半直线上输运方程有限差分格式的驯服稳定性

Lucas Coeuret[1]

arXiv:2304.02612v1 [math.NA] 5 Apr 2023

Abstract

在本文中，我们证明，在精确的谱假设下，正半直线上带有数值边界条件的标量左行输运方程的某些有限差分逼近对于任意 $q > 1$ 都是 ℓ^1-稳定的，但 ℓ^q-不稳定。证明依赖于对一类特殊的托普利茨算子的有限秩扰动的格林函数进行准确描述；这些算子的本质谱属于闭单位圆盘，并且有一个模为 1、嵌入本质谱中的单特征值。

AMS分类:65M06, 65M12, 47B35, 35L04.
关键词： 双曲方程, 差分逼近, 稳定性,边界条件, 半群估计, 托普利茨算子, Lopatinskii行列式。

Throughout this article, we define the following sets:

$$\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C}, |z| > 1\}, \quad \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}, \quad \mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\},$$

$$\overline{\mathcal{U}} := \mathbb{S}^1 \cup \mathcal{U}, \quad \overline{\mathbb{D}} := \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{D}.$$

对于 $z \in \mathbb{C}$ 和 $r > 0$，我们用 $B_r(z)$表示 $\mathbb{C}$ 中以 z 为中心、半径为 r 的开球。

对于 E 一个巴拿赫空间，我们用 $\mathcal{L}(E)$ 表示作用于 E 上的有界算子空间，并用 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)}$ 表示算子范数。对于 T 属于 $\mathcal{L}(E)$，记号 $\sigma(T)$ 和 $\rho(T)$ 分别表示算子 T的谱和预解集。

我们令 $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$ 表示复值 $n \times k$ 矩阵的空间并且我们使用记号 $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ 当$n = k$.

我们用符号 . 表示相差一个乘法常数的不等式。最后，我们用 C （分别用 c）表示某些较大（分别较小）的正的常数，它们可能在全文中发生变化（有时甚至在同一行内变化）。

1 Introduction

1.1 背景

本文旨在研究双曲型初边值问题离散化的所谓半群稳定性。更具体地说，我们关注与正半直线上的标量左行输运方程 ($v < 0$) 相容的显式有限差分格式，其柯西初始数据为

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \forall x \geq 0, \quad & \partial_t u + v\partial_x u = 0, \\ \forall x \geq 0, \quad & u(0,x) = u_0(x) \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

此处 $x = 0$ （1.1）无需施加边界条件，因为输运算子相对于边界是流出的。然而，我们所考虑的数值格式需要引入非物理的数值边界条件，而这些条件可能导致不稳定性。数值分析的一项基石是所谓的 Lax 等价定理 [LR56] ，该定理指出，相容格式收敛当且仅当它稳定。因此，找到一种可靠的方法来判定数值格式的稳定或不稳定至关重要。

在考虑初边值问题的离散化时，人们提出了几种关于稳定性的可能定义。本文所关注的是半群稳定性。

[1]图卢兹数学研究所；UMR5219；图卢兹大学；法国国家科学研究中心；UPS，118 route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex 9, France。作者的研究获得法国国家研究署 Indyana 项目（ANR-21- CE40-0008-01）的资助，同时也得到图卢兹国际数学与计算机科学卓越实验室（资助协议 ANR-11-LABX-0040）和图卢兹人工与自然智能研究所（资助协议 ANR-19-P3IA-0004）的支持。电子邮箱: lucas.coeuret@math-univ.toulouse.fr

在 ℓ^q-拓扑（参见定义 1 关于 ℓ^q-稳定性），可表述为以下幂有界性

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathcal{T}^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_q)} < +\infty \tag{1.2}$$

其中 $\mathcal{T}$ 是离散演化算子，它允许从一个时间步计算数值格式在下一个时间步的解，而向量空间 $\mathcal{H}_q$ 是向量空间 $\ell^q(\mathbb{N})$ 的一个修改版本，其中考虑了数值格式的数值边界条件。一个直接的结论是，ℓ^q-稳定性阻止了算子 $\mathcal{T}$ 在集合 $\mathcal{U}$ 中存在特征值（不稳定特征值）。这对应于所谓的 Godunov-Ryabenkii 条件，该条件在 [GR63] 中被引入。需要指出的是，算子 $\mathcal{T}$ 的特征值的存在性及其位置高度取决于所采用的数值边界条件，本文将对此进行解释。

另一个最值得注意的稳定性定义是强稳定性（也称为GKS稳定性）的概念，该概念在具有奠基性意义的贡献 [GKS72]中被提出。鉴于其对于扰动具有稳定性，它可以被视为初边值问题有限差分格式背景下最稳健的稳定性定义之一。对于希望深入了解的读者，我们推荐参阅 [GKO13] ，其中对GKS理论进行了完整综述，因为这并非本文的主要关注点。不过，我们需要指出，有限差分格式的强稳定性完全由所谓的一致Kreiss-Lopatinskii条件的满足来刻画；在我们的情形中，这对应于算子 $\mathcal{T}$ 在集合$\overline{\mathcal{U}}$中没有特征值或广义特征值。尽管我们所引入的两种稳定性概念相当不同，但可以利用能量估计证明，强稳定性，即一致Kreiss-Lopatinskii条件的验证，蕴含 ℓ^2-稳定性（参见 [Wu95、CG11、Cou13] ，它们分别处理标量一维问题与单时间步格式、多维系统与单时间步格式，以及标量多维问题与多步格式的情形），甚至对所有 ℓ^q均有 $q \in [1, +\infty]$-稳定性（利用 [CF21]中的半群估计）。

然而，当满足戈杜诺夫-里亚边斯基条件但不满足一致Kreiss-Lopatinskii条件时，尚不能确定能否得出数值格式具有 ℓ^q-稳定性的结论。据我们所知，这一问题最早在 [Tre84、KW93]中被正式提出并加以研究。在近期论文 [CF21], 中，作者证明，当算子 $\mathcal{T}$ 在单位圆上具有不属于 $\mathcal{T}$ 本质谱的单特征值时，该数值格式对所有 ℓ^q 均保持 $q \in [1, +\infty]$-稳定性。这篇论文旨在对算子 $\mathcal{T}$ 具有模为1 且位于 $\mathcal{T}$ 本质谱内的单特征值这一情形进行同类分析；据我们所知，这种谱构型此前尚未得到研究。值得指出的是，研究这一谱假设还有另外两个动因：

- 首先，由于空间格林函数这一在第 4 节中引入的工具，在某个感兴趣点附近只能作亚纯延拓，而不能像 [CF21] 中那样作全纯延拓，因此必须仔细处理在此类谱假设下开展的分析。这将促使我们引入一些经过细致推导的计算，这些计算也可在具有类似谱构型的其他研究中重复使用。在研究粘性激波剖面时，连续情形下已经给出了类似计算（见 [MZ02]），但这是将其扩展到全离散情形的一个契机。

- 其次，这种谱构型也出现在离散激波剖面稳定性研究的背景中（参见 [Ser07]）。作者希望本文中的分析能够用于拓展这一主题的研究成果，例如 [God03] 的结果（详情请参见备注 2 ）。

与 [CF21], 本文的主要结果（定理1）的主要结果截然相反，该结果指出，若算子 $\mathcal{T}$ 具有一个模为 1 且未与本质谱分离的单特征值，则该数值格式仍然是 ℓ^1-稳定的；但是，在满足某个明确的代数条件时，该数值格式对于所有 $q \in]1, +\infty]$ 要么也是 ℓ^q-稳定的，要么对于所有 $q \in]1, +\infty]$ 是 ℓ^q-不稳定的。对于后一种情形，我们甚至证明了范数 $\|\mathcal{T}^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_q)}$ 关于 n 的精确增长率（1.16）。

定理1 的证明依赖于对数值格式所对应半群的渐近行为进行精确描述（见定理2），并采用一种称为“空间动力学”的方法。该方法承接了一系列由 [ZH98] 开创的论文，旨在运用函数演算（见 [Con90，第七章]），通过算子 $\mathcal{T}$ 的预解式，借助所谓的空间格林函数（定义见第4节）来表示时间格林函数（即数值格式的基本解，定义见下文的（1.18））。本文的整体结构与 [CF21]的结构颇为相似。一方面，这使感兴趣的读者能够观察两篇论文之间的相似之处，而这些相似之处或可促成一项更一般的结果，将本文的结果与 [CF21]的结果结合起来。另一方面，作者认为，以这种方式呈现，谱设定选择上的根本差异会更加清楚，因为证明的每一步都可以与[CF21]中相应的步骤进行比较。

1.2 设定

我们希望求得柯西问题（1.1）的实值解 u。引入时间步长 $\Delta t > 0$ 和空间步长 $\Delta x > 0$，并从现在起假定库朗数 $\lambda := \frac{\Delta t}{\Delta x}$ 始终保持固定。为了近似柯西问题（1.1）的解 u 在单元 $[n\Delta t,\ (n+1)\ \Delta t[\times[\ (j-1)\ \Delta x$中的值 $j\Delta x[$，我们定义一个应用于（1.1）的显式时间单步有限差分格式。在内部单元 $[\ (j-1)\ \Delta x$中，对于 $j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，有限差分格式定义为

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad u_j^{n+1} = \sum_{k=-r}^{p} a_k u_{j+k}^n. \tag{1.3a}$$

其中 r、p 为非负整数，系数 a_k 为给定的实数，它们可以依赖于速度 v 和库朗数 λ。还需要定义如何处理所谓“幽灵单元”中的值 u_{1-r}^n，...，u_0^n。通常，用于计算 u_{1-r}^n，...，u_0^n 值的数值边界条件由靠近边界的前几个值的线性组合给出：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1-r, \dots, 0\}, \quad u_j^n = \sum_{k=1}^{p_b} b_{k,j} u_k^n, \tag{1.3b}$$

其中 p_b 是一个非负整数，系数 $b_{k,\ j}$ 也是给定的实数，它们可以依赖于速度 v 和库朗数 λ。初始值 u_j^0 对于 $j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 使用偏微分方程（1.1）的柯西初始数据 u_0 来计算，例如

$$\forall j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad u_j^0 := \frac{1}{\Delta x}\int_{(j-1)\Delta x}^{j\Delta x} u_0(x)dx.$$

我们将假设整数 r 和 p 是固定的，并且 a_{-r}，$a_p \neq 0$。我们声称情况 $r = 0$ 是特殊的，因为在数值格式（1.3）中无需实施数值边界条件，因为输运方程的离散化将是“迎风”类型。从现在起，我们将假设$r \geq 1$ 同时保持归一化条件 $a_{-r} \neq 0$。我们还将假设整数 p_b 在（1.3b）中满足 $p_b \leq p$。关于 p_b的这个条件，这也在 [CF21], 中做出，将简化论文中的计算，因为它允许我们将数值格式（1.3b）的边界条件转化为

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{B}\begin{pmatrix} u_p^n \\ \vdots \\ u_{1-r}^n \end{pmatrix} = 0$$

其中

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -b_{p_b,0} & \dots & -b_{1,0} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -b_{p_b,1-r} & \dots & -b_{1,1-r} & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,p+r}(\mathbb{R}). \tag{1.4}$$

这种数值边界条件的矩阵形式（1.3b）将在本文中频繁出现，而矩阵$\mathcal{B}$ 将在我们的稳定性分析中发挥重要作用。

我们为 $q \in [1, +\infty]$ 引入巴拿赫空间

$$\mathcal{H}_q := \left\{ (w_j)_{j\geq 1-r} \in \ell^q\left(\{j \in \mathbb{Z}, j \geq 1-r\}, \mathbb{R}\right), \quad \forall j \in \{1-r, \dots, 0\}, w_j = \sum_{k=1}^{p_b} b_{k,j} w_k \right\}$$

其范数为

$$\forall w \in \mathcal{H}_q, \quad \|w\|_{\mathcal{H}_q} := \left\|(w_j)_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}\right\|_{\ell^q(\mathbb{N}\setminus\{0\})}.$$

我们定义有界算子 $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_q)$，其定义为

$$\forall w \in \mathcal{H}_q, \forall j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad (\mathcal{T}w)_j := \sum_{k=-r}^{p} a_k w_{j+k}. \tag{1.5}$$

值$(\mathcal{T}w)_j$对于 $j \in \{1-r, \dots, 0\}$ 由条件 $\mathcal{T}w \in \mathcal{H}_q$确定。采用相同的推理，我们也偶尔允许自己说，某个序列$(u_j)_{j\geq 1}$ 属于 $\mathcal{H}_q$，而不明确给出 $j \in \{1-r, \dots, 0\}$ 的值，以简化记号。

算子的定义 $\mathcal{T}$不依赖于 q 但巴拿赫空间 $\mathcal{H}_q$ 它所作用的空间却依赖于。我们观察到，对于初始条件 $u^0 \in \mathcal{H}_q$，数值格式 (1.3) 可以改写为以下离散演化问题

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u^{n+1} = \mathcal{T}u^n. \tag{1.6}$$

因此，我们引入标准术语：

定义 1 (ℓ^q-稳定性)。 数值格式 (1.3) 被称为 ℓ^q-稳定的，如果存在某个正的常数 $C > 0$ 使得对所有 $u^0 \in \mathcal{H}_q$，使用初始条件 u^0 计算的格式 (1.3) 的解 $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u^n\|_{\mathcal{H}_q} \leq C \left\|u^0\right\|_{\mathcal{H}_q}.$$

这等价于证明算子族 $(\mathcal{T}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_q)$ 中有界。

本文的目的是证明，在一种特定类型的谱条件下，该条件对应于算子 $\mathcal{T}$具有模为 1 的单特征值且该特征值位于其本质谱中，数值格式 (1.3) 是 ℓ^1-稳定的，但对每一个 $q > 1$都是 ℓ^q-不稳定的。这与[CF21] 的结果形成鲜明对比，后者证明了算子 $\mathcal{T}$在单位圆上本质谱之外存在简单特征值时，仍能保持数值格式 (1.3) 的 ℓ^q-稳定性。

1.3 假设与主要结果

我们将介绍一些对象，以便陈述本文所采用的主要假设。

1.3.1 一致性、耗散性与扩散性条件

由于数值格式（1.3）的模板是有限的，若考虑一个支撑远离边界的初始条件 u^0，那么在较小的时间 n 内，数值边界条件（1.3b）不会对 u^n 的计算产生任何影响。因此，我们推知，数值格式（1.3）的解与以下一维格点 $\mathbb{Z}$ 上系统的解 $(u_j^n)_{n\in\mathbb{N},\ j\in\mathbb{Z}}$ 密切相关：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{Z}, \quad u_j^{n+1} = \sum_{k=-r}^{p} a_k u_{j+k}^n. \tag{1.7}$$

该系统 (1.7) 对应于整条实线 上输运方程的一个数值格式

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad & \partial_t u + v\partial_x u = 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad & u(0,x) = u_0(x). \end{aligned}$$

形式（1.7）的格式的稳定性已在 [Tho65、DSC14、CF22、Coe22]中得到了深入研究。我们引入劳朗算子 $\mathscr{L} \in \mathcal{L}(\ell^q(\mathbb{Z}))$ 定义如下：

$$\forall w \in \ell^q(\mathbb{Z}), \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (\mathscr{L}w)_j := \sum_{k=-r}^{p} a_k w_{j+k} \tag{1.8}$$

这使我们能够将数值格式（1.7）重写为一个离散演化问题

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u^{n+1} = \mathscr{L}u^n$$

正如算子 $\mathcal{T}$使我们能够将数值格式（1.3）改写为（1.6）。

We introduce the symbol F associated with the scheme:

$$\forall \kappa \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \quad F(\kappa) := \sum_{j=-r}^{p} a_j \kappa^j. \tag{1.9}$$

我们现在对用于离散化输运方程的数值格式（1.3）做出以下假设。

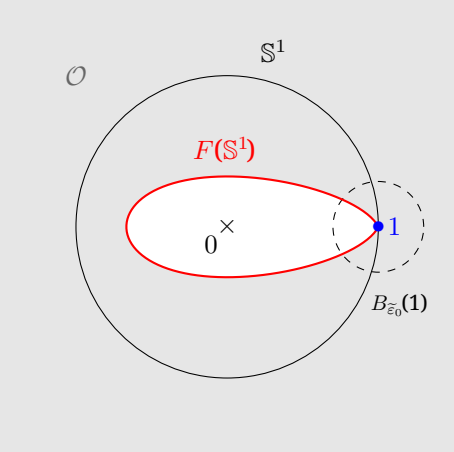

图 1：曲线的一个例子 $F(\mathbb{S}^1)$。假设 1 意味着该曲线 $F(\mathbb{S}^1)$ （红色）位于闭圆盘$\overline{\mathbb{D}}$ 内，并且仅接触边界 $\mathbb{S}^1$ 于 1。灰色部分为 $\mathcal{O}$ 无界连通分支，即 $\mathbb{C}\backslash F(\mathbb{S}^1)$。虚线部分为球 $B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$ ，其中有更精确的谱分解（1.13）与矩阵 $\mathbb{M}(z)$ （由（1.11）定义）相关。

假设1. 我们假设

$$F(1)=1, \quad \alpha := -F'(1) = \lambda v. \quad \textit{(Consistency condition)}$$

这蕴含 $\alpha<0$。此外，我们假设

$$\forall \kappa \in \mathbb{S}^1 \backslash \{1\}, \quad |F(\kappa)|<1 \quad \textit{(Dissipativity condition)}$$

并且存在一个整数 $\mu \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 和一个复数 $\beta \in \mathbb{C}$ 满足 $\Re(\beta)>0$ 使得

$$F(e^{it}) \underset{t\to 0}{=} \exp(-i\alpha t - \beta t^{2\mu} + o(t^{2\mu})). \quad \textit{(Diffusivity condition)} \tag{1.10}$$

在 [该65], 假设 1 尤其是渐近展开 (1.10) 对于数值格式 (1.7) 在 ℓ^q-拓扑于整条实线 $\mathbb{Z}$上的稳定性分析至关重要。例如，假设 1 的耗散性条件蕴含冯·诺依曼条件，从而蕴含 ℓ^2-稳定性 数值格式 (1.7)，因为傅里叶分析蕴含

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad \|\mathscr{L}^n\|_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}))} = \|F^n\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)} = 1.$$

更准确地说，加入由 (1.10) 给出的扩散性条件，意味着整个格点上的数值格式 (1.7 $\mathbb{Z}$ 实际上是 ℓ^q-稳定的，对所有 $q\in[1,+\infty]$均成立。因此，假设 1 得到验证，为研究半直线上的数值格式 (1.3在 ℓ^q-拓扑下的稳定性提供了一个出发点。

在本文其余部分中，集合 $\mathcal{O}$ 在图 1 中表示的区域对应于曲线 $F(\mathbb{S}^1)$ 的外部，即 $\mathbb{C}\backslash F(\mathbb{S}^1)$ 的无界连通分支。以下引理是假设 1的推论。

引理 1.1。 若假设 *1* 得到验证，则 $\alpha \in]-p,\ 0[$。

引理 1.1 的证明与 [CF22 中引理 6] 的证明完全类似，因此我们省略证明。引理 1.1 的结论与著名的库朗–弗里德里希斯–刘条件（参见 [CFL28]）相当，并意味着 $p\geq 1$。因此，满足假设 1.3 的数值格式（1 必须利用 j 右侧的信息来计算 u_j^{n+1} 。

1.3.2 Lopatinskii 行列式、谱假设与主要结果

我们为 $z\in\mathbb{C}$ 引入伴随矩阵

$$\mathbb{M}(z) := \begin{pmatrix} \frac{z\delta_{p-1,0}-a_{p-1}}{a_p} & \frac{z\delta_{p-2,0}-a_{p-2}}{a_p} & \cdots & \cdots & \frac{z\delta_{-r,0}-a_{-r}}{a_p} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+r}(\mathbb{C}). \tag{1.11}$$

由于 r、$p \geq 1$ 和 $a_{-r}a_p \neq 0$，我们发现矩阵 $\mathbb{M}(z)$ 定义良好且可逆，对所有 $z \in \mathbb{C}$ 均成立，并且它关于 z全纯。矩阵 $\mathbb{M}(z)$ 出现在我们研究 $\mathcal{H}_q$的特征值问题时：

$$(zId_{\mathcal{H}_q} - \mathcal{T})u = 0.$$

这也将在后文第 4 节中用于描述所谓的空间格林函数。以下引理归功于 Kreiss（参见 [Kre68]），它精确描述了当 $\mathbb{M}(z)$ 属于 z 时，矩阵 $\mathcal{O} \cup \{1\}$的谱。

引理 1.2（谱分解）。• 对于 $z \in \mathbb{C}$，$\kappa \in \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{M}(z)$ 的特征值，当且仅当 $\kappa \neq 0$ 且

$$F(\kappa) = z.$$

- 对于 $z \in \mathcal{O}$，矩阵 $\mathbb{M}(z)$ 具有
  - 在 $\mathbb{S}^1$ 上没有特征值，- 在 $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ 中有 r 个特征值（称为稳定特征值），- 在 $\mathcal{U}$ 中有 p 个特征值（称为不稳定特征值）。
- 矩阵 $\mathbb{M}(1)$ 有 1 作为单特征值，在 $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ 中有 r 个特征值，在 $\mathcal{U}$ 中有 $p-1$ 个特征值 .

引理的完整证明见 [CF21，引理 3]。

对于 $z \in \mathcal{O}$，我们将 $E^s(z)$（分别将 $E^u(z)$）定义为 $\mathbb{M}(z)$的稳定（分别为不稳定）子空间，该子空间对应于由 $\mathbb{M}(z)$的广义特征向量张成的、与 $\mathbb{D}$（分别与 $\mathcal{U}$）中的特征值相关联的子空间。因此，根据引理 1.2，我们知道子空间 $E^s(z)$（分别为 $E^u(z)$）的维数为 r（分别为 p），并且有分解

$$\mathbb{C}^{p+r} = E^s(z) \oplus E^u(z). \tag{1.12}$$

相应的投影算子记为 $\pi^s(z)$ 和 $\pi^u(z)$。这些线性映射与 $\mathbb{M}(z)$ 对易，并且关于 $z \in \mathcal{O}$ 全纯地依赖（见 [Kat95]）。

我们现在需要澄清 $z = 1$ 附近的情况。利用引理 1.2，我们知道 1 是 $\mathbb{M}(1)$ 的一个单特征值并且矩阵 $\mathbb{M}(1)$ 有 r 特征值在 $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ 并且 $p-1$ 特征值在 $\mathcal{U}$。因此，存在一个半径 $\widetilde{\varepsilon}_0 > 0$ 和一个全纯函数 $\kappa : B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1) \to \mathbb{C}$ 使得 $\kappa(1) = 1$ 并且对于所有 $z \in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$，$\kappa(z)$ 是 $\mathbb{M}(z)$ 的一个单特征值，$\mathbb{M}(z)$ 有 r 特征值不同于 $\kappa(z)$ 在 $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ 并且 $p-1$ 特征值不同于 $\kappa(z)$ 在 $\mathcal{U}$。于是我们有对于 $z \in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$，向量

$$R_c(z) := \begin{pmatrix} \kappa(z)^{p+r-1} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{p+r}$$

是与 $\kappa(z)$ 相关联的 $\mathbb{M}(z)$的非零特征向量。对于 $z \in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$，我们定义 $E^c(z) := \mathrm{Span}(R_c(z))$，并将 $E^{ss}(z)$（分别为 $E^{su}(z)$）定义为 $\mathbb{M}(z)$的严格稳定（分别为严格不稳定）子空间，该子空间对应于 $\mathbb{D}$（分别为 $\mathcal{U}$）中与 $\kappa(z)$不同的特征值所对应的 $\mathbb{M}(z)$ 的广义特征向量张成的子空间。因此，我们知道 $E^{ss}(z)$（分别为 $E^{su}(z)$）的维数为 r（分别为 $p-1$），并且有分解

$$\mathbb{C}^{p+r} = E^{ss}(z) \oplus E^c(z) \oplus E^{su}(z). \tag{1.13}$$

相应的投影算子记为 $\pi^{ss}(z)$、$\pi^c(z)$ 和 $\pi^{su}(z)$。同样，这些线性映射与 $\mathbb{M}(z)$可交换，并且关于 $z \in \mathcal{O}$ 全纯依赖（见 [Kat95]）。

对于 $z \in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1) \cap \mathcal{O}$，引理 1.2 蕴含 $\kappa(z) \in \mathcal{U}$。换句话说，“中心”特征值 $\kappa(z)$接近于 1 来自 $\mathcal{U}$ 当 $z \in \mathcal{O}$ 趋近于 1。因此，对于 $z \in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1) \cap \mathcal{O}$，我们可以将谱的两个分解 (1.12) 和 (1.13) 联系起来 $\mathbb{M}(z)$ 并观察到

$$E^s(z) = E^{ss}(z) \quad \text{and} \quad E^u(z) = E^c(z) \oplus E^{su}(z), \tag{1.14}$$

so

$$\pi^s(z) = \pi^{ss}(z) \quad \text{and} \quad \pi^u(z) = \pi^c(z) + \pi^{su}(z).$$

这允许我们全纯地延拓向量空间 E^s 和 E^u 和投影算子 π^s 和 π^u 在 $B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$ 的一个邻域内。即使我们必须取 $\widetilde{\varepsilon}_0 > 0$ 更小，我们也可以引入一族全纯函数

$$e_1, \ldots, e_r : B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1) \to \mathbb{C}^{p+r}$$

使得对于所有 $z \in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$，族 $(e_1(z)\ldots,\ e_r(z))$ 是 $E^s(z) = E^{ss}(z)$（参见 [Kat95，第 II.4.2 节。]）。随后，我们通过以下公式定义所谓的 Lopatinskii 行列式 Δ 在 1 附近：

$$\forall z \in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1), \quad \Delta(z) := \det(\mathcal{B}e_1(z), \ldots, \mathcal{B}e_r(z)), \tag{1.15}$$

其中 $\mathcal{B}$ 矩阵定义为（1.4）。这样，函数 Δ 全纯地依赖于 z 在 1附近。Lopatinskii 行列式 Δ 确实取决于基底的选择 （e_1，.....，e_r），但我们只关心它的零点，而这些零点与基底的选择无关。

我们需要指出，对于所有 $\underline{z} \in \mathcal{O}$，我们还可以定义 $E^s(z)$ 的一个全纯基，$\Delta(z)$ 从而得到 z 在 $\underline{z}$邻域内的一个Lopatinskii行列式。Lopatinskii 行列式在我们的情形中扮演着与矩阵的特征多项式类似的角色，因为它可以用来检测算子的特征值$\mathcal{T}$。数值格式（1.3）的稳定性取决于 Lopatinskii 行列式的消失点Δ。下面概述一些术语和结果（参见 [GKO13]）：

▶ 所谓的 Godunov-Ryabenkii 条件引入于 [GR63] 指出，Lopatinskii 行列式在 $\mathcal{U}$上不为零，即算子 $\mathcal{T}$作用于 $\mathcal{H}_q$ 时，在闭单位圆盘之外没有任何特征值。这是数值格式（1.3）的必要稳定性条件。

▶ 如果 Lopatinskii 行列式在整个集合 $\overline{\mathcal{U}}$上均不为零，这意味着满足所谓的一致Kreiss-Lopatinskii条件（参见 [GKS72、Cou11]）。在这种情况下， [Wu95]中的主要结果表明，算子 $\mathcal{T}$在 $\mathcal{H}_2$ 上是幂有界的。

▶ 在 [CF21], 中，作者研究了正半直线上标量右行（$v > 0$）输运方程的显式数值格式稳定性（1.1）。作者假设 Godunov-Ryabenkii 条件成立，且 Lopatinskii 行列式在 $\mathbb{S}^1$ 上有有限个不属于 $F(\mathbb{S}^1)$ 的简单零点（即这些零点不同于 1）。因此，一致Kreiss-Lopatinskii条件并不成立，但作者仍证明了半群估计，由此可得数值格式（1.3）对所有 $q \in [1, +\infty]$均满足 ℓ^q-稳定性。

In this paper, we make the following assumption.

假设2. • 我们假设对于所有 $z \in \overline{\mathcal{U}} \setminus \{1\}$，有

$$E^s(z) \oplus \ker \mathcal{B} = \mathbb{C}^{p+r}.$$

In particular, t这意味着 ***Lopatinskii*** 行列式在集合 $\overline{\mathcal{U}} \setminus \{1$ 上处处不为零。 $\}$.

• 我们假设1 是 ***Lopatinskii*** 行列式的单零点，即。

$$\Delta(1) = 0, \quad \Delta'(1) \neq 0.$$

我们还将考虑 $\widetilde{\varepsilon}_0$ 足够小，使得函数 Δ 仅在1处消失，这意味着

$$\forall z \in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1) \setminus \{1\}, \quad E^s(z) \oplus \ker \mathcal{B} = \mathbb{C}^{p+r}.$$

注记 1. 我们想对假设 1作两点说明。首先，注意到对于 $z \in \mathcal{O} \cup B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$，有 维数 $E^s(z) = r$ 且 核的维数 $\mathcal{B} = p$，值得注意的是，为后续讨论（见引理 4.1），有

$$E^s(z) \oplus \ker \mathcal{B} = \mathbb{C}^{p+r} \Leftrightarrow E^s(z) \cap \ker \mathcal{B} = \{0\}.$$

这也意味着 $\mathcal{B}_{|E^s(z)}$ 是从 $E^s(z)$ 到 $\mathbb{C}^r$ 的同构。

其次，我们注意到，对于某个具体的数值格式选择，证明假设 2 成立可能颇具挑战性（简单例子见第 2 节）。我们想指出的是，在最近的论文[BLBS22、BLBS23], 中，尽管研究针对的是应用于右行（$v > 0$）输运方程（1.1）的数值格式，而这与本文的研究并不一致，但作者通过计算Lopatinskii 行列式某个修正版的零点个数，提出了一种可靠的方法来研究一致Kreiss-Lopatinskii条件的验证 Δ。

让我们确定假设2 相较于之前所述结果的地位。如果假设2 得到验证，那么Godunov-Ryabenkii 条件得到验证，但一致Kreiss-Lopatinskii条件不成立，即Lopatinskii 行列式 Δ 在集合 $\mathcal{U}$ 上不为零，但它在单位圆上为零，更确切地说，在1处为零，位于 $\mathcal{T}$的本质谱中。类似情形在 [CF21] 中得到了处理，但存在两个差异：

- 在 [CF21], 中，输运方程（1.1）使用数值格式（1.3）进行逼近，该方程是右行的（即 $v>0$），这与本文处理的情况直接相反。这种变化的主要影响是，矩阵 $\mathbb{M}(z)$ 的"中心"特征值 $\kappa(z)$ 在 $z\in\mathcal{O}$ 接近 1时接近 1，不再来自 $\mathcal{U}$，而是来自开单位圆盘 $\mathbb{D}$。这反过来改变了关于矩阵 $\mathbb{M}(z)$ 的稳定子空间和不稳定子空间的等式（1.14）。

- 然而，第二个也是主要的区别在于 Lopatinskii 行列式零点的位置Δ 这会直接影响所谓空间格林函数的分析。空间格林函数是一种有用的工具，将在第 4 节中定义。在 [CF21], 中，该函数 Δ 可以在单位圆上的有限个点处取零，但不会在点 1处取零。这使作者能够将空间格林函数全纯延拓到兴趣点 1的邻域内，并穿过 $\mathcal{T}$的本质谱。然而，在本文中，我们假设 1 是 Lopatinskii 行列式的一个单零点 Δ 这使得我们只能将空间格林函数亚纯延拓到 1 的邻域内（见引理 4.3），从而使计算更加困难。还值得指出的是，我们在假设 2 中所考虑的这种谱构型——在 1 处有一个位于本质谱中的单特征值—— $\mathcal{T}$也出现在守恒律近似的离散激波剖面的线性稳定性研究中（见 [Ser07、God03]）。在引入时间格林函数之后，我们将在备注2 中对后一点作进一步说明。

现在的目标是研究在假设 1.3 下该格式的稳定性（1 和 2）。本文的主要结果如下定理所述。

定理1。 我们假设条件 *1* 和 *2* 均已验证。

- 如果 $\mathcal{B}\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}^T\in\mathcal{B}E^s(1)$, 则数值格式 (1.3) 是 ℓ^q-稳定对于所有 $q\in[1,+\infty]$ *(*见定义*1* 的 ℓ^q-稳定性*)*。

- 如果 $\mathcal{B}\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}^T\notin\mathcal{B}E^s(1)$，则数值格式 (1.3) 是 ℓ^1-稳定但 ℓ^q-不稳定对于所有 $q\in]1,\ +\infty]$。此外，对于所有 $q\in]1,\ +\infty]$，存在一个正的常数 C 使得

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \|\mathcal{T}^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_q)}\geq Cn^{1-\frac{1}{q}}. \tag{1.16}$$

这与 [CF21] 所证明的结果直接相悖，该结果表明，Lopatinskii 行列式的单零点 Δ 位于单位圆上且不同于 1 并不会阻碍 ℓ^q-稳定性数值格式（1.3）对所有 $q\in[1,+\infty]$。我们注意到，假设 2 意味着 $\mathcal{B}E^s$（1）是 $\mathbb{C}^r$ 的一个超平面。因此，条件 $\mathcal{B}$（1 ...1）$^T\in\mathcal{B}E^s$（1）"很少"得到验证。在第 2节中，我们将针对每种可能性给出一个具体例子。

1.3.3 时间格林函数

定理 1 的证明依赖于对与 $\mathcal{T}$相关的时间格林函数的精确描述，该描述见下文定理 2 。我们首先定义与 $\mathcal{T}$相关的时间格林函数。

对于所有 $j_0\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，我们引入狄拉克质量 $\delta_{j_0}\in\bigcap_{q\in[1,+\infty]}\mathcal{H}_q$，使得

$$\forall j\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad (\delta_{j_0})_j:=\begin{cases}1 & \text{if } j=j_0,\\ 0 & \text{else.}\end{cases} \tag{1.17}$$

然后，我们将算子 $\mathcal{T}$ 的时间格林函数 $\mathcal{G}(n,j_0,j)$ 定义为

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathcal{G}(n,j_0,\cdot):=\mathcal{T}^n\delta_{j_0}\in\bigcap_{q\in[1,+\infty]}\mathcal{H}_q. \tag{1.18}$$

对于任意初始条件 $u^0\in\mathcal{H}_q$，方程 $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ （1.3）的解可写为

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall j\geq 1-r,\quad u_j^n=(\mathcal{T}^nu^0)_j=\sum_{j_0\geq 1}u_{j_0}^0\mathcal{G}(n,j_0,j). \tag{1.19}$$

因此，时间格林函数 $\mathcal{G}(n,\ j_0,\ j)$ 使我们能够分析数值格式（1.3）的解随时间的演化。注意到序列 δ_{j_0}和 $\mathcal{G}(n,\ j_0,\ \cdot)$ 具有有限支撑。更确切地说，我们递归地证明：

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall j_0,j\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad j-j_0\notin\{-np,\dots,nr\}\Rightarrow\mathcal{G}(n,j_0,j)=0.$$

正如我们引入了算子 $\mathcal{T}$的狄拉克质量和时间格林函数 $\mathcal{G}(n, j_0, j)$一样，我们
~ ~引入卷积算子 $\mathscr{L}$ 的狄拉克质量 $\delta \in \bigcap_{q\in[1,+\infty]} \ell^q(\mathbb{Z})$ 和时间格林函数 $\mathcal{G}(n, j)$，该卷积算子定义为：

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \widetilde{\delta}_j := \begin{cases} 1 & \text{if } j = 0, \\ 0 & \text{else,} \end{cases} \tag{1.20}$$

and

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \widetilde{\mathcal{G}}(n, \cdot) := \mathscr{L}^n \widetilde{\delta} \in \bigcap_{q\in[1,+\infty]} \ell^q(\mathbb{Z}). \tag{1.21}$$

我们还引入函数 $H^\beta_{2\mu}, E^\beta_{2\mu}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$，其中 $\mu \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 和 $\beta \in \mathbb{C}$ 的实部为正，它们定义为

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad H^\beta_{2\mu}(x) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} e^{-\beta u^{2\mu}} du, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad E^\beta_{2\mu}(x) &:= \int_x^{+\infty} H^\beta_{2\mu}(y) dy. \end{aligned} \tag{1.22}$$

下面我们将回顾为什么 $H^\beta_{2\mu} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$。对于函数 $H^\beta_{2\mu}$，我们称之为广义高斯函数；对于函数$E^\beta_{2\mu}$，我们称之为广义高斯误差函数，因为对于 $\mu = 1$，我们有

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H^\beta_2(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\beta}} e^{-\frac{x^2}{4\beta}}.$$

Noticing 由于函数 $H^\beta_{2\mu}$ 是 $u \mapsto e^{-\beta u^{2\mu}}$ 的傅里叶逆变换，我们观察到

$$\lim_{x\to-\infty} E^\beta_{2\mu}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H^\beta_{2\mu}(y) dy = 1. \tag{1.23}$$

~算子的时间格林函数 $\mathcal{G}(n, j)$ $\mathscr{L}$ 已在 [Tho65、DSC14、RSC15、CF22、Coe22]中得到充分研究。例如，在假设1下，已知族 $\left(\widetilde{\mathcal{G}}(n, \cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\ell^1(\mathbb{Z})$中有界。此外，在 [RSC15、Coe22], 中证明了，当 n 变大时，~$\mathcal{G}(n, j)$ n 的渐近行为的主导项是以速度 α传播的广义高斯波。例如， [RSC15] 中的主要结果给出：

$$\widetilde{\mathcal{G}}(n, j) = \frac{1}{n^{\frac{1}{2\mu}}} H^\beta_{2\mu}\left(\frac{j - n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right) + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right) \tag{1.24}$$

where the remainder is uniform with respect to $j \in \mathbb{Z}$.

在本文中，我们旨在证明以下定理，该定理描述了时间格林函数 $\mathcal{G}(n, j_0, j)$ 的长时间行为：

定理2。 在假设*1* 和 *2*下，存在两个序列 $(\mathcal{R}^c(j))_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 和 $(\mathcal{R}^u(j_0,\ j))_{j_0,\ j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 以及两个常数 C，$c > 0$ 使得，如果我们对所有 n，j_0，$j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$定义，

$$\mathrm{Err}(n, j_0, j) := \mathcal{G}(n, j_0, j) - \widetilde{\mathcal{G}}(n, j - j_0) - \mathbb{1}_{np\geq j_0} \mathcal{R}^u(j_0, j) - E^\beta_{2\mu}\left(\frac{j_0 + n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right) \mathcal{R}^c(j), \tag{1.25}$$

then, we have that:

$$\forall n, j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad |\mathrm{Err}(n, j_0, j)| \leq \frac{Ce^{-cj}}{n^{\frac{1}{2\mu}}} \exp\left(-c\left(\frac{|n\alpha + j_0|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right). \tag{1.26}$$

Furthermore, there exist two positive constants C, c such that

$$\forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad |\mathcal{R}^u(j_0, j)| \leq Ce^{-c(j+j_0)} \quad \textit{and} \quad |\mathcal{R}^c(j)| \leq Ce^{-cj}. \tag{1.27}$$

最后，序列$\mathcal{R}^c$ 满足

$$\mathcal{R}^c = 0 \Leftrightarrow \mathcal{B}(1 \dots 1)^T \in \mathcal{B}E^s(1). \tag{1.28}$$

序列 $\mathcal{R}^u(j_0,j)$ 和 $\mathcal{R}^c(j)$ 分别对应于边界层，这些边界层分别与式 (1.13) 中定义的向量空间 $E^{su}(1)$ 和 E^c (1) 相关。定义 (1.25) 中 $\mathrm{Err}(n,j_0,j)$ 的 $\mathcal{R}^u(j_0,j)$ 和 $\mathcal{R}^c(j)$ 前面的系数 $\mathbb{1}_{np\geq j_0}$ 和 $E^{\beta}_{2\mu}\left(\frac{j_0+n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)$ 可称为"激活"系数。在较小的时间 n 下，它们接近于 0；随着 n 变大，它们逐渐接近 1。

让我们来描述定理2所阐述的时间格林函数 $\mathcal{G}(n,j_0,j)$。对于初始条件 $u^0=\delta_{j_0}$，数值格式(1.3)的解 $\mathcal{G}(n,j_0,j)$ 在足够小的时间 n 内不会感知到边界条件，因为数值格式的模板是有限的。因此，它与 $\widetilde{(\mathcal{G}(n,j-j_0))_{j\geq 1}}$ 具有类似初始条件的数值格式(1.7)的解相一致。于是，(1.24)告诉我们，在较小的时间 n内，时间格林函数 $\mathcal{G}(n,j_0,j)$ 接近于广义高斯波。边界层 $\mathcal{R}^c$和 $\mathcal{R}^u$ 尚未被激活。然而，当时间 n 接近$-\frac{j_0}{\alpha}$时，与 $\widetilde{\mathcal{G}(n,j-j_0)}$ 相关的广义高斯波抵达边界，边界层 $\mathcal{R}^u(j_0,j)$ 和 $\mathcal{R}^c(j)$开始被激活。当 n 相对于$-\frac{j_0}{\alpha}$变大时，大部分广义高斯波将穿过边界，边界层 $\mathcal{R}^u(j_0,j)$ 和 $\mathcal{R}^c(j)$ 将被完全激活。

我们可以直观地从定理 1 推导出定理 2 当边界层 $\mathcal{R}^c$ 不为零时。导致 ℓ^1-稳定性和 ℓ^q-不稳定性（对于 $q\in]1,\ +\infty]$ 数值格式（1.3）的决定性因素是边界层 $\mathcal{R}^c$相对于 j_0 的独立性。如果我们考虑初始条件u^0，我们期望看到一个边界层

$$\left(\sum_{j_0\geq 1}u^0_{j_0}\right)\mathcal{R}^c$$

在大时间 n 出现，因为等式（1.19）和定理2。我们将在第 3节中澄清证明。注 2。 我们在此做两点注记:

• 应该可以证明定理 1 和定理 2 的推广，使用放宽的假设 2 ，该假设允许额外的模为 1 的简单零点对于 Lopatinskii 行列式 Δ 无论是否嵌入本质谱。这可以通过结合本文和 [CF21]的技术来实现。

• 如前所述，具有边界条件的双曲型偏微分方程近似的研究，与守恒律近似的离散激波剖面研究之间存在联系。假设 2 中给出的谱构型具有一个位于 1 处的单特征值，而该点属于本质谱 $\mathcal{T}$；这种情形也出现在 Lax 激波的守恒律近似之离散激波剖面的线性稳定性研究中（参见 [God03]）。采用与定理 2 类似的分析，更具体地说，进行类似于第 5 节中的计算，或许可以改进 [God03]对定常离散激波剖面的时间格林函数所作的描述。这可能有助于论证定常离散激波剖面的线性（乃至非线性）稳定性。

1.4 论文结构

下面介绍本文的结构。

首先，在第 2 节中，我们通过一个带边界条件的 Lax-Friedrichs 格式例子，对定理 1 和 2 进行数值验证，使得

$$\mathcal{B}(1\dots 1)^T\notin\mathcal{B}E^s(1)$$

这意味着，对于所有 $q\in]1、\ +\infty]$，该数值格式将是 ℓ^1-稳定的，但 ℓ^q-不稳定。我们计算时间格林函数 $\mathcal{G}(n,j_0,j)$，并观察边界层 $\mathcal{R}^c(j)$ 的形成。然后，我们评估误差项 $\mathrm{Err}(n,j_0,j)$ 上估计式 (1.26)的准确性，以及作用于 $\mathcal{H}_q$ 的族 $(\mathcal{T}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的增长速率 (1.16)。接着，我们考虑带有边界条件的 O3格式例子，使得

$$\mathcal{B}(1\dots 1)^T\in\mathcal{B}E^s(1)$$

which implies that 对于所有 $q\in[1,+\infty]$，该格式都是 ℓ^q-稳定的。我们将通过数值方法验证这一结论。.

在第3节，我们给出定理1 的证明，同时假设定理2 已得到证明。

本文的主要部分将用于证明定理2，证明将采用一种称为空间动力学的方法，该方法也用于 [ZH98、God03、CF22、CF21、Coe22]。在第4节中，我们研究算子 $\mathcal{T}$ 和 $\mathscr{L}$ 的谱，并定义这些算子的空间格林函数。随后，我们给出两个空间格林函数之差的精确估计，并将其在1的邻域内作亚纯延拓。在引理4.3中，我们还定义定理 $\mathcal{R}^u$ 和 $\mathcal{R}^c$ 2中出现的边界层，并证明断言（1.28）。

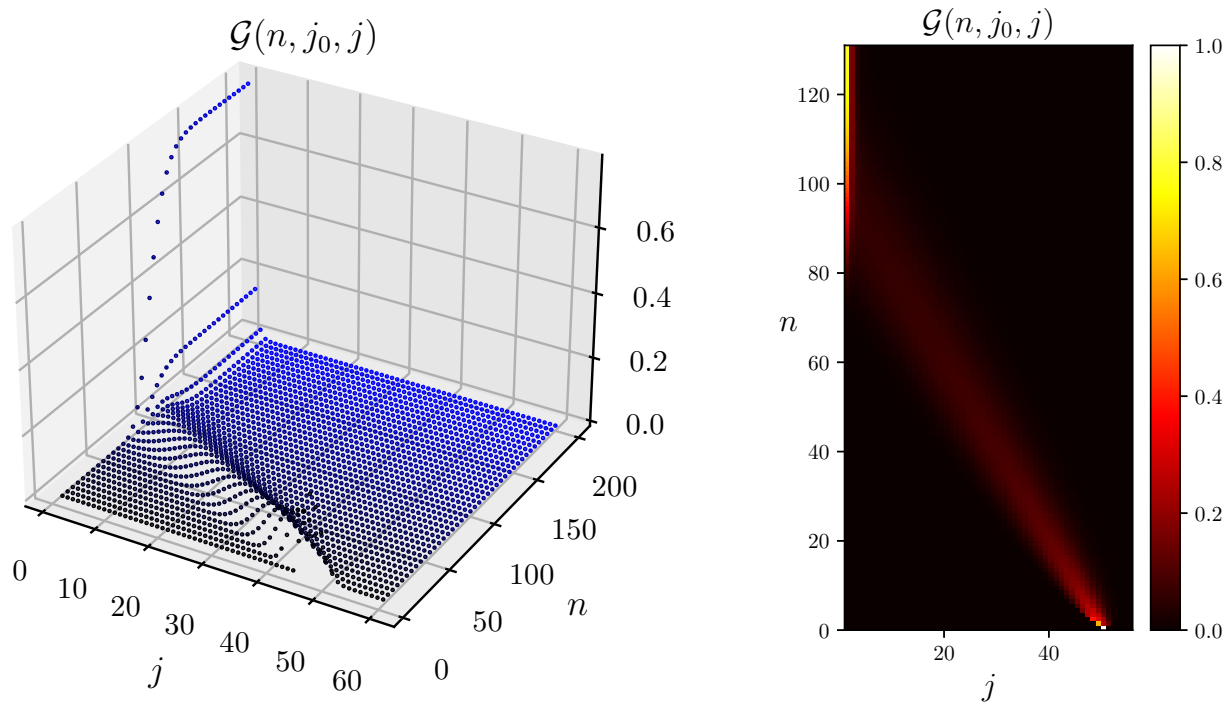

图2：我们考虑修正Lax-Friedrichs格式（2.1）以及参数 $\alpha = -\frac{1}{2}$, $D = \frac{3}{4}$和$b = 5$。两幅图均表示时间格林函数 $\mathcal{G}(n, j_0, j)$ 对于 $j_0 = 50$ 它是数值格式（2.1）对于初始条件 $u^0 = \delta_{j_0}$。

定理2的证明将在第5节中给出。该方法将通过空间格林函数来表示~时间格林函数 $\mathcal{G}(n, j_0, j) - \mathcal{G}(n, j - j_0)$之差。利用第4节得到的结果，我们随后将证明 $\mathrm{Err}(n, j_0, j)$ 的界。根据比值 j_0/n，我们预计会出现三种不同情况：j_0 相较于 n 较大（即 $j_0 > np$），j_0 相较于 n较小（即$j_0 < -\frac{n\alpha}{2}$），以及 j_0接近 $-n\alpha$（即 $j_0 \in \left[-\frac{n\alpha}{2}, np\right]$）。最后一种情况将构成证明的主要部分。

2 Numerical result

2.1 修正Lax-Friedrichs格式的不稳定边界条件例子

我们考虑用于输运方程的修正Lax-Friedrichs格式（1.1）

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad u_j^{n+1} &= a_{-1}u_{j-1}^n + a_0 u_j^n + a_1 u_{j+1}^n, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0^n &= b u_1^n, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $p = r = 1$、$\alpha := \lambda v$、$D > 0$，系数 $b \in \mathbb{R}$ 决定边界条件以及

$$a_{-1} = \frac{D+\alpha}{2}, \quad a_0 = 1 - D, \quad a_1 = \frac{D-\alpha}{2}.$$

我们假设 $D \neq -\alpha$，因此三个系数 a_{-1}、a_0 和 a_1 均非零。由（F 1.9）定义的符号满足

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(e^{it}) = 1 - D + D\cos(t) - i\alpha\sin(t).$$

如果我们考虑 $\alpha^2 < D < 1$，则有：

$$\forall t \in [-\pi, \pi]\setminus\{0\}, \quad |F(e^{it})| < 1.$$

此外，我们还有

$$F(e^{it}) \underset{t\to 0}{=} \exp\left(-i\alpha t - \beta t^2 + o(t^2)\right)$$

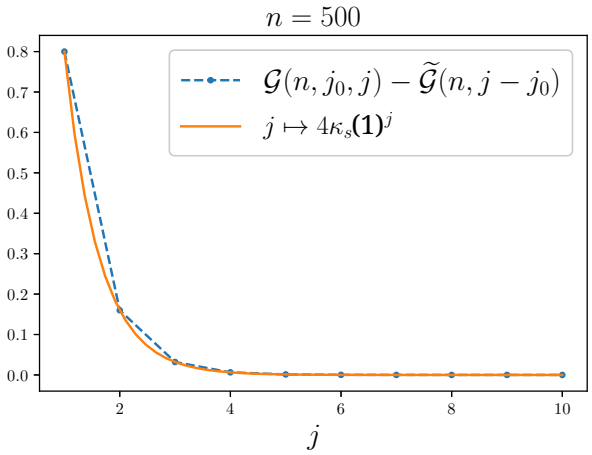

图 3：我们考虑具有参数 2.1 的修正Lax-Friedrichs格式（$\alpha = -\frac{1}{2}$， $D = \frac{3}{4}$和 $b = 5$。~我们将时间格林函数之差 $\mathcal{G}(n,\ j_0,\ j) - \mathcal{G}(n,\ j - j_0)$ 在 $j_0 = 50$ 和 $n = 500$时表示出来。由于 n 相较于 $-\frac{j}{\alpha}$较大，因此只剩下边界层 $\mathcal{R}^c$，我们可以将其识别出来。

其中 β:= $\frac{D-\alpha^2}{2} > 0$ 和 μ： $= 1$ 按照我们对假设 1的记号。因此，假设 1 已验证 d.

现在我们将选择系数 b，使得假设 2 也得到验证。数值格式 ($\mathcal{B}$ 的矩阵及其核为2.1)

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -b & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \ker \mathcal{B} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}.$$

现在我们需要确定 $E^s(z)$ 对于 $z \in \mathcal{O}$ 和 $z = 1$。引理 1.2 意味着，对于 $z \in \mathcal{O}$，矩阵 $\mathbb{M}(z)$ 有一个特征值 $\kappa_s(z) \in \mathbb{D}$ 以及一个特征值 $\kappa_u(z) \in \mathcal{U}$；对于 $z = 1$，矩阵 $\mathbb{M}(1)$ 有一个特征值$\kappa_s(1) \in \mathbb{D}$ 以及 $\kappa_u(1) := 1$ 是 $\mathbb{M}(1)$ 的单特征值。因此我们有

$$\forall z \in \mathcal{O} \cup \{1\}, \quad E^s(z) = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} \kappa_s(z) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

我们还注意到，矩阵 $\mathbb{M}(z)$ 的行列式恒等于$\frac{a_{-1}}{a_1}$。因此，对于 $z \in \mathcal{O} \cup \{1\}$,

$\kappa_s\ z\ = \kappa_s$ z ( ) (1) 当且仅当 1 是 $\mathbb{M}(\,)$ 的特征值，而这仅在 $z = 1$ 时成立。此外，Lopatinskii 行列式 Δ 在 1 的某个邻域内等于 $1 - b\kappa_s(z)$。为满足假设 2，~~显然~~我们选择 $b = {}_{\kappa_s}{}^{1}{}_{1()} = \frac{a_1}{a_{-1}}$，使得 1 是 Δ 的单零点，并且

$$\forall z \in \mathcal{O}, \quad \ker \mathcal{B} \cap E^s(z) = \{0\}.$$

因此，假设2 得到满足。此外，我们注意到

$$\mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - b \neq 0 \quad \text{and} \quad \mathcal{B}E^s(1) = \{0\}. \tag{2.2}$$

由定理 1可知，数值格式 (2.1) 对所有 ℓ^1-稳定，但对所有 ℓ^q-不稳定，其中 $q \in]1,\ +\infty$].

现在考虑参数为 $\alpha = -\frac{1}{2}$、 $D = \frac{3}{4}$ 和 $b = 5$ 的数值格式 (2.1)。因此，假设1和2均得到满足。我们希望观察定理2中给出的时间格林函数 $\mathcal{G}(n, j_0, j)$ 的分解。在图2中，我们考虑 $j_0 = 50$，并对初始数据 $u^0 = \delta_{j_0}$ 应用数值格式 (2.1)，以计算由 (1.18) 定义的时间格林函数 $\mathcal{G}(n, j_0, j)$。注意，由于严格不稳定子空间 $E^{su}(1)$ 等于 $\{0\}$，根据定理2的证明，我们可以证明 $\mathcal{R}^u = 0$ （见引理4.3的证明）。此外，由于 (2.2)，定理2指出 $\mathcal{R}^c \neq 0$。在图2中，我们观察到:

- 对于 n 相较于 $-\frac{j_0}{\alpha}$较小时，我们观察到，时间格林函数 $\mathcal{G}(n, j_0, j)$ 呈现出~以速度 α传播的高斯波，这与预期一致；该时间格林函数 $\mathcal{G}(n, j - j_0)$ 由（1.21）计算得到。

- 当 n 接近 $-\frac{j_0}{\alpha}$时，高斯波到达边界并激活边界层 $\mathcal{R}^c$。

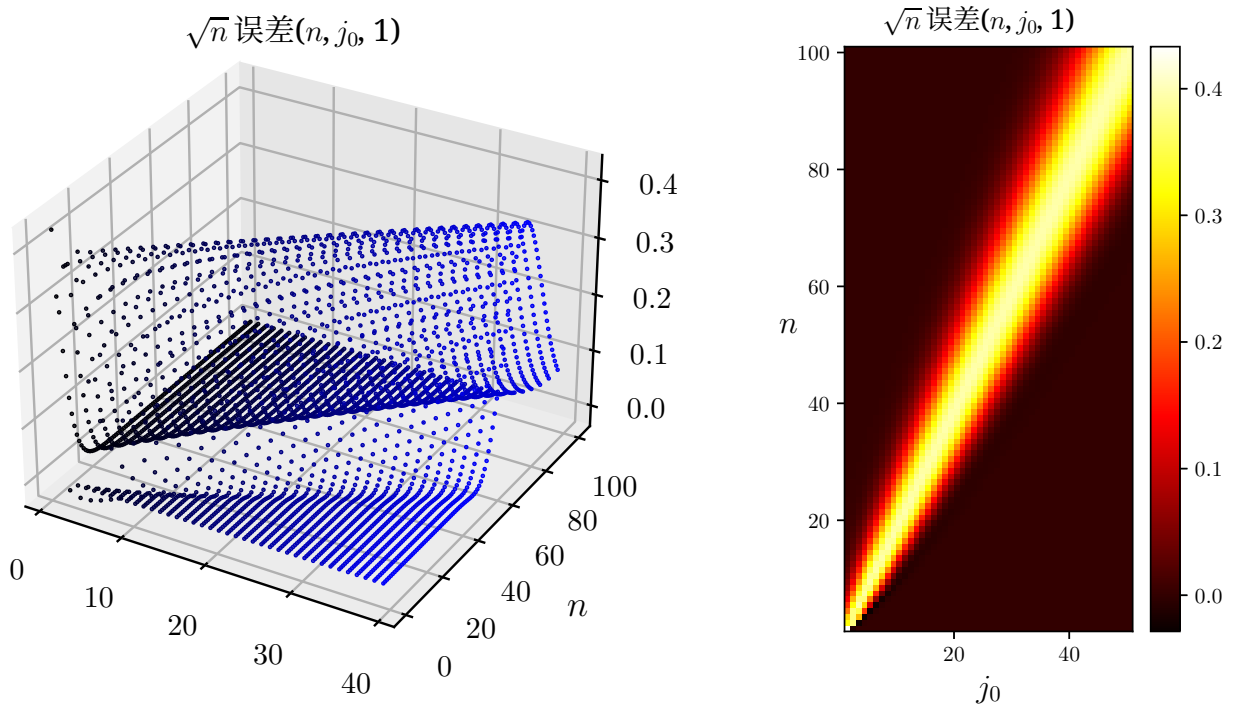

图 4：对于修正Lax-Friedrichs格式（2.1），我们绘制了由（$\sqrt{n}$误差$(n,\ j_0,\ j)$ 定义的误差项（1.25）。正如定理2所预测的，我们观察到 $\sqrt{n}$误差$(n,\ j_0,\ j)$ 满足形式为（2.3）的高斯估计。

- 当 n 远大于 $-\frac{j_0}{\alpha}$时，高斯波已越过边界。此外，$E_{2\mu}^{\beta}\left(\frac{j_0+n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)$接近 1，因此边界层 $\mathcal{R}^c$ 已完全激活。

在图 3中，我们考虑大时间步迭代 $n = 500$。定理2 指出，时间~格林函数 $\mathcal{G}(n,\ j_0,\ j) - \mathcal{G}(n,\ j - j_0)$ 之差应接近边界层 $\mathcal{R}^c$。这使我们能够确定本例中边界层 $\mathcal{R}^c$ 的表达式。

现在我们已经确定了边界层 $\mathcal{R}^c$，它不依赖于 j_0的取值，因此可以计算由误差$(n,\ j_0,\ j)$ 定义的误差项（1.25）。注意，对于数值格式（2.1），由于假设 1 和 2 成立，且 $\mu = 1$，定理 2 指出，存在两个正的常数 $C,\ c > 0$，使得项 误差$(n,\ j_0,\ j)$ 满足以下估计

$$\forall n, j_0, j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad \sqrt{n}|\mathrm{Err}(n, j_0, j)| \leq Ce^{-cj}\exp\left(-c\frac{|n\alpha + j_0|^2}{n}\right). \tag{2.3}$$

在图 4中，我们固定 $j = 1$ 并绘制 $\sqrt{n}\,\mathrm{Err}(n,\ j_0,\ 1)$ 关于 n 和 j_0的图像。结果支持定理 2中估计的尖锐性，显示出由（2.3）所预测的高斯行为。

最后，由于（2.2），定理 1 指出，对于 $q \in]1,\ +\infty]$，数值格式（2.1）是 ℓ^q-不稳定的，并且存在一个常数 $C > 0$ 使得算子族 $(\mathcal{T}^n)_{n\geq 0}$ 在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_q)$ 满足不等式（1.16），我们在此回顾如下

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\mathcal{T}^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_q)} \geq Cn^{1-\frac{1}{q}}. \tag{2.4}$$

为了数值验证不等式（2.4），我们将考虑对于 $J \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 初始条件 $u_J \in \mathcal{H}_q$ 定义为

$$u_J = \sum_{j_0=1}^{J} \delta_{j_0} \tag{2.5}$$

并计算解 $(\mathcal{T}^n u_J)_{n\in\mathbb{N}}$ 数值格式（2.1）。

- 在图的左侧 5中，我们选取 $q = +\infty$ 并针对若干种 J 的取值，表示$\|\mathcal{T}^n u_J\|_{\mathcal{H}_\infty}$ 与 $\|u_J\|_{\mathcal{H}_\infty}$ 的比值，该比值低于$\|\mathcal{T}^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\infty)}$。我们观察到$\|\mathcal{T}^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\infty)}$随 n线性增长，这支持了不等式（2.4）。

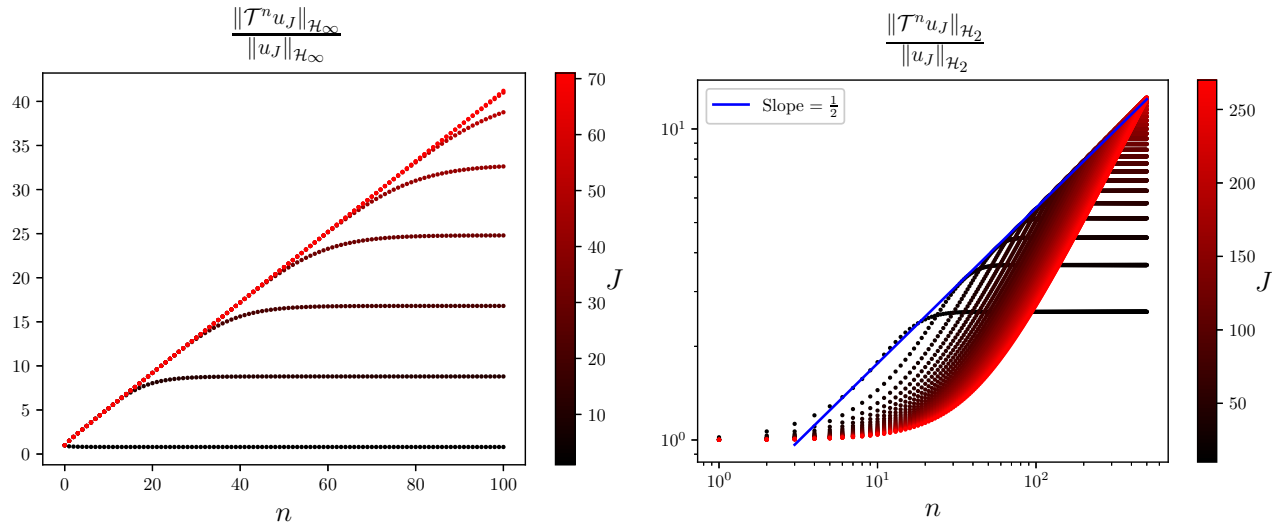

图5：我们考虑修正Lax-Friedrichs格式（2.1）。左侧：对于整数 J 的若干种取值，我们计算 $\|\mathcal{T}^n u_J\|_{\mathcal{H}_\infty}$ 与 ~~$\|u_J\|_{\mathcal{H}_\infty}$ 之间的~~比值随 n 变化的情况，其中序列 u_J 由（2.5）定义。固定 n 后，这给出了 $\|\mathcal{T}^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\infty}$ 的下界）。该图支持以下事实：$\|\mathcal{T}^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\infty)}$ 关于 n 以线性速率增长。右侧：对于整数 J 的若干种取值，我们计算 $\|\mathcal{T}^n u_J\|_{\mathcal{H}_2}$ 与 $\|u_J\|_{\mathcal{H}_2}$ 之间的比值随 n 变化的情况，其中序列 u_J 由（2.5）定义。固定 n 后，这给出了 ~~$\|\mathcal{T}^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2}$ 的下界）~~。对数尺度下的表示支持以下事实：$\|\mathcal{T}^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)}$ 以速率 $\sqrt{n}$ 增长。

- 图 5的右侧，我们选择 $q = 2$，并对于 J的若干种取值，在对数尺度下表示 $\|\mathcal{T}^n u_J\|_{\mathcal{H}_2}$与 $\|u_J\|_{\mathcal{H}_2}$的比值，该比值低于$\|\mathcal{T}^n\|_{\mathcal{L}\ (\mathcal{H}_2)}$。我们观察到$\|\mathcal{T}^n\|_{\mathcal{L}\ (\mathcal{H}_2)}$ 以 $\sqrt{n}$ 的速率增长，这也支持不等式（2.4）。

2.2 Example of stable boundary condition for the O3 scheme

我们考虑用于输运方程的 O3格式 (1.1)

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad u_j^{n+1} &= a_{-1}u_{j-1}^n + a_0 u_j^n + a_1 u_{j+1}^n + a_2 u_{j+2}^n, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0^n &= b_1 u_1^n + b_2 u_2^n, \end{aligned} \tag{2.6}$$

where $r = 1$ 和 $p = 2$, $\alpha := \lambda v$, 系数 b_1、$b_2 \in \mathbb{R}$ 决定边界条件 an d

$$a_{-1} := \frac{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)}{6}, \quad a_0 := \frac{(1-\alpha^2)(2+\alpha)}{2},$$
$$a_1 := -\frac{\alpha(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}, \quad a_2 := \frac{\alpha(1-\alpha^2)}{6}.$$

我们参考 [Des08] 对该格式在整条实线上的右向输运方程的详细分析$\mathbb{R}$。对于 $\alpha \in]-1,\ 0[$, 符号 F由 (1.9) 定义的满足 $F(1) = 1$和

$$\forall \kappa \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}, \quad |F(\kappa)| < 1.$$

Furthermore, there exists a constant $\beta > 0$ such that

$$F(e^{it}) \underset{t\to 0}{=} \exp\left(-i\alpha t - \beta t^4 + o(t^4)\right).$$

我们得到 $\mu = 2$ 按照假设 1的记号。因此，假设 1 得到满足 .

现在我们为系数 b_1 和 b_2 作出选择，以定义数值格式（2.6）的数值边界条件。引理 1.2 表明，对于 $z \in \mathcal{O}$，矩阵 $\mathbb{M}(z)$ 有一个特征值 $\kappa_s(z) \in \mathbb{D}$，并且

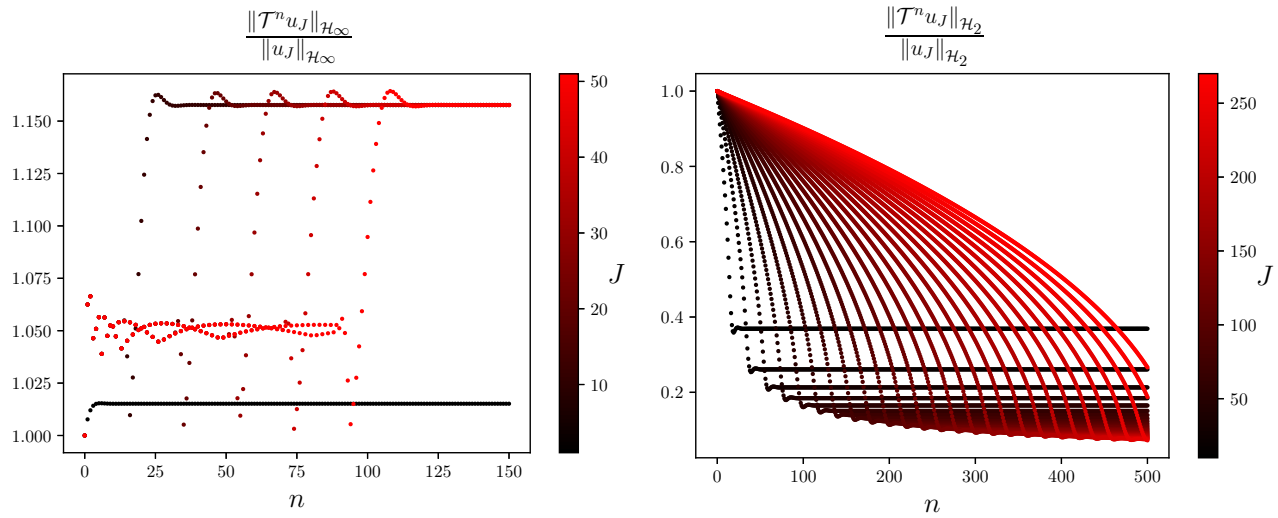

图6：对于 O3格式（2.6），对于整数 J的几种选择，我们计算了取决于 n的 $\|\mathcal{T}^n u_J\|_{\mathcal{H}_q}$与$\|u_J\|_{\mathcal{H}_q}$ 之间的比值，其中序列 u_J 由（2.5）定义。对于固定的 n，这给出了$\|\mathcal{T}^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_q}$的下界）。在左侧和右侧，我们分别选择 $q=+\infty$ 和 $q=2$。

两个（不一定互异的）特征值 $\kappa_u^1(z)$ $\kappa_u^2(z)\in\mathcal{U}$，并且对于 $z=1$，矩阵 $\mathbb{M}(1)$ 有一个特征值$\kappa_s(1)\in\mathbb{D}$，其中一个特征值 $\kappa_u^1(1)\in\mathcal{U}$，而 $\kappa_u^2(1)=1$ 是 $\mathbb{M}(1)$ 的单特征值。因此我们有

$$\forall z\in\mathcal{O}\cup\{1\},\quad E^s(z)=\operatorname{Span}\begin{pmatrix}\kappa_s(z)^2\\ \kappa_s(z)\\ 1\end{pmatrix}.$$

我们观察到，$\mathbb{M}(z)$的迹和行列式分别等于 $-\frac{a_1}{a_2}$和 $-\frac{a_{-1}}{a_2}$。这意味着，对于 $z\in\mathcal{O}\cup\{1\}$，$\kappa_s(z)=\kappa_s(1)$ 当且仅当 1 是 $\mathbb{M}(z)$ 的特征值，而这仅在 $z=1$ 时得到验证。我们选择

$$b_1:=\frac{1+\kappa_s(1)}{\kappa_s(1)},\quad b_2:=-\frac{1}{\kappa_s(1)}.$$

因此，Lopatinskii 行列式 Δ 在 1 的邻域内定义为：

$$\Delta(z):=1-b_1\kappa_s(z)-b_2\kappa_s(z)^2=-b_2(\kappa_s(z)-\kappa_s(1))(\kappa_s(z)-1).$$

因此，1 是 Lopatinskii 行列式的单零点，并且

$$\forall z\in\mathcal{O},\quad \ker\mathcal{B}\cap E^s(z)=\{0\}.$$

因此，假设2 成立。此外，我们观察到

$$\mathcal{B}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=1-b_1-b_2=0\in\mathcal{B}E^s(1).$$

由定理1 可知，对于所有 $q\in[1,+\infty]$，数值格式（2.1）都是 ℓ^q-稳定的。在图6中，我们针对 $J\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ 的几种取值，考虑由（2.5）定义的初始条件 $u_J\in\mathcal{H}_q$，并计算数值格式（2.6）的解 $(\mathcal{T}^n u_J)_{n\in\mathbb{N}}$。我们表示 $\|\mathcal{T}^n u_J\|_{\mathcal{H}_q}$ 与 $\|u_J\|_{\mathcal{H}_q}$ 的比值，该比值小于$\|\mathcal{T}^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_q)}$。在图6 左侧和图6右侧，我们分别取 $q=+\infty$ 和 $q=2$。这些图支持如下结论：$\|\mathcal{T}^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_q)}$ 在 n 中可以一致有界。

3 定理1 的证明：利用定理2

在本节中，我们将证明定理1，同时假设定理 2 已得到证明。定理 2 允许我们将时间格林函数 $\mathcal{G}(n,j_0,j)$ 分解如下

$$\forall n,j_0,j\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \mathcal{G}(n,j_0,j)=\mathrm{Err}(n,j_0,j)+\widetilde{\mathcal{G}}(n,j-j_0)+\mathbb{1}_{np\geq j_0}\mathcal{R}^u(j_0,j)+E^\beta_{2\mu}\left(\frac{j_0+n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)\mathcal{R}^c(j).\quad(3.1)$$

此外，对于 $q \in [1,+\infty]$, $u^0 \in \mathcal{H}_q$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\forall j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad (\mathcal{T}^n u^0)_j = \sum_{j_0 \geq 1} u^0_{j_0} \mathcal{G}(n, j_0, j). \tag{3.2}$$

我们通过引入对所有 $q \in [1,+\infty]$ 和 $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 的两个算子$K_{q,n}$,$L_{q,n} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_q)$，将算子 $\mathcal{T}^n$ 分解为两部分，定义为

$$\forall u^0 \in \mathcal{H}_q, \forall j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \qquad (K_{q,n}u^0)_j := \sum_{j_0 \geq 1} u^0_{j_0} \left(\mathrm{Err}(n, j_0, j) + \widetilde{\mathcal{G}}(n, j-j_0) + \mathbb{1}_{np \geq j_0} \mathcal{R}^u(j_0, j)\right),$$

$$\forall u^0 \in \mathcal{H}_q, \forall j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \qquad (L_{q,n}u^0)_j := \sum_{j_0 \geq 1} u^0_{j_0} E^{\beta}_{2\mu}\left(\frac{j_0 + n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right) \mathcal{R}^c(j),$$

Using (3.1) and (3.2), we have

$$\forall q \in [1,+\infty], \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \mathcal{T}^n = K_{q,n} + L_{q,n}. \tag{3.3}$$

首先，我们将证明，对于所有 $q \in [1,+\infty]$，算子族 $(K_{q,n})^{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_q)$中有界。利用 (3.3)，这显然意味着数值格式 (1.3) 对所有 $q \in [1,+\infty]$ 在边界层 $\mathcal{R}^c$ 等于 0时具有 ℓ^q-稳定性。

然后，我们将证明以下 $(L_{1,n})^{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 的族在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$中也是有界的。利用（3.3），我们将由此证明数值格式（1.3）的 ℓ^1-稳定性，即使 $\mathcal{R}^c$ 不等于0。

最后，当边界层 $\mathcal{R}^c$ 非零时，我们将证明对于所有 $q \in]1,+\infty]$，存在一个正的常数 C 使得

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \|L_{q,n}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_q)} \geq C n^{1-\frac{1}{q}}. \tag{3.4}$$

利用 (3.3)，我们将因此证明存在一个正的常数 C 使得 (1.16) 成立以及ℓ^q-不稳定性的数值格式 (1.3)。

第 1 步： 族 $(K_{q,n})^{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_q)$ 中的有界性以及当 $\mathcal{R}^c = 0$ 时的 ℓ^q-稳定性

• 我们考虑 $q \in [1,+\infty]$ 和 $u^0 \in \mathcal{H}_q$。我们还引入 $\tilde{q} \in [1,+\infty]$ 作为 q 的 Hölder 共轭指数。利用估计 (1.26) 关于 $\mathrm{Err}(n, j_0, j)$ 以及 Hölder 不等式，存在两个正的常数 C, c使得对于所有 $n, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\sum_{j_0\geq 1} |\mathrm{Err}(n, j_0, j)||u^0_{j_0}| \leq C e^{-cj} \|u^0\|_{\mathcal{H}_q} \left\| \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2\mu}}} \exp\left(-c \left(\frac{|n\alpha + j_0|}{n^{\frac{1}{2\mu}}} \right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}} \right) \right)_{j_0 \geq 1} \right\|_{\ell^{\tilde{q}}}.$$

此外，存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left\| \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2\mu}}} \exp\left(-c \left(\frac{|n\alpha + j_0|}{n^{\frac{1}{2\mu}}} \right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}} \right) \right)_{j_0 \geq 1} \right\|_{\ell^{\tilde{q}}} \leq \frac{C}{n^{\frac{1}{2\mu q}}}.$$

因此，存在一个常数 $C > 0$，使得对于所有 $u^0 \in \mathcal{H}_q$ 和 $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，序列

$$\left(\sum_{j_0 \geq 1} \mathrm{Err}(n, j_0, j) u^0_{j_0} \right)_{j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$$

属于 $\mathcal{H}_q$，并且

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left\| \left(\sum_{j_0 \geq 1} \mathrm{Err}(n, j_0, j) u^0_{j_0} \right)_{j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \right\|_{\mathcal{H}_q} \leq \frac{C}{n^{\frac{1}{2\mu q}}} \|u^0\|_{\mathcal{H}_q}. \tag{3.5}$$

• 利用的主要结果 [Tho65], 我们证明假设 1 是两个条件之一，使得该族$(\widetilde{\mathcal{G}}(n,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$在 $\ell^1(\mathbb{Z})$有界。对于 $q \in [1,+\infty]$，利用Young的卷积不等式 $\ell^1(\mathbb{Z}) * \ell^q(\mathbb{Z}) \to \ell^q(\mathbb{Z})$,

我们可以证明，存在一个正的常数 $C>0$，使得对于所有 $u^0\in\mathcal{H}_q$ 和 $n\in\mathbb{N}$，序列$\left(\sum_{j_0\geq 1}\widetilde{\mathcal{G}}(n,j-j_0)u^0_{j_0}\right)_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$属于 $\mathcal{H}_q$，并且

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \left\|\left(\sum_{j_0\geq 1}\widetilde{\mathcal{G}}(n,j-j_0)u^0_{j_0}\right)_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}\right\|_{\mathcal{H}_q}\leq C\left\|u^0\right\|_{\mathcal{H}_q}. \tag{3.6}$$

• 我们考虑 $q\in[1,+\infty]$ 和 $u^0\in\mathcal{H}_q$。我们还引入 $\tilde{q}\in[1,+\infty]$ 的 Hölder 共轭指数 q。利用关于 1.27 的界（$\mathcal{R}^u$）和 Hölder 不等式，我们证明存在两个正的常数 C，c 它们与 q、u^0、n、j_0 以及 j 无关，使得

$$\left|\sum_{j_0\geq 1}\mathbb{1}_{np\geq j_0}\mathcal{R}^u(j_0,j)u^0_{j_0}\right|\leq Ce^{-cj}\left\|u^0\right\|_{\mathcal{H}_q}\left\|\left(e^{-cj_0}\right)_{j_0\geq 1}\right\|_{\ell^{\tilde{q}}}.$$

因此，存在一个常数 $C>0$，使得对于所有 $u^0\in\mathcal{H}_q$ 和 $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，序列

$$\left(\sum_{j_0\geq 1}\mathbb{1}_{np\geq j_0}\mathcal{R}^u(j_0,j)u^0_{j_0}\right)_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$$

属于 $\mathcal{H}_q$，并且

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \left\|\left(\sum_{j_0\geq 1}\mathbb{1}_{np\geq j_0}\mathcal{R}^u(j_0,j)u^0_{j_0}\right)_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}\right\|_{\mathcal{H}_q}\leq C\left\|u^0\right\|_{\mathcal{H}_q}. \tag{3.7}$$

对于 $q\in[1,+\infty]$，结合（3.5）-（3.7），我们已证明算子族 $(K_{q,\ n})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_q)$ 中有界。当 $\mathcal{B}\begin{pmatrix}1&\dots&1\end{pmatrix}^T\in\mathcal{B}E^s(1)$ 时，定理 2 表明边界层 $\mathcal{R}^c$ 等于 0，因此算子$L_{q,\ n}$ 等于 0。利用（3.3），我们得出数值格式（1.3）是 ℓ^q-稳定的。

步骤 2： 族的有界性$(L_{1,\ n})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ 以及数值格式（ℓ^1 稳定性的证明1.3)

我们认为 $q=1$。由于函数 $E^\beta_{2\mu}$ 有界，族 $\left(E^\beta_{2\mu}\left(\frac{j_0+n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)\right)_{n,\ j_0\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 是

有界。利用 1.27）中的估计，在 $\mathcal{R}^c$上，存在两个正的常数 C、c，使得对所有 $u^0\in\mathcal{H}_1$、n、j_0、$j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$,

$$\sum_{j_0\geq 1}\left|E^\beta_{2\mu}\left(\frac{j_0+n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)\mathcal{R}^c(j)u^0_{j_0}\right|\leq Ce^{-cj}\sum_{j_0\geq 1}|u^0_{j_0}|\leq Ce^{-cj}\left\|u^0\right\|_{\mathcal{H}_1}.$$

The因此，存在一个常数 $C>0$ 使得对于所有 $u^0\in\mathcal{H}_1$ 和 $n\in\mathbb{N}$，该序列 e

$$L_{1,n}u^0=\left(\sum_{j_0\geq 1}E^\beta_{2\mu}\left(\frac{j_0+n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)\mathcal{R}^c(j)u^0_{j_0}\right)_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$$

belongs to $\mathcal{H}_1$ and

$$\left\|L_{1,n}u^0\right\|_{\mathcal{H}_1}\leq C\left\|u^0\right\|_{\mathcal{H}_1}.$$

这意味着算子族$(L_{1,n})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$中有界。利用 (3.3)，我们立即得出算子族 $(\mathcal{T}^n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 在 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ 中有界，因此数值格式 (1.3) 是 ℓ^1-稳定的。

步骤 3： 证明（3.4）以及 ℓ^q-数值格式（1.3）的稳定性失效，对于 $q\in]1,\ +\infty]$ 当 $\mathcal{R}^c\neq 0$

我们取定 $q\in]1,\ +\infty]$。由于函数 $E^\beta_{2\mu}$ 是连续的，(1.23)意味着存在一个常数 $M\in\mathbb{R}$使得

$$\forall x\leq M,\quad E^\beta_{2\mu}(x)\geq\frac{1}{2}. \tag{3.8}$$

Let us consider an integer $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ such that

$$-\frac{n\alpha}{3} > 1 \quad \text{and} \quad \frac{\alpha}{3} n^{\frac{2\mu-1}{2\mu}} \leq M,$$

这是可能的，因为 $\alpha < 0$。我们考虑一个整数 $J \in \mathbb{Z} \cap \left[-\frac{n\alpha}{3}, -2\frac{n\alpha}{3}\right]$ 并定义

$$u_J := \sum_{j_0=1}^{J} \delta_{j_0} \in \mathcal{H}_q.$$

We observe that

$$L_{q,n} u_J = \left(\sum_{j_0=1}^{J} E_{2\mu}^{\beta} \left(\frac{j_0 + n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}} \right) \right) \mathcal{R}^c.$$

然而，对于 $j_0 \in \{1, \dots, J\}$，我们有

$$\frac{n\alpha + j_0}{n^{\frac{1}{2\mu}}} \leq \frac{\alpha}{3} n^{\frac{2\mu-1}{2\mu}} \leq M.$$

Thus, (3.8) allows us to conclude that

$$\|L_{q,n} u_J\|_{\mathcal{H}_q} \geq \frac{J}{2} \|\mathcal{R}^c\|_{\mathcal{H}_q}.$$

注意到 $\|u_J\|_{\mathcal{H}_q} = J^{\frac{1}{q}}$，我们得出结论：

$$\|L_{q,n}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_q)} \geq \frac{\|\mathcal{R}^c\|_{\mathcal{H}_q}}{2} J^{1-\frac{1}{q}} \geq \frac{\|\mathcal{R}^c\|_{\mathcal{H}_q}}{2} \left(-\frac{n\alpha}{3} \right)^{1-\frac{1}{q}}.$$

因此，当边界层 $\mathcal{R}^c$ 是一个非零序列，算子$L_{q,n}$ 是非零算子，并且存在一个正的常数 C 使得 (3.4) 成立。利用 (3.3), 这就完成了存在一个正的常数 C 使得 (1.16) 成立以及 ℓ^q-不稳定性的数值格式 (1.3)。

4 Spatial Green's function

从现在起，我们假设假设 1 和 2 均已验证，我们的目标是证明定理 2。由于时间格林函数的值 $\mathcal{G}(n,\ j,\ j_0)$ 与 q 无关，我们考虑情形 $q = 2$，并且在引入巴拿赫空间 q 时省略下标 $\mathcal{H}$。本节致力于定义和分析下面定义的空间格林函数，它们分别由（4.9）和（4.10）给出，对应的算子为 $\mathcal{T}$和 $\mathscr{L}$。

4.1 Resolvent set of the operators $\mathcal{T}$ and $\mathscr{L}$

首先，我们研究算子 $\mathscr{L}$ 和 $\mathcal{T}$的谱。这些信息对于确定 $\mathcal{T}$和 $\mathscr{L}$的空间格林函数的定义域至关重要。本节将与 [CF21，第 2 节 1] 非常相似。

首先，维纳定理 [新75] 允许我们得出，$\mathscr{L}$ 的谱为:

$$\sigma(\mathscr{L}) = F(\mathbb{S}^1).$$

特别是，这意味着连通开集 $\mathcal{O}$ 包含于预解式 $\rho(\mathscr{L})$。我们回顾一下，$\mathcal{O}$对应于 $\mathbb{C}\setminus F(\mathbb{S}^1)$ 的无界连通分支（见图 1）。

我们现在将注意力转向对算子 $\mathcal{T}$ 的谱的研究。算子 $\mathcal{T}$是定义为的 Toeplitz算子 的有限秩扰动

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{T}: & \ell^2(\mathbb{N}\setminus\{0\}) & \to & \ell^2(\mathbb{N}\setminus\{0\}) \\ & u & \mapsto & \left(\displaystyle\sum_{\substack{l=-r \\ j+l\geq 1}}^{p} a_l u_{j+l} \right)_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \end{array},$$

由于 Toeplitz算子 $\mathscr{T}$ 对应于数值格式（1.3），其中我们施加数值边界条件 $u^n_{1-r} = \ldots = u^n_0 = 0$。算子 $\mathscr{T}$ 的谱已得到充分研究，参见例如 [Dur64] 和 [TE05]。主要来说，算子 $\mathcal{T}$的预解集对应于复平面上不属于曲线 $F(\mathbb{S}^1)$ 且曲线 $F(\mathbb{S}^1)$ 对这些点的绕数为 0 的点。例如，集合 $\mathcal{O}$ 中的所有点都属于这种情况。此外， $\mathscr{T}$ 的本质谱是曲线 $F(\mathbb{S}^1)$。

我们注意到，由于算子 $\mathcal{T}$是算子 $\mathscr{T}$的紧扰动，它们具有相同的本质谱（参见 [Con90，第 XI 章，命题 4。2]），该本质谱等于曲线 F（$\mathbb{S}^1$）。特别地，1 属于算子 $\mathcal{T}$的本质谱。然而，仍有必要仔细考察 $\mathcal{T}$的特征值。利用向量空间 $\mathbb{C}^{p+r}$的分解（1.12）和（1.13，我们证明以下引理:

Lemma 4.1. *We have that*

$$\forall z \in \mathcal{O} \cup B_{\tilde{\varepsilon}_0}(1), \quad \dim\ker \mathcal{B} \cap E^s(z) = \dim\ker(zId - \mathcal{T}), \tag{4.1}$$

$$\forall z \in \mathcal{O}, \quad \ker \mathcal{B} \cap E^s(z) = \{0\} \Rightarrow z \in \rho(\mathcal{T}). \tag{4.2}$$

假设 2 使我们能够得出结论：1 是 $\mathcal{T}$的一个单特征值，且位于其本质谱内部。此外，我们有

$$\overline{\mathcal{U}} \setminus \{1\} \subset \rho(\mathcal{T}) \quad \text{and} \quad B_{\tilde{\varepsilon}_0}(1) \cap \mathcal{O} \subset \rho(\mathcal{T}). \tag{4.3}$$

证明 断言（4.1）和（4.2）的证明采用与 [CF21，引理 2 相同的方法。1] 我们将在此简要概述该方法。我们让感兴趣的读者利用 [CF21]自行研究并调整细节。

The starting point 证明的思路是寻找递推关系 $w \in \mathcal{H}$ 的一个解，该解满足 $z \in \mathbb{C}$ ，并且 $f \in \mathcal{H}$:

$$(zId_{\mathcal{H}} - \mathcal{T})w = f. \tag{4.4}$$

We introduce the vectors

$$\forall j \geq 1, \quad W_j := \begin{pmatrix} w_{j+p-1} \\ \vdots \\ w_{j-r} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{p+r}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{p+r},$$

从而我们可以将 (4.4) 重写为动力系统[2]

$$\begin{cases} \forall j \geq 1, \quad W_{j+1} = \mathbb{M}(z)W_j - \frac{f_j}{a_p} e, \\ \mathcal{B}W_1 = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

其中矩阵 $\mathbb{M}(z)$ 和 $\mathcal{B}$ 分别由（1.11）和（1.4）定义。

▶ 为证明断言（4.1），我们证明线性映射

$$\begin{array}{ccc} \ker(zId - \mathcal{T}) & \to & \ker \mathcal{B} \cap E^s(z) \\ w & \mapsto & W_1 = \begin{pmatrix} w_p \\ \vdots \\ w_{1-r} \end{pmatrix} \end{array}$$

is well-defined and invertible. Its inverse will be the linear map

$$\begin{array}{ccc} \ker \mathcal{B} \cap E^s(z) & \to & \ker(zId - \mathcal{T}) \\ W_1 & \mapsto & ((W_j)_p)_{j \geq 1} \end{array}$$

其中 $(W_j)_{j\geq 1} = (\mathbb{M}(z)^{j-1}W_1)_{j\geq 1}$ 是 4.5 式在 $f = 0$ 下的解，而 $(X)_p$ 表示 p的第$X \in \mathbb{C}^{p+r}$个系数。

[2]We 这里使用事实 $p_b \leq p_\circ$ 情况 $p_b > p$ 可以类似处理，但会使用更繁琐的记号 ns.

▶ 断言（4.2）的证明更具技术性，并依赖于利用稳定和不稳定子空间 $\mathbb{C}^{p+r}$ $E^s(z)$以及 $E^u(z)$对矩阵 $\mathbb{M}(z)$ 所作的分解（ $\mathbb{M}(z)$ ）。其思路是利用 （4.5）中 $\mathbb{M}(z)$ 的双曲二分性，仔细积分该系统。这得到以下表达式：

$$\forall j \geq 1, \qquad \pi^u(z)W_j = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_{j+k}}{a_p} \mathbb{M}(z)^{-1-k} \pi^u(z) e, \tag{4.6}$$

$$\mathcal{B}\pi^s(z)W_1 = -\mathcal{B}\pi^u(z)W_1, \tag{4.7}$$

$$\forall j \geq 1, \qquad \pi^s(z)W_j = \mathbb{M}(s)^{j-1}\pi^s(z)W_1 - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{f_k}{a_p} \mathbb{M}(z)^{j-1-k} \pi^s(z) e. \tag{4.8}$$

序列$(\mathbb{M}(z)^j \pi^s(z))_{j\in\mathbb{N}}$和$(\mathbb{M}(z)^{-j}\pi^u(z))_{j\in\mathbb{N}}$的指数衰减意味着级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_{j+k}}{a_p} \mathbb{M}(z)^{-1-k} \pi^u(z) e \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^{j-1} \frac{f_k}{a_p} \mathbb{M}(z)^{j-1-k} \pi^s(z) e$$

收敛。我们注意到，$\mathcal{B}_{|E^s}(z)$是从 $E^s(z)$ 到 $\mathbb{C}^r$ 的同构，这得益于注 1。由于 $\pi^u(z)W_1$由 (4.6)定义，我们可以根据 (4.7)推导出 $\pi^s(z)W_1$ ，然后构造两个序列 $(\pi^u(z)W_j)_{j\geq 1}$ 和 $(\pi^s(z)W_j)_{j\geq 1}$ ，它们是 (4.6)-(4.8)的解。由此，我们可以构造(4.4) 的一个解 $w \in \mathcal{H}$ ，该解连续地依赖于 f ，并且我们可以证明其具有唯一性。□

既然我们对算子 $\mathcal{T}$和 $\mathscr{L}$ 的谱定位有了更清晰的认识，就可以定义这些算子的空间格林函数。

4.2 空间格林函数的定义与估计

对于 $j_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 和 $z \in \rho(\mathcal{T})$，我们定义与算子$\mathcal{T}$ 相关的空间格林函数 $G(z, j_0, \cdot) \in \mathcal{H}$ 为

$$G(z, j_0, \cdot) := (zId_{\mathcal{H}} - \mathcal{T})^{-1}\delta_{j_0} \tag{4.9}$$

其中 δ_{j_0} 由(1.17)定义。我们还对 $j_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 和 $z \in \rho(\mathscr{L})$ 定义与算子$\sim$$G(z,\cdot) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 相关的空间格林函数 $\mathscr{L}$ 为

$$\widetilde{G}(z,\cdot) := (zId_{\ell^2(\mathbb{Z})} - \mathscr{L})^{-1}\widetilde{\delta}. \tag{4.10}$$

~ ~其中 δ 由(1.20)定义。我们注意到这两个函数 $G(\cdot, j_0, j)$ 和 $G(\cdot, j)$ 均在 $\mathcal{O}\cap\rho(\mathcal{T})$ 上有定义且全纯，特别是在 $\overline{\mathcal{U}}\setminus\{1\}$ 和 $B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)\cap\mathcal{O}$ 上，这是因为(4.3)。

~时间格林函数 $\mathcal{G}(n, j_0, j)$和 $\mathcal{G}(n, j)$可以用我们刚刚引入的空间格林函数$\sim$$G(\cdot, j_0, j)$和 $G(\cdot, j)$来表示（见下文(5.6)和(5.7)）。为了得到定理2中所期望的$\mathrm{Err}(n, j_0, j)$的估计，我们需要研究这两个空间格林函数之差，其定义为

$$\forall z \in \mathcal{O}\cap\rho(\mathcal{T}), \forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad R(z, j_0, j) := G(z, j_0, j) - \widetilde{G}(z, j - j_0). \tag{4.11}$$

本节中，我们证明 $R(\cdot, j_0, j)$ 在 1 的邻域内的局部一致估计，以及其在 $z = 1$ 处具有一阶极点的亚纯延拓。第一步是找到 $R(z, j_0, j)$ 的另一种表达式。

与引理 4.1的证明相同，我们引入以下向量，其中 $z \in \mathcal{O}\cap\rho(\mathcal{T})$

$$\forall j, j_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad W(z, j_0, j) := \begin{pmatrix} G(z, j_0, j+p-1) \\ \vdots \\ G(z, j_0, j-r) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{p+r}$$

and

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \widetilde{W}(z, j) := \begin{pmatrix} \widetilde{G}(z, j+p-1) \\ \vdots \\ \widetilde{G}(z, j-r) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{p+r}.$$

两个函数 $W(z,j_0,j)$ 和 $W(z,j)$ 都关于 z全纯。利用算子 1.5 和 1.8 的定义 $\mathcal{T}$和 $\mathscr{L}$，我们证明它们分别是以下系统关于 $z\in\mathcal{O}\cap\rho(\mathcal{T})$ 和 $j_0\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$的解：

$$\begin{cases}\forall j\geq 1, \qquad W(z,j_0,j+1)=\mathbb{M}(z)W(z,j_0,j)-\dfrac{\mathbb{1}_{j=j_0}}{a_p}e,\\ \mathcal{B}W(z,j_0,1)=0.\end{cases}$$

and

$$\forall j\in\mathbb{Z},\quad \widetilde{W}(z,j+1)=\mathbb{M}(z)\widetilde{W}(z,j)-\frac{\mathbb{1}_{j=0}}{a_p}e.$$

利用投影算子 $\pi^s(z)$ 和 $\pi^u(z)$ 通过分解（1.12）引入，并以与推导等式（4.6）-（4.8）相同的方式，我们得到，对于 $z\in\mathcal{O}\cap\rho(\mathcal{T})$ 和 $j,j_0\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\pi^u(z)W(z,j_0,j)=\frac{\mathbb{1}_{j\in]-\infty,j_0]}}{a_p}\mathbb{M}(z)^{j-(j_0+1)}\pi^u(z)e, \tag{4.12}$$

$$\mathcal{B}\pi^s(z)W(z,j_0,1)=-\mathcal{B}\pi^u(z)W(z,j_0,1), \tag{4.13}$$

$$\pi^s(z)W(z,j_0,j)=\mathbb{M}(z)^{j-1}\pi^s(z)W(z,j_0,1)-\frac{\mathbb{1}_{j\in[j_0+1,+\infty[}}{a_p}\mathbb{M}(z)^{j-(j_0+1)}\pi^s(z)e. \tag{4.14}$$

以及对于 $z\in\mathcal{O}\cap\rho(\mathcal{T})$ 和 $j\in\mathbb{Z}$

$$\pi^u(z)\widetilde{W}(z,j)=\frac{\mathbb{1}_{j\in]-\infty,0]}}{a_p}\mathbb{M}(z)^{j-1}\pi^u(z)e, \tag{4.15}$$

$$\pi^s(z)\widetilde{W}(z,j)=-\frac{\mathbb{1}_{j\in[1,+\infty[}}{a_p}\mathbb{M}(z)^{j-1}\pi^s(z)e. \tag{4.16}$$

因此，将等式（4.12）和（4.14）相加，并利用方程（4.15）和（4.16），得到：

$$\forall z\in\mathcal{O}\cap\rho(\mathcal{T}),\forall j_0,j\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad R(z,j_0,j)=(\mathbb{M}(z)^{j-1}\pi^s(z)W(z,j_0,1))_p \tag{4.17}$$

其中 $(X)_p$ 表示 p次项的系数 $X\in\mathbb{C}^{p+r}$，并且我们回顾一下，余项 $R(z,j_0,j)$ 由 (4.11) 定义。表达式 (4.11) 和 (4.17) 是研究 $R(z,j_0,j)$ 的出发点。

下面的引理是 [CF21中引理 5] 的等价形式，并给出了在 $R(z,j_0,j)$ 远离 $\mathcal{T}$的谱的局部一致指数界。

引理 4.2。对于 $z_0\in\mathcal{O}\cap\rho(\mathcal{T})$，存在一个半径 $\delta>0$ 和两个正的常数 C,c，使得 $B_\delta(z_0)$ 包含于 $\mathcal{O}\cap\rho(\mathcal{T})$ 中，并且

$$\forall z\in B_\delta(z_0),\forall j,j_0\geq 1,\quad |R(z,j_0,j)|\leq C\exp(-c(j+j_0)).$$

我们注意到集合 $\overline{\mathcal{U}}\setminus\{1\}$ 包含于 $\mathcal{O}\cap\rho(\mathcal{T})$ 这是因为（4.3）和假设 1。因此，引理4.2 可以应用于集合 $\overline{\mathcal{U}}\setminus\{1\}$中的所有点。

证明 由于 $\mathcal{O}\cap\rho(\mathcal{T})$ 是一个开集合，我们可以考虑 $\delta>0$ 使得

$$B_\delta(z_0)\subset\mathcal{O}\cap\rho(\mathcal{T}).$$

只需考虑更小的半径 $\delta>0$，矩阵族 $(\mathbb{M}(z)^j\pi^s(z))_{j\in\mathbb{N}}$ 和 $(\mathbb{M}(z)^{-j}\pi^u(z))_{j\in\mathbb{N}}$ 一致指数衰减，即存在两个正的常数 C,c 使得

$$\forall z\in B_\delta(z_0),\forall j\in\mathbb{N},\qquad \begin{matrix}\left\|\mathbb{M}(z)^j\pi^s(z)\right\| & \leq Ce^{-cj},\\ \left\|\mathbb{M}(z)^{-j}\pi^u(z)\right\| & \leq Ce^{-cj}.\end{matrix} \tag{4.18}$$

因此，(4.18) 蕴含

$$\forall z\in B_\delta(z_0),\forall j_0,j\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \left|\mathbb{M}(z)^{j-1}\pi^s(z)W(z,j_0,1)\right|\leq Ce^{-c(j-1)}\left|\pi^s(z)W(z,j_0,1)\right|. \tag{4.19}$$

此外，利用（4.12）和（4.18），我们证明存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\forall z\in B_\delta(z_0),\forall j_0\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad |\pi^u(z)W(z,j_0,1)|\leq Ce^{-cj_0}. \tag{4.20}$$

由于线性映射 $\mathcal{B}_{|E^s(z)}$ 对于所有 $z \in B_\delta(z_0)$ 都是同构，在考虑一个更小的 δ 后，存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\forall z \in B_\delta(z_0), \forall x \in E^s(z), \quad |\mathcal{B}x| \geq C|x|. \tag{4.21}$$

利用（4.13）、（4.20）和（4.21），我们证明存在一个正的常数 C 使得

$$\forall z \in B_\delta(z_0), \forall j_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad |\pi^s(z)W(z,j_0,1)| \leq Ce^{-cj_0}. \tag{4.22}$$

结合 (4.19) 和 (4.22)，我们可以得出结论：存在两个常数 C， $c > 0$ 使得

$$\forall z \in B_\delta(z_0), \forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left|\mathbb{M}(z)^{j-1}\pi^s(z)W(z,j_0,1)\right| \leq Ce^{-c(j+j_0)}.$$

Using (4.17), we conclude the proof. □

现在我们将研究由（4.11）定义的函数 $R(z,j_0,j)$在 1 的邻域内的性质，并介绍 [CF21，引理 6] 的一个等价版本，但其中存在一些重要差异。首先回顾一下，曲线 $F(\mathbb{S}^1)$对应于算子 $\mathcal{T}$的本质谱，而 1 是 $\mathcal{T}$ 的一个单特征值。因此，函数$R(z,j_0,j)$ 仅在 1的某个邻域内、曲线 $F(\mathbb{S}^1)$ 之外有定义。下面的引理证明，函数 $R(z,j_0,j)$ 实际上可以在 1附近亚纯延拓，并且在 1 处有一个一阶极点。我们预先指出，下面引理陈述中出现的半径 $\widetilde{\varepsilon}_0$ 来自向量空间 $\mathbb{C}^{p+r}$ 的分解（1.13）；该分解是通过研究矩阵 $\mathbb{M}(z)$ 的谱在 1 的邻域$B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$内的性质得到的。

引理4.3. 存在一个半径 $\widetilde{\varepsilon}_1 \in]0,\widetilde{\varepsilon}_0[$ 使得对所有 $j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，函数

$$z \in \mathcal{O} \cap \rho(\mathcal{T}) \mapsto R(z,j_0,j)$$

可以亚纯延拓到 $B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1)$ 上，并在 1 处有一个阶为 1 的极点。此外，存在一些全纯复值函数 $P^u(\cdot,j_0,j)$和 $P^c(\cdot,j_0,j)$，它们对所有 $j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 定义在 $B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1)$ 上，使得：

- 下列等式成立

$$\forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \forall z \in B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1)\setminus\{1\}, \quad R(z,j_0,j) = \frac{P^c(z,j_0,j)}{z-1} + \frac{P^u(z,j_0,j)}{z-1}. \tag{4.23}$$

- 存在一些与 z, j_0和 j无关的正的常数 C, c使得：

$$\forall z \in B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1), \forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad |P^u(z,j_0,j)| \leq Ce^{-cj-cj_0}. \tag{4.24}$$

我们将记

$$\forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \mathcal{R}^u(j_0,j) := P^u(1,j_0,j). \tag{4.25}$$

- 函数 P^c满足下列估计，其中 C, c是一些与z, j_0 和 j 无关的正的常数，且 $\mathcal{R}^c := (\mathcal{R}^c(j))_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 是一个复值族：

$$\forall z \in B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1), \forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \begin{array}{c} |P^c(z,j_0,j)| \leq Ce^{-cj}|\kappa(z)|^{-j_0}, \\ |\mathcal{R}^c(j)| \leq Ce^{-cj}, \\ |P^c(z,j_0,j) - \mathcal{R}^c(j)\kappa(z)^{-j_0}| \leq C|z-1|e^{-cj}|\kappa(z)|^{-j_0}. \end{array} \tag{4.26}$$

- *The sequence $\mathcal{R}^c$ satisfies:*

$$\mathcal{R}^c = 0 \Leftrightarrow \mathcal{B}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^T \in \mathcal{B}E^s(1). \tag{4.27}$$

这两个序列$(\mathcal{R}^c(j))_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 和$(\mathcal{R}^u(j_0,j))_{j_0,j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 将分别对应于定理陈述中引入的相同序列2。

请注意，引理4.3 与 [CF21中的引理 6] 目标相同，但给出的结果并不相同。回顾一下，在 [CF21], 中，作者假设 Lopatinskii 行列式 Δ 在1 处不为零，因此1 不是算子 $\mathcal{T}$的特征值。这使得在 [CF21的引理 6] 中，空间格林函数 $G(z,j_0,j)$ 可以在1的整个邻域内作全纯延拓。

证明 利用 $\pi^{ss}(z)$、 $\pi^{c}(z)$ 和 $\pi^{su}(z)$ 通过分解式 (1.13) 定义的投影算子，等式 (4.12)-(4.14) 对于$z \in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1) \cap \mathcal{O}$和 j_0, $j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

$$\pi^{su}(z)W(z,j_0,j) = \frac{\mathbb{1}_{j\in]-\infty,j_0]}}{a_p}\mathbb{M}(z)^{j-(j_0+1)}\pi^{su}(z)e, \tag{4.28}$$

$$\pi^{c}(z)W(z,j_0,j) = \frac{\mathbb{1}_{j\in]-\infty,j_0]}}{a_p}\kappa(z)^{j-(j_0+1)}\pi^{c}(z)e, \tag{4.29}$$

$$\mathcal{B}\pi^{ss}(z)W(z,j_0,1) = -\mathcal{B}\left(\pi^{su}(z)W(z,j_0,1) + \pi^{c}(z)W(z,j_0,1)\right), \tag{4.30}$$

$$\pi^{ss}(z)W(z,j_0,j) = \mathbb{M}(z)^{j-1}\pi^{ss}(z)W(z,j_0,1) - \frac{\mathbb{1}_{j\in[j_0+1,+\infty[}}{a_p}\mathbb{M}(z)^{j-(j_0+1)}\pi^{ss}(z)e. \tag{4.31}$$

We want to extend meromorphically the function

$$z \in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)\cap\mathcal{O} \mapsto \mathbb{M}(z)^{j-1}\pi^{ss}(z)W(z,j_0,1)$$

在 $B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$ 上具有 1 处的 1 阶极点。为此，我们将使用等式 (4.30) 和假设2 来亚纯延拓函数 $\pi^{ss}W(\cdot,j_0,1)$ 到 $B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$ 上，使其在 1 处具有 1 阶极点。对于 $z \in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)\backslash\{1\}$，由于假设2 意味着 $\Delta(z)\neq 0$ 其中 Δ 由 (1.15) 定义，该矩阵

$$\begin{pmatrix}\mathcal{B}e_1(z) & \dots & \mathcal{B}e_r(z)\end{pmatrix}$$

is invertible and

$$\begin{pmatrix}\mathcal{B}e_1(z) & \dots & \mathcal{B}e_r(z)\end{pmatrix}^{-1} = \frac{\operatorname{com}\begin{pmatrix}\mathcal{B}e_1(z) & \dots & \mathcal{B}e_r(z)\end{pmatrix}^T}{\Delta(z)}.$$

假设 2 表明 1 是 Δ的一个单零点。因此，我们可以考虑全纯函数 $D:\ B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)\to\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ 定义为

$$\forall z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1),\quad D(z) = \begin{cases}\frac{z-1}{\Delta(z)}\operatorname{com}\begin{pmatrix}\mathcal{B}e_1(z) & \dots & \mathcal{B}e_r(z)\end{pmatrix}^T & \text{if } z\neq 1,\\ \frac{1}{\Delta'(1)}\operatorname{com}\begin{pmatrix}\mathcal{B}e_1(1) & \dots & \mathcal{B}e_r(1)\end{pmatrix}^T & \text{if } z=1.\end{cases} \tag{4.32}$$

为研究等式（4.30），对于$z \in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}$（1）和 $j_0 \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$，我们引入

$$\begin{aligned}V^u(z,j_0) &:= -(e_1(z)\dots e_r(z))D(z)\mathcal{B}\left(\frac{1}{a_p}\mathbb{M}(z)^{-j_0}\pi^{su}(z)e\right),\\ V^c(z,j_0) &:= -(e_1(z)\dots e_r(z))D(z)\mathcal{B}\left(\frac{1}{a_p}\kappa(z)^{-j_0}\pi^{c}(z)e\right).\end{aligned} \tag{4.33}$$

我们注意到，对于所有 $j_0\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$，函数 $V^u(\cdot,j_0)$和 $V^c(\cdot,j_0)$在 $B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$ 上是全纯的，并且对于所有$z \in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$， $V^u(z,j_0)$和 $V^c(z,j_0)$ 属于 $E^{ss}(z)$，因为它们是 $e_1(z)\dots,e_r(z)$ 的线性组合。等式 (4.30) 和定义 (4.33) 还意味着

$$\forall j_0\in\mathbb{N}\backslash\{0\},\forall z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)\cap\mathcal{O},\quad \mathcal{B}\pi^{ss}(z)W(z,j_0,1) = \mathcal{B}\frac{V^c(z,j_0)+V^u(z,j_0)}{z-1}.$$

此外，由于 $\Delta(z)\neq 0$ 对于 $z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)\cap\mathcal{O}$，假设 2 意味着

$$\ker\mathcal{B}\cap E^{ss}(z) = \{0\}.$$

We can then conclude that

$$\forall j_0\in\mathbb{N}\backslash\{0\},\forall z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)\cap\mathcal{O},\quad \pi^{ss}(z)W(z,j_0,1) = \frac{V^c(z,j_0)+V^u(z,j_0)}{z-1}. \tag{4.34}$$

因此，我们找到了函数 $\pi^{ss}W(\cdot,j_0,1)$ 在 $B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$ 上的亚纯延拓，其在 1 处有一个一阶极点。于是，我们引入对所有 $j_0,j\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ 定义在 $B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$ 上的函数 $\mathscr{P}^c(\cdot,j_0,j)$ 和 $\mathscr{P}^u(\cdot,j_0,j)$，如下所示。

$$\forall z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1),\quad \begin{aligned}\mathscr{P}^c(z,j_0,j) &:= \mathbb{M}(z)^{j-1}V^c(z,j_0),\\ \mathscr{P}^u(z,j_0,j) &:= \mathbb{M}(z)^{j-1}V^u(z,j_0).\end{aligned} \tag{4.35}$$

函数 $\mathscr{P}^c(\cdot,j_0,j)$和 $\mathscr{P}^u(\cdot,j_0,j)$ 在$B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$上都是全纯的。由于 $\kappa(1)=1$，我们注意到，$V^c(1,j_0)$ 不依赖于 j_0。于是我们记

$$\forall j_0,j\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \mathscr{R}^c(j):=\mathscr{P}^c(1,j_0,j). \tag{4.36}$$

我们回顾一下，$(X)_p$ 表示 $X\in\mathbb{C}^{p+r}$的第 p个系数。对于$z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$和 j，我们记为 $j_0\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$P^c(z,j_0,j):=(\mathscr{P}^c(z,j_0,j))_p,\quad P^u(z,j_0,j):=(\mathscr{P}^u(z,j_0,j))_p,\quad \mathcal{R}^c(j):=(\mathscr{R}^c(j))_p. \tag{4.37}$$

利用等式(4.34)以及函数 $\mathscr{P}^c$ 和 $\mathscr{P}^u$的定义(4.35)，可知对所有j_0，$j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，我们可以将函数延拓

$$z\in\mathcal{O}\cap\rho(\mathcal{T})\mapsto\mathbb{M}(z)^{j-1}\pi^{ss}(z)W(z,j_0,1)$$

在$B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)$上作亚纯延拓，其在1处有一个一阶极点，表达式为

$$\forall j_0,j\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\forall z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_0}(1)\setminus\{1\},\quad \mathbb{M}(z)^{j-1}\pi^{ss}(z)W(z,j_0,1)=\frac{\mathscr{P}^c(z,j_0,j)}{z-1}+\frac{\mathscr{P}^u(z,j_0,j)}{z-1}. \tag{4.38}$$

直接由(4.17)、(4.37)和(4.38)可得(4.23)。

现在我们将证明引理4.3陈述中的各项不同估计。首先注意到，存在一个半径 $\widetilde{\varepsilon}_1\in]0,\ \widetilde{\varepsilon}_0[$ 使得矩阵族$(\mathbb{M}(z)^j\pi^{ss}(z))_{j\in\mathbb{N}}$ 和$(\mathbb{M}(z)^{-j}\pi^{su}(z))_{j\in\mathbb{N}}$关于$z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1)$一致地指数衰减，即存在两个正的常数 C，c使得

$$\forall z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1),\forall j\in\mathbb{N},\quad \begin{matrix}\left\|\mathbb{M}(z)^j\pi^{ss}(z)\right\| & \leq Ce^{-cj},\\ \left\|\mathbb{M}(z)^{-j}\pi^{su}(z)\right\| & \leq Ce^{-cj}.\end{matrix} \tag{4.39}$$

为研究中心分量 $\mathscr{P}^c$，我们还需要以下引理:

引理 4.4 ([CF21])。设全纯函数 M 取值于 $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ 定义在一个开球$B_\delta(0)$ 上，且满足 $\delta>0$ 以及 $N\in\mathbb{N}$，使得存在两个正的常数 C，c 满足

$$\forall z\in B_\delta(0),\forall j\in\mathbb{N},\quad \left\|M(z)^j\right\|\leq Ce^{-cj}.$$

将半径 δ 取小一些后，存在两个新的正的常数 C，c

$$\forall z_1,z_2\in B_\delta(0),\forall j\in\mathbb{N},\quad \left\|M(z_1)^j-M(z_2)^j\right\|\leq C|z_1-z_2|e^{-cj}.$$

利用不等式（4.39）、引理 4.4 可知，在减小 $\widetilde{\varepsilon}_1$后，存在一些正的常数$C$，$c$ 使得

$$\forall z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1),\forall j\in\mathbb{N},\quad \left\|\mathbb{M}(z)^j\pi^{ss}(z)-\mathbb{M}(1)^j\pi^{ss}(1)\right\|\leq C|z-1|e^{-cj}. \tag{4.40}$$

我们来求 $\mathscr{P}^u$ 的估计。首先，我们注意到不等式（4.39）意味着存在两个正的常数 C，c 使得

$$\forall z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1),\forall j_0\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad |V^u(z,j_0)|\leq Ce^{-cj_0}. \tag{4.41}$$

由于当 $z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1)$ 和 $j_0\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ 时，有 $V^u(z,\ j_0)\in E^{ss}(z)$，根据定义（4.35）可注意到

$$\forall z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1),\forall j,j_0\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \mathscr{P}^u(z,j_0,j)=\mathbb{M}(z)^{j-1}\pi^{ss}(z)V^u(z,j_0).$$

因此，利用不等式（4.39）和（4.41），我们可以证明存在两个正的常数 C，c使得

$$\forall z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1),\forall j_0,j\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad |\mathscr{P}^u(z,j_0,j)|\leq Ce^{-cj-cj_0}.$$

We easily deduce (4.24).

现在我们证明关于 $\mathscr{P}^c$ 的估计。我们注意到，定义（4.33）意味着存在一个正的常数 C 使得

$$\forall z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1),\forall j_0\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad |V^c(z,j_0)|\leq C|\kappa(z)|^{-j_0}. \tag{4.42}$$

Since for $z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1)$ 且 $j_0\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ 有 $V^c(z,j_0)\in E^{ss}(z)$，根据定义（4.35）我们注意到

$$\forall z\in B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1),\forall j,j_0\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \mathscr{P}^c(z,j_0,j)=\mathbb{M}(z)^{j-1}\pi^{ss}(z)V^c(z,j_0).$$

因此 因此，利用不等式（4.39），我们证明存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\forall z\in B_{\tilde{\varepsilon}_1}(1),\forall j_0,j\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\qquad \begin{array}{c}|\mathscr{P}^c(z,j_0,j)|\leq Ce^{-cj}|\kappa(z)|^{-j_0},\\ |\mathscr{R}^c(j)|\leq Ce^{-cj}.\end{array} \tag{4.43}$$

最后，我们观察到对于 j_0、$j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ 和 $z\in B_{\tilde{\varepsilon}_1}(1)$，我们有

$$\begin{aligned}&\mathscr{P}^c(z,j_0,j)-\kappa(z)^{-j_0}\mathscr{R}^c(j)\\&\quad=\kappa(z)^{-j_0}\left(\mathbb{M}(1)^{j-1}\pi^{ss}(1)(e_1(1)\dots e_r(1))D(1)\mathcal{B}\pi^c(1)e-\mathbb{M}(z)^{j-1}\pi^{ss}(z)(e_1(z)\dots e_r(z))D(z)\mathcal{B}\pi^c(z)e\right).\end{aligned}$$

因此，估计式 (4.39) 和 (4.40) 以及中值不等式直接蕴含存在两个正的常数 C、c 使得

$$\forall z\in B_{\tilde{\varepsilon}_1}(1),\forall j_0,j\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad |\mathscr{P}^c(z,j_0,j)-\kappa(z)^{-j_0}\mathscr{R}^c(j)|\leq C|z-1|e^{-cj}|\kappa(z)|^{-j_0}.$$

为完成引理 4.3 的证明，还需证明条件 (4.27)。首先，我们需要计算向量 $\pi^c(1)e$ 的值。我们回顾 1 是矩阵 $\mathbb{M}(1)$ 的一个单特征值，$\begin{pmatrix}1&\dots&1\end{pmatrix}^T$ 是 $\mathbb{M}(1)$ 对应于 1 的特征向量，从而

$$E^c(1)=\mathrm{Span}\begin{pmatrix}1&\dots&1\end{pmatrix}^T.$$

我们还知道存在唯一的特征向量 $L=(l_j)_{j\in\{1,\dots,p+r\}}\in\mathbb{C}^{p+r}$ 属于 $\mathbb{M}(1)^T$ 且对应于特征值 1，使得

$$L\cdot\begin{pmatrix}1&\dots&1\end{pmatrix}^T=1 \tag{4.44}$$

其中 $\mathbb{C}^{p+r}$ 上的对称双线性形式 $\cdot$ 定义为 [3]

$$\forall X,Y\in\mathbb{C}^{p+r},\quad X\cdot Y:=\sum_{l=1}^{p+r}X_iY_i.$$

于是，我们有

$$\forall Y\in\mathbb{C}^{p+r},\quad \pi^c(z)Y=(L\cdot Y)\begin{pmatrix}1&\dots&1\end{pmatrix}^T.$$

因此，将其作用于向量 e 可得

$$\pi^c(1)e=l_1\begin{pmatrix}1&\dots&1\end{pmatrix}^T.$$

由于 L 是 $\mathbb{M}(1)^T$ 的特征值 1 对应的特征向量，我们有

$$\forall j\in\{1,\dots,p+r\},\quad l_j=\left(\sum_{l=-r}^{p-j}a_l-\delta_{j\leq p}\right)\frac{l_1}{a_p}. \tag{4.45}$$

由于 $F'(1)=-\alpha$，归一化条件（4.44）和等式（4.45）因此推出

$$l_1=\frac{a_p}{\alpha}\quad\text{and thus}\quad \pi^c(1)e=\frac{a_p}{\alpha}\begin{pmatrix}1&\dots&1\end{pmatrix}^T. \tag{4.46}$$

分别利用4.36、4.33和4.32中 $\mathscr{R}^c(j)$ 的定义，可得函数 V^c 和函数 D满足，对于 $j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^c(j)&=-\frac{1}{\alpha\Delta'(1)}\mathbb{M}(1)^j(e_1(1)\dots e_r(1))\mathrm{com}\begin{pmatrix}\mathcal{B}e_1(1)&\dots&\mathcal{B}e_r(1)\end{pmatrix}^T\mathcal{B}\begin{pmatrix}1&\dots&1\end{pmatrix}^T\\&=-\frac{1}{\alpha\Delta'(1)}\mathbb{M}(1)^j\left(\sum_{k=1}^r\det\begin{pmatrix}\mathcal{B}e_1(1)&\dots&\mathcal{B}e_{k-1}(1)&\mathcal{B}\begin{pmatrix}1&\dots&1\end{pmatrix}^T&\mathcal{B}e_{k+1}(1)&\dots&\mathcal{B}e_r(1)\end{pmatrix}e_k(1)\right).\end{aligned} \tag{4.47}$$

[3]注意，这个对称双线性型并非 $\mathbb{C}^{p+r}$上的厄米内积。

• 我们回顾一下，假设2 意味着1 是 Lopatinskii 行列式的单零点。因此，向量空间 $\mathcal{B}E^s$（1）的维数为 $r-1$。如果 $\mathcal{B}\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}^T \in \mathcal{B}E^s$（1），那么对于所有 $k \in \{1,\dots,r\}$

$$\det\left(\mathcal{B}e_1(1) \quad \dots \quad \mathcal{B}e_{k-1}(1) \quad \mathcal{B}\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}^T \quad \mathcal{B}e_{k+1}(1) \quad \dots \quad \mathcal{B}e_r(1)\right) = 0$$

因此 $\mathscr{R}^c(j) = 0$ 对于所有 $j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$。利用 (4.37)，我们推得序列 $(\mathcal{R}^c(j))_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 等于 0。

• 现在我们假设序列 $(\mathcal{R}^c(j))_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 等于 0。由于矩阵 $\mathbb{M}(1)$ 是一个伴随矩阵，并且 $\mathcal{R}^c(j)$ 是向量 p的第 $\mathscr{R}^c(j)$ 个系数，对于所有 $j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，等式（4.47）意味着

$$\forall j \geq r+1, \quad \mathscr{R}^c(j) = \begin{pmatrix}\mathcal{R}^c(j+p-1)\\ \vdots \\ \mathcal{R}^c(j-r)\end{pmatrix}.$$

如果序列 $(\mathcal{R}^c(j))_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ 等于 0，那么向量 $\mathscr{R}^c(j)$ 等于 0 对所有 $j \geq r+1$。由于矩阵 $\mathbb{M}(1)$ 可逆且族 e_k(1)$_{k\in\{1,\dots,r\}}$ 线性无关，等式（4.47）意味着对所有 $k \in \{1,\dots,r\}$

$$\det\left(\mathcal{B}e_1(1) \quad \dots \quad \mathcal{B}e_{k-1}(1) \quad \mathcal{B}\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}^T \quad \mathcal{B}e_{k+1}(1) \quad \dots \quad \mathcal{B}e_r(1)\right) = 0.$$

由于 1 是 Lopatinskii 行列式的单零点 Δ，存在一个整数 $k \in \{1,\dots,r\}$，使得族 $(\mathcal{B}e_j(1))_{j\in\{1,\dots,r\}\setminus\{k\}}$ 线性无关并张成整个向量空间 $\mathcal{B}E^s$(1)。因此，向量 $\mathcal{B}\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}^T$属于 $\mathcal{B}E^s$(1)。□

5 时间格林函数的研究

本节旨在证明定理 2。我们的目标是证明函数（1.26）满足估计式$\mathrm{Err}(n, j_0, j)$，该函数由（1.25）定义，对所有 n、j_0、$j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$均成立。根据图 j_0/n 7 中所表示的比值，我们预期会出现三种不同的行为：

I- 当 j_0 相对于 n 较大时（即 $j_0 > np$），将在第 5.1节中进行讨论。对于这些较小的时间 $n < \frac{p}{j_0}$，数值边界条件不会对数值格式（1.3）的解 $\mathcal{G}$，n，j_0）$_{n\in\mathbb{N}}$的计算产生任何影响，其初始数据为 $u^0 = \delta_{j_0}$。由此我们可以在这种情况下推导出（1.26）。

II- 当 j_0 相对于 n 较小（即 $j_0 < -\frac{n\alpha}{2}$ ）的情况将在第 5.3节中讨论。这对应于广义高斯波已经穿过边界且边界层几乎完全被激活的情况。

III- 接近 j_0接近 $-n\alpha$（即 $j_0 \in \left[-\frac{n\alpha}{2}, np\right]$），将在第 5.4节中讨论。本节包含证明的主要部分，因为极限估计出现在这一情形中

在开始定理 2的证明之前，我们将介绍关于函数 $H^\beta_{2\mu}$ 和$E^\beta_{2\mu}$（由式1.22定义）的若干有用不等式。

引理 5.1。存在两个正的常数 C，c 使得

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |H^\beta_{2\mu}(x)| \leq C\exp(-c|x|^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}), \tag{5.1}$$

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad |E^\beta_{2\mu}(x)| \leq C\exp(-c|x|^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}), \tag{5.2}$$

$$\forall x \in]-\infty,0[, \quad |1-E^\beta_{2\mu}(x)| \leq C\exp(-c|x|^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}). \tag{5.3}$$

有兴趣的读者可以在 [Coe22 的引理 9] 中找到（Rob91，命题 53] ）的证明，后者提供了更一般的视角。函数 $E^\beta_{2\mu}$ 的不等式（5.2）和（5.3）可直接通过对函数 $H^\beta_{2\mu}$ 积分，并利用（1.23）和（5.1）得出。

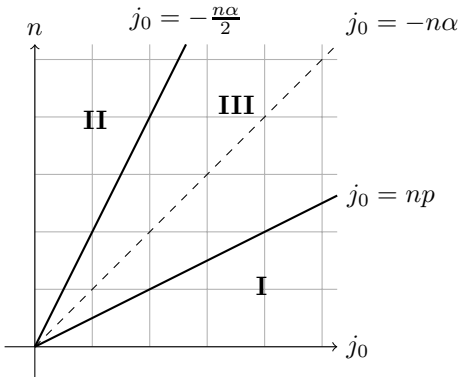

图7：情况 **I**、**II** 和**III**的不同扇区。

5.1 Case I: j_0 is large compared to n

我们考虑 n， $j_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 满足 $j_0 > np$，并旨在证明此情形下对所有 $j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，估计式（1.26）关于 Err($n$， j_0，j）成立。首先，我们可以证明

$$\forall j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \mathcal{G}(n, j_0, j) = \widetilde{\mathcal{G}}(n, j - j_0). \tag{5.4}$$

这个等式体现了这样一个事实：对于初始条件 $u^0 = \delta_{j_0}$，数值格式的解 $\mathcal{G}(n,\ j_0,\ j)$ 数值格式 **(1.3)** 在足够小的时间内不会感受到边界条件 n。

根据定义（1.25）Err(n， j_0， j）以及等式（5.4），可得

$$\mathrm{Err}(n, j_0, j) = E^{\beta}_{2\mu}\left(\frac{j_0 + n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)\mathcal{R}^c(j).$$

利用（4.26）对 $\mathcal{R}^c$（j）进行指数界定，我们注意到，只需证明在 $E^{\beta}_{2\mu}\left(\frac{j_0+n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)$ 上的广义高斯估计即可得出结论。此外，由于我们有

$$\frac{j_0 + n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}} \geq (p+\alpha)n^{\frac{2\mu-1}{2\mu}} > 0$$

以及函数 $x \in [p+\alpha, +\infty[\mapsto x^{\frac{1}{2\mu-1}}\exp\left(-\frac{c}{2}x^{\frac{1}{2\mu-1}}\right)$ 在 c是（5.2）中的正的常数，˜利用（5.2）我们得出存在一个正的常数 C使得对所有 n， $j_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 满足$j_0 > np$，我们有

$$\left|E^{\beta}_{2\mu}\left(\frac{j_0 + n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)\right| \leq \frac{\tilde{C}}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\exp\left(-\frac{c}{2}\left(\frac{|j_0 + n\alpha|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right). \tag{5.5}$$

这就完成了当 $j_0 > np$ 时（1.26）的证明。

5.2 Inverse Laplace transform

˜为证明 **(1.26)** 当 $j_0 \leq np$时，我们将使用时间格林函数 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}$，利用我们在第 4 节中定义的空间格林函数来表示它们。考虑一条包围谱 $\sigma(\mathcal{T})$ 和$\sigma(\mathscr{L})$的路径，例如 $\widetilde{\Gamma}_{r_0} = \exp(r_0)\mathbb{S}^1$，其中 $r_0 \in]0,\ +\infty[$, 逆拉普拉斯变换意味着

$$\forall n, j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \mathcal{G}(n, j_0, j) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_{r_0}} z^n G(z, j_0, j)dz, \tag{5.6}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \widetilde{\mathcal{G}}(n, j) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_{r_0}} z^n \widetilde{G}(z, j)dz, \tag{5.7}$$

˜其中空间格林函数 G和 G 由（4.9）和（4.10）定义。利用由（R （4.11）给出的函数的定义，以及等式（5.6）和（5.7），我们便得到

$$\forall n, j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \mathcal{G}(n, j_0, j) - \widetilde{\mathcal{G}}(n, j - j_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_{r_0}} z^n R(z, j_0, j)dz. \tag{5.8}$$

~我们的目标是变形路径 Γ_{r_0}，以便充分利用我们在第4节中对函数 $R(z, j_0, j)$ 得出的估计，同时注意到该函数在 $z=1$ 处有一个一阶极点。我们使用变量替换 $z=\exp(\tau)$。若定义图8中所示的路径 Γ_{r_0}:
$=\{r_0+it, t\in[-\pi,\pi]\}$ 和 $\mathbf{R}(\tau, j_0, j) := e^{\tau} R(e^{\tau}, j_0, j)$，则有

$$\forall n, j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \mathcal{G}(n, j_0, j) - \widetilde{\mathcal{G}}(n, j-j_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{r_0}} e^{n\tau}\mathbf{R}(\tau, j_0, j)d\tau. \tag{5.9}$$

我们回忆一下，在引理 4.3中，我们对函数 R 在邻域 $B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1)$内的 1附近给出了精确描述。我们固定半径 $\varepsilon_0^\star \in]0, \pi[$ 使得

$$\forall \tau \in B_{\varepsilon_0^\star}(0), \quad e^{\tau} \in B_{\widetilde{\varepsilon}_1}(1)$$

并且 使得存在一个全纯函数 ϖ： $B_{\varepsilon_0^\star}(0) \to \mathbb{C}$，它满足 $\varpi(0) = 0$ 且 d

$$\forall \tau \in B_{\varepsilon_0^\star}(0), \quad \exp(\varpi(\tau)) = \kappa(e^{\tau}).$$

我们回忆一下， $\kappa(z)$ 是矩阵 $\mathbb{M}(z)$ 的特征值，满足 $\kappa(1) = 1$，且关于 z全纯依赖。我们注意到，引理 1.2 蕴含

$$\forall \tau \in B_{\varepsilon_0^\star}(0), \quad F(e^{\varpi(\tau)}) = e^{\tau}. \tag{5.10}$$

若定义全纯函数 φ 使得

$$\forall \tau \in \mathbb{C}, \quad \varphi(\tau) := -\frac{\tau}{\alpha} + (-1)^{\mu+1}\frac{\beta}{\alpha^{2\mu+1}}\tau^{2\mu} \tag{5.11}$$

其中 α 和 β 在假设 1中定义。于是，利用等式（5.10）以及 1.10）给出的 F的对数渐近展开，可证明存在全纯函数 ξ： $B_{\varepsilon_0^\star}(0) \to \mathbb{C}$ 使得

$$\forall \tau \in B_{\varepsilon_0^\star}(0), \quad \varpi(\tau) = \varphi(\tau) + \xi(\tau)\tau^{2\mu+1}. \tag{5.12}$$

对于所有 j_0、 $j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，我们进而定义全纯函数

$$\forall \tau \in B_{\varepsilon_0^\star}(0), \quad \mathbf{P}^c(\tau, j_0, j) := \frac{\tau}{e^{\tau}-1}e^{\tau}P^c(e^{\tau}, j_0, j) \quad \text{and} \quad \mathbf{P}^u(\tau, j_0, j) := \frac{\tau}{e^{\tau}-1}e^{\tau}P^u(e^{\tau}, j_0, j). \tag{5.13}$$

利用引理 4.3，我们可以证明，对于所有 j_0， $j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，函数 $\mathbf{R}(\cdot, j_0, j)$ 可以在 $B_{\varepsilon_0^\star}(0)$ 上亚纯延拓，且在 0 处有一个一阶极点，并满足等式

$$\forall \tau \in B_{\varepsilon_0^\star}(0)\setminus\{0\}, \quad \mathbf{R}(\tau, j_0, j) = \frac{\mathbf{P}^c(\tau, j_0, j)}{\tau} + \frac{\mathbf{P}^u(\tau, j_0, j)}{\tau}. \tag{5.14}$$

现在我们将证明一个引理，以便从引理 $R(z, j_0, j)$ 4.2 和 4.3 中关于函数 $\mathbf{R}(\tau, j_0, j)$ 得到 。

引理 5.2。 存在两个正的常数 C， c 使得

$$\forall \tau \in B_{\varepsilon_0^\star}(0), \forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad |\boldsymbol{P}^u(\tau, j_0, j)| \le Ce^{-cj_0-cj}, \tag{5.15}$$

$$\forall \tau \in B_{\varepsilon_0^\star}(0), \forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left|\boldsymbol{P}^c(\tau, j_0, j) - \mathcal{R}^c(j)e^{-j_0\varpi(\tau)}\right| \le C|\tau|e^{-cj}\exp\left(-j_0\Re(\varpi(\tau))\right). \tag{5.16}$$

此外，对于所有 $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0^\star[$，存在一个宽度 $\eta_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$，使得如果我们定义

$$\Omega_\varepsilon := \{\tau \in \mathbb{C}, \Re(\tau) \in]-\eta_\varepsilon, \pi], \Im(\tau) \in [-\pi, \pi]\}\setminus B_\varepsilon(0)$$

则对于所有 $j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 函数 $\tau \mapsto \boldsymbol{R}(\tau, j_0, j)$ 在Ω_ε 上全纯定义，并且存在两个正的常数 $C_\varepsilon, c_\varepsilon > 0$ 使得

$$\forall \tau \in \Omega_\varepsilon, \forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad |\boldsymbol{R}(\tau, j_0, j)| \le C_\varepsilon e^{-c_\varepsilon j_0 - c_\varepsilon j}. \tag{5.17}$$

证明 不等式 (5.15) 是由 (4.24) 直接推出的。我们还注意到，三角不等式意味着

$$\forall \tau \in B_{\varepsilon_\star}(0)\ \forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\},$$
$$|\mathbf{P}^c(\tau, j_0, j) - \mathcal{R}^c(j)e^{-j_0\varpi(\tau)}| \leq \left|\frac{\tau}{e^\tau - 1}e^\tau - 1\right| |P^c(e^\tau, j_0, j)| + |P^c(e^\tau, j_0, j) - \mathcal{R}^c(j)\kappa(e^\tau)^{-j_0}|.$$

因此，(5.16) 可由 (4.26) 和中值不等式直接推出。

现在考虑 $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0^\star[$。集合

$$U_\varepsilon := \{\tau \in \mathbb{C}, \Re(\tau) \in [0,\pi], \Im(\tau) \in [-\pi,\pi]\} \setminus B_\varepsilon(0)$$

是紧的。此外，对于所有 $\tau_0 \in U_\varepsilon$，由于 $e^{\tau_0} \in \overline{\mathcal{U}}\setminus\{1\}$，根据引理 4.2 可知存在一个半径 $\delta > 0$ 和两个正的常数 C，c 使得 $\tau \mapsto \mathbf{R}(\tau,\ j_0,\ j)$ 在 $B_\delta(\tau_0)$ 上全纯定义，且

$$\forall \tau \in B_\delta(\tau_0), \forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad |\mathbf{R}(\tau, j_0, j)| \leq Ce^{-c(j+j_0)}.$$

利用紧致性论证，我们可找到一个宽度 $\eta_\varepsilon \in]0,\ \varepsilon[$ 使得对于所有 $j_0,\ j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 函数 $\tau \mapsto \mathbf{R}(\tau,\ j_0,\ j)$ 在 Ω_ε 上全纯定义，并且存在两个正的常数 $C,\ c > 0$ 使得 (5.17) 成立。□

下面的引理给出了函数的实部的界 ϖ 和 φ，这些界将在后文中发挥作用，例如使用（5.16）时。

引理 5.3. 存在一个半径 $\varepsilon_1^\star \in]0, \varepsilon_0^\star[$ 和两个正的常数 A_R, A_I 使得

$$\forall \tau \in \mathbb{C}, \quad \alpha\Re(\varphi(\tau)) \leq -\Re(\tau) + A_R\Re(\tau)^{2\mu} - A_I\Im(\tau)^{2\mu}, \tag{5.18}$$
$$\forall \tau \in B_{\varepsilon_1^\star}(0), \quad \alpha\Re(\varpi(\tau)) + |\alpha||\xi(\tau)\tau^{2\mu+1}| \leq -\Re(\tau) + A_R\Re(\tau)^{2\mu} - A_I\Im(\tau)^{2\mu}. \tag{5.19}$$

证明 我们从（5.18）的证明开始。根据杨氏不等式，对于 $l \in \{1, \ldots, 2\mu-1\}$，我们有：对于所有 $\delta > 0$，存在一个常数 $C_\delta > 0$ 使得对于所有 $\tau \in \mathbb{C}$

$$|\Re(\tau)|^l |\Im(\tau)|^{2\mu-l} \leq \delta\Im(\tau)^{2\mu} + C_\delta\Re(\tau)^{2\mu}.$$

Furthermore, we have that

$$\alpha\Re(\varphi(\tau)) = -\Re(\tau) + (-1)^{\mu+1}\left(\frac{\Re(\beta)}{\alpha^{2\mu}}\Re(\tau^{2\mu}) - \frac{\Im(\beta)}{\alpha^{2\mu}}\Im(\tau^{2\mu})\right).$$

于是，对于 $\delta > 0$，存在 $C_\delta > 0$ 使得

$$\alpha\Re(\varphi(\tau)) \leq -\Re(\tau) + \Re(\tau)^{2\mu}\left(\frac{\Re(\beta)}{\alpha^{2\mu}} + C_\delta\right) + \Im(\tau)^{2\mu}\left(-\frac{\Re(\beta)}{\alpha^{2\mu}} + \delta\right). \tag{5.20}$$

因此，通过取 δ 足够小，我们可以完成不等式（5.18）的证明。

现在我们将证明不等式（5.19）。利用（5.12），对于 $\tau \in B_{\varepsilon_\star}(0)$

$$\alpha\Re(\varpi(\tau)) + |\alpha||\xi(\tau)\tau^{2\mu+1}| \leq \alpha\Re(\varphi(\tau)) + 2|\alpha||\xi(\tau)\tau^{2\mu+1}|. \tag{5.21}$$

若固定一个半径 $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0^\star[$，则函数 ξ 在 $B_\varepsilon(0)$ 上有界，其上界为某个常数 $C > 0$。此外，我们知道存在两个常数 $c_1, c_2 > 0$，使得

$$\forall \tau \in \mathbb{C}, \quad |\tau|^{2\mu} \leq c_1\Re(\tau)^{2\mu} + c_2\Im(\tau)^{2\mu}.$$

因此，利用（5.20）以及 (5.21)，对于所有半径 $\varepsilon_1^\star \in]0,\ \varepsilon]$ 以及所有 $\delta > 0$，存在一个常数 $C_\delta > 0$ 使得

$$\forall \tau \in B_{\varepsilon_1^\star}(1), \quad \alpha\Re(\varpi(\tau)) + |\alpha||\xi(\tau)\tau^{2\mu+1}|$$
$$\leq -\Re(\tau) + \Re(\tau)^{2\mu}\left(\frac{\Re(\beta)}{\alpha^{2\mu}} + C_\delta + 2\alpha c_1\tilde{C}\varepsilon_1^\star\right) + \Im(\tau)^{2\mu}\left(-\frac{\Re(\beta)}{\alpha^{2\mu}} + \delta + 2\alpha c_2\tilde{C}\varepsilon_1^\star\right).$$

取 δ 和 $\varepsilon_1^\star$ 足够小使我们能够证明（5.19）。 □

Choice of the radius ε and of the width η

现在我们引入半径 $\varepsilon > 0$ 和宽度 $\eta > 0$，它们将满足一系列条件。这些条件将在整个证明过程中使用，为了固定记号，现将它们集中列出。

首先，我们固定半径 $\varepsilon \in \left]0, \text{最小值}\left(\varepsilon_1^\star, \left(\frac{1}{2\mu A_R}\right)^{\frac{1}{2\mu-1}}\right)\right[$ 其中半径 $\varepsilon_1^\star$ 定义于引理5.3中。对 ε 的这一选择将使我们能够使用引理 5.2 和 5.3的结果。此外，如果我们引入函数

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & \tau_p & \mapsto & \tau_p - A_R {\tau_p}^{2\mu} \end{array} \tag{5.22}$$

我们将在第5.4.1节中用来定义一族参数化曲线，然后函数 Ψ 在 $]-\infty$上连续且严格递增，$\varepsilon]$。

We now introduce the function

$$\begin{array}{rccc} r_\varepsilon: &]0,\varepsilon[& \to & \mathbb{R} \\ & \eta & \mapsto & \sqrt{\varepsilon^2-\eta^2} \end{array} \tag{5.23}$$

其用于定义曲线的端点 $-\eta + i\mathbb{R} \cap B_\varepsilon(0)$。我们回顾一下，宽度 η_ε 定义于引理5.2中。我们声称存在一个宽度 $\eta \in]0, \eta_\varepsilon[$ 我们将在本文余下部分固定取该宽度，使得：

- 满足以下不等式：

$$\frac{\eta}{2} > A_R \eta^{2\mu}. \tag{5.24}$$

- 存在一个半径 $\varepsilon_\# \in]0,\varepsilon[$ 使得若定义

$$l_{extr} := \left(\frac{\Psi(\varepsilon_\#) - \Psi(-\eta)}{A_I}\right)^{\frac{1}{2\mu}}, \tag{5.25}$$

则 $-\eta + i l_{extr} \in B_\varepsilon(0)$。

- 对于所有满足 $-\frac{n\alpha}{2} \le j_0 \le np$ 的 $n, j_0 \in \mathbb{N}^*$，我们有

$$\left(-\frac{n\alpha}{j_0} - 1\right)(-\eta) + A_R(-\eta)^{2\mu} \le \frac{A_I}{2} r_\varepsilon(\eta)^{2\mu}. \tag{5.26}$$

我们引入路径 $\Gamma_{in}, \Gamma_{out}, \Gamma$ 和 $\Gamma_{\eta,in}$，它们如图 8 所示，并定义如下

$$\begin{aligned} \Gamma_{out} &:= [-\eta - i\pi, -\eta - i r_\varepsilon(\eta)] \cup [-\eta + i r_\varepsilon(\eta), -\eta + i\pi], \\ \Gamma_{in} &:= \left[-\eta - i r_\varepsilon(\eta), \frac{\varepsilon}{2}\right] \cup \left[\frac{\varepsilon}{2}, -\eta + i r_\varepsilon(\eta)\right], \\ \Gamma &:= \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}, \\ \Gamma_{\eta,in} &:= [-\eta - i r_\varepsilon(\eta), -\eta + i r_\varepsilon(\eta)]. \end{aligned}$$

我们注意到这些路径位于 $\Omega_\varepsilon \cup B_\varepsilon(0)$ 中。注意到函数 $2i\pi$-周期性，函数 $\mathbf{R}(\cdot, j_0, j)$，柯西公式表明等式（5.9）可以改写为

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \mathcal{G}(n, j_0, j) - \widetilde{\mathcal{G}}(n, j - j_0) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma e^{n\tau}\mathbf{R}(\tau, j_0, j)d\tau \\ &= \frac{1}{2i\pi}(T^{out} + T^u + T^c) \end{aligned} \tag{5.27}$$

其中

$$T^{out} := \int_{\Gamma_{out}} e^{n\tau}\mathbf{R}(\tau, j_0, j)d\tau, \quad T^u := \int_{\Gamma_{in}} e^{n\tau}\frac{\mathbf{P}^u(\tau, j_0, j)}{\tau}d\tau, \quad T^c := \int_{\Gamma_{in}} e^{n\tau}\frac{\mathbf{P}^c(\tau, j_0, j)}{\tau}d\tau.$$

因此，为了在 $j_0 \le np$ 时证明 (1.26)，我们需要估计各项 T^{out}、T^u 以及 T^c。我们先证明 T^{out} 和 T^u 的估计。

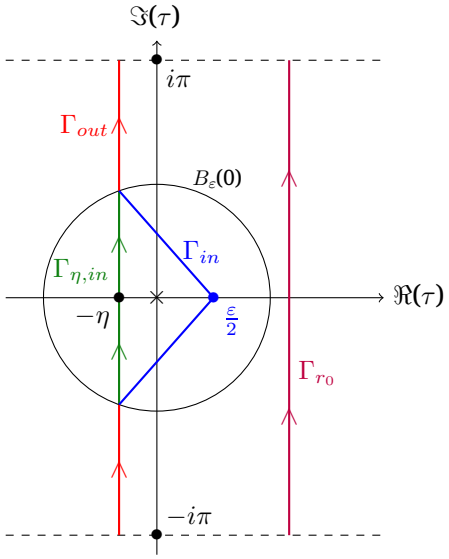

图 8：路径 Γ_{r_0} （紫色）、 Γ_{in} （蓝色）、 Γ_{out} （红色）、 $\Gamma := \Gamma_{out} \cup \Gamma_{in}$ 和 $\Gamma_{\eta,in}$（绿色）的表示

Pro命题 5.1 (关于 T^{out}和 T^u的估计)。 存在两个常数 C， $c > 0$ 使得 t

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad |T^{out}| \le C\exp(-n\eta - c(j+j_0)).$$

and

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad |T^u - 2i\pi\mathcal{R}^u(j_0,j)| \le C\exp(-n\eta - c(j+j_0)).$$

证明 我们考虑 $n \in \mathbb{N}$和 $j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

- 由于 Γ_{out} 位于 Ω_ε，利用 (5.17)，存在一个正的常数 c 使得

$$|T^{out}| \lesssim \int_{\Gamma_{out}} \exp(-n\eta)\exp(-cj - cj_0)|d\tau| \lesssim \exp(-n\eta)\exp(-cj - cj_0).$$

- 利用留数定理和 4.25 对 $\mathcal{R}^u(j_0,\ j)$ 的定义，我们得到

$$T^u = \int_{\Gamma_{in}} e^{n\tau}\frac{\mathbf{P}^u(\tau,j_0,j)}{\tau}d\tau = 2i\pi\mathcal{R}^u(j_0,j) + \int_{\Gamma_{\eta,in}} e^{n\tau}\frac{\mathbf{P}^u(\tau,j_0,j)}{\tau}d\tau.$$

因此，利用（5.15），存在一个常数 $c > 0$ 使得

$$|T^u - 2i\pi\mathcal{R}^u(j_0,j)| \le \int_{\Gamma_{\eta,in}} e^{n\Re(\tau)}\frac{|\mathbf{P}^u(\tau,j_0,j)|}{|\tau|}|d\tau| \lesssim \exp(-n\eta - c(j+j_0)).$$

□

注意到，对于项 T^{out}和 T^u，我们刚刚证明的指数估计可以调整，从而得到与（1.26）中类似的广义高斯估计，因为存在一个常数 $c > 0$ 使得对于所有n， $j_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 满足 $j_0 \le np$的情形，我们有

$$-n \le -c\left(\frac{|j_0 + n\alpha|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}.$$

在证明的其余部分中，我们还会经常遇到同类指数界，并且通过相同的推理可以得到广义高斯估计。

既然我们已经得到了关于这两项的估计 T^{out}和 T^u，接下来只需研究这一项 T^c。第5.3 节将专门证明在 T^c 情形**II** 下 j_0 相对于 $-n\alpha$较小时的估计。最后，第5.4 节将研究在 T^c 情形**III** 下 j_0 接近 $-n\alpha$时的情况。

5.3 情形 II：关于 $-n\alpha$ 较小时对 T^c 的估计

本节的主要目标是证明以下命题。

命题 5.2。 存在两个正的常数 C， c，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 j， $j_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 使得$j_0 < -\frac{n\alpha}{2}$，我们有

$$\left|T^c - 2i\pi E_{2\mu}^{\beta}\left(\frac{j_0+n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)\mathcal{R}^c(j)\right| \leq \frac{Ce^{-cj}}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\exp\left(-c\left(\frac{|n\alpha+j_0|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right).$$

结合（5.27），命题5.1 和5.2，于是我们证明存在两个正的常数 C， c 使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$和 j_0, $j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 它们满足$j_0 < -\frac{n\alpha}{2}$:

$$|\mathrm{Err}(n, j_0, j)| \leq \frac{Ce^{-cj}}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\exp\left(-c\left(\frac{|n\alpha+j_0|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right). \tag{5.28}$$

因此，当1.26中 j_0 相对于 n 较小时，式子成立（情形**II**）。

Proof

Step 1: We decompose T^c in two parts:

$$T^c = T_1^c + T_2^c \tag{5.29}$$

where

$$T_1^c := \int_{\Gamma_{in}} e^{n\tau}\frac{\mathbf{P}^c(\tau, j_0, j) - \mathcal{R}^c(j)\exp(-j_0\varpi(\tau))}{\tau}d\tau,$$
$$T_2^c := \mathcal{R}^c(j)\int_{\Gamma_{in}}\frac{\exp(n\tau - j_0\varpi(\tau))}{\tau}d\tau.$$

我们将分别估计这两项，以证明存在两个正的常数 C, c 使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$和 j， $j_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 满足 $j_0 < -n\frac{\alpha}{2}$，我们有

$$|T^c - 2i\pi\mathcal{R}^c(j)| \leq Ce^{-c(j+n)}. \tag{5.30}$$

- Inequality (5.16) implies that the function

$$\tau \in B_\varepsilon(0)\setminus\{0\} \mapsto e^{n\tau}\frac{\mathbf{P}^c(\tau, j_0, j) - \mathcal{R}^c(j)\exp(-j_0\varpi(\tau))}{\tau}$$

可在 B_ε**(0)** 上全纯延拓。利用柯西公式，我们于是有

$$T_1^c = \int_{\Gamma_{\eta,in}} e^{n\tau}\frac{\mathbf{P}^c(\tau, j_0, j) - \mathcal{R}^c(j)\exp(-j_0\varpi(\tau))}{\tau}d\tau.$$

利用（5.16），存在两个正的常数 C， c 使得

$$|T_1^c| \leq Ce^{-cj}\int_{\Gamma_{\eta,in}}\exp(n\Re(\tau) - j_0\Re(\varpi(\tau)))|d\tau| = Ce^{-cj-n\eta}\int_{\Gamma_{\eta,in}}\exp(-j_0\Re(\varpi(\tau)))|d\tau|.$$

对于 $\tau \in \Gamma_{\eta,\ in}$，利用（5.19）以及 $j_0 < -\frac{n\alpha}{2}$ 这一事实，我们有

$$-j_0\Re(\varpi(\tau)) \leq \frac{-j_0}{\alpha}\left(-\Re(\tau) + A_R\Re(\tau)^{2\mu} - A_I\Im(\tau)^{2\mu}\right) \leq \frac{n}{2}(\eta + A_R\eta^{2\mu}). \tag{5.31}$$

因此，存在一个新的常数 $C > 0$ 使得

$$|T_1^c| \leq C\exp\left(-cj - n\left(\frac{\eta}{2} - A_R\eta^{2\mu}\right)\right).$$

因此，关于5.24的条件 η 意味着存在两个正的常数 C， c 使得

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad j_0 < -\frac{n\alpha}{2} \Rightarrow |T_1^c| \leq C\exp(-c(j+n)). \tag{5.32}$$

- 利用留数定理，我们有

$$T_2^c - 2i\pi\mathcal{R}^c(j) = \mathcal{R}^c(j)\int_{\Gamma_{\eta,in}} \frac{\exp(n\tau - j_0\varpi(\tau))}{\tau} d\tau.$$

因此，利用（4.26）对 $\mathcal{R}^c$（j）进行指数界定，存在两个正的常数 C， c 使得

$$|T_2^c - 2i\pi\mathcal{R}^c(j)| \leq Ce^{-cj}\int_{\Gamma_{\eta,in}} \frac{\exp(n\Re(\tau) - j_0\Re(\varpi(\tau)))}{|\tau|}|d\tau| \leq C\frac{\exp(-cj - n\eta)}{\eta}\int_{\Gamma_{\eta,in}} \exp(-j_0\Re(\varpi(\tau)))|d\tau|.$$

因此，利用（5.31），存在一个新的常数 $C > 0$ 与 n、 j_0 和 j 无关，使得

$$|T_2^c - 2i\pi\mathcal{R}^c(j)| \leq C\exp\left(-cj - n\left(\frac{\eta}{2} - A_R\eta^{2\mu}\right)\right).$$

因此，条件（5.24）关于 η 意味着存在两个正的常数 C， c 使得

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j_0, j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad j_0 < -\frac{n\alpha}{2} \Rightarrow |T_2^c - 2i\pi\mathcal{R}^c(j)| \leq C\exp(-c(j+n)). \tag{5.33}$$

利用（5.29）、（5.32）和（5.33），我们得出（5.30）的证明。

Step 2: Since we have

$$\frac{j_0 + n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}} \leq \frac{\alpha}{2}n^{\frac{2\mu-1}{2\mu}} < 0,$$

以及函数 $x \in]-\infty, \frac{\alpha}{2}] \mapsto |x|^{\frac{1}{2\mu-1}}\exp\left(-\frac{c}{2}|x|^{\frac{1}{2\mu-1}}\right)$ 在 c为（5.3）中的正的常数时有界，我们~利用（5.3）可得，存在正的常数 C使得对于所有 n， $j_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 满足 $j_0 < -\frac{n\alpha}{2}$的情形，有

$$\left|1 - E_{2\mu}^{\beta}\left(\frac{j_0 + n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)\right| \leq \frac{\tilde{C}}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\exp\left(-\frac{c}{2}\left(\frac{|j_0 + n\alpha|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right). \tag{5.34}$$

利用（5.30）、（5.34）以及估计式（4.26）对 $\mathcal{R}^c$（j）进行指数界定，我们便完成了命题5.2的证明。□

5.4 情形 III：当 j_0 接近 -nα 时对 T^c 的估计

本节旨在研究当 j_0 接近 $-n\alpha$ 时的情形，并证明以下命题：

命题 5.3。 存在两个常数 C， $c > 0$，使得对于所有满足 $j_0 \in \left[-\frac{n\alpha}{2}, np\right]$的 n， j_0， $j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，均有

$$\left|T^c - 2i\pi E_{2\mu}^{\beta}\left(\frac{j_0 + n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)\mathcal{R}^c(j)\right| \leq \frac{Ce^{-cj}}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\exp\left(-c\left(\frac{|n\alpha + j_0|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right).$$

结合（5.27）与命题5.1 和5.3，我们证明存在两个常数 C， $c > 0$，使得当 $j_0 \in \left[-\frac{n\alpha}{2}, np\right]$时，有

$$|\mathrm{Err}(n, j_0, j)| \leq \frac{Ce^{-cj}}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\exp\left(-c\left(\frac{|n\alpha + j_0|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right). \tag{5.35}$$

因此，使用 第 5.1 节的结果、（5.28）和（5.35），我们可以完成定理 2 的证明 .

因此，现在只需证明命题 5.3。本文的这一部分需要最为仔细的处理，因为定理 2 的极限估计将在此处出现。为了证明命题 5.3，我们将把 T^c 分解为三个部分：

$$T^c = T_1^c + T_2^c + T_{princ}^c \tag{5.36}$$

where

$$T_1^c := \int_{\Gamma_{in}} e^{n\tau} \frac{\mathbf{P}^c(\tau, j_0, j) - \mathcal{R}^c(j) \exp(-j_0 \varpi(\tau))}{\tau} d\tau, \tag{5.37}$$

$$T_2^c := \mathcal{R}^c(j) \int_{\Gamma_{in}} e^{n\tau} \frac{e^{-j_0 \varpi(\tau)} - e^{-j_0 \varphi(\tau)}}{\tau} d\tau, \tag{5.38}$$

$$T_{princ}^c := \mathcal{R}^c(j) \int_{\Gamma_{in}} \frac{e^{n\tau} e^{-j_0 \varphi(\tau)}}{\tau} d\tau. \tag{5.39}$$

现在我们概述命题 5.3的证明方法。在第 5.4.1 节中，我们引入一族积分路径 Γ_p，它们对于最佳利用我们在第 $\mathbf{R}(\tau, j_0, j)$ 节中证明的关于函数 4 的估计至关重要。随后，我们在第 5.4.2 节中分别证明命题 T_1^c 和 T_2^c 中各项的估计，即命题 5.4 和 5.5。最后，第 5.4.3 节专门分析项 T_{princ}^c。我们将改变该项中的积分路径

$$\int_{\Gamma_{in}} \frac{e^{n\tau} e^{-j_0 \varphi(\tau)}}{\tau} d\tau$$

以便将其与 $E_{2\mu}^{\beta}\left(\frac{j_0 + n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)$（见命题 5.6）。

5.4.1 Choice of integration path

现在，我们将采用 [ZH98], 中提出的策略，该策略也曾用于 [God03、 CF22、 CF21、 Coe22],并引入一族参数化曲线。

我们回顾一下，我们在 (5.22) 中引入了函数 Ψ 定义为

$$\forall \tau_p \in \mathbb{R}, \quad \Psi(\tau_p) := \tau_p - A_R {\tau_p}^{2\mu}.$$

并且我们选择了 ε 足够小，使得函数 Ψ 在 $]-\infty, \varepsilon]$上连续且严格递增。因此，我们可以为 $\tau_p \in [-\eta, \varepsilon]$ 引入由 Γ_p 定义的曲线

$$\Gamma_p := \left\{ \tau \in \mathbb{C}, -\eta \leq \Re(\tau) \leq \tau_p, \quad \Re(\tau) - A_R \Re(\tau)^{2\mu} + A_I \Im(\tau)^{2\mu} = \Psi(\tau_p) \right\}.$$

它是一条关于轴 $\mathbb{R}$ 对称的曲线，该曲线与此轴相交于点 τ_p。如果我们引入 $\ell_p = \left(\begin{smallmatrix} \Psi(\tau_p) - \Psi & -\eta \\ A_I & \end{smallmatrix}\right)^{\frac{1}{2\mu}}()$，则 $-\eta + i\ell_p$和 $-\eta - i\ell_p$是 Γ_p的端点。我们还可以通过定义 $\gamma_p : [-\ell_p, \ell_p] \to \mathbb{C}$ 来引入这条曲线的参数化，使得

$$\forall \tau_p \in [-\eta, \varepsilon], \forall t \in [-\ell_p, \ell_p], \quad \Im(\gamma_p(t)) = t, \quad \Re(\gamma_p(t)) = h_p(t) := \Psi^{-1}\left(\Psi(\tau_p) - A_I t^{2\mu}\right). \tag{5.40}$$

上述参数化立即得出存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\forall \tau_p \in [-\eta, \varepsilon], \forall t \in [-\ell_p, \ell_p], \quad |h_p'(t)| \leq C. \tag{5.41}$$

此外，存在一个常数 $c_\star > 0$ 使得

$$\forall \tau_p \in [-\eta, \varepsilon], \forall \tau \in \Gamma_p, \quad \Re(\tau) - \tau_p \leq -c_\star \Im(\tau)^{2\mu}. \tag{5.42}$$

我们引入这些积分路径 Γ_p 因为它们使我们能够最优地使用不等式（5.18）和（5.19）。例如，如果我们希望界定 $e^{n\tau - j_0 \varpi}(\tau)$ 对于 $\tau \in \Gamma_p \cap B_\varepsilon(\mathbf{0})$，由等式$\operatorname{sgn}(-j_0) = \operatorname{sgn}(\alpha)$ 以及不等式（5.19）和（5.42）可知

$$\begin{aligned} n\Re(\tau) - j_0 \Re(\varpi(\tau)) &\leq n\Re(\tau) + \frac{j_0}{\alpha}\left(\Re(\tau) - A_R \Re(\tau)^{2\mu} + A_I \Im(\tau)^{2\mu}\right) \\ &\leq -n c_\star \Im(\tau)^{2\mu} + \left(\frac{j_0}{\alpha} + n\right) \tau_p - \frac{j_0}{\alpha} A_R \tau_p^{2\mu}. \end{aligned} \tag{5.43}$$

此类计算将在下面的证明中定期进行。还需要适当地选择 τ_p，使其取决于 n 和 j_0，从而使不等式（5.43）的右端项最小，同时路径 Γ_p保持在球 $B_\varepsilon(0)$内。我们回顾一下，当我们确定宽度 η的选择时，定义了一个半径 $\varepsilon_\# \in]0, \varepsilon[$

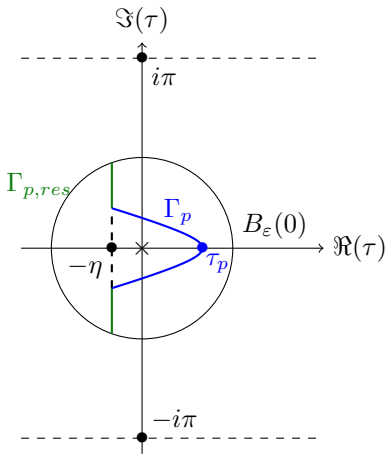

图 9：路径 $\Gamma_{p,in}$ 的示意图。它由$\Gamma_{p,res}$ （绿色）和 Γ_p （蓝色）组成。

使得 $-\eta + il_{extr} \in B_\varepsilon(0)$ 其中实数 l_{extr} 由（5.25）定义。这意味着曲线 Γ_p与 $\tau_p = \varepsilon_\#$ 轴 $-\eta + i\mathbb{R}$ 在 $B_\varepsilon(0)$内相交。令

$$\zeta = \frac{-j_0 - n\alpha}{2\mu n}, \quad \gamma = \frac{-j_0 A_R}{n}, \quad \rho\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right) = \operatorname{sgn}(\zeta)\left(\frac{|\zeta|}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2\mu-1}}.$$

Inequality (5.43) thus becomes

$$n\Re(\tau) - j_0\Re(\varpi(\tau)) \le -nc_\star\Im(\tau)^{2\mu} - \frac{n}{\alpha}(2\mu\zeta\tau_p - \gamma\tau_p^{2\mu}). \tag{5.44}$$

我们的极限估计将来自 ζ 接近 0 的情形。我们注意到，条件 $j_0 \in \left[-\frac{n\alpha}{2}, np\right]$ 意味着

$$-pA_R \le \gamma \le \frac{\alpha}{2}A_R. \tag{5.45}$$

Then, we take

$$\tau_p := \begin{cases} \rho\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right), & \text{if } \rho\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right) \in [-\frac{\eta}{2}, \varepsilon_\#], \quad \text{(Case } \mathbf{A}\text{)} \\ \varepsilon_\#, & \text{if } \rho\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right) > \varepsilon_\#, \quad \text{(Case } \mathbf{B}\text{)} \\ -\frac{\eta}{2}, & \text{if } \rho\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right) < -\frac{\eta}{2}. \quad \text{(Case } \mathbf{C}\text{)} \end{cases}$$

情形 **A** 对应于选择使（5.44）的右端项最小化，因为 $\rho\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)$ 是多项式的唯一实根

$$\gamma x^{2\mu-1} = \zeta.$$

情形**B** 和**C** 允许路径 Γ_p 保持在 B_ε**(0)** 内。

We now define the paths represented on Figure 9:

$$\begin{aligned} \Gamma_{p,res} &:= \{-\eta + it, \quad t \in [-r_\varepsilon(\eta), -\ell_p] \cup [\ell_p, r_\varepsilon(\eta)]\}, \\ \Gamma_{p,in} &:= \Gamma_p \cup \Gamma_{p,res}, \end{aligned}$$

where the function r_ε is defined by (5.23).

最后，在开始确定各项的估计之前， T_1^c和 T_2^c在第5.4.2节中，我们将引入一些不等式，以简化推导过程。

引理 5.4。• 存在一个常数 $C > 0$ 使得对于所有 $\tau \in B_\varepsilon$（**0**） 和 n， $j_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 使得$j_0 \in \left[-\frac{n\alpha}{2}, np\right]$，我们有

$$\left|e^{n\tau}\left(e^{-j_0\varpi(\tau)} - e^{-j_0\varphi(\tau)}\right)\right| \le Cn|\tau|^{2\mu+1}\exp(n\Re(\tau) - j_0(\Re(\varpi(\tau)) - |\xi(\tau)(\tau)^{2\mu+1}|)). \tag{5.46}$$

• 对于 n， $j_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 和 $\tau \in \Gamma_p$，我们有

– *Case* ***A***: $\rho\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right) \in \left[-\frac{\eta}{2}, \varepsilon_{\#}\right]$

$$n\Re(\tau) - j_0(\Re(\varpi(\tau)) - |\xi(\tau)\tau^{2\mu+1}|) \leq -nc_\star \Im(\tau)^{2\mu} - \frac{n}{\alpha}(2\mu-1)\gamma\left(\frac{|\zeta|}{\gamma}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}. \tag{5.47}$$

–情形 ***B***: $\rho\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right) > \varepsilon_{\#}$

$$n\Re(\tau) - j_0(\Re(\varpi(\tau)) - |\xi(\tau)\tau^{2\mu+1}|) \leq -\frac{n}{2}(2\mu-1)A_R\varepsilon_{\#}^{2\mu}. \tag{5.48}$$

–情形 ***C***: $\rho\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right) < -\frac{\eta}{2}$

$$n\Re(\tau) - j_0(\Re(\varpi(\tau)) - |\xi(\tau)\tau^{2\mu+1}|) \leq -\frac{n}{2}(2\mu-1)A_R\left(\frac{\eta}{2}\right)^{2\mu}. \tag{5.49}$$

对于 n， $j_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 以及$\tau \in \Gamma_{p,\ res}$，在所有情况下（***A***、***B***和***C***）

$$n\Re(\tau) - j_0(\Re(\varpi(\tau)) - |\xi(\tau)\tau^{2\mu+1}|) \leq -n\frac{\eta}{2}. \tag{5.50}$$

不等式（5.47）-（5.50）的证明主要依赖于不等式（5.18）和（5.19）以及类似于为得到（5.44）所进行的计算。关于引理 [Coe22、引理 17、18以及 19] 的完整证明，我们建议感兴趣的读者参阅 [Coe22] 的证明，这些证明在研究劳朗算子的时间格林函数的背景下证明了类似的不等式。这里有意保留了相当相似的记号。唯一的区别是， α中的证明通常是在速度为正的情况下进行的。

5.4.2 T_1^c和 T_2^c的估计

在本节中，我们证　明当 j_0接近 $-n\alpha$时， T_1^c和 T_2^c项满足广义高斯估计。

命题 5.4。 存在两个正的常数 C， c ，使得

$$\forall n, j, j_0 \in \mathbb{N}^*, \quad j_0 \in \left[-\frac{n\alpha}{2}, np\right] \Rightarrow |T_1^c| \leq \frac{C}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\exp\left(-cj - c\left(\frac{|j_0+n\alpha|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right).$$

证明　•不等式（5.16）意味着函数

$$\tau \in B_\varepsilon(0)\setminus\{0\} \mapsto e^{n\tau}\frac{\mathbf{P}^c(\tau, j_0, j) - \mathcal{R}^c(j)\exp(-j_0\varpi(\tau))}{\tau}$$

可以在 B_ε(0)上作全纯延拓。因此，柯西公式意味着　　t

$$T_1^c = \int_{\Gamma_{in,p}} e^{n\tau}\frac{\mathbf{P}^c(\tau, j_0, j) - \mathcal{R}^c(j)\exp(-j_0\varpi(\tau))}{\tau}d\tau.$$

利用 (5.16), 存在两个正的常数 C, c 使得

$$\begin{aligned}|T_1^c| &\leq Ce^{-cj}\int_{\Gamma_{in,p}} \exp\left(n\Re(\tau) - j_0\Re(\varpi(\tau))\right)|d\tau| \\ &\leq Ce^{-cj}\left(\int_{\Gamma_p} \exp\left(n\Re(\tau) - j_0\Re(\varpi(\tau))\right)|d\tau| + \int_{\Gamma_{res,p}} \exp\left(n\Re(\tau) - j_0\Re(\varpi(\tau))\right)|d\tau|\right).\end{aligned}$$

• 利用 (5.50)，我们有

$$\int_{\Gamma_{res,p}} \exp\left(n\Re(\tau) - j_0\Re(\varpi(\tau))\right)|d\tau| \leq 2\pi\exp\left(-n\frac{\eta}{2}\right). \tag{5.51}$$

• 在情形 **B** 和 **C**中，使用 (5.48) 或 (5.49) 视情形而定，存在两个常数 C， $c>0$ 使得

$$\int_{\Gamma_p}\exp\left(n\Re(\tau)-j_0\Re(\varpi(\tau))\right)|d\tau|\leq C\exp\left(-cn\right). \tag{5.52}$$

• In case **A**, using (5.47), we have

$$\int_{\Gamma_p}\exp\left(n\Re(\tau)-j_0\Re(\varpi(\tau))\right)|d\tau|\leq\int_{\Gamma_p}\exp\left(-nc_\star\Im(\tau)^{2\mu}\right)|d\tau|\exp\left(-\frac{n}{\alpha}(2\mu-1)\gamma\left(\frac{|\zeta|}{\gamma}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right).$$

使用参数化（5.40）、不等式（5.41）以及变量替换 $u=n^{\frac{1}{2\mu}}t$，我们得到

$$\int_{\Gamma_p}e^{-nc_\star\Im(\tau)^{2\mu}}|d\tau|\lesssim\int_{-\ell_p}^{\ell_p}e^{-nc_\star t^{2\mu}}dt\lesssim\frac{1}{n^{\frac{1}{2\mu}}}.$$

Thus,

$$\int_{\Gamma_p}\exp\left(n\Re(\tau)-j_0\Re(\varpi(\tau))\right)|d\tau|\lesssim\frac{1}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\exp\left(-\frac{n}{\alpha}(2\mu-1)\gamma\left(\frac{|\zeta|}{\gamma}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right).$$

Lastly, the inequa定性（5.45）意味着存在一个常数 $c>0$ 独立于 j_0 和 n 使得

$$-\frac{n}{\alpha}(2\mu-1)\gamma\left(\frac{|\zeta|}{\gamma}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\leq-c\left(\frac{|n\alpha+j_0|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}$$

so,

$$\int_{\Gamma_p}\exp\left(n\Re(\tau)-j_0\Re(\varpi(\tau))\right)|d\tau|\lesssim\frac{1}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\exp\left(-c\left(\frac{|n\alpha+j_0|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right). \tag{5.53}$$

结合 (5.51)-(5.53），我们完成命题 5.4的证明。 □

命题 5.5. 存在两个正的常数 C,c 使得

$$\forall n,j,j_0\in\mathbb{N}^*,\quad j_0\in\left[-\frac{n\alpha}{2},np\right]\Rightarrow|T_2^c|\leq\frac{C}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\exp\left(-cj-c\left(\frac{|j_0+n\alpha|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right).$$

证明 函数

$$\tau\in B_\varepsilon(0)\backslash\{0\}\mapsto e^{n\tau}\frac{e^{-j_0\varpi(\tau)}-e^{-j_0\varphi(\tau)}}{\tau}$$

可在 B_ε**(0)** 上作全纯延拓。因此，由柯西公式可得 t

$$T_2^c=\mathcal{R}^c(j)\int_{\Gamma_{in,p}}e^{n\tau}\frac{e^{-j_0\varpi(\tau)}-e^{-j_0\varphi(\tau)}}{\tau}d\tau.$$

利用（5.46）和（4.26），存在两个正的常数 C,c 使得

$$|T_2^c|\leq Ce^{-cj}n\int_{\Gamma_{in,p}}|\tau|^{2\mu}\exp(n\Re(\tau)-j_0(\Re(\varpi(\tau))-|\xi(\tau)\tau^{2\mu+1}|))|d\tau|. \tag{5.54}$$

• 利用（5.50），存在一个常数 $C>0$ 与 j_0 和 n 无关，使得

$$n\int_{\Gamma_{res,p}}|\tau|^{2\mu}\exp(n\Re(\tau)-j_0(\Re(\varpi(\tau))-|\xi(\tau)\tau^{2\mu+1}|))|d\tau|\leq Cn\exp\left(-n\frac{\eta}{2}\right). \tag{5.55}$$

• 在**B** 和**C**的情形下，根据具体情形使用（5.48）或（5.49），存在两个常数 $C,c>0$ su ch that

$$n\int_{\Gamma_p}|\tau|^{2\mu}\exp(n\Re(\tau)-j_0(\Re(\varpi(\tau))-|\xi(\tau)\tau^{2\mu+1}|))|d\tau|\leq Cn\exp\left(-cn\right). \tag{5.56}$$

• In case **A**, using (5.47), we have

$$n\int_{\Gamma_p}|\tau|^{2\mu}\exp(n\Re(\tau)-j_0(\Re(\varpi(\tau))-|\xi(\tau)\tau^{2\mu+1}|))|d\tau|$$
$$\leq n\int_{\Gamma_p}|\tau|^{2\mu}\exp\left(-nc_\star\Im(\tau)^{2\mu}\right)|d\tau|\exp\left(-\frac{n}{\alpha}(2\mu-1)\gamma\left(\frac{|\zeta|}{\gamma}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right).$$

但是，不等式（5.45）以及 $\rho\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right)=\tau_p$ 表明

$$-\frac{n}{\alpha}(2\mu-1)\gamma\left(\frac{|\zeta|}{\gamma}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\leq-\frac{2\mu-1}{2}A_Rn|\tau_p|^{2\mu}.$$

If we introduce $c>0$ small enough, then

$$n\int_{\Gamma_p}|\tau|^{2\mu}\exp(n\Re(\tau)-j_0(\Re(\varpi(\tau))-|\xi(\tau)\tau^{2\mu+1}|))|d\tau|\leq n\int_{\Gamma_p}|\tau|^{2\mu}\exp\left(-nc_\star\Im(\tau)^{2\mu}\right)|d\tau|\exp\left(-cn|\tau_p|^{2\mu}\right).$$

使用参数化 (5.40) 和不等式 (5.41), 我们有

$$\int_{\Gamma_p}|\tau|^{2\mu}e^{-nc_\star\Im(\tau)^{2\mu}}|d\tau|\lesssim\int_{-\ell_p}^{\ell_p}(|\tau_p|^{2\mu}+|t|^{2\mu})e^{-nc_\star t^{2\mu}}dt.$$

变量替换 $u=n^{\frac{1}{2\mu}}t$ 以及函数 $x\geq0\mapsto x^{2\mu}\exp\left(-\frac{c}{2}x^{2\mu}\right)$ 有界这一事实意味着

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\ell_p}^{\ell_p}|t|^{2\mu}e^{-nc_\star t^{2\mu}}dt\lesssim\frac{1}{n^{1+\frac{1}{2\mu}}},\\ \displaystyle\int_{-\ell_p}^{\ell_p}|\tau_p|^{2\mu}e^{-nc_\star t^{2\mu}}dt\lesssim\frac{1}{n^{1+\frac{1}{2\mu}}}\exp\left(\frac{c}{2}n|\tau_p|^{2\mu}\right).\end{cases}$$

Thus,

$$n\int_{\Gamma_p}|\tau|^{2\mu}\exp(n\Re(\tau)-j_0(\Re(\varpi(\tau))-|\xi(\tau)\tau^{2\mu+1}|))|d\tau|\lesssim\frac{1}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\exp\left(-\frac{c}{2}n|\tau_p|^{2\mu}\right).$$

最后，不等式（5.45）表明，存在一个 $c>0$ 与 j_0 和 n 无关的常数，使得

$$\frac{c}{2}n|\tau_p|^{2\mu}\geq\tilde{c}\left(\frac{|n\alpha+j_0|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}$$

so,

$$n\int_{\Gamma_p}|\tau|^{2\mu}\exp(n\Re(\tau)-j_0(\Re(\varpi(\tau))-|\xi(\tau)\tau^{2\mu+1}|))|d\tau|\lesssim\frac{1}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\exp\left(-\tilde{c}\left(\frac{|n\alpha+j_0|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right).\tag{5.57}$$

结合(5.54)-(5.57，我们得出命题 5.5的证明。 □

5.4.3 Calculations around T^c_{princ}

现在只需研究项 T^c_{princ} 由（5.39）定义。本节的最终目标是证明以下命题。

命题 5.6. 存在两个正的常数 C,c，使得对于所有满足 $-\frac{n\alpha}{2}\leq j_0\leq np$ 的 $n,j_0\in\mathbb{N}^*$，我们有

$$\left|\int_{\Gamma_{in}}\frac{\exp(n\tau-j_0\varphi(\tau))}{\tau}d\tau-2i\pi E^\beta_{2\mu}\left(\frac{j_0+n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)\right|\leq\frac{C}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\exp\left(-c\left(\frac{|j_0+n\alpha|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right).$$

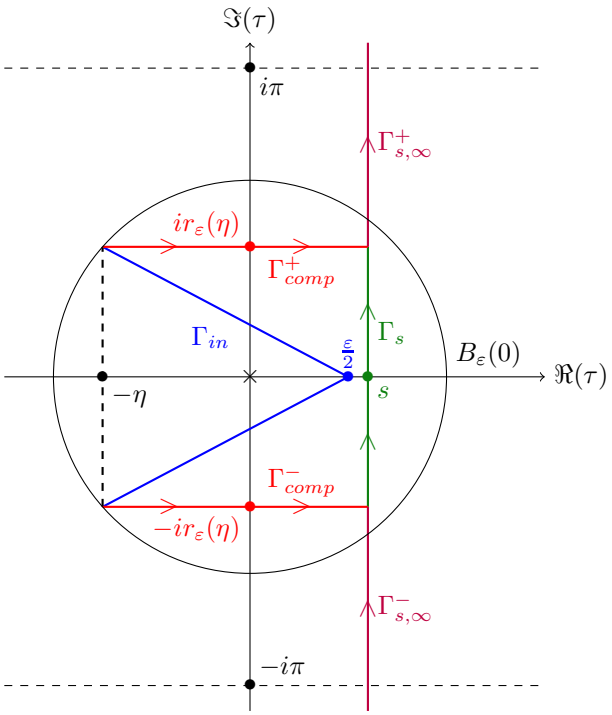

图10：路径 Γ_s（绿色）、 Γ^+_{comp}、 Γ^-_{comp}（均为红色）、$\Gamma^+_{s,\infty}$、 $\Gamma^-_{s,\infty}$（均为紫色）以及 $\Gamma_{s,\infty} := \Gamma^-_{s,\infty} \cup \Gamma_s \cup \Gamma^+_{s,\infty}$ 的表示。

利用（5.36）以及命题 5.4、5.5和 5.6，我们完成了命题5.3的证明。随后，这也完成了定理2的证明。

因此，我们只需证明命题 5.6。证明的主要思路是改变该项的积分路径

$$\int_{\Gamma_{in}} \frac{e^{n\tau} e^{-j_0\varphi(\tau)}}{\tau} d\tau.$$

证明 我们固定一个常数 $s > 0$，使得对所有满足 $-\frac{n\alpha}{2} \le j_0 \le np$ 的 n、$j_0 \in \mathbb{N}^*$，都有 ve

$$\left(-\frac{n\alpha}{j_0} - 1\right) s + A_R s^{2\mu} \le \frac{A_I}{2} r_\varepsilon(\eta)^{2\mu}. \tag{5.58}$$

我们引入路径 Γ_s、 Γ^+_{comp}、 Γ^-_{comp}、 $\Gamma^+_{s,\infty}$、 $\Gamma^-_{s,\infty}$ 以及 $\Gamma_{s,\infty}$，如图 10 所示，其定义如下

$$\begin{aligned}
\Gamma_s &:= \{s + it, \quad t \in [-r_\varepsilon(\eta), r_\varepsilon(\eta)]\}, & \Gamma^+_{s,\infty} &:= \{s + it, \quad t \in [r_\varepsilon(\eta), +\infty[\}, \\
\Gamma^+_{comp} &:= \{t + ir_\varepsilon(\eta), \quad t \in [-\eta, s]\}, & \Gamma^-_{s,\infty} &:= \{s + it, \quad t \in]-\infty, -r_\varepsilon(\eta)]\}, \\
\Gamma^-_{comp} &:= \{t - ir_\varepsilon(\eta), \quad t \in [-\eta, s]\}, & \Gamma_{s,\infty} &:= \Gamma^-_{s,\infty} \cup \Gamma_s \cup \Gamma^+_{s,\infty}.
\end{aligned}$$

命题 5.6 的证明分为几个不同的步骤，其中将用到我们引入的不同路径。

- **步骤 1：** 在这一步中，我们首先证明存在两个正的常数 C、c，使得对所有满足 $-\frac{n\alpha}{2} \le j_0 \le np$ 的 n、$j_0 \in \mathbb{N}^*$，都有

$$\left| \int_{\Gamma_{in}} \frac{\exp(n\tau - j_0\varphi(\tau))}{\tau} d\tau - \int_{\Gamma_s} \frac{\exp(n\tau - j_0\varphi(\tau))}{\tau} d\tau \right| \le Ce^{-cn}. \tag{5.59}$$

由柯西公式可知

$$\left| \int_{\Gamma_{in}} \frac{e^{n\tau - j_0\varphi(\tau)}}{\tau} d\tau - \int_{\Gamma_s} \frac{e^{n\tau - j_0\varphi(\tau)}}{\tau} d\tau \right| \le \left| \int_{\Gamma^+_{comp}} \frac{e^{n\tau - j_0\varphi(\tau)}}{\tau} d\tau \right| + \left| \int_{\Gamma^-_{comp}} \frac{e^{n\tau - j_0\varphi(\tau)}}{\tau} d\tau \right|. \tag{5.60}$$

我们需要对右端项中的两项进行估计。两项的界定方式相似，因此我们将重点考察第一项。首先，我们观察到

$$\left|\int_{\Gamma^+_{comp}} \frac{e^{n\tau - j_0\varphi(\tau)}}{\tau} d\tau\right| \leq \frac{1}{r_\varepsilon(\eta)} \int_{-\eta}^{s} \exp\left(nt - j_0 \Re(\varphi(t + i r_\varepsilon(\eta)))\right) dt.$$

利用（5.18），对于 $t \in [-\eta, s]$

$$nt - j_0\Re(\varphi(t+ir_\varepsilon(\eta))) \leq \left(n + \frac{j_0}{\alpha}\right) t - \frac{j_0}{\alpha} A_R t^{2\mu} + \frac{j_0}{\alpha} A_I r_\varepsilon(\eta)^{2\mu} = -\frac{j_0}{\alpha}\left(\left(-\frac{n\alpha}{j_0} - 1\right) t + A_R t^{2\mu} - A_I r_\varepsilon(\eta)^{2\mu}\right).$$

Since the function

$$t \in [-\eta, s] \mapsto \left(-\frac{n\alpha}{j_0} - 1\right) t + A_R t^{2\mu} - A_I r_\varepsilon(\eta)^{2\mu}$$

是凸函数，它在 $t \in \{-\eta, s\}$ 处取得最大值。因此，关于（5.26）和（5.58）中 η 和 s 的条件意味着对于 $t \in [-\eta, s]$

$$nt - j_0\Re(\varphi(t+ir_\varepsilon(\eta))) \leq \frac{j_0}{2\alpha} A_I r_\varepsilon(\eta)^{2\mu}.$$

因此，回想起 α 为负数，且 $j_0 \in \left[-\frac{n\alpha}{2}, np\right]$，我们得到

$$\left|\int_{\Gamma^+_{comp}} \frac{e^{n\tau - j_0\varphi(\tau)}}{\tau} d\tau\right| \leq \frac{s+\eta}{r_\varepsilon(\eta)} \exp\left(-\frac{n}{4} A_I r_\varepsilon(\eta)^{2\mu}\right).$$

采用类似的证明来估计（5.60）右端项中的第二项，我们可以完成（5.59）的证明。

- **步骤2：** 在这第二步中，我们现在证明存在两个正的常数 C、c，使得对于所有n、$j_0 \in \mathbb{N}^*$ 满足 $-\frac{n\alpha}{2} \leq j_0 \leq np$，我们有

$$\left|\int_{\Gamma_s} \frac{\exp(n\tau - j_0\varphi(\tau))}{\tau} d\tau - \int_{\Gamma_{s,\infty}} \frac{\exp(n\tau - j_0\varphi(\tau))}{\tau} d\tau\right| \leq Ce^{-cn}. \tag{5.61}$$

We have that

$$\left|\int_{\Gamma_s} \frac{\exp(n\tau - j_0\varphi(\tau))}{\tau} d\tau - \int_{\Gamma_{s,\infty}} \frac{\exp(n\tau - j_0\varphi(\tau))}{\tau} d\tau\right| \leq \left|\int_{\Gamma^+_{s,\infty}} \frac{e^{n\tau - j_0\varphi(\tau)}}{\tau} d\tau\right| + \left|\int_{\Gamma^-_{s,\infty}} \frac{e^{n\tau - j_0\varphi(\tau)}}{\tau} d\tau\right|. \tag{5.62}$$

我们需要估计右端项中的两个项。这两项将以类似的方式进行界定，因此我们将重点讨论第一项。首先，我们注意到

$$\left|\int_{\Gamma^+_{s,\infty}} \frac{e^{n\tau - j_0\varphi(\tau)}}{\tau} d\tau\right| \leq \frac{1}{r_\varepsilon(\eta)} \int_{r_\varepsilon(\eta)}^{+\infty} \exp\left(ns - j_0 \Re(\varphi(s + it))\right) dt.$$

利用（5.18）和（5.58），对于 $t \in [r_\varepsilon(\eta)\ \ +\infty[$ 以及 $j_0 \in \left[-\frac{n\alpha}{2}, np\right]$

$$ns - j_0\Re(\varphi(s+it)) \leq \left(n + \frac{j_0}{\alpha}\right) s - \frac{j_0}{\alpha} A_R s^{2\mu} + \frac{j_0}{\alpha} A_I t^{2\mu} \leq \frac{j_0}{\alpha} A_I \left(t^{2\mu} - \frac{r_\varepsilon(\eta)^{2\mu}}{2}\right) \leq -\frac{n}{2} A_I \left(t^{2\mu} - \frac{r_\varepsilon(\eta)^{2\mu}}{2}\right).$$

Thus,

$$ns - j_0\Re(\varphi(s+it)) \leq -\frac{n}{4} A_I r_\varepsilon(\eta)^{2\mu} - \frac{n}{2} A_I \left(t^{2\mu} - r_\varepsilon(\eta)^{2\mu}\right) \leq -\frac{n}{4} A_I r_\varepsilon(\eta)^{2\mu} - \frac{1}{2} A_I \left(t^{2\mu} - r_\varepsilon(\eta)^{2\mu}\right).$$

因此我们可以得出结论：

$$\left|\int_{\Gamma^+_{s,\infty}} \frac{e^{n\tau - j_0\varphi(\tau)}}{\tau} d\tau\right| \leq \frac{1}{r_\varepsilon(\eta)} \exp\left(-\frac{n}{4} A_I r_\varepsilon(\eta)^{2\mu}\right) \underbrace{\int_{r_\varepsilon(\eta)}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} A_I \left(t^{2\mu} - r_\varepsilon(\eta)^{2\mu}\right)\right) dt}_{<+\infty}.$$

采用类似的证明来界定式（5.62）右端项中的第二项，即可完成式（5.61）的证明。

- **Step 3:** We introduce the functions

$$\forall u\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},\forall s\in\mathbb{R},\quad g(u,x,s):=\exp\left(i(u+is)x-\beta(u+is)^{2\mu}\right), \tag{5.63}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall s\in]0,+\infty[,\quad \mathcal{F}(x,s):=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u,x,s)}{i(u+is)}du. \tag{5.64}$$

We can prove that the function $\mathcal{F}$ verifies

$$\forall s\in]0,+\infty[,\forall x\in\mathbb{R},\quad -\mathcal{F}(x,s)=2\pi E_{2\mu}^{\beta}(x). \tag{5.65}$$

为求完整起见，我们在附录（第5.65节6）中给出（5.65）的证明。

我们注意到，对于 n、$j_0\in\mathbb{N}^*$，如果定义 $\tilde{s}_{j_0}:=\frac{s}{-\alpha}\left(-\frac{j_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\mu}}$，利用变量替换$\left(-\frac{j_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\mu}}t=\alpha u$，有

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{s,\infty}}\frac{\exp(n\tau-j_0\varphi(\tau))}{\tau}d\tau&=i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\left(\left(n+\frac{j_0}{\alpha}\right)(s+it)+(-1)^{\mu+1}\frac{\beta}{\alpha^{2\mu}}\left(-\frac{j_0}{\alpha}\right)(s+it)^{2\mu}\right)}{s+it}dt\\&=-i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\left(i(u+i\tilde{s}_{j_0})\frac{(n\alpha+j_0)}{\left(-\frac{j_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\mu}}}-\beta(u+i\tilde{s}_{j_0})^{2\mu}\right)}{i(u+i\tilde{s}_{j_0})}du\\&=-i\mathcal{F}\left(\frac{(n\alpha+j_0)}{\left(-\frac{j_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\mu}}},\tilde{s}_{j_0}\right).\end{aligned} \tag{5.66}$$

等式（5.65）和（5.66）意味着

$$\int_{\Gamma_{s,\infty}}\frac{\exp(n\tau-j_0\varphi(\tau))}{\tau}d\tau=2i\pi E_{2\pi}^{\beta}\left(\frac{j_0+n\alpha}{\left(-\frac{j_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\mu}}}\right). \tag{5.67}$$

为结束命题 5.6的证明，我们将证明存在两个正的常数 C、c，使得对于所有 n，$j_0\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，它们验证了$j_0\in\left[-\frac{n\alpha}{2},np\right]$，我们有

$$\left|E_{2\mu}^{\beta}\left(\frac{j_0+n\alpha}{\left(-\frac{j_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\mu}}}\right)-E_{2\mu}^{\beta}\left(\frac{j_0+n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)\right|\leq\frac{C}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\exp\left(-c\left(\frac{|j_0+n\alpha|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right). \tag{5.68}$$

我们回顾一下

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad {E_{2\mu}^{\beta}}'(x)=-H_{2\mu}^{\beta}(x).$$

根据中值不等式以及$j_0\in\left[-\frac{n\alpha}{2},np\right]$和（5.1），存在一个正的常数$c>0$使得

$$\begin{aligned}\left|E_{2\mu}^{\beta}\left(\frac{j_0+n\alpha}{\left(-\frac{j_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\mu}}}\right)-E_{2\mu}^{\beta}\left(\frac{j_0+n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)\right|&\leq|j_0+n\alpha|\left|\frac{1}{\left(-\frac{j_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\mu}}}-\frac{1}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right|\sup_{t\in\left[\frac{j_0+n\alpha}{\left(-\frac{j_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\mu}}},\frac{j_0+n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right]}\left|H_{2\mu}^{\beta}(t)\right|\\&\lesssim|j_0+n\alpha|\left|\frac{1}{\left(-\frac{j_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\mu}}}-\frac{1}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right|\exp\left(-c\left(\frac{|j_0+n\alpha|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right).\end{aligned}$$

此外，再次使用中值不等式以及 $j_0\in\left[-\frac{n\alpha}{2},np\right]$这一事实，我们得到

$$\left|\frac{1}{\left(-\frac{j_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\mu}}}-\frac{1}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right|\lesssim|j_0+n\alpha|\sup_{t\in[j_0,-n\alpha]}\frac{1}{t^{1+\frac{1}{2\mu}}}\lesssim\frac{|j_0+n\alpha|}{n^{1+\frac{1}{2\mu}}}.$$

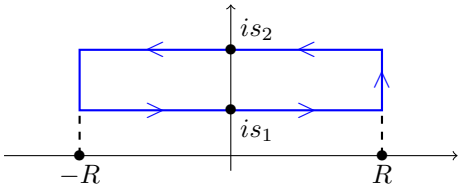

Figure 11: Integrating path to prove (6.3).

因此,

$$\left|E_{2\mu}^{\beta}\left(\frac{j_0+n\alpha}{\left(-\frac{j_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\mu}}}\right)-E_{2\mu}^{\beta}\left(\frac{j_0+n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)\right| \lesssim \frac{1}{n^{1-\frac{1}{2\mu}}}\left(\frac{|j_0+n\alpha|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^2 \exp\left(-c\left(\frac{|j_0+n\alpha|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right).$$

由于函数 $x\mapsto x^2\exp\left(-\frac{c}{2}x\right)$ 有界，我们得出

$$\left|E_{2\mu}^{\beta}\left(\frac{j_0+n\alpha}{\left(-\frac{j_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2\mu}}}\right)-E_{2\mu}^{\beta}\left(\frac{j_0+n\alpha}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)\right| \lesssim \frac{1}{n^{1-\frac{1}{2\mu}}}\exp\left(-\frac{c}{2}\left(\frac{|j_0+n\alpha|}{n^{\frac{1}{2\mu}}}\right)^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}\right).$$

由于 $1-\frac{1}{2\mu}\geq\frac{1}{2\mu}$，我们很容易得出 (5.68) 的证明。

结合（5.59）、（5.61）、（5.67）以及（5.68），我们可以完成命题 5. 6. □

致谢： 作者对 Jean-François Coulombel 和 Grégory Faye 深表感谢，感谢他们提出的建议促成了这一成果，也感谢他们的校对和修正。

6 Appendix

6.1 等式的证明 (5.65)

回顾一下，(5.65) 表明

$$\forall s\in]0,+\infty[,\forall x\in\mathbb{R},\quad -\mathcal{F}(x,s)=2\pi E_{2\mu}^{\beta}(x).$$

证明 证明的起点是对函数 g （由 (5.63) 定义）给出尖锐估计。
我们注意到

$$\forall u,x,s\in\mathbb{R},\quad |g(u,x,s)|\leq\exp(-sx)\exp\left(-\Re(\beta(u+is)^{2\mu})\right).$$

利用杨氏不等式，我们证明存在一个常数 $c>0$，使得

$$\forall u,s\in\mathbb{R},\quad \Re(\beta(u+is)^{2\mu})\geq\frac{\Re(\beta)}{2}u^{2\mu}-cs^{2\mu}.$$

因此，我们有

$$\forall u,x,s\in\mathbb{R},\quad |g(u,x,s)|\leq\exp(-sx+cs^{2\mu})\exp\left(-\frac{\Re(\beta)}{2}u^{2\mu}\right). \tag{6.1}$$

我们注意到，对于所有 $s\in]0,+\infty[$，函数 $\mathcal{F}(\cdot,s)$ 由（5.64）定义，属于类 $\mathcal{C}^1$ 并且

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall s\in]0,+\infty[,\quad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}(x,s)=2\pi H_{2\mu}^{\beta}(x). \tag{6.2}$$

对函数进行积分 $z\mapsto\exp(izx-\beta z^{2\mu})\,iz$ 在图 11右侧所示的矩形上，利用柯西公式以及（6.1），并令 $R\to+\infty$ 取极限，我们证明了

$$\forall s_1,s_2\in]0,+\infty[,\quad \mathcal{F}(\cdot,s_1)=\mathcal{F}(\cdot,s_2). \tag{6.3}$$

最后，利用 (6.1)，存在 $C>0$ 与 x 和 s 无关，使得

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall s\in]0,+\infty[,\quad |\mathcal{F}(x,s)|\leq C\frac{e^{-sx+cs^{2\mu}}}{s}. \tag{6.4}$$

对于 $x>0$，优化 $e^{-sx+cs^{2\mu}}$ 关于 s 促使我们选择 $s=\left(\frac{x}{2\mu c}\right)^{\frac{1}{2\mu-1}}$ 在 (6.4) 中。使用 (6.3)，我们可以证明存在两个常数 C，$c>0$ 使得

$$\forall x\in]0,+\infty[,\forall s\in]0,+\infty[,\quad |\mathcal{F}(x,s)|\leq \frac{C}{x^{\frac{1}{2\mu-1}}}\exp(-c|x|^{\frac{2\mu}{2\mu-1}}).$$

因此，

$$\forall s\in]0,+\infty[,\quad \lim_{x\to+\infty}\mathcal{F}(x,s)=0. \tag{6.5}$$

使用 (6.2) 和 (6.5)，我们很容易得出 (5.65) 的证明。 □

References

[BLBS22] B. B. Boutin、P.LeBarbenchon和N.Seguin。关于半轴上输运方程的完全迎风格式的稳定性。预印本，2022年7月。[BLBS23] B. B. Boutin、P. LeBarbenchon和 N. Seguin。通过绕数计算研究双曲型初边值问题有限差分格式的稳定性。预印本，2023年2月。[CF21] J.-F. Coulombel 和G. Faye。带边界条件的双曲型方程有限差分逼近的尖锐稳定性。IMA数值分析杂志，2021年。[CF22] J.-F.Coulombel和 G.Faye。离散卷积幂的广义高斯界。伊比利亚美洲数学杂志，38(5):1553–1604，2022年。[CFL28] R.Courant、K.Friedrichs和H. Lewy。关于数学物理中的偏微分方程。数学年鉴，100(1):32–74，1928年。[CG11] J.-F. Coulombel 和 A. Gloria。多维双曲初边值问题有限差分格式的半群稳定性。数学计算，80(273):165–203，2011年。[Coe 22] L.Coeuret。复值序列的局部极限定理。预印本，2022年11月。[Con90] J. B. Conway。《泛函分析教程》，数学研究生教材第96卷。Springer-Verlag，纽约，第二版，1990年。[Cou11] J.-F.Coulombel。双曲型初边值问题有限差分格式的稳定性。讲义，2011年8月。[Cou13] J.-F.Coulombel。双曲型初边值问题有限差分格式的稳定性。载于《HCDTE讲义》。第一部分：非线性双曲型偏微分方程、色散方程和输运方程，AIMS应用数学丛书第6卷，第146页。美国数学科学研究所（AIMS），斯普林菲尔德，密苏里州，2013年。[Des08] B. Després。有限体积输运格式。数值数学，108(4):529–556，2008年。[DSC14] P.Diaconis和 L.Saloff-Coste。 $\mathbb{Z}$上复函数的卷积幂。数学新闻，287(10):1106–1130，2014年。[Dur64] P.L.Duren。关于Toeplitz算子的谱。太平洋数学杂志，14:21–29，1964年。[GKO13] B. Gustafsson、H.-O. Kreiss 和 J.Oliger。《随时间变化的问题与差分方法》。纯粹与应用数学（霍博肯）丛书。JohnWiley&Sons, Inc.，霍博肯，新泽西州，第二版，2013年。[GKS72] B. Gustafsson、H.-O.Kreiss 和 A. Sundström。混合初边值问题差分逼近的稳定性理论。II。数学计算，26:649–686，1972年。

[God03] P. Godillon。修正Lax-Friedrichs格式的格林函数逐点估计。M2AN, Math. Model. Numer. Anal., 37(1):1–39, 2003。[GR63] S. K. Godunov和V. S. Ryabenkii。非自伴差分方程边值问题稳定性的谱准则。Uspehi Mat. Nauk, 18(3 (111)):3–14, 1963。[Kat95] T. Kato。线性算子的扰动理论。数学经典。Springer-Verlag，柏林，1995年。1980年版本的重印本。[Kre68] H.-O. Kreiss。混合初边值问题差分逼近的稳定性理论。I. Math. Comput., 22:703–714, 1968。[KW93] H.-O. Kreiss和L. Wu。关于初边值问题差分逼近的稳定性定义。第12卷，第213–227页。1993年。为纪念Saul Abarbanel教授六十寿辰而出版的专号（Neveh，1992年）。[LR56] P. D. Lax和R. D. Richtmyer。线性有限差分方程稳定性综述。Commun. Pure Appl. Math., 9:267–293, 1956。[MZ02] C. Mascia和K. Zumbrun。逐点格林函数界与松弛激波的稳定性。Indiana Univ. Math. J., 51(4):773–904, 2002。[New75] D. J. Newman。Wiener $1/f$ 定理的一个简单证明。Proc. Amer. Math. Soc., 48:264–265, 1975。[Rob91] D. W. Robinson。椭圆算子与李群。牛津数学专著。The Clarendon Press，牛津大学出版社，纽约，1991年。牛津科学出版物。[RSC15] E. Randles和L. Saloff-Coste。关于 $\mathbb{Z}$上复函数的卷积幂。J. Fourier Anal. Appl., 21(4):754–798, 2015。[Ser07] D. Serre。离散激波剖面：存在性与稳定性。载于《平衡律双曲系统》，《数学讲义》第1911卷，第79–158页。Springer，柏林，2007年。[TE05] L. N. Trefethen和M. Embree。谱与伪谱。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2005年。非正规矩阵和算子的行为。[Tho65] V. Thomée。差分格式在最大范数下的稳定性。J. Differential Equations, 1:273–292, 1965。[Tre84] L. N. Trefethen。双曲初边值问题差分模型的不稳定性。Comm. Pure Appl. Math., 37(3):329–367, 1984。[Wu95] L. Wu。初边值问题差分逼近的半群稳定性。Math. Comp., 64(209):71–88, 1995。[ZH98] K. Zumbrun和P. Howard。逐点半群方法与粘性激波的稳定性。Indiana Univ. Math. J., 47(3):741–871, 1998。