现实世界应用的新汇编，《非线性科学与数值模拟通讯》64(2018年)213-231。[6] F. Mainardi，《分数阶微积分：连续介质力学与统计力学中的一些基本问题》。载于：A.Carpinteri，F. Mainardi，（编）《连续介质力学中的分形与分数阶微积分》，Springer，维也纳，1997，pp.291-348 数字对象唯一标识符：10.1007/978-3-7091-2664-6 7。[7] V.E. Tarasov，J.J. Trujillo，电动力学中的幂律空间色散，《AnnalsofPhysics》334(2013年)1-23。[8] V.E. Tarasov，一些有前景的分数阶物理模型综述，《Internat. J.Modern Phys. B》27(2013年)1330005。[9] V.E. Tarasov，关于分数阶导数的链式法则，《非线性科学与数值模拟通讯》30(2016) 1-4。[10] J.Crank，《扩散的数学》，克拉伦登出版社，牛津，1975年。[11] T.Bakkyaraj，R. Sahadevan，时间分数阶偏微分方程的李变换群形式，《Pramana 物理学杂志》85(2015年) 849-860。[12]S.Yu. Lukashchuk，时间分数阶次扩散与扩散波方程的守恒律，Nonlinear Dyn. 80(2015年) 791-802。[13] R. Cherniha，M.Serov，Y. Prystavka，一类（1+2）维反应-扩散-对流方程的完整李对称分类，《非线性科学与数值模拟通讯》92(2021年)105466。[14] V.A.Dorodnitsyn，I. V. Knyazeva，S.R. Svirshchevskii，二维和三维情形下带源项热方程的群性质，《Differ.Uravn.》19(1983年) 1215-1223（俄文）。[15] A.D.Polyanin，V.F. Zaitsev，《非线性偏微分方程手册》，Chapman and Hall/CRC，2004。[16] L.R.Evangelista，E.K.Lenzi，《分数扩散方程与反常扩散》，剑桥大学出版社，2018年。

[17] E.K. Lenzi, H.V. Ribeiro, A.A. Tateishi,R.S. Zola,L.R.Evangelista, 膜分隔的非均匀系统中的反常扩散与输运, Proc.R.Soc. A 472(2016) 20160502.[18] R.Metzler, J. Klafter, 反常扩散随机游走指南：一种分数阶动力学方法, Physics Reports 339(2000) 1-77.[19] V. Daftardar-Gejji,H.Jafari, Adomian分解：求解分数阶微分方程组的工具, J.Math.Anal. Appl.301(2005) 508-518.[20] S.Momani, Z. Odibat, 通过Adomian分解法求解时间分数阶Navier-Stokes方程的解析解, Appl. Math.Comput.177(2006) 488-494.[21] Z.Odibat, S. Momani, 线性分数阶偏微分方程的广义微分变换法, Appl.Math. Lett.21(2008)194-199.[22] P. Prakash,关于时间分数阶Kudryashov-Sinelshchikov方程的群分析、守恒律与精确解, Comput.Appl. Math. 40(2021年) 162.[23]R.Sahadevan,T. Bakkyaraj, 时间分数阶广义Burgers方程和Korteweg-de Vries方程的不变性分析, J.Math.Anal.Appl. 393(2012) 341-347.[24] R.K. Gazizov,A.A.Kasatkin, S.Yu. Lukashchuk, 分数阶扩散方程的对称性质,Phys. Scr.T136(2009)014016 (5p). (数字对象唯一标识符: 10.1088/0031- 8949/2009/T136/014016)[25] P.Prakash,R.Sahadevan, 某些分数阶常微分方程的李对称分析与精确解, Nonlinear Dyn. 89(2017) 305-319.[26] R.Sahadevan,P.Prakash, 某些时间分数阶偏微分方程的李对称分析与守恒律, Int. J. of Dynamical Systems andDifferential Equations,9(2019)44-64.[27] A.M.Nass,带中立型时滞的分数阶常微分方程的李对称分析与精确解, Appl. Math.Comput. 347(2019)370-380.[28] K. Sethukumarasamy,P.Vijayaraju, P. Prakash, 关于某些耦合分数阶常微分方程的李对称分析,J.Nonlinear Math. Phys. 28(2021年) 219-241。

[29] R.Sahadevan、P.Prakash，关于耦合时间分数阶偏微分方程的李对称分析和不变子空间方-法，《混沌、孤子与分形》104(2017)107-120。[30] W.X.Ma、M.M.Mousa、M.R. Ali，利用新混合法求解天体物理学中的奇异分数阶 Lane-Emden 型方程，《现代物理快报B》34(2020)2050049(10页)。[31] P.Prakash，广义对流-反应-扩散方程的新精确解，《欧洲物理学杂志 Plus》134(2019) 261。[32] R.Sahadevan、T.Bakkyaraj，不变子空间法及某些非线性时间分数阶偏微分方程的精确解，《分数阶微积分与应用分析》18(2015年) 146-162。[33] R.Sahadevan、P. Prakash，某些时间分数阶非线性偏微分方程的精确解，Nonlinear Dyn. 85(2016) 659-673。[34] R.Sahadevan、P.Prakash，时间分数阶耦合非线性偏微分方程的不变子空间的精确解和最大维数，Com- mun. Nonlinear Sci. Numer.Simulat. 42(2017) 158-177。[35] S. Choudhary、P.Prakash、V. Daftardar-Gejji，高维分数阶偏微分方程组的不变子空间和精确解，《计算与应用数学》38(2019) 126。[36] R.K.Gazizov、A.A. Kasatkin，利用不变子空间法构造分数阶微分方程的精确解。《计算数学与应用》66(2013年) 576-584。[37] S.Choudhary、V.Daftardar-Gejji，不变子空间法：求解分数阶偏微分方程的工具，《分数阶微积分与应用分析》20(2017)477-493。[38] P. Prakash，某些类型的标量及耦合时空分数阶扩散方程的不变子空间和精确解，《Pramana物理学杂志》94(2020) 103(18页)。[39] P. Prakash、S.Choudhary、V.Daftardar-Gejji，带时滞的广义非线性时间分数阶反应-扩散方程的精确解，《欧洲物理学杂志 Plus》135(2020) 490(24页)。

[40] W. Rui，结合初等积分法的不变子空间思想及其在求解时间分数阶非线性偏微分方程精确解中的应用，Appl. Math. Comput. 339(2018) 158-171.[41] V.A. Galaktionov, S.R. Svirshchevskii，《力学与物理学中非线性偏微分方程的精确解与不变子空间》，Chapman and Hall/CRC，伦敦，2007年.[42] P. Artale Harris, R. Garra，具有记忆效应的非线性热传导方程：物理意义与解析结果，《数学物理杂志》58(2017) 063501.[43] R. Garra, Z. Tomovski，若干非线性Laguree型扩散方程的精确结果，《数学建模与分析》26(2021) 72-81.[44] A. H. Abdel Kader, M. S. Abdel Latif, D. Baleanu，变系数分数阶生物种群模型的一些精确解，《数学方法与应用科学》44(2021) 4701-4714.[45] W.X. Ma，一种改进的不变子空间法及其在演化方程中的应用，《中国科学：数学》55(2012) 1769-1778.[46] W.X. Ma, Y. Liu，一类色散演化方程的不变子空间与精确解，《非线性科学与数值模拟通讯》17(2012) 3795- 3801.[47] W.X. Ma, Y. Zhang, Y. Tang, J. Tu，具有线性解子空间的Hirota双线性方程，Appl. Math. Comput. 218(2012) 7174-7183.[48] Y. Ye, W.X. Ma, S. Shen, D. Zhang，一类存在不变子空间及相应约化的三阶非线性演化方程，J. Nonlinear Math. Phys. 21(2014) 132-148.[49] C. Zhu, C. Qu，二维非线性演化方程的不变子空间，《Symmetry》8(2016) 128.[50] P. Prakash, K.S. Priyendhu, K.M. Anjitha，$(2+1)$维时间分数阶广义对流–反应–扩散波方程的初值问题：不变子空间与精确解，《计算与应用数学》41(2022) 30.[51] P. Prakash, K.S. Priyendhu, M. Lakshmanan，$(m+1)$维非线性时间分数阶偏微分方程的不变子空间法，《非线性科学与数值模拟通讯》111(2022) 106436.

[52] A.M. Mathai, H.J. Haubold，《应用科学家的特殊函数》，Springer，纽约，2008.[53] M.P. Edwards，非线性扩散-对流方程的精确解，博士论文，卧龙岗大学，1997.[54] B. H. Gilding, R. Kersner，《非线性扩散-对流-反应中的行波》，非线性微分方程及其应用进展，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2004.[55] A. Hanygad，时间分数阶扩散波方程的多维解，伦敦皇家学会会刊A辑458(2002) 933-957.

[56]R. Cherniha, M. Serov, O. Pliukhin, 非线性反应-扩散-对流方程：Lie对称与条件对称、精确解及其应用, Chapman and Hall/CRC, 伦敦, 2018年.

[57] J.R. King, 某些非线性扩散方程之间的局部变换, J. Austral.Math. Soc.Ser.B 33(1992) 321-349.

[58]S.B. Yuste, L. Acedo, 分数扩散方程的显式有限差分法及一种新的von Neumann型稳定性分析, SIAM J. Nu- mer.Anal. 42(2005) 1862-1874.

[59] W. Rui, H. Zhang, 分离变量法结合积分分支法求解时间分数反应-扩散模型, Comput. Appl. Math. 39(2020) 299.

[60] W. Rui、X. Yang、F. Chen，采用变量分离法研究时间分数阶 Fokker-Planck 方程的精确解和动力学性质，Physica A（595），2022，127068。

[61]A.D.Polyanin，A.I. Zhurov，具有变化传递系数的非线性时滞反应-扩散方程：精确方法与新解，Appl.Math.Lett.37(2014) 43-48。[62] H.Liu，广义非线性D-C方程的不变子空间分类与精确解，Appl.Math. Lett. 83(2018年) 164–168。[63] C.Qu，C. Zhu，利用不变子空间法对具有双组分非线性扩散方程的耦合系统进行分类，J. Phys.A: Math. Theor. 42(2009) 475201。

[64] S.Shen, C. Qu, Y.Jin, L.Ji, 非线性演化方程组不变子空间的最大维数, 《Chin. Ann.Math.Ser. B》33(2012)161–178.[65] M.S. Hashemi, 具有共形导数的分数阶微分方程所容许的不变子空间, 《Chaos SolitonsFractals》107(2018年) 161–169.[66] M.S. Abdel Latif, A.H.AbdelKader,D. Baleanu, 具有广义分数阶导数的非线性分数阶偏微分方程的不变子空间法, 《Adv.Differ. Equ.》2020(2020) 119.[67] Y.M. Chu, M. Inc, M.S. Hashemi, S. Eshaghi, 通过不变子空间解析处理正则化Prabhakar分数阶微分方程, 《计算与应用数学》41(2022) 271。