arXiv:2304.02617v2 [math.RA] 8 Nov 2024

Lambda-operations for hermitian forms over algebras with involution

Nicolas Garrel

Introduction

λ-环理论由格罗滕迪克和Berthelot（[2]）在 K-理论早期开创，特别是在黎曼–罗赫定理的背景下，现已发展成为一个独立的研究领域，例如专著 [20], 所示，尽管仍常与 K-理论相关（但参见例如 [3] ，其中对与一元域相关的 λ-环有有趣的看法）。

一个 λ-环是一个交换环 R ，赋有运算 $\lambda^d : R \to R$对所有 $d \in \mathbb{N}$, 这些运算通常被理解为某种“外幂”，尤其当 R 是某个 K-理论环时，并且这些运算应满足一些概括外幂预期行为的条件。请注意，多年来术语发生了变化：最初被称为 λ-环的结构现在通常被称为预-λ-环（而术语 λ-环指的是最初被称为 特殊 λ-环的结构）。在本文中，我们将限定于研究预-λ-环结构，并将把 λ-环性质留待后续文章讨论。

由于 λ运算通常定义在 K-理论环上，因此在域 K 的格罗滕迪克-维特环 $GW(K)$上定义 λ-环结构并不令人意外（见 [14]），因为该环是(K,Id)的第0 个厄米 K-理论环。相应的“外幂”运算由布尔巴基在[4]中引入。给定一个双线性空间(V,b)，我们得到一个双线性空间 $(\Lambda^d(V)\ \lambda^d(b))$:

$$\begin{array}{rccc} \lambda^d(b): & \Lambda^d(V)\times\Lambda^d(V) & \longrightarrow & K \\ & (u_1\wedge\cdots\wedge u_d, v_1\wedge\cdots\wedge v_d) & \longmapsto & \det\left(b(u_i,v_j)\right). \end{array}$$

尽管这些运算非常自然，但它们在二次型文献中出现得出奇地少；例如，在诸如 [13], [5], [15] 或 [19] 这样的参考文献中，甚至没有顺带提及它们。这可能部分是因为它们并不是在Witt 环上良定义的，而Witt环传统上是处理二次型时首选的代数结构；相反，它们是在格罗滕迪克-维特环 $GW(K)$上良定义的。与技术上困难得多的拓扑 K-理论相关定理相比， $GW(K)$ 的 λ-结构直到 [14], 才得到形式上的研究，这一事实也是双线性形式的 λ-次幂不知为何一直未受到关注的另一例证。

如果想要将 λ-环结构从 $K_0(A)$ 扩展到非交换环，情况并不乐观： $K_0(A)$ 甚至不是一个环，因为没有 A-模的张量积。相反，如果我们固定某个交换环 R 和一个R-代数 A，并且如果 M 和 N 是右 A-模，那么 $M\otimes_R N$ 是

$A \otimes_R A$ 上的模。这意味着我们至少可以定义一个 $\mathbb{N}$-分次环$\bigoplus_{d\in\mathbb{N}} K_0(A^{\otimes d})$，其中张量积是在 R 上的。但一般来说，这个环没有理由是交换的，更不用说带有 λ-运算了。当然有时会发生这种情况：例如，如果 A 与 R 森田等价，那么用 R 替换A 不会改变环的同构类，因此它具有必要的结构。 A 上的那个条件恰好意味着 A 是 R 上的分裂阿祖玛亚代数。事实证明，该构造对于非分裂阿祖玛亚代数仍然有效。

我们在这里更关注厄米情形，为简便起见，也将在域上进行讨论。本文中的所有内容同样适用于交换环，而非域；不过这需要处理相当多的技术细节，因此我们更愿意先在较简单的基域情形下介绍这些构造。于是，对于域上的任意阿祖玛亚代数 A，非厄米理论便相当乏味，如 $K_0(A) \simeq \mathbb{Z}$ 所示；但对于带 involution 的域 (K,ι) 上带 involution 的 Azumaya 代数 (A,σ)，厄米版本 $GW(A,\sigma)$ 则丰富得多。因此，给定这样一个带对合的代数，我们可以考虑

$$\widehat{GW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma) = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} GW^{\bullet}(A^{\otimes d},\sigma^{\otimes d})$$

它是上文所述环的厄米 K-理论版本。这里 $GW^{\bullet}(A,\sigma) = \widehat{\bigoplus}^{\bullet}_{\varepsilon\in U(K,\iota)} GW^{\varepsilon}(A,\sigma)$，其中 $U(K,\iota) = \{\varepsilon \in K^{\times} \mid \varepsilon\iota(\varepsilon) = 1\}$。对于任意带对合的代数，这个 $GW_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 都是一个 $\mathbb{N}\times U(K,\iota)$-分次环；我们在[10] 中证明，当 A 是阿祖玛亚代数时，它是交换的。本文将证明它还具有自然的预-λ-环结构，并且具有如下分次性质：若 x 的次数为 g，则 $\lambda^d(x)$ 的次数为 $d\cdot g$（定理 3.29）。具体而言，若 (V,h) 是 $(A^{\otimes n},\sigma^{\otimes n})$ 上的一个 ε-厄米空间，我们将 $(\mathrm{Alt}^d(V),\mathrm{Alt}^d(h))$（定义 3.20）定义为 $(A^{\otimes dn},\sigma^{\otimes dn})$ 上的一个 ε^d-厄米空间（这里 Alt 表示“交错”；我们更愿意将这些运算称为“交错幂”而非“外幂”，原因只有在特征 2 下才真正重要）。这一构造深受 [12, §10.D]中给出的对合的 λ-幂构造启发。我们还证明，这种分次 λ结构与埃尔米特森田等价相容。

$\widehat{}^{\bullet}$还有一种 $(\mathbb{Z}\times U(K,\iota))$-分次版本 $GW_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$，其中负次数对应于使用对合对代数进行扭曲。它的环结构当然很有趣，但我们将会看到，就 λ-结构而言，它并没有带来超出 $\widehat{GW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 的新内容（不过，如果要考虑对偶定理——我们将在后续文章中讨论这一点—— $\widehat{GW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$ 就至关重要了）。另一方面，当对合是第一类时，会出现一种有趣得多的构造，即一个按 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mu_2(K)$ 分次的环 $GW(A,\sigma)$。在这种情况下，

$$\widetilde{GW}^{\bullet}(A,\sigma) = GW(K)\oplus GW^{-1}(K)\oplus GW(A,\sigma)\oplus GW^{-1}(A,\sigma),$$

而且，当 d 为偶数时， $x\in GW^{\varepsilon}(A,\sigma)$，$\lambda^d(x)$ 属于 $GW(K)$；当 d 为奇数时，则属于 $GW^{\varepsilon}(A,\sigma)$。

尽管$\widetilde{GW}^{\bullet}(A,\sigma)$是应用中更有趣的预-$\lambda$-环，交错幂的构造及其性质的证明确实发生在 $\widehat{GW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 中，更准确地说，发生在分次半环 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 中，其中齐次分量是厄米空间的等距类

（而不是这些对象的形式差）。这使我们转而研究在交换幺半群上分次的预-λ-半环。据我们所知，关于半环或分次环上的 λ-运算的理论此前从未得到正式研究，而关于幺半群上的分次（半）环的文献也相当少见（通常将 $\mathbb{N}$-分次环视为具有平凡负分量的一类特殊 $\mathbb{Z}$-分次环）。因此，第 1 节详细发展了这类分次预-λ-半环的理论。

在第 2 节中，我们回顾（不作证明）各种分次半（环）的定义及相关性质 $\widehat{\ }^{\bullet}$ $\widetilde{\ }^{\bullet}$，从 $SW_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 到 $GW(A,\sigma)$，并参阅[10] （注意，本文与[10]的记号有所不同）。

第 3 节是本文的技术核心，专门讨论 λ 的 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 结构（见定理 3.29），随后将其推广到其他（半）环（推论 3.30 和 3.32）。

在第 4 节中，我们通过自然的 Morita 等价，对 λ-operations in$\widetilde{SW}^{\bullet}(A,\sigma)$ 作出更明确的描述；这些运算最初是在第 3 节中从 $(\mathrm{Alt}^d(V), \mathrm{Alt}^d(h))$ 定义的。相应的“约化”交错幂记作 $(\mathrm{RAlt}^d(V), \mathrm{RAlt}^d(h))$；当 d 为偶数时，它们是对称双线性空间；当 d 为奇数时，它们是厄米空间。我们尤其关注偶数 λ-次幂与对合迹形式之间的联系（推论 4.14）。

最后一个简短章节讨论了行列式这一概念，该概念在 [12] 中仅在代数具有偶数次时定义；我们还提出了将其推广到奇数次情形的方法。

我们还希望在本引言中提及定义我们的 λ-运算的主要动机来源：经典群和带对合的代数的上同调不变量的构造（在 [8] 的意义上）。

事实上，Voevodsky 等人对 Milnor 猜想的证明给出了一个规范态射 $I^n(K) \to H^n(K,\mu_2)$，其中 $I^n(K)$ 是基本理想 $I(K) \subset W(K)$的 n 次幂，该基本理想属于Witt 环，而 $H^n(K,\mu_2)$ 是伽罗瓦上同调。因此，要定义一个次数为 n 的上同调不变量，可以改为定义一个取值于 I^n 的不变量。

例如，Rost 在 [17] 和 Garibaldi 在 [7] 中，利用 I^3 中二次型经过精心选取的 λ-运算来定义 Spin 群的上同调不变量。在 [11], 中，我们将这一策略推广，以描述 I^n 的所有上同调不变量。因此，要以这种方式定义带对合的代数的不变量（或者，几乎等价地，定义这些代数上的厄米空间的不变量），我们需要能够以自然的方式为这些对象附加二次型。最常见的这类构造由迹形式给出：若 (A, σ) 是第一类带对合的代数，我们可以定义迹形式 $T_A: x \mapsto \mathrm{Trd}_A(x^2)$、对合迹形式 $T_\sigma: x \mapsto \mathrm{Trd}_A(x\sigma(x))$、它在 σ-对称元素子空间上的限制 T_σ^+，以及它在反对称元素子空间上的限制 T_σ^-。这些形式由 $T_A = T_\sigma^+ - T_\sigma^-$ 和 $T_\sigma = T_\sigma^+ + T_\sigma^-$ 联系起来，因此只需了解 T_σ^+ 和 T_σ^-。实际上，它们已被用于定义或计算一些上同调不变量，例如见 [1], [16] 或 [18]。

事实证明，对合迹形式 T_σ 不过是平方$\langle 1\rangle_\sigma^2$ 在 $\widetilde{GW}^{\bullet}(A,\sigma)$中的体现，而 $T_\sigma^{\pm}$ 本质上与 $\lambda^2(\langle 1\rangle_\sigma)$相同（推论 4.15）。

$\widetilde{\ }^{\bullet}$但我们在 $GW(A,\sigma)$ 上构造 λ-结构会给出许多其他新的二次型，即 $\lambda^{2d}(\langle 1\rangle_\sigma)$，对于 $d>1$ （当 $2d=\deg(A)$时，这实际上只不过是 σ 的行列式）。因此，定义 (A,σ) 的上同调不变量的一种可能策略，是考虑这些 $\lambda^{2d}(\langle 1\rangle_\sigma)$ 的精心选择的组合，使得它们实际上取值于 I^n，其中某个 n。我们将在即将发表的文章中证明，当 A 的指标为 2 时，这一方法确实可行。

Preliminaries and conventions

Commutative monoids

设 M 是一个交换幺半群。我们将 $M^\times$ 记作可逆元素的子群（即使 M 用加法记号表示）。如果对于任意满足 $x+y\in N$ 且 $x\in N$ 的情形都有 $y\in N$，我们就称子幺半群 $N\subseteq M$ 是饱和的（在文献中有时也称为“纯的”或“酉”）；如果 M 实际上是一个群，这恰好意味着 N 是一个子群。

我们用 $G(M)$表示 M的Grothendieck群；我们回顾一下，它由 M中元素的形式差生成；总有一个幺半群态射$M\to G(M)$，但仅当 M 满足消去性质时，它才是单射的。

我们使用ComMon 表示交换幺半群范畴，使用 AbGp 表示阿贝尔群范畴。

Field with involution

本文中，我们始终固定一个特征不为 2 的基域 k，以及一个带有不动点 k 的对合自同构 ι 的 étale$k$-代数 K。因此，要么 $k=K$，且 ι 是恒等映射；要么 K 是一个二次 étale k-代数。我们假设所有代数和模在 k 上都是有限维的。虽然 $K\simeq k\times k$ 有可能成立，但我们通常假定 K 总是一个域，例如称 K-向量空间并讨论其维数（你可以验证，本文中的所有 K-模都具有常秩，因此这不会造成任何问题）。如果你不想考虑这种情况，可以排除 $K\simeq k\times k$。

我们用 $U(K,\iota)=\{\varepsilon\in K^\times \mid \varepsilon\iota(\varepsilon)=1\}$ 表示 (K,ι) 的酉元素群。如果 $\iota=\mathrm{Id}_K$，那么 $U(K,\mathrm{Id})=\mu_2(K)$。

带 involution 的 Azumaya 代数

当 A 是 K 上的阿祖玛亚代数，且 σ 是 A 上的对合，其对 K 的限制为 ι 时，我们称 (A,σ) 是 (K,ι) 上带对合的阿祖玛亚代数。请注意，按照例如 [6], 中的术语，这会被称为 k 上带对合的阿祖玛亚代数，但在这里，我们确实要固定 (K,ι)，而不只是 k。

此外，我们选择不谈论“中心单代数”，以考虑到 K 可能不是一个域，恰好在 $K\approx k\times k$的情况下。在那种情况下，如果我们固定一个识别 $K\simeq k\times k$，我们得到一个典范同构$(A,\sigma)\simeq(E\times E^{op},\varepsilon)$，其中 E是 k上的中心单代数，而 ε是交换对合（见 [12, 2.14]）。总而言之，我们恰好处于[12]的设定中。

我们记$\mathrm{Trd}_A\colon A\to K$为$A$的约化迹，$\mathrm{Nrd}_A\colon A\to K$为其约化范数。注意，如果$V$是一个右$A$-模，其约化维数$\mathrm{rdim}(V)$由$\deg(A)\,\mathrm{rdim}(V)=\dim_K(V)$刻画（当$K\simeq k\times k$时，我们在技术上在$\mathrm{Spec}(K)$的两个点处各得到一个约化维数，但我们将处理厄米模，其中这两个维数重合）；如果V非零，它是阿祖玛亚代数$\mathrm{End}_A(V)$的次数。

回顾一下，如果σ是第一类，即$\iota=\mathrm{Id}_K$，而如果ι的阶为2，则是第二类（或酉），并且第一类对合可以是正交的或辛的。特别地，如果$\iota=\mathrm{Id}_K$，那么（K,Id）是一个带正交对合的代数。

对于$\varepsilon\in U(K,\iota)$，我们定义$\mathrm{Sym}^\varepsilon(A,\sigma)\subset A$为$(A,\sigma)$中的$\varepsilon$-对称元素集合，也就是说，这些元素满足$\sigma(a)=\varepsilon a$；$\mathrm{Sym}^\varepsilon(A^\times,\sigma)$则是可逆$\varepsilon$-对称元素的子集。

Hermitian forms

设(A,σ)是(K,ι)上带对合的阿祖玛亚代数。若$\varepsilon\in U(K,\iota)$，则$(A,\sigma)$上的$\varepsilon$-厄米模$(V,h)$是一个右$A$-模$V$，并配备一个$\varepsilon$-厄米形式$h:V\times V\to A$（始终假定为非退化）。我们约定$\sigma(h(x,y))=\varepsilon h(y,x)$。我们通常只称其为$\varepsilon$-厄米形式，而不提及其底层模。

若V非零，则h在中心单代数$\mathrm{End}_A(V)$上诱导出所谓的伴随对合σ_h，其特征为$h(u(x)\ y)=h(x,\sigma_h(u)(y))$。我们称$\varepsilon(h)=\varepsilon$为$h$的符号（在酉情形下，我们未必有$\varepsilon=\pm1$，但这个术语仍然方便）。

若$a\in\mathrm{Sym}^\varepsilon(A^\times,\sigma)$，则初等对角$\varepsilon$-厄米形式$\langle a\rangle_\sigma\colon A\times A\to A$定义为$(x,y)\mapsto\sigma(x)ay$。对角形式$\langle a_1,\dots,a_n\rangle_\sigma$是各个$\langle a_i\rangle_\sigma$的（正交）和。当$(A,\sigma)=(K,\mathrm{Id})$时，我们省略下标$\sigma$，将对角双线性形式记作$\langle a_1,\dots,a_n\rangle$。

我们定义幺半群$SW^\varepsilon(A,\sigma)$，其元素为(A,σ)上ε-厄米形式的等距类（包括零模）。接着定义$GW^\varepsilon(A,\sigma)$为$SW^\varepsilon(A,\sigma)$的Grothendieck群。当$\varepsilon=1$时，我们通常省略上标。注意，使用关于K的张量积时，$SW(K,\iota)$是交换半环，而$GW(K,\iota)$是交换环。

1 Graded pre-λ-semirings

本文的目标是定义并研究一种适当的分次 pre-λ-环结构，该结构定义在带对合的 Azumaya 代数的各种混合格罗滕迪克-维特环形式上：$\widehat{GW}^\bullet_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$，以及当$\sigma$为第一类时的$\widehat{GW}^\bullet(A,\sigma)$（这些环的定义见第 2 节）。但归根结底，这种结构源自$\widehat{SW}^\bullet_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$上的一种类似结构；后者只是一个按幺半群分次的半环。我们希望强调，这是构建该理论的合适框架，并展示分次无需取值于群（若要纳入对偶性结果，情况则会有所不同）。

我们不假定读者熟悉λ-环或按幺半群分次的环，并努力对本文所需内容作出自洽的说明。我们以 [20] 作为（未分次）λ-环经典理论的主要参考文献（不过有时也会参考 [21]）。我们将

对所有必要之处进行调整，以将分次纳入考量（使用半环而非环完全不会造成任何问题）；对于只需直接套用到我们情形中的证明，我们直接引用 [20] 中的证明。

1.1 Graded semirings

如果 M 是一个交换幺半群（我们通常用加法记号表示），一个 M-分次交换幺半群 A 是一个带有分解 $A = \bigoplus_{g\in M} A_g$的交换幺半群。任何非分次交换幺半群 A 都可以通过设定 $A_0 = A$ 以及当 $g \neq 0$时的 $A_g = 0$，看作一个平凡的 M-分次幺半群。特别地，非分次幺半群本质上与在平凡幺半群上分次的幺半群相同。每个 A_g 的元素称为齐次元，齐次元素的集合记为 $|A|$。次数映射 $\partial\colon |A| \to M\cup\{\infty\}$将 $a \in A_g \setminus \{0\}$ 映射到其次数 $g \in M$，并且 $\partial(0) = \infty$（其中 ∞是一个形式元素）。A 的一个子集称为齐次的，如果它包含其所有元素的齐次分量（即每个 A_g中的分量）。

如果 A 和 B 是 M-分次的，那么分次态射 $f\colon A \to B$ 是一个幺半群态射，使得对所有 $g \in M$ 都有 $f(A_g) \subseteq B_g$。给定一个函数 $\varphi\colon M \to N$，如果 A 是 M-分次的且 B 是 N-分次的，我们将推前 $\varphi_*(A)$ 定义为由 $\varphi_*(A)_h = \bigoplus_{\varphi(g)=h} A_g$（对 $h \in N$）给出的 N- 分次幺半群，并将拉回 $\varphi^*(B)$ 定义为由 $\varphi^*(B)_g = B_{\varphi(g)}$（对 $g \in M$）给出的 M-分次幺半群。注意，作为非分次幺半群，$\varphi_*(A) = A$，因此特别地，如果 $\varphi : M \to \{0\}$ 是平凡态射，那么 $\varphi_*(A)$就是被视为平凡分次环的 A。一个松弛分次态射 $A \to B$ 是由某个函数 $\varphi\colon M \to N$ 以及一个分次态射 $f\colon \varphi_*(A) \to B$ 构成的数据，这等价于一个分次态射 $A \to \varphi^*(B)$。我们也称 f 是一个 φ-分次态射。我们记ComMon_M 为具有分次态射的 M-分次交换幺半群的范畴。

请回顾，半环与环相同，只是其底层加法结构仅为交换幺半群的结构，而不一定是群。一个 M- 分次半环是一个半环 R，它作为加法幺半群是 M-分次的，并满足 $1 \in R_0$（单位分量），以及对于任意 g， $R_g \cdot R_h \subseteq R_{g+h}$ $h \in M$。本文中的所有分次半环都将是交换的。（松弛）分次半环态射是同时为半环态射的（松弛）分次态射（对于半环的松弛态射，我们要求函数 $\varphi\colon M \to N$ 是一个幺半群态射）。注意，任何未分次半环都自然地成为具有平凡分次的分次半环。我们用 SRing_M （分别用 Ring_M）表示 M-分次半环（分别为环）的范畴。

子集 $|R| \subset R$ 实际上是一个乘法子幺半群，而 $\partial\colon |R| \to M \cup \{\infty\}$ 是一个幺半群态射（其中对所有 $m \in M$ 都有 $m + \infty = \infty$）。元素 $x \in |R|$ 称为分次可逆的，如果对于任意 $g \in M$，乘以 x 会诱导出从 R_g 到 $R_{g+\partial(x)}$ 的加法同构。分次可逆元素的集合记为 $R^\times$（如果 R 是未分次的，这与通常记号一致），并且它是 $|R|$ 的饱和子幺半群。齐次元素 $x \in |R|$ 可逆，当且仅当它是分次可逆的，且 $\partial(x)$ 在 M 中可逆；特别地，如果 M 是一个群，那么 $R^\times = |R|^\times$（幺半群 $|R|$ 的可逆元素群）。另一方面，一般而言， R 的可逆元素不一定是齐次的，因此可逆元素并不总是分次可逆的。

If R is an M-graded commutative semiring and N is a commutative monoid,

则幺环 $R[N]$ 是交换的（$M\times N$）分次半环。特别地，若 R 是非分次的，则 $R[M]$ 是 M 分次的。注意，作为幺半群有 $|R[N]|\simeq|R|\times N$，且（$R[N]$）$^\times\simeq R^\times\times N$。若 S 是交换的（$M\times N$）分次 R 半代数，且 $S^\times\xrightarrow{\partial}M\times N\to N$ 是满射，则任意集合论截面 $N\to S^\times$ 都定义了加法（$M\times N$）分次幺半群 $S\approx R[N]$ 的一个同构；但只有当我们能找到一个幺半群态射截面时，它才定义分次半环的同构。

交换的 M分次半环 R 上的增广是一个分次态射 $\delta_R:\ R\to\mathbb{Z}[M]$，而增广分次半环之间的态射是保持增广的分次态射。我们还定义总增广 $\delta_R:\ R\to\mathbb{Z}$，它是一个非分次半环态射，等于 δ_R 与典范环态射 $\mathbb{Z}[M]\to\mathbb{Z}$ 的复合；后者将 M 中的每个元素都映为 1。

例 1.1. 本节中反复出现的例子是

$$SW^\bullet(K,\iota)=\bigoplus_{\varepsilon\in U(K,\iota)}SW^\varepsilon(K,\iota)$$

它显然是一个 $U(K,\iota)$-分次加法幺半群。实际上，它是一个 $U(K,\iota)$-分次半环，其中乘法取为在 K 上的张量积。事实上，若 (V_i,h_i) 是 (K,ι) 上的 ε_i-厄米模，其中 $i\in\{1,2\}$，则 $(V_1\otimes_K V_2,h_1\otimes h_2)$ 是 (K,ι) 上的 $\varepsilon_1\varepsilon_2$-厄米模。

如果 $\iota=\mathrm{Id}_K$，$SW^\bullet(K,\mathrm{Id})$ 是 $\mu_2(K)$-分次的，则它包含两个截然不同的分量：$SW(K,\mathrm{Id})$ 是关于 K 的对称双线性形式半环，而 $SW^{-1}(K,\mathrm{Id})$ 则相当乏味，因为反对称形式可由其（偶）维数分类。$SW(K,\mathrm{Id})$ 的一个元素具有 $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ 的形式，其中 $a_i\in K^*$，且乘法由 $\langle a\rangle\cdot\langle b\rangle=\langle ab\rangle$ 决定。$SW^{-1}(K,\mathrm{Id})$ 的一个元素具有 $r\cdot\mathcal{H}_{-1}$ 的形式，其中 $r\in\mathbb{N}$，而 $\mathcal{H}_{-1}$ 是反对称双曲平面；我们有 $\langle a\rangle\cdot\mathcal{H}_{-1}=\mathcal{H}_{-1}$，且 $\mathcal{H}_{-1}\cdot\mathcal{H}_{-1}=2\mathcal{H}_1$，其中 $\mathcal{H}_1$ 是<样式 id='26'>对称 </样式>双曲平面。$\langle a\rangle\in SW(K,\mathrm{Id})$ 中的分次可逆元素就是初等形式。

如果 $\iota\neq\mathrm{Id}_K$，那么 $SW^\varepsilon(K,\iota)$ 中的任意元素都具有 $\langle a_1,\dots,a_n\rangle_\iota$ with $a_i\in K^\times$ such that $\iota(a)=\varepsilon a$ 的形式。于是，我们可以将 $SW^\bullet(K,\iota)$ 中的任意元素写成 $\langle a_1,\dots,a_n\rangle_\iota$ with $a_i\in K^\times$，并约定每个初等形式 $\langle a_i\rangle_\iota$ 都属于次数为 $\varepsilon_i=\iota(a_i)\,a_i\in U(K,\iota)$ 的分量。$\langle a_i\rangle_\iota$ 恰好是分次可逆元素，其中 $\langle a\rangle_\iota\cdot\langle b\rangle_\iota=\langle ab\rangle_\iota$；而希尔伯特 90 定理保证，对于每个 $\varepsilon\in U(K,\iota)$，都存在一个分次可逆元素 $\langle a_\varepsilon\rangle_\iota$，因此每个 $SW^\varepsilon(K,\iota)$ 作为加法幺半群都同构于 $SW(K,\iota)$，但这种同构并非典范的（a_ε 的选择模 $k^\times$，但 $\langle a\rangle_\iota=\langle b\rangle_\iota$ 仅当 $a\equiv b$ 模 $N_{K/k}(K^\times)$ 时才成立）。事实上，态射 $\partial\colon(SW^\bullet(K,\iota))^\times\to U(K,\iota)$ 可以改写为 $K^\times/N_{K/k}(K^\times)\to K^\times/k^\times$，而这通常并不分裂，因此 $SW^\bullet(K,\iota)$ 和 $SW(K,\iota)[U(K,\iota)]$ 作为分次半环并不同构（甚至非典范地也不同构）。尽管如此，$SW^\bullet(K,\iota)$ 所携带的信息确实并不比 $SW(K,\iota)$ 多多少，这解释了为什么前者很少被定义，但对我们而言，对酉情形和非酉情形进行统一处理是很方便的。

在分裂情形 $K\simeq k\times k$中，情况更简单，且 $SW^\bullet(K,\iota)$ 与 $\mathbb{N}[k^\times]$ 有典范同构，其中 $SW(K,\iota)\simeq\mathbb{N}$和 $U(K,\iota)\simeq k^\times$。

1.2 Pre-λ-semirings

定义 1.2. 设 M 为一个交换幺半群。一个 M-分次 *pre*-λ-半环是一个 M-分次交换半环 R 配备有函数 $\lambda^d: R \to R$对所有 $d \in \mathbb{N}$ 使得:

- 对所有 $g \in M$ 和 $d \in \mathbb{N}$, $\lambda^d(R_g) \subseteq R_{dg}$;
- 对所有 $x \in R$、 $\lambda^0(x) = 1$ 以及 $\lambda^1(x) = x$;
- 对于所有 $g \in M$, $x, y \in R_g$和 $d \in \mathbb{N}$, $\lambda^d(x+y) = \sum_{p+q=d} \lambda^p(x)\lambda^q(y)$.

注记 1.3.容易看出，只需对所有 $d \in \mathbb{N}$ 和满足齐次分量上公理的 $g \in M$ 定义函数 $\lambda^d: R_g \to R_{dg}$，因为它们可以唯一扩展为满足该定义的函数 $\lambda^d: R \to R$。一般元素的像根据和的公理，由其齐次分量的像计算得到。

例 1.4. 如果(V, h) 是 (K, ι) 上的 ε-厄米空间，那么在 $\Lambda^d(V)$上存在一个自然的 ε^d-厄米形式 $\lambda^d(h)$，其定义为

$$\lambda^d(b)(u_1 \wedge \cdots \wedge u_d, v_1 \wedge \cdots \wedge v_d) = \det(h(u_i, v_j)).$$

这在 $SW^\bullet(K, \iota)$ 上定义了一个 $U(K, \iota)$-分次预-λ-半环结构。

当然，分次pre-λ-半环的一个（松弛）态射（我们称之为分次 λ态射）是一个与运算 λ^d交换的（松弛）分次半环态射。这定义了一个由 M-分次pre-λ-半环构成的范畴 $\lambda - \mathrm{SRing}_M$，以及由松弛分次 pre-$\lambda$- 半环构成的范畴。

现在我们给出一个陈述，以说明迄今引入的所有定义确实都发生在 $\mathbb{N}$-分次的层面上。

命题 1.5。设 R 是一个交换的 M分次半环，并且对所有 $d \in \mathbb{N}$， $\lambda^d: R \to R$ 都是函数。若对任意幺半群态射 $\varphi: \mathbb{N} \to M$， λ^d 在 $\varphi^*(R)$上诱导出一个 $\mathbb{N}$分次预-λ环结构，则 R 是一个分次预-λ环。

令 R 和 S 为 M-分次的预-λ-半环，且 $f: R \to S$ 为半环态射。若对于任意态射 $\varphi: \mathbb{N} \to M$，函数 f 都诱导出一个 $\mathbb{N}$-分次的λ-态射 $\varphi^*(R) \to \varphi^*(S)$，则 f 是一个 λ-态射。

证明. 对于任意 $g \in M$，我们记 $\varphi_g: \mathbb{N} \to M$ 满足$\varphi_g(1) = g$的唯一态射。$\lambda^d(R_g) \subset R_{dg}$ 可在 $\varphi_g^*(R)$ 中验证。$\lambda^0 = 1$ 和 $\lambda^1 = \mathrm{Id}$ 可在每个 R_g 上验证，因此可在每个 $\varphi_g^*(R)$ 上验证。给定 $x, y \in R_g$， $\lambda^d(x+y)$ 的公式可在 $\varphi_g^*(R)$ 中验证。

同样， f 是一个 λ-态射这一事实可以在每个 $R_g \to S_g$上检验，因此对于每个 $\varphi_g^*(R) \to \varphi_g^*(S)$也是如此。 □

定义1.6。设 R 是一个 M-分次预-λ-半环，并设 $x \in R$。我们将 x 的 λ-维数 $\dim_\lambda(x)$ 定义为 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 中所有满足 $\lambda^n(x) \neq 0$的 $n \in \mathbb{N}$的上确界。具有有限 λ-维数的元素子集记为 $R^{f.d.}$。

当不存在混淆风险时，我们通常对 λ-维数只说“维数”。注意，只有 $0 \in R$ 的维数为0，$\dim_\lambda(x+y) \leq \dim_\lambda(x)+\dim_\lambda(y)$，并且如果 f 是一个分次的 λ-态射，则 $\dim_\lambda(f(x)) \leq \dim_\lambda(x)$。

将分次预-λ-半环的定义以更抽象和紧凑的方式重新表述可能会有用。对于任何交换的 M-分次半环 R，考虑交换的乘法幺半群

$$\Lambda(R) = 1 + tR[[t]] \subset R[[t]] \tag{1}$$

其中，$R[[t]]$ 当然是关于 R的形式级数半环，并且对任意$g \in M$ 定义子幺半群

$$\Lambda(R)_g = \left\{ \sum a_d t^d \in \Lambda(R) \,|\, \forall n \in \mathbb{N},\, a_d \in R_{dg} \right\}. \tag{2}$$

Then we get an M-graded monoid

$$\Lambda_M(R) = \bigoplus_{g \in M} \Lambda(R)_g. \tag{3}$$

存在一个自然的分次幺半群态射 $\eta_R : \Lambda_M(R) \to R$ （其中 R被视为加法幺半群），它将级数 $\sum a_d t^d$ 发送到 a_1。对所有 $g \in M$ 和 $d \in \mathbb{N}^*$ 定义函数 $\lambda^d : R_g \to R_{dg}$ 等同于定义单个齐次函数 $\lambda_t : R \to \Lambda_M(R)$，使用 $\lambda_t(x) = 1 + \sum_{d>0} \lambda^d(x) t^d$，并且从 $\Lambda(R)$上的幺半群结构的定义可以容易地验证 λ^d 定义分次预-λ-半环结构当且仅当 λ_t 是 η_R的一个加法态射截面。

若 $f : S \to R$ 是任意 M分次半环态射，则它导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_M(S) & \xrightarrow{\eta_S} & S \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \Lambda_M(R) & \xrightarrow{\eta_R} & R \end{array}$$

而当 R 和 S 是分次预-λ-半环时，f 是一个 λ-态射，当且仅当下列自然图交换：

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\lambda_t} & \Lambda_M(S) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ R & \xrightarrow{\lambda_t} & \Lambda_M(R). \end{array}$$

元素 $x \in R$ 是有限维的，当且仅当 $\lambda_t(x) \in R[[t]]$ 是一个多项式；此时它的维数就是该多项式的次数。

注 1.7. 如果 $\varphi : M \to N$ 是幺半群态射，则存在一个典范态射 $\Lambda_M(R) \to \Lambda_N(\varphi_*(R))$，它与$\eta_R$的构造相容。这意味着，$R$ 上的 M-分次预-λ-半环结构会典范地诱导出 $\varphi_*(R)$上的 N-分次预-λ-半环结构。特别地，取φ 为平凡态射 $\varphi : M \to \{0\}$，它会在 R 上诱导出一个（无分次的）预 -λ- 半环结构（因为 $\Lambda_{\{0\}}(\varphi_*(R))$就是 $\Lambda(R)$）。

1.3 增广

以下命题可由 pre-λ-半环公理立即得到:

命题1.8。若 R 是一个 M-分次的预-λ-半环，且 N 是一个交换幺半群，则 $R[N]$ 具有典范的$(M\times N)$-分次预-λ-半环结构，由 $\lambda^d(x\cdot h)=\lambda^d(x)\cdot(dh)$ 给出，其中 $d\in\mathbb{N}$、$x\in R$ 和 $h\in N$ 任意。

此外，典范半环态射 $R[N]\to R$ 是一个 λ-态射。

例1.9。$\mathbb{Z}$ 上存在典范的预-λ-环结构，由 $\lambda^d(n)=\binom{n}{d}$ 给出，进而在幺半群环 $\mathbb{Z}[M]$ 上诱导出典范的 M-分次预-λ-环结构。

定义1.10。对一个 M-分次预-λ-半环 R，其增广是一个 $\widetilde{\text{增广}}$ $\delta_R\colon R\to\mathbb{Z}[M]$，且它是一个 λ-态射。于是，全增广映射 $\delta_R\colon R\to\mathbb{Z}$ 是一个非分次的 λ-态射。

我们得到一个范畴 $\lambda-\mathsf{SRing}_M^+$（分别为 $\lambda-\mathsf{Ring}_M^+$），其对象为增广的 M-分次预-λ-半环（分别为环）。

例 1.11。分次维数映射 $SW^\bullet(K,\iota)\to\mathbb{Z}[U(K,\iota)]$,将 $SW^\varepsilon(K,\iota)$ 中 (V,h) 的等距类映射为 $\dim(V)\cdot\varepsilon$，是分次预-λ-半环 $SW^\bullet(K,\iota)$ 上的一个增广。

一般来说，我们希望将增广映射解释为“分次维数”，但不应将其与 λ-维数混淆。由于对于所有 $d\in\mathbb{N}$，当 $n<0$时$\binom{n}{d}\neq 0$，元素 $x\in R^{f.d.}$ 必须满足 $\delta_R(x)\geqslant 0$。此外，由于 $n\in\mathbb{N}$ 的 λ-维数正好是 n，而一个 λ-态射会降低λ-维数，因此我们必须有 $0\leqslant\delta_R(x)\leqslant\dim_\lambda(x)$。

1.4 Positive structure

实际上，许多（预）-λ-环，例如交换环或拓扑空间的 K_0 环，都被定义为半环（在这些例子中即模或向量丛的半环）的格罗滕迪克环，这意味着一般元素是具有更好性质的“具体”元素的形式差。

首先，我们来看看格罗滕迪克群和格罗滕迪克环。我们的第一个观察是，半环的格罗滕迪克环“与”其底层加法幺半群的格罗滕迪克群“相同”。更准确地说，若R是一个交换半环，且$G(R)$是它的加法格罗滕迪克群，则$G(R)$上存在唯一的环结构，使得典范映射$R\to G(R)$是一个半环态射，并且这个唯一确定的环$G(R)$满足预期的泛性质：任何（交换）半环态射$R\to S$（其中S实际上是一个环）都唯一地扩张为一个环态射$G(R)\to S$；在加法幺半群层面上，这正是由格罗滕迪克群的泛性质给出的映射。

考虑如下范畴与函子的交换图（在这类情形中，通常只在自然同构意义下交换）：

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{SRing} & \longrightarrow & \mathbf{ComMon}\\ \uparrow & & \uparrow\\ \mathbf{Ring} & \longrightarrow & \mathbf{AbGp}\end{array}\tag{4}$$

垂直映射是子范畴的包含映射，水平映射则是遗忘到加法结构的函子。垂直包含实际上是反射的，其反射函子为 Grothendieck 群／环构造。于是，我们可以在这个更一般的框架中将上面的讨论形式化：设

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{U} & \mathbf{D} \\ {\scriptstyle I}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle J} \\ \mathbf{A} & \xrightarrow{V} & \mathbf{B} \end{array}$$

是一个函子的交换方形。我们称其具有反射扩张性质，如果 U 和 V 是忠实的， I 和 J 是自反子范畴的包含映射，分别具有反射子 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{A}$和 $G\colon \mathsf{D} \to \mathsf{B}$，且 $V \circ F = G \circ U$。

在这种情况下，给定 $X \in \mathsf{C}$，令 $Y \in \mathsf{A}$使得 $V(Y) = G(U(X))$。我们有一个由伴随关系 $G \dashv J$ 给出的规范箭头 $U(X) \to J(G(U(X)))$，该箭头反过来定义了 $U(X) \to J(V(Y)) = U(I(Y)))$。如果这个态射来自某个（必然唯一的）态射 $X \to I(Y)$，那么相应的态射$F(X) \to Y$是一个同构。将此应用于图表(4)，正是我们上面关于 Grothendieck群/环所解释的内容。

同样容易看出，如果 M 是一个交换幺半群，内正方形（因此外正方形也）的

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{SRing}_M & \longrightarrow & \mathbf{ComMon}_M & \longrightarrow & \mathbf{ComMon} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{Ring}_M & \longrightarrow & \mathbf{AbGp}_M & \longrightarrow & \mathbf{AbGp} \end{array}$$

具有反射子扩张性质。这意味着，如果 R 是一个 M 分次交换半环，那么它的 M 分次格罗滕迪克环就是 $G(R) = \bigoplus_{g\in M} G(R_g)$，并带有唯一的相容结构。

Proposition 1.12. *The squares in the following diagram have the reflector extension property:*

$$\begin{array}{ccccc} \lambda\text{-}\mathbf{SRing}_M^+ & \longrightarrow & \lambda\text{-}\mathbf{SRing}_M & \longrightarrow & \mathbf{SRing}_M \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \lambda\text{-}\mathbf{Ring}_M^+ & \longrightarrow & \lambda\text{-}\mathbf{Ring}_M & \longrightarrow & \mathbf{Ring}_M. \end{array}$$

证明。设 S是一个 M-分次预-λ-半环，并设 $G(S)$ 是其 M-分次格罗滕迪克环。我们需要证明， $G(S)$具有唯一的 M-分次预-λ-环结构，使得典范态射 $S \to G(S)$是一个 λ-态射，并且这个预-λ-环满足泛性质。

将 λ-结构理解为幺半群态射 $\lambda_t\colon S \to \Lambda_M(S)$，并注意到 $\Lambda_M(G(S))$ 实际上是一个群，因为 $G(S)$ 是一个环，Grothendieck群的泛性质告诉我们，存在唯一的 $\lambda_t\colon G(S) \to \Lambda_M(G(S))$，使得自然图表

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\lambda_t} & \Lambda_M(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(S) & \xrightarrow{\lambda_t} & \Lambda_M(G(S)) \end{array}$$

交换。

若 R 是一个 M-分次预-λ-环，且 $S \to R$ 是一个 λ-态射，那么我们需要检验阿贝尔群图表是否

$$\begin{array}{ccc} G(S) & \xrightarrow{\lambda_t} & \Lambda_M(G(S)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \xrightarrow{\lambda_t} & \Lambda_M(R) \end{array}$$

交换。但由于两个复合映射 $G(S) \to \Lambda_M(R)$ 都延拓了 $S \to \Lambda_M(R)$，由泛性质可知结论成立。

当 S 带有增广时，证明类似，因为增广仅仅是一个 λ-态射 $S \to \mathbb{Z}[M]$ 的数据。 □

例 1.13. 我们将 $GW^\bullet(K,\iota) = G(SW^\bullet(K,\iota))$ 定义为增广的 $U(K,\iota)$-分次预-λ-环。次数为 $\varepsilon \in U(K,\iota)$ 的分量就是 $GW^\varepsilon(K,\iota) = G(SW^\varepsilon(K,\iota))$。

正如我们先前提到的，当 R 是由某个半环 $S \subseteq R$ 加法生成的预-λ-环时，我们希望 S 具有良好的性质，而这些性质也能在某种程度上延伸到 R。我们借鉴 [21] 中的处理方式，将这些性质形式化：

定义 1.14. 设 S 是一个增广的 M-分次预-λ-半环。若 S 作为加法幺半群是可消的，并且满足：则称其为刚性的。

1. 如果 $x \in |S|$ 满足 $\delta_S(x) = 0$，则 $x = 0$;
2. *every* 1*-dimensional homogeneous element is graded-invertible.*

如果 S 是刚性的，我们将 $\ell(S)$ 记作 *1* 维齐次元素的集合，并将这些元素称为线元。

例 1.15. 我们通常的例子 $SW^\bullet(K,\iota)$ 是刚性的，而且实际上我们甚至得到 $\ell(SW^\bullet(K,\iota)) = (SW^\bullet(K,\iota))^\times$。事实上，我们在例 1.1 中已经指出，分次可逆元素是 1-维数形式，它们是线元。另一个条件是显然的：0-维数形式就是零元素。

引理1.16。令 S 是一个刚性增广的 M-分次预-λ-半环。则对任意 $x \in |S|$，有 $\delta_S(x) = \text{维数}_\lambda(x)$。

证明。设 $d = \delta_S(x)$。我们已经知道 $d \leqslant \dim_\lambda(x)$。现在，由于 δ_S 是一个 λ-态射，$\delta_S(\lambda^{d+1}(x)) = \binom{d}{d+1} = 0$ 因此 $\lambda^{d+1}(x) = 0$，并且 $d = \dim_\lambda(x)$。 □

定义 1.17。令 R 是一个带增广的 M-分次预-λ-半环。在 R 上的正结构 是满足以下条件的子结构 $R_{\geqslant 0} \subseteq R$：

- $R_{\geqslant 0}$ *is rigid;*
- $(R_{\geqslant 0})^\times \subset R^\times$*;*
- 如果 $x \in |R|$，存在 $a, b \in |R_{\geqslant 0}|$ 使得 $x + a = b$。

$R_{\geqslant 0}$ 中的元素称为正，我们还设定 $R_{>0} = R_{\geqslant 0} \setminus \{0\}$。我们还写作 $\ell(R) = \ell(R_{\geqslant 0})$，并仍将这些元素称为 R 的线元。

为简化术语，我们称带有正结构的增广 M-分次预-λ-半环为 M-结构半环。

注意，显然存在一个由 M-结构半环构成的范畴，其中的态射保留正结构；此外，也存在一个由松弛 λ-态射构成的类似范畴。

例 1.18. 显然，任何刚性增广 M-分次预-λ-半环都是 M-结构的，其自身即为正结构。

例 1.19. 若 R 是一个 M-结构半环，则 $R[N]$ 是一个 $(M \times N)$-结构半环，其中 $(R[N])_{\geqslant 0} = (R_{\geqslant 0})[N]$，且 $\ell(R[N]) = \ell(R) \times N$。

由于 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的一个正结构，$\mathbb{N}[M]$ 是 $\mathbb{Z}[M]$ 的一个正结构，且具有 $\ell(\mathbb{Z}[M]) = M$。

命题 1.20. 设 S 是一个刚性 M-结构半环。那么它是 $G(S)$ 上的一个正结构。

证明。注意，由于 S 是可消的，规范的 $S \to G(S)$是单射，因此我们可以将其视为包含。唯一需要证明的是 $S^\times \subset G(S)^\times$。如果 $a \in S^\times$，那么乘以 a 会对所有 $g \in M$诱导同构 $S_g \to S_{g+\partial(a)}$，因此根据函子性，会诱导同构 $G(S_g) \to G(S_{g+\partial(a)})$。 □

例1.21。这意味着 $SW^\bullet(K, \iota)$是 $GW^\bullet(K, \iota)$ 上的正结构，而当我们说 $GW^\bullet(K, \iota)$ 是一个$U(K, \iota)$-结构环时，指的就是这一结构。

引理 1.22。设 R 是一个具有 M 结构的半环。那么 $\ell(R)$ 是 $R^\times$ 的饱和子幺半群，因此也是乘法幺半群 $|R|$ 的饱和子幺半群。

证明。根据定义，$\ell(R) \subseteq (R_{\geqslant 0})^\times \subseteq R^\times$。引理1.16 表明，$\ell(R)$ 是一个子幺半群，因为 δ_R 是乘法的。由于 $R^\times$ 在 $|R|$ 中是饱和的，只需证明 $\ell(R)$ 在 $R^\times$ 中是饱和的。

设 x、y、$z \in R^\times$ 使得 $xy = z$ 且 x、$z \in \ell(R)$。我们首先证明 y 是正的。由于 x 在 $R_{\geqslant 0}$ 中是分次可逆的，且 $\partial(z) = \partial(x) + \partial(y)$，我们可以将 $z = x \cdot y'$ 写成其中 y' 是次数为 $\partial(y)$ 的正元素；又由于 x 在 R 中是分次可逆的，因此 $y = y'$。

那么，由引理 1.16，等式 $\delta_R(x)\delta_R(y) = \delta_R(z)$ 得出 $1 \times \delta_R(y) = 1$，因此 $\dim_\lambda(y) = 1$，且根据定义，y 是一个线元。 □

请注意，正元素具有有限维，因为它们是齐次正元素之和。正结构确保 R 拥有良好的维数理论：

命题 1.23。设 R 是一个 M 结构半环。那么对于任意元素 $x \in R^{f.d.}$，都有维数$_\lambda(x) = \delta_R(x)$，并且 $\lambda_t(x)$ 的首项系数是一个线元。特别地，λ 维数为 1 的所有元素都是线元，而且 维数$_\lambda$ 是 $R^{f.d.}$ 上的可加函数。

证明。设 $A \subseteq R$ 是元素 x 的子集，其中 $\lambda_t(x)$ 是次数为 $\delta_R\ x$ $A \subseteq (\ )$ 的多项式，且其首项系数是一个线元。根据定义，二者相等；我们要证明它们实际上相等，这就涵盖了命题中的所有陈述。 $R^{f.d}$

首先，我们看到 $|R_{\geqslant 0}| \subseteq A$。确实，若 x 是一个正齐次元素，则根据引理 1.16，$\dim_\lambda(x) = \delta_R(\{v6)$；若此维数为 n，则 $\lambda^n(x)$ 是一个线元，因为它是正的且维数为 $\binom{n}{n} = 1$。

然后，我们看到 A 在加法下稳定：若 $x, y \in A$，则 $\lambda_t(x+y) = \lambda_t(x)\lambda_t(y)$，因此，若 at^n 和 bt^m 分别是 $\lambda_t(x)$和 $\lambda_t(y)$的首项，则根据引理 1.22，$\lambda_t(x+y)$ 的首项是 abt^{n+m}，其中 $ab \in \ell(R)$（它确为首项，因为 $ab \neq 0$，这可由 $ab \in \ell(R)$推得）。注意，$n+m$ 是 $\delta_R(x) + \delta_R(y) = \delta_R(x+y)$。

这表明 $R_{\geqslant 0} \subseteq A$。现在令 $z \in R^{f.d}$，并记 $x + z = y \text{with} x, y \in R_{\geqslant 0}$（特别地，$x, y \in A$）。令 at^n, bt^m 和 ct^r 分别为 $\lambda_t(x)$、$\lambda_t(y)$ 和 $\lambda_t(z)$ 的首项。由于 $a \in \ell(R) \subseteq R^\times$，我们有 $ac \neq 0$，所以 ac 是 $\lambda_t(x)\lambda_t(z)$ 的首项系数，从而 $ac = b$，因为 $\lambda_t(y) = \lambda_t(x)\lambda_t(z)$。由引理 1.22，$\ell(R)$ 在 $|R|$ 中是饱和的，因此得到 $c \in \ell(R)$。此外，$\lambda_t(z)$ 的次数为 $r = n - m$，而这正是 $\delta_R(x) - \delta_R(y) = \delta_R(z)$，于是我们得到 $z \in A$。 □

注记 1.24。M-结构环之间的态射保持增广，因此保持有限维元素的维数，并且还诱导出线元之间的幺半群态射。

1.5 行列式

我们在命题 1.23 中看到，若 R 具有 M结构，且 $x \in R$ 的维数为 n，那么 $\lambda^n(x)$ 是一个线元。这个构造可以推广到所有元素，而不仅限于有限维元素；但代价是，我们需要考虑 $G(\ell(R))$，而不是 $\ell(R)$。

注 1.25。回想一下，若 M 实际上是一个群，那么 $R^\times$ 也是一个群，$\ell(R)$ 也是如此（因为它是一个饱和子幺半群），所以在这种情况下，$G(\ell(R)) = \ell(R)$。

命题 1.26。设 R 是一个具有 M结构的半环。存在唯一的幺半群态射

$$\det : R \to G(\ell(R)),$$

我们称之为行列式，并要求满足：若维数$_\lambda(x) = n \in \mathbb{N}$，则$\det(x) = \lambda^n(x)$。若 f 是 M 结构环的一个态射，则 $\det(f(x)) = f(\det(x))$。

证明。由命题 1.23，我们得到一个良定义函数 det: $R^{f.d} \to \ell(R)$。这是一个幺半群态射，因为$\det(x)$ 是 $\lambda_t(x)$的首项系数，并且$\lambda_t(x+y) = \lambda_t(x)\lambda_t(y)$（并且由于首项系数是线元，它们的乘积非零）。

This then extends uniquely to $G(R^{f.d}) \to G(\ell(R))$. But now note that

$$R_{\geqslant 0} \subseteq R^{fd} \subseteq R \subseteq G(R_{\geqslant 0}) = G(R^{f.d}) = G(R)$$

so we have our unique extension to the additive monoid R.

与态射的相容性很容易看出，因为它们保持 λ-维数（参见注记1.24），并且如果 x 是有限维的，则 $f(\lambda^n(x)) = \lambda^n(f(x))$。

□

例 1.27。我们已经看到，$\ell(GW^\bullet(K,\iota)) \simeq K^\times/N_{K/k}(K^\times)$（当 $K=k$ 时，这必须理解为 $K^\times/(K^\times)^2$）。对于一个 ε-厄米空间(V,h)，上述行列式的概念于是与经典概念重合：正交基的Gram 行列式仅由 (V,h) 的等距类确定，差一个 $N_{K/k}(K^\times)$ 中的元素，而 $K^\times/N_{K/k}(K^\times)$ 中的相应类就是 (V,h) 的行列式。

当 $\iota=\mathrm{Id}_K$ 时，这是双线性形式作为平方类的通常行列式；请注意，对于反对称形式，行列式总是平凡的。当 $\iota\neq\mathrm{Id}_K$时，通常只对 $\varepsilon=1$ 定义行列式，此时其取值于 $k^\times/N_{K/k}(K^\times)$。

1.6 Contractions

在本节中，我们解释如何在各种类型的混合格罗滕迪克-维特（半）环之间转移结构和性质。这些不同版本之间的基本联系是：

定义 1.28. 设 R 是一个 M-分次半环且设 $\varphi: M\to N$ 是一个满射幺半群态射。R 沿 φ的收缩是一个 φ-分次态射$R\to S$ 使得对所有 $g\in M$，$R_g\to S_{\varphi(g)}$ 是一个同构。

命题1.29。设 $f:\ R\to S$ 是沿某个 $\varphi:\ M\to N$的缩并。它在 R 和 S 上的分次预-λ-半环结构之间定义了一个关系：当且仅当 f 是一个弱 λ-态射时，这两个结构处于该关系中。则该关系实际上是 R和 S 上的分次预-λ-半环结构之间的一个双射。

同样，收缩在 R 和 S 上的增广结构之间定义了一个双射；在此对应下，R 是刚性的，当且仅当 S 是刚性的。特别地，这也给出了 R 上的 M-结构半环与 S 上的 N-结构半环之间的双射对应。

证明。对于任意的 $g\in M$ 和 $d\in\mathbb{N}$，f 诱导出同构 $R_g\xrightarrow{\sim}S_g$ 和 $R_{dg}\to S_{dg}$，因此显然，函数系 $\lambda^d: R_g\to R_{dg}$ 唯一确定函数系 $\lambda^d: S_g\to S_{dg}$，反之亦然。此外，由 λ-运算的公理可知，一个是预-λ-结构，当且仅当另一个也是。

同样，在同构 $R_g\to S_g$ 下，函数 $R_g\to\mathbb{Z}$ 和 $S_g\to\mathbb{Z}$ 一一对应；一个是增广，当且仅当另一个也是。

容易看出，对于任意 $x\in|R|$，x 是拟可逆的（分别地，是线元）当且仅当 $f(x)$ 也是如此，这表明 R 是刚性的当且仅当 S 是刚性的。 □

2 Mixed Grothendieck-Witt rings

本节将回顾 [10] 关于混合格罗滕迪克-维特环的定义和结果，这些定义和结果是我们开展工作所必需的。我们采用略有不同的约定，稍后将对此进行说明；不过，调整这些结果完全是直接明了的，因此本节中的所有结果我们都直接参阅 [10] 。

定义 2.1。设 (A,σ) 和 (B,τ) 是 (K,ι)上的带对合的 *Azumaya* 代数。一个从 (B,τ) 到 (A,σ) 的厄米*Morita* 等价是一个 B-A-双模V，其上赋予了一个正则的 ε-厄米形式 $h:$ $V\times V\to A$，定义在 (A,σ)上，且

$\varepsilon \in U(K,\iota)$，使得 B 在 V 上的作用诱导出一个 K-代数同构 $B \simeq \mathrm{End}_A(V)$，在该同构下，$\tau$ 被映射为伴随对合 σ_h（这意味着 $h(bu,\ v) = h(u,\ \tau(b)v)$）。

存在这样的等价当且仅当 A 和 B 是布劳尔等价的；在这种情况下，双模 V 的同构类是唯一的，并且如果我们固定这样一个 V，则 ε-厄米形式 h 在乘性标量下是唯一的：如果 h' 是另一个选择，则存在某个 $\lambda \in K^\times$ 使得 $h' = \langle\lambda\rangle h$。

定义 2.2。带厄米结构的 ***Brauer 2*-群** $\mathbf{Br}_h(K,\ \iota)$ 的 $(K,\ \iota)$ 是这样一个范畴：其对象是 $(K,\ \iota)$ 上带对合的 ***Azumaya*** 代数，而态射 $(B,\ \tau) \to (A,\ \sigma)$ 是 ε-厄米 ***Morita*** 等价的同构类，从 $(B,\ \tau)$ 到 $(A,\ \sigma)$。

复合 $(U,g):(C,\theta) \to (B,\tau)$ 和 $(V,h):(B,\tau) \to (A,\sigma)$ 定义为 $(U \otimes_B V, f)$，其中

$$f(u \otimes v, u' \otimes v') = h(v, g(u,u')v').$$

若 g 是 ε_1-厄米的，且 h 是 ε_2-厄米的，则 f 是 $\varepsilon_1\varepsilon_2$-厄米的。

注意，(A,σ) 在 $\mathbf{Br}_h(K,\iota)$ 中的单位元是对角形式 $(A, \langle 1\rangle_\sigma)$。可以证明所有态射都是可逆的。具体来说，如果 (V,h) 是从 (B,τ) 到 (A,σ) 的态射，那么我们可以定义一个 A-B-双模 $\overline{V}$ 作为 V 作为 K-向量空间，但具有扭曲作用 $a \cdot v \cdot b = \tau(b) \cdot v \cdot \sigma(a)$。然后我们有一个自然的 $\varepsilon(h)$-厄米形式 $\overline{h}$ 在 $\overline{V}$ 上，在 (B,τ) 上由 $\overline{h}(x,y)z = xh(y,z)$ 定义，对所有 $x,y,z \in V$，并且 (V,h) 在 $\mathbf{Br}_h(K)$ 中的逆是 $(\overline{V}, \langle\varepsilon(h)\rangle\overline{h})$，它是 $\varepsilon(h)^{-1}$-厄米的。

关联 $(A,\sigma) \mapsto SW^\bullet(A,\sigma)$ 定义了一个从 $\mathbf{Br}_h(K,\iota)$ 到 $U(K,\iota)$-分次交换幺半群范畴的函子。准确地说，若 $\varepsilon \in U(K,\iota)$ 且 (V,h) 是从 (B,τ) 到 (A,σ) 的一个等价，则与 (V,h) 复合会诱导一个同构 $SW^\varepsilon(B,\tau) \to SW^{\varepsilon\varepsilon(h)}(A,\sigma)$，因此也诱导一个 $(\varepsilon \mapsto \varepsilon\varepsilon(h))$-分次同构 $SW^\bullet(B,\tau) \xrightarrow{\sim} SW^\bullet(A,\sigma)$。

事实上，$\mathbf{Br}_h(K,\iota)$ 和 $U(K,\iota)$-分次交换幺半群的范畴都自然地构成对称幺半范畴，而 $SW^\bullet$ 是一个对称幺半函子。这可由一个自然映射简单地表示为

$$SW^\varepsilon(A,\sigma) \otimes SW^{\varepsilon'}(B,\tau) \to SW^{\varepsilon\varepsilon'}(A \otimes_K B, \sigma \otimes \tau)$$

它仅由厄米模的张量积给出。

于是，[10] 的一般理论为每个带 involution 的 Azumaya 代数 (A,σ) 提供一个交换的 $\Gamma_{\mathbb{N}}$ 分次半环，其中 $\Gamma_{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \times U(K,\iota)$：

$$\widehat{SW}^\bullet_{\mathbb{N}}(A,\sigma) = \bigoplus_{(d,\varepsilon)\in\Gamma_{\mathbb{N}}} SW^\varepsilon(A^{\otimes d}, \sigma^{\otimes d}) = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} SW^\bullet(A^{\otimes d}, \sigma^{\otimes d}) \tag{5}$$

按约定，$(A^{\otimes 0}, \sigma^{\otimes 0}) = (K,\iota)$。这实际上定义了一个从 $\mathbf{Br}_h(K,\iota)$ 到带松弛态射的 $\Gamma_{\mathbb{N}}$-分次半环的函子：对于任意 $\varepsilon \in U(K,\iota)$，令 $\varphi_\varepsilon : \Gamma_{\mathbb{N}} \to \Gamma_{\mathbb{N}}$ 为幺半群态射 $\varphi_\varepsilon(d,\varepsilon') = (d, \varepsilon^d\varepsilon')$；那么，从 (B,τ) 到 (A,σ) 的等价 (V,h) 会诱导一个 $\varphi_{\varepsilon(h)}$-分次同构 $\widehat{SW}^\bullet_{\mathbb{N}}(B,\tau) \to \widehat{SW}^\bullet_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$，它是由 $(V^{\otimes d}, h^{\otimes d})$ 诱导的同构 $SW^\bullet(B^{\otimes d}, \tau^{\otimes d}) \xrightarrow{\sim} SW^\bullet(A^{\otimes d}, \sigma^{\otimes d})$ 对所有 $d \in \mathbb{N}$ 的直和。

在 $\mathrm{Br}_h(K,\iota)$ 中，每个 (A,σ) 都有一个“弱逆”，由共轭代数 $({}^{\iota}A,{}^{\iota}\sigma)$ 给出。这里 ${}^{\iota}A$ 作为环就是 A，但其 K-代数结构由 $K \xrightarrow{\iota} K \to A$ 给出（即通过 ι 扭转 K-代数结构），而 ${}^{\iota}\sigma$ 作为函数就是 σ（此处采用这种记号只是为了追踪扭转）。具体而言，存在一个典范的 Morita 等价 $(A\otimes_K {}^{\iota}A,\sigma\otimes{}^{\iota}\sigma)\to(K,\iota)$，由 $(|A|_\sigma,T_\sigma)$ 给出，其中 $|A|_\sigma$ 是左 $A\otimes_K {}^{\iota}A$-模，在向量空间意义下为 A，其作用经过“扭转”：

$$(a\otimes b)\cdot x = axb\sigma(b) \tag{6}$$

且 T_σ 是对合迹形式

$$T_\sigma(x,y) = \mathrm{Trd}_A(\sigma(x)y). \tag{7}$$

再次，[10] 的理论框架随后给出一个交换的 $\Gamma_{\mathbb{Z}}$-分次半环，其中 $\Gamma_{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}\times U(K,\iota)$：

$$\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma) = \bigoplus_{(d,\varepsilon)\in\Gamma_{\mathbb{Z}}} SW^{\varepsilon}(A^{\otimes d},\sigma^{\otimes d}) = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} SW^{\bullet}(A^{\otimes d},\sigma^{\otimes d}). \tag{8}$$

按约定，当 $d<0$ 时，$(A^{\otimes d},\sigma^{\otimes d}) = ({}^{\iota}A^{\otimes d},{}^{\iota}\sigma^{\otimes d})$。同样，这对 (A,σ) 是函子性的，因为一个 ε-厄米等价会诱导半环的一个 φ_ε-分次同构，其中 $\varphi_\varepsilon:\Gamma_Z\to\Gamma_{\mathbb{Z}}$ 将此前的版本扩展到 $\Gamma_{\mathbb{N}}$：$\varphi_\varepsilon(d,\varepsilon') = \varepsilon^d\varepsilon'$，此时 $d\in\mathbb{Z}$。

$\widehat{\ }^{\bullet}$ $\widehat{\ }^{\bullet}$这可以看作是将 $SW_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 与 $SW_{\mathbb{N}}({}^{\iota}A,{}^{\iota}\sigma)$ 粘合，并在每个半环中识别两个 $SW^{\bullet}(K,\iota)$ 副本。关键之处在于，可以将正、负 $\mathbb{Z}$-次的形式相乘，使这些次数彼此抵消。最重要的例子是次数 1 和 -1，其中态射

$$SW^{\varepsilon}(A,\sigma)\times SW^{\varepsilon'}({}^{\iota}A,{}^{\iota}\sigma)\to SW^{\varepsilon\varepsilon'}(K,\iota)$$

由上文解释的等价关系 $(A\otimes_K {}^{\iota}A,\sigma\otimes{}^{\iota}\sigma)\to(K,\iota)$ 诱导。

例 2.3. 设 $\langle a\rangle_\sigma\in SW^{\varepsilon}(A,\sigma)$ 且 $\langle b\rangle_{{}^{\iota}\sigma}\in SW^{\varepsilon'}({}^{\iota}A,{}^{\iota}\sigma)$。注意，这意味着，由于 $({}^{\iota}A,{}^{\iota}\sigma)$ 的扭曲，我们有 $\sigma(b)=\iota(\varepsilon')b$。于是

$$\langle a\rangle_\sigma\cdot\langle b\rangle_{{}^{\iota}\sigma} = T_{\sigma,a,b}\in SW^{\varepsilon\varepsilon'}(K,\iota)$$

其中 $T_{\sigma,a,b}$：$A\times A\to K$ 是定义如下的 $\varepsilon\varepsilon'$-厄米形式

$$T_{\sigma,a,b}(x,y) = \mathrm{Trd}_A(\sigma(x)ay\sigma(b)).$$

特别地，$\langle 1\rangle_\sigma\cdot\langle 1\rangle_{{}^{\iota}\sigma} = T_\sigma$。

注 2.4. 若 $f:(B,\tau)\to(A,\sigma)$ 是 $\mathrm{Br}_h(K,\iota)$ 中的一个态射，则诱导的 $\widehat{\ }^{\bullet}$ $\widehat{\ }^{\bullet}$态射 $f_*:SW_{\mathbb{Z}}(B,\tau)\to SW_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$ 就是 $SW^{\bullet}(K,\iota)$ 在 $\{0\}\times U(K,\iota)$-分量上的恒等态射。

$\widehat{\ }^{\bullet}$**注记 2.5**。函子性意味着，分次半环 $SW_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$ 只取决于 A 的 Brauer 类，但这种依赖并非典范的：如果 A 和 B 是 Brauer 等价的，那么在 (A,σ) 与 (B,τ) 之间存在一个 Morita 等价，从而在分次 Grothendieck-Witt 半环上诱导出一个同构；但是，这类等价有多种选择，而这相当于选择一个缩放。

当 $\iota = \mathrm{Id}_K$ 时，会出现一些特殊情况，因为 $({}^{\iota}A, {}^{\iota}\sigma)$ 无非就是 (A,σ)。在这种情况下，鉴于 Brauer 类 $[A] \in \mathrm{Br}(K)$ 的阶为 2，我们在 $\mathrm{Br}_h(K,\iota)$ 中得到一个典范同构 $(A,\sigma)^{\otimes 2} \to (K, \mathrm{Id}_K)$。同样，[10] 中的机制随后定义了一个交换的 Γ-分次半环，其中 $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mu_2(K)$：

$$\widetilde{SW}^{\bullet}(A,\sigma) = SW^{\bullet}(K,\mathrm{Id}) \oplus SW^{\bullet}(A,\sigma). \tag{9}$$

我们将其称为混合格罗滕迪克-维特半环。它同样关于（A,σ）具有函子性，其诱导态射在分量$SW^{\bullet}$（K, Id）上是恒等映射。

$\widetilde{\ }^{\bullet}$这三种分次格罗滕迪克-维特半环 SW （A,σ）、$\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}$（$A,\sigma$）和 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}$（$A,\sigma$）之间存在自然联系：我们有一个显然的交换幺半群交换三角形

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{\mathbb{N}} & \hookrightarrow & \Gamma_{\mathbb{Z}} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \Gamma \end{array}$$

$\widehat{\ }^{\bullet}$ $\widehat{\ }^{\bullet}$沿着它我们得到一个松弛态射 $SW_{\mathbb{N}}$（A,σ） $\hookrightarrow SW_{\mathbb{Z}}$（$A,\sigma$），并且当 $\iota = \mathrm{Id}_K$ 时，有一个自然三角形

$$\begin{array}{ccc} \widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma) & \hookrightarrow & \widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \widetilde{SW}^{\bullet}(A,\sigma) \end{array}$$

$\widetilde{\ }^{\bullet}$其中到 SW （A,σ）的态射是收缩。自然收缩$\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}$（$A,\sigma$） $\to \widetilde{SW}^{\bullet}$（$A,\sigma$）可由如下事实刻画：它将 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}$（$A,\sigma$）中 $SW^{\bullet}$（A,σ）的两个副本（分别位于次数 1 和 -1）识别起来。

例 2.6. 根据定义，在 $\widetilde{SW}^{\bullet}(A,\sigma)$ 中，我们有 $\langle 1\rangle^2_{\sigma} = T_{\sigma} \in SW(K)$。

将一个（厄米）模映射到其约化维数，定义了一个从 $SW_{\varepsilon}(A,\sigma)$ 到 $\mathbb{N}$ 的幺半群态射。它们可以合并起来，定义一个分次半环态射 $\mathrm{rdim}: SW_{\mathbb{Z}}(A,\sigma) \to \mathbb{N}[\Gamma_{\mathbb{Z}}]$ 以及一个“总约化维数”态射 $\mathrm{rdim}: \widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma) \to \mathbb{N}$。当 $\iota = \mathrm{Id}_K$ 时，我们还得到$\widetilde{\ }$ $\mathrm{rdim}: \widetilde{SW}^{\bullet}(A,\sigma) \to \mathbb{N}[\Gamma]$ 以及 $\mathrm{rdim}: \widetilde{SW}^{\bullet}(A,\sigma) \to \mathbb{N}$。

通过取格罗滕迪克环，我们还得到了我们半环的分次环版本，即 $\widehat{GW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 和 $\widehat{GW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$，以及当 $\iota = \mathrm{Id}_K$ 时的 $\widetilde{GW}^{\bullet}(A,\sigma)$，它们关于 (A,σ) 是函子性的，并且满足一个显然的自然交换三角形，而且态射 $\widehat{GW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma) \to \widetilde{GW}^{\bullet}(A,\sigma)$ 和 $\widehat{GW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma) \to \widetilde{GW}^{\bullet}(A,\sigma)$ 在有意义时是收缩。

命题 *2.7.* 若 $(A,\sigma) = (K,\iota)$，则我们有分次（半）环的典范同构 $\widehat{\ }^{\bullet}$ $\widehat{\ }^{\bullet}$ $SW_{\mathbb{Z}}(K,\iota) \simeq SW^{\bullet}(K,\iota)[\mathbb{Z}]$, $GW_{\mathbb{Z}}(K,\iota) \simeq GW^{\bullet}(K,\iota)[\mathbb{Z}]$. 当 $\iota = Id_K$ 时，我们还得到 $\widetilde{SW}^{\bullet}(K, Id) \simeq SW^{\bullet}(K, Id)[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ 以及 $\widetilde{GW}^{\bullet}(K, Id) \simeq GW^{\bullet}(K, Id)[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$。

证明。 这直接源于以下初等观察：对任意 $d \in \mathbb{N}$，$(K,\iota)^{\otimes d} \simeq (K,\iota)$；当 $d<0$ 时也是如此，因为 ι 是同构 $({}^{\iota}K, {}^{\iota}\iota) \xrightarrow{\sim} (K,\iota)$。验证相应的幺半群同构

$$\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} SW^{\bullet}(K^{\otimes d}, \iota^{\otimes d}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} SW^{\bullet}(K,\iota)$$

是分次半环的一个同构 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(K,\iota) \xrightarrow{\sim} SW^{\bullet}(K,\iota)[\mathbb{Z}]$ 这只需简单验证。其他同构的论证也相同。 □

厄米形式上的 3　λ-运算

本节旨在为我们的各种半环赋予适当的λ-结构。第 1 节的工作使我们能够将注意力限制在$\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$上，再将该结构转移到其他半环上。

3.1 模的交错幂

设 A 是 K上的一个阿祖玛亚代数。第一步是为每个A-模 V 关联一个 $A^{\otimes d}$-模 $\mathrm{Alt}^d(V)$，使得在分裂情形下，我们得到外幂的构造（更确切地说，是交错幂的构造；在实践中两者没有区别）。向量空间交错幂构造的自然背景是舒尔函子，但针对中心单代数上的模发展这样一套理论超出了本文的范围，将留待未来工作处理。

将外幂构造视为对称群上模的结构所导致的结果仍然是有用的。具体而言，如果 V 是一个 K-向量空间，那么 $V^{\otimes d}$ 自然地是一个左 $K[\mathfrak{S}_d]$-模，而 $\Lambda^d(V)$ 是 $V^{\otimes d}$ 的商空间，其商去的是由所有对换 $1-\tau$的核所生成的子空间，其中对换$\tau \in \mathfrak{S}_d$遍历所有换位。现在，如果 V 是一个右 A-模，那么它特别是一个 K-向量空间，因此$V^{\otimes d}$ 仍然具有由 d因子的置换给出的左 $K[\mathfrak{S}_d]$-模结构，但这不是我们想要使用的结构，因为它与 $A^{\otimes d}$ 在右侧的作用不相容（要了解这种作用有多么不合适，可以注意到，如果 $V=A$，任意 $1-\tau$的核所生成的 $A^{\otimes d}$-模就是整个$V^{\otimes d}$，因为它包含 $1_A \otimes \cdots \otimes 1_A$）。

相反，回顾 [12, 3.5] ，对于任意 Azumaya K-代数 B，Goldman 元素 $g_B \in (B \otimes_K B)^{\times}$ 定义为约化迹映射 $\mathrm{Trd}_B : B \to K \subseteq B$ 在 向量空间 的典范同构下的原像

$$B \otimes_K B \xrightarrow{\sim} B \otimes_K B^{op} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_K(B),$$

并且从 [12, 10.1] 可知，将对换 $(i, i+1) \in \mathfrak{S}_d$ 发送到 $1 \otimes \cdots \otimes g_B \otimes \cdots \otimes 1$ 可延拓为群态射 $\mathfrak{S}_d \to (B^{\otimes d})^{\times}$，从而延拓为 K-代数态射

$$K[\mathfrak{S}_d] \to B^{\otimes d}.$$

现在再次设 V 是一个（非零）右 A-模，并令 $B = \mathrm{End}_A(V)$。于是，由从 $K[\mathfrak{S}_d]$ 到 $B^{\otimes d}$ 和 $A^{\otimes d}$的典范代数态射，我们在 $V^{\otimes d}$ 上得到一个与 $A^{\otimes d}$的作用可交换的典范左 $K[\mathfrak{S}_d]$-模结构，以及一个与 $B^{\otimes d}$ 的作用可- 交换的典范右 $K[\mathfrak{S}_d]$-模结构（特别地，这两个作用彼此可交换，而

彼此)。当我们处理 $V^{\otimes d}$ 时，默认考虑的就是这两种作用；如有必要加以区分，可称之为 Goldman 作用，以区别于置换作用。当$V=0$时，$\mathrm{End}_A(V)$ 不是 Azumaya 的，但我们当然仍有 $K[\mathfrak{S}_d]$ 的（平凡）作用。注意这两种作用都与标量扩张相容，且左边的那个与 Morita 等价相容。Goldman 作用与置换作用之间的联系由下式给出：

命题 3.1. 设 A 是 K 上的阿祖玛亚代数，且 V 是一个右 A-模。那么对于任意 $v_1, \ldots, v_d \in V$ 以及任意 $\pi \in \mathfrak{S}_d$:

$$\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)\pi^{-1} = v_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi^{-1}(d)}.$$

若 $A = K$，则 $K[\mathfrak{S}_d]$ 在 $V^{\otimes d}$ 上的右作用是平凡的，而其左作用则是对 d 个因子的通常置换作用。

证明。令 $B = \mathrm{End}_A(V)$。根据 $K[\mathfrak{S}_d]$-模结构的构造，我们可以将问题归结为 $d = 2$ 且 π 为对换的情形；必要时扩张标量后，我们可以假设 A 和 B 均为分裂的。

在此情形下，我们有 $A \simeq \mathrm{End}_K(U)$、$B \simeq \mathrm{End}_K(W)$，以及 $V \simeq \mathrm{Hom}_K(U, W)$，其上有来自 A 和 B 的显然作用。文献 [12] 中证明了，$A \otimes_K A \simeq$ 上的 Goldman元素 g_A，$\mathrm{End}_K(U \otimes_K U)$，是交换映射（当然，对 g_B 也同样成立）。因此，若 $f_1, f_2 \in V$ 且 $u_1, u_2 \in U$:

$$\begin{aligned}(g_B \cdot f_1 \otimes f_2)(u_1 \otimes u_2) &= g_B(f_1(u_1) \otimes f_2(u_2)) \\ &= f_2(u_2) \otimes f_1(u_1) \\ &= (f_2 \otimes f_1)(g_A(u_1 \otimes u_2)) \\ &= (f_2 \otimes f_1 \cdot g_A)(u_1 \otimes u_2)\end{aligned}$$

因此，$g_B \cdot f_1 \otimes f_2 = f_2 \otimes f_1 \cdot g_A$。

最后一个结论可直接得出，注意到 K 的 Goldman元素是 $1 \in K \otimes K = K$。 □

对于任意有限集 X，若 $\mathfrak{S}_X$ 是其对称群，且 $Y \subset \mathfrak{S}_X$，我们定义交错元素

$$\mathrm{alt}(Y) = \sum_{g \in Y} (-1)^g g \in K[\mathfrak{S}_X], \tag{10}$$

其中 $(-1)^g$ 是置换 g 的符号。当 $Y = \mathfrak{S}_X$ 时，我们称

$$s_X = \mathrm{alt}(\mathfrak{S}_X) = \sum_{g \in \mathfrak{S}_X} (-1)^g g, \tag{11}$$

X 的反对称化元素。特别地，这定义了 $s_d \in K[\mathfrak{S}_d]$。

引理 3.2.令 V 为一个右 A-模，其中 A 是一个阿祖米亚 K-代数。我们将 $K[\mathfrak{S}_d]$ 的元素与它们通过左 *Goldman* 作用在 $V^{\otimes d}$ 上诱导的映射相等同。于是

$$\ker(s_d) = \sum_{g \in \mathfrak{S}_d} \ker(1 + (-1)^g g)$$

and

$$\mathrm{Im}(s_d) = \bigcap_{g\in\mathfrak{S}_d} \ker(1-(-1)^g g).$$

Moreover, the equalities still hold if we restrict g to a generating set of $\mathfrak{S}_d$.

证明。在这两种情况下，等式可在将标量扩张到分裂域后加以验证，然后通过 Morita 等价约化为 $A = K$，即向量空间的情形，此时它归结为基上的简单组合学，我们将明确写出。

选择 V 的一个基 $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$。对任意 $\overline{x}\in\{1,\dots,r\}^d$，将 $V^{\otimes d}$ 的相应基元素记为 $e_{\overline{x}}$，并对任意大小为 d 的 $I\subseteq\{1,\dots,r\}$，将 e_I 定义为 $e_{\overline{I}}$，其中 $\overline{I}$ 由 I 中按递增顺序排列的元素组成。于是每个 $\overline{x}$ 要么至少有两个相等的分量，要么具有 $g\overline{I}$ 的形式，其中 I 唯一且 $g\in\mathfrak{S}_d$ 唯一，其支集含于 I。在第一种情形下 $s_d e_{\overline{x}} = 0$，在第二种情形下 $s_d e_{\overline{x}} = (-1)^g s_d e_I$。

因此容易看出，s_d 的核由满足$\overline{x}$至少有两个分量相等的 $e_{\overline{x}}$ 生成（此时它属于某个对换 g的 $1-g$的核），以及由$\overline{x}$分量互不相同的 $e_{\overline{x}}-(-1)^g e_{\overline{x}}$ 生成；后者属于 $1-(-1)^g g$的像，因此属于 $1+(-1)^g g$的核。这说明 $\ker(s_d)\subseteq\sum_g\ker(1+(-1)^g g)$。由$s_d(1+(-1)^g g) = 2s_d$可知反向包含也成立，因此，由于 K的特征不为 2，$\ker(1+(-1)^g g)\subseteq\ker(s_d)$。

注意，若 $g = g_1\cdots g_r$，其中 g_i属于某个生成集 S，则

$$e_{\overline{x}} - (-1)^g e_{g\overline{x}} = (e_{\overline{x}} + e_{g_r\overline{x}}) - (e_{g_r\overline{x}} + e_{g_{r-1}g_r\overline{x}}) + \cdots - (-1)^g(e_{g_2\cdots g_r\overline{x}} + e_{g\overline{x}})$$

因此实际上 $\ker(s_d) = \sum_{g\in S}\ker(1+(-1)^g g)$。

由我们先前的计算还可推出，$s_d e_I$ 构成 s_d的像的一个基。令$v = \sum a_{\overline{x}} e_{\overline{x}}\in\bigcap_g \ker(1-(-1)^g g)$，并令 $\overline{x}\in\{1,\dots,r\}^d$。如果 $\overline{x}$至少有两个相同的分量，那么 $a_{\overline{x}} = 0$，因为存在一个对换g 使得 $g\overline{x} = \overline{x}$，所以 $a_{\overline{x}} = -a_{\overline{x}}$（并且我们假设 K的特征不是 2）。而如果$\overline{x}$ 具有互不相同的分量，则对于某个子集I，有 $\overline{x} = g\overline{I}$，并且 $a_{\overline{x}} = (-1)^g a_{\overline{I}}$。总而言之，这意味着 $v = \sum_I a_{\overline{I}} s_d e_I$，因此 $\bigcap_g\ker(1-(-1)^g g)\subseteq\mathrm{Im}(s_d)$。反向包含关系显然成立，因为 $(1-(-1)^g g)s_d = 0$。最后注意，如果对于某个生成集中的所有 g，都有 $gv = (-1)^g v$，那么对于任意 g也成立。

□

特别是，这个引理表明，按照外幂的经典定义，当 V是一个向量空间（因此 $A = K$）时，我们有一个典范同一$s_d V\simeq\Lambda^d(V)$，其中 $s_d(v_1\otimes\cdots\otimes v_d)$对应于 $v_1\wedge\cdots\wedge v_d$（但这仅在特征不为 2 时成立，因此我们避免将我们的构造称为“外幂”）。这引出了模的交错幂的以下定义：

定义 3.3. 设 A 是 K上的阿祖玛亚代数，V 是右 A-模，且 $d\in\mathbb{N}$。我们定义

$$\mathrm{Alt}^d(V) = s_d V^{\otimes d}\subseteq V^{\otimes d}$$

作为右 $A^{\otimes d}$-模，特别地 $\mathrm{Alt}^0(V) = K$ 以及 $\mathrm{Alt}^1(V) = V$。

注记 3.4. 如果我们想定义一个在特征 2 中也有效的外幂类似物，我们可以将 $\mathrm{Ext}^d(V)$ 定义为 $V^{\otimes d}$ by the$A^{\otimes d}$-子模由 $\ker(1-(-1)^g g)$ 对于 $g \in \mathfrak{S}_d$ 生成的商。但这对我们的目的来说不太方便。

命题 3.5. 设 A 是 K 上的阿祖玛亚代数，设 V 是右 A-模，并设 $d \in \mathbb{N}$。则

$$\mathrm{rdim}_{A^{\otimes d}}(\mathrm{Alt}^d(V)) = \binom{\mathrm{rdim}_A(V)}{d}.$$

In particular, if $d > \mathrm{rdim}_A(V)$ *then* $\mathrm{Alt}^d(V)$ *is the zero module.*

证明。 再次，只需在 A 分裂时检查这一点，然后在 $A = K$的情况下利用Morita等价进行检查。但这就是 $\Lambda^d(V)$ 的维数的通常公式。 □

注 3.6. 在 [12, §10.A], 中，使用我们的记号，代数 $\lambda^d(A)$ 定义为 $\mathrm{End}_{A^{\otimes d}}(\mathrm{Alt}^d(A))$，其中 A 被视为其自身上的模。当 $d \leqslant \deg(A)$ 时，$\lambda^d(A)$ 是一个阿祖玛亚代数；但当 $d > \deg(A)$ 时， $\lambda^d(A)$ 是零环（这种情况下我们会尽量避免使用这个记号）。

一般来说，如果 $B = \mathrm{End}_A(V)$ 且 $d \leqslant \mathrm{rdim}(V)$，则 $\mathrm{End}_{A^{\otimes d}}(\mathrm{Alt}^d(V))$ 典范同构于 $\lambda^d(B)$。

3.2 The shuffle product

在本节中，我们给出向量空间的外幂上的楔积的适当推广，也就是说，给出一个从 $\mathrm{Alt}^p(V) \otimes_K \mathrm{Alt}^q(V)$ 到 $\mathrm{Alt}^{p+q}(V)$ 的结合乘积。

我们首先回顾一些关于对称群和洗牌置换的基本结果。设有限全序集 X 和一个划分 $X = \coprod_i I_i$。回顾一下，在 $\mathfrak{S}_X$ 中有杨子群 $\mathfrak{S}_{(I_i)}$，它由稳定每个 I_i 的置换组成；还有洗牌置换的集合 $Sh_{(I_i)}$，其中的置换在每个 I_i 上的限制都是递增函数 $I_i \to X$。以下引理说明了洗牌置换的用途:

引理3.7。 $\mathfrak{S}_X$ 中的任意元素都可以唯一地写成 $\pi\sigma$的形式，其中$\pi \in Sh_{(I_i)}$ 且 $\sigma \in \mathfrak{S}_{(I_i)}$。

证明。 令 $\tau \in \mathfrak{S}_X$。对于任意 i，我们可以写成 $I_i = \{a_{i,1}, \ldots, a_{i,d_i}\}$ 使得$a_{i,1} < \cdots < a_{i,d_i}$，但也可以写成 $I_i = \{b_{i,1}, \ldots, b_{i,d_i}\}$ 使得 $\tau(b_{i,1}) < \cdots < \tau(b_{i,d_i})$。然后我们定义 σ_i 的一个置换，将 I_i 通过 $\sigma_i(b_{i,j}) = a_{i,j}$，并且由于我们对每个 i 都这样做，我们得到一个置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_{(I_i)}$。

令 $\pi = \tau\sigma^{-1}$；根据构造 $\pi \in Sh_{(I_i)}$因为 $\pi(a_{i,j}) = \tau(b_{i,j})$ 所以 $\pi(a_{i,1}) < \cdots < \pi(a_{i,d_i})$。我们定义 σ_i和 π的方式清楚地表明，这是唯一可能的分解。 □

Shuffles also have a nice compatibility with refinements of partitions:

引理 3.8。 假设每个 I_i 本身都划分为 $I_i = \coprod_j J_{i,j}$。令$\tau \in \mathfrak{S}_X$，并令 $\tau = \pi\sigma$ 为引理 *3.7* 给出的分解，其中 σ对应于 $(\sigma_i)_i \in \prod_i \mathfrak{S}_{I_i}$。那么， τ是一个 $(J_{i,j})_{i,j}$-洗牌，当且仅当每个σ_i 都是一个 $(J_{i,j})_j$-洗牌。

证明。由于 π 在每个 I_i上递增，很明显， τ 在所有$J_{i,\ j}$上递增，当且仅当 σ_i 也是如此。 □

We can record some very basic observations on the alt construction and the shuffle group:

- 如果 A、B、$C \subseteq \mathfrak{S}_X$ 满足： A 中的任意元素都能唯一地写成 B 中的一个元素与 C 中的一个元素的乘积，那么 $\mathsf{alt}(A) = \mathsf{alt}(B)\,\mathsf{alt}(C)$。
- 如果对每个 i 都有 $A_i \subseteq \mathfrak{S}_{I_i}$，那么 $\mathsf{alt}(\prod_i A_i) = \bigotimes_i \mathsf{alt}(A_i)$，其中我们将$\prod_i \mathfrak{S}_{I_i} \simeq \mathfrak{S}_{(I_i)}$ 与 $K[\mathfrak{S}_{(I_i)}] \simeq \bigotimes_i K[\mathfrak{S}_{I_i}]$视为相同。

If we now define the shuffle element $sh_{(I_i)} \in K[\mathfrak{S}_X]$ by

$$sh_{(I_i)} = \mathrm{alt}(Sh_{(I_i)}) = \sum_{\pi \in Sh_{(I_i)}} (-1)^\pi \pi, \tag{12}$$

we get the following consequences:

Corollary 3.9. *It holds in $K[\mathfrak{S}_X]$ that*

$$s_X = sh_{(I_i)} \cdot (s_{I_1} \otimes \cdots \otimes s_{I_r})$$

and if each I_i is further partitioned as $I_i = \coprod_j J_{i,j}$, that

$$sh_{(J_{i,j})_{i,j}} = sh_{(I_i)} \cdot (sh_{(J_{1,j})_j} \otimes \cdots \otimes sh_{(J_{r,j})_j}).$$

证明。 这些等式分别是引理 3.7 和 3.8 的推论，使用了上述两个观察。

□

当 $X = \{1, \ldots, d\}$ 且该分拆来自分解 $d = d_1 + \cdots + d_r$时，我们简单地将 $sh_{d_1,\ldots,d_r} \in K[\mathfrak{S}_d]$ 写作相应的洗牌元素。

This leads to the following definition:

定义 3.10. 设 A 是 K上的一个阿祖玛亚代数，且 V 是一个右A-模。 V 的洗牌代数定义为 K-向量空间

$$\mathrm{Sh}(V) = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} V^{\otimes d}$$

（其底层空间与张量代数 $T(V)$ 在 K上的空间相同），其中乘积 $V^{\otimes p} \otimes_K V^{\otimes q} \to V^{\otimes p+q}$ 定义为

$$x \# y = sh_{p,q}(x \otimes y), \tag{13}$$

我们称之为洗牌积。

The term algebra is fully justified by the following proposition:

命题3.11。设 A 是一个在 K上的阿祖玛亚代数，并设 V 是一个右A-模。洗牌代数 $\mathrm{Sh}(V)$ 是一个带单位元 $1 \in K = V^{\otimes 0}$ 的 $\mathbb{N}$-分次结合 K-代数。

Furthermore,

$$\mathrm{Alt}(V) = \bigoplus_{d=0}^{\mathrm{rdim}(V)} \mathrm{Alt}^d(V) \subseteq \mathrm{Sh}(V)$$

是一个子代数，并且实际上是由 $V = \mathrm{Alt}^1(V)$ 生成的 K-子代数。确切地说，若 $x \in V^{\otimes p}$ 和 $y \in V^{\otimes q}$ 满足 $p + q = d$，则有

$$(s_p x)\#(s_q y) = s_d(x \otimes y)$$

and in particular if $x_1, \ldots, x_d \in V$*:*

$$x_1\# \cdots \# x_d = s_d(x_1 \otimes \cdots \otimes x_d).$$

证明。对于结合律，我们使用推论 3.9：如果 $p + q + r = d$，我们有

$$sh_{p,q,r} = sh_{p+q,r} \cdot (sh_{p,q} \otimes 1) = sh_{p,q+r} \cdot (1 \otimes sh_{q,r})$$

根据洗牌积的定义，这意味着如果 $x \in V^{\otimes p}$、 $y \in V^{\otimes q}$ 和 $z \in V^{\otimes r}$，则 $(x\#y)\#z = x\#(y\#z)$。关于分次和单位元的断言显然成立。

该陈述的其余部分直接由公式 $(s_p x)\#(s_q y) = s_d(x \otimes y)$ 得出，而该公式显然是推论 3.9 的结果，因为它意味着 $sh_{p,q}(s_p \otimes s_q) = s_d$。 □

根据我们之前已经观察到的，当 $A = K$ 交错代数$\mathrm{Alt}(V)$与外代数 $\Lambda(V)$ 规范同构时（同样是因为我们避开了特征 2），洗牌积对应于楔积。

楔积的主要性质之一是反交换性，而我们确实得到了该性质的某种形式：

命题3.12。设 A 为 K上的阿祖玛亚代数，且 V 为右A-模。对于任意 $d \in \mathbb{N}$、 x_1、 ..... $x_d \in V$和 $\pi \in \mathfrak{S}_d$，有

$$x_{\pi(1)}\# \ldots \# x_{\pi(d)} = (-1)^{\pi}(x_1\# \ldots \# x_d)\pi.$$

证明。由命题3.1可知，$x_{\pi(1)}\#\ldots\#x_{\pi(d)}$ 是 $s_d\pi^{-1}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_d)\pi$，因此对于任意 $g \in \mathfrak{S}_d$，我们可以使用 $s_d g = (-1)^g s_d$ 得出结论。 □

我们现在建立向量空间外幂的著名加法公式的类似公式，该公式用直和 $U \oplus V$ 的交错幂来表示 U 和 V 的交错幂。

命题3.13. 设 A 是 K上的阿祖玛亚代数，且设 U 和 V 是右 A-模。则 $\mathrm{Sh}(U)$ 和 $\mathrm{Sh}(V)$ 是 $\mathrm{Sh}(U \oplus V)$ 中关于洗牌积的子代数，同样地，$\mathrm{Alt}(U)$ 和 $\mathrm{Alt}(V)$ 是 $\mathrm{Alt}(U \oplus V)$的子代数。

This is an immediate consequence of the following lemma:

引理 3.14. 设 A 是 K 上的阿祖玛亚代数，且 U 和 V 是右 A-模。那么， $\mathfrak{S}_d$ 在 $(U \oplus V)^{\otimes d}$ 上的 *Goldman* 作用限制到 $U^{\otimes d}$（分别为 $V^{\otimes d}$）后，恰好就是在 $U^{\otimes d}$（分别为 $V^{\otimes d}$）上的 *Goldman* 作用。

证明。 我们可以通过标量扩张化归到 A 是分裂的情形，并通过 Morita 等价化归到 $A = K$，此时结果涉及经典的置换作用，因此显然。 □

现在我们给出计算直和的交错幂的结果：

命题 3.15. 设 A 是 K 上的阿祖玛亚代数，且 U 和 V 是右 A-模。那么，对于任意 $d \in \mathbb{N}$，洗牌积诱导出一个 $A^{\otimes d}$-模的同构：

$$\bigoplus_{p+q=d} \mathrm{Alt}^p(U) \otimes_K \mathrm{Alt}^q(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^d(U \oplus V).$$

证明. 命题 3.13 保证我们可以在 $\mathrm{Alt}(U \oplus V)$ 中计算所有洗牌积。

利用命题 3.11，我们很容易证明，$\mathrm{Alt}^d(U \oplus V)$ 由形如 $x_1 \# \cdots \# x_d$ 的元素线性张成，其中 x_i 属于 U 或 V。现在利用命题 3.12，我们可以对 x_i 进行置换，使得 $x_1, \ldots, x_p \in U$ 和 $x_{p+1}, \ldots, x_d \in V$ 排列在一起，代价是右乘某个 $\pi \in \mathfrak{S}_d$。但任何这种形式的元素显然都在命题陈述中所述映射的像中，因此该映射是满射。于是，只需通过比较 K 上的维数（例如利用命题 3.5），即可得出该映射是同构。 □

请注意，特别地，这定义了$\mathrm{Alt}(U) \otimes_K \mathrm{Alt}(V)$ 与$\mathrm{Alt}(U \otimes V)$ 之间的一个自然的 $\mathbb{N}$-分次 K-线性同构，但它并不完全是一个代数同构。

注记 3.16。 $\mathrm{Alt}^d(V)$ 的这一构造在 $\bigoplus_d K_0(A^{\otimes d})$ 上定义了一个 $\mathbb{N}$--分次的预--λ--环结构（实际上是一个 $\mathbb{N}$--结构环）。当我们在域上工作时，这并不十分令人印象深刻，因为这个环只是 $\mathbb{Z}[\mathbb{N}]$，但该构造同样适用于任意基环，在这种情况下它更有意义。

3.3 Alternating powers of a ε-hermitian form

现在，若 V 是一个非零的 A-模，并配备了一个关于 A 上某个对合 σ 的 ε-厄米形式 h，我们希望在 $\mathrm{Alt}^d(V)$ 上赋予诱导形式 $\mathrm{Alt}^d(h)$，使得当 $A = K$ 时，我们可以恢复该厄米形式的外幂。这需要理解对称群的作用与代数上的对合之间的相互作用。

回顾一下，任意群代数 $K[G]$ 都有一个由S 给出的典范对合 S： $g \mapsto g^{-1}$。由于 K 带有对合 ι，我们可以将 S 扭曲为 S_ι；它在 G的元素上仍作用为 $g \mapsto g^{-1}$，但在 K上作用为 ι。

如果 (R, σ) 是任意带对合环，其等距群 $\mathrm{Iso}(R, \sigma)$ 是满足 $x\sigma(x) = 1$ 的 $x \in R$ 的集合（它是 $R^\times$ 的子群）。特别地， G 是 $\mathrm{Iso}(K[G], S_\iota)$ 的子群。我们可以改进这一观察，给出 $G \mapsto K[G]$ 是 $R \mapsto R^\times$ 的左伴随这一事实的“对合”版本：

命题 3.17. 设 $\mathbf{AlgInv}(K,\iota)$ 为带有通过对合 ι 作用在 K 上的 K-代数的范畴。从群范畴到 $\mathbf{AlgInv}(K,\iota)$ 的函子 $G \mapsto (K[G], S_\iota)$ 是 $(R,\sigma) \mapsto \mathrm{Iso}(R,\sigma)$ 的左伴随。

证明。令 (R,σ)属于 $\mathrm{AlgInv}(K,\iota)$，并令 G为一个群。令 $f\colon G \to \mathrm{Iso}(R,\sigma)$。那么由于 $\mathrm{Iso}(R,\sigma)$ 是 $R^\times$ 的子群，f唯一地扩张为一个K-代数态射 $K[G] \to R$。现在根据 S_ι 的定义，显然 f 是从$(K[G], S_\iota)$ 到 (R,σ) 的态射。 □

If we return to the Goldman morphism for Azumaya algebras:

命题 3.18. 设 (A,σ) 是带 *involution* 的 *Azumaya* 代数在(K,ι)。然后对于任意 $d \in \mathbb{N}$ 典范的 K-代数态射 $K[\mathfrak{S}_d] \to A^{\otimes d}$ 是对合代数的态射

$$(K[\mathfrak{S}_d], S_\iota) \to (A^{\otimes d}, \sigma^{\otimes d}).$$

等价地，典范群态射 $\mathfrak{S}_d \to A^{\otimes d}$ 实际上取值于等距群 $\mathrm{Iso}(A^{\otimes d}, \sigma^{\otimes d})$。

证明。根据命题 3.17，这两种表述是等价的，显而易见。因此，我们可以归结为 $d = 2$ 与一个对换的情形，也就是说，我们需要证明 Goldman 元素对于 σ^2 是对称的。根据 g_A 的定义，这等价于：若 $g_A = \sum_i a_i \otimes b_i$ 且满足 $a_i, b_i \in A$，那么对于任意 $x \in A$, $\sum_i \sigma(a_i) x \sigma(b_i) = \mathrm{Trd}_A(x)$。但该元素为 $\sigma(\sum_i b_i \sigma(x) a_i)$，即 $\mathrm{Trd}_A(\sigma(x)) = \mathrm{Trd}_A(x)$，因为 $\sum_i b_i \otimes a_i = g_A(\sum_i a_i \otimes b_i) g_A = g_A$。 □

推论 3.19。设 (A,σ) 是 (K,ι) 上一个带对合的阿祖玛亚代数，并设 (V,h) 是 (A,σ) 上一个 ε-厄米模。那么对于任意 $d \in \mathbb{N}$、任意$x, y \in V^{\otimes d}$ 以及任意 $\theta \in K[\mathfrak{S}_d]$，我们有

$$h^{\otimes d}(\theta \cdot x, y) = h^{\otimes d}(x, S_\iota(\theta) \cdot y).$$

此外，$S_\iota(s_d) = s_d$，因此我们得到 $h^{\otimes d}(x, s_d y) = h^{\otimes d}(s_d x, y)$。

证明. 设 $B = \mathrm{End}_A(V)$ 和 $\tau = \sigma_h$，并记 $\theta_B \in B^{\otimes d}$ 为 θ在典范态射下的像。则命题 3.18 表明 $\tau^{\otimes d}(\theta_B)$ 是 $S_\iota(\theta)$ 在 $B^{\otimes d}$ 中的像，这根据伴随对合的定义给出了第一个公式。$S_\iota(s_d) = s_d$ 是显然的，因为 $g \mapsto g^{-1}$ 在 $\mathfrak{S}_d$ 上是双射且保持 $(-1)^g$。 □

这一观察允许如下定义：

定义 3.20. 设 (A,σ) 为 (K,ι) 上的带 *involution* 的 *Azumaya* 代数，并设 (V,h) 为 (A,σ) 上的 ε-厄米模。我们令：

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Alt}^d(h)\colon & \mathrm{Alt}^d(V) \times \mathrm{Alt}^d(V) & \longrightarrow & A^{\otimes d} \\ & (s_d x, s_d y) & \longmapsto & h^{\otimes d}(s_d x, y) = h^{\otimes d}(x, s_d y). \end{array}$$

根据推论 3.19，这一定义良好，因为 $h^{\otimes d}(s_d x, y)$ 仅取决于 $s_d x$，而非完整的 x；反过来，$h^{\otimes d}(x, s_d y)$ 也仅取决于 $s_d y$。

定义可改写为

$$\mathrm{Alt}^d(x_1 \# \ldots \# x_d, y_1 \# \ldots \# y_d) = h^{\otimes d}(x_1 \# \ldots \# x_d, y_1 \otimes \cdots \otimes y_d). \tag{14}$$

命题 3.21。 设(A,σ) 是(K,ι)上的带 *involution* 的 *Azumaya* 代数，并设(V,h)是 (A,σ) 上的 ε- 厄米模。映射 $\mathrm{Alt}^d(h)$ 是 $(A^{\otimes d},\sigma^{\otimes d})$ 上的 ε^d- 厄米形式。

证明。 我们有对于所有 $x,y\in V^{\otimes d}$和所有 $a,b\in A^{\otimes d}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}^d(h)(s_dx\cdot a,s_dy\cdot b)&=h^{\otimes d}(xa,s_dyb)\\&=\sigma^{\otimes d}(a)h^{\otimes d}(x,s_dy)b\\&=\sigma^{\otimes d}(a)\,\mathrm{Alt}^d(h)(s_dx,s_dy)b\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}^d(h)(s_dy,s_dx)&=h^{\otimes d}(y,s_dx)\\&=\varepsilon^d\sigma^{\otimes d}(h^{\otimes d}(s_dx,y))\\&=\varepsilon^d\sigma^{\otimes d}(\mathrm{Alt}^d(h)(s_dx,s_dy)).\end{aligned}$$

□

注记 3.22. 显然，这一构造在以下情形中成立：若 (V,h) 是定义在 (A,σ) 上的 ε-厄米空间，其伴随代数带对合为 (B,τ)，且 $b\in\mathrm{Sym}(B^\times,\tau)$，则 $(b\cdot x,b\cdot y)\mapsto h(x,b\cdot y)$ 有良好定义，并且是 bV 上的ε-厄米形式。

例 3.23。 当 $A=K$ 和 h 是向量空间V上的厄米形式时，如果 $x=u_1\otimes\cdots\otimes u_d$ 和 $y=v_1\otimes\cdots\otimes v_d$，我们得到

$$\mathrm{Alt}^d(h)(s_dx,s_dy)=\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_d}(-1)^\pi\prod_i h(u_{\pi^{-1}(i)},v_i)=\det(h(u_i,v_j))$$

因此，当我们将 $\mathrm{Alt}^d(V)$ 和 $\Lambda^d(V)$ 等同起来时，$\mathrm{Alt}^d(h)$ 确实对应于 $\lambda^d(h)$。

The following simple observation is extremely usful in applications:

命题 3.24. 设 (A,σ) 是一个带 *involution* 的 *Azumaya* 代数在(K,ι)，并设 (V,h) 是一个 ε-厄米模在 (A,σ)。对于任意 $d\in\mathbb{N}$和任意 $\lambda\in K^\times$，我们有

$$\mathrm{Alt}^d(\langle\lambda\rangle_\iota h)=\langle\lambda^d\rangle_\iota\,\mathrm{Alt}^d(h).$$

证明. 这由$\mathrm{Alt}^d(h)$的定义以及$(\langle\lambda\rangle_\iota h)^{\otimes d}\simeq\langle\lambda^d\rangle_\iota h^{\otimes d}$这一事实得出。

□

Since $\mathrm{Alt}^d(V)\subset V^{\otimes d}$, we can compare $\mathrm{Alt}^d(h)$ and $h^{\otimes d}$ on $\mathrm{Alt}^d(V)$.

命题 3.25. 设(A,σ) 是(K,ι)上的带对合的 *Azumaya* 代数，且(V,h)是(A,σ)上的一个 ε-厄米模。对于任意 $d\in\mathbb{N}$，我们可以将 ε^d-厄米形式 $h^{\otimes d}$限制到$\mathrm{Alt}^d(V)\subseteq V^{\otimes d}$，并得到

$$h^{\otimes d}_{|\,\mathrm{Alt}^d(V)}=\langle d!\rangle\,\mathrm{Alt}^d(h).$$

证明。 由于 s_d是对称的，我们有 $h^{\otimes d}(s_dx,s_dy)=h^{\otimes d}(x,(s_d)^2y)$。但很容易看出 $s_d^2=(d!)s_d$，由此得证。 □

注意，这意味着我们本可以直接根据特征0中对 $h^{\otimes d}$ 的限制来定义 $\mathrm{Alt}^d(h)$，但在任意特征下这样做并不可行。

例 3.26。 这表明在任意特征下，$\mathrm{Alt}^0(h) = \langle 1\rangle$ 和 $\mathrm{Alt}^1(h) = h$。

We can then show the compatibility of this construction with the sum formula:

命题 3.27。 令 $(A,\ \sigma)$ 为带对合的 *Azumaya* 代数 $(K,\ \iota)$，并令 $(U,\ h)$ 和 $(V,\ h')$ 为 ε-厄米模，定义在 $(A,\ \sigma)$上。命题 *3.15* 中的模同构诱导出一个等距映射

$$\bigoplus_{p+q=d} \mathrm{Alt}^p(h) \otimes_K \mathrm{Alt}^q(h') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^d(h \perp h').$$

证明。令 u、$u' \in U^{\otimes p}$ 和 v、$v' \in V^{\otimes q}$。然后

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Alt}^d(h \perp h')((s_p u)\#(s_q v), (s_p u)\#(s_q v)) \\
=&\mathrm{Alt}^d(h \perp h')(s_d(u \otimes v), s_d(u' \otimes v')) \\
=&(h \perp h')^{\otimes d}(s_d(u \otimes v), u' \otimes v') \\
=&\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_d} (-1)^\pi (h \perp h')^{\otimes d}(\pi(u \otimes v), u' \otimes v'),
\end{aligned}$$

其中第一次等式使用了命题 3.11。我们想证明 $(h \perp h')^{\otimes d}(\pi(u \otimes v)\ u' \otimes v') = 0$ 如果$\pi \notin \mathfrak{S}_{p,q}$。但是如果 $u = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$,$u' = y_1 \otimes \cdots \otimes y_p$，并且 $v = x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_d$, $v' = y_{p+1} \otimes \cdots \otimes y_d$，那么利用命题 3.1：

$$\begin{aligned}
&(h \perp h')^{\otimes d}(\pi(u \otimes v), u' \otimes v') \\
&= (h \perp h')^{\otimes d}((x_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\pi^{-1}(d)})\pi, (y_1 \otimes \cdots \otimes y_d)) \\
&= \pi^{-1}(h \perp h')(x_{\pi^{-1}(1)}, y_1) \otimes \cdots \otimes (h \perp h')(x_{\pi^{-1}(d)}, y_d)
\end{aligned}$$

这确实为零，如果 $\pi \notin \mathfrak{S}_{p,\ q}$ 因为 $(h \perp h')(x_{\pi^{-1}(i)}\ y_i)$ 中至少有一个将为零。因此：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Alt}^d(h \perp h')((s_p u)\#(s_q v), (s_p u)\#(s_q v)) \\
&= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{p,q}} (-1)^\pi (h \perp h')^{\otimes d}(\pi(u \otimes v), u' \otimes v') \\
&= \sum_{\pi_1 \in \mathfrak{S}_p} \sum_{\pi_2 \in \mathfrak{S}_q} (-1)^{\pi_1 \pi_2} (h \perp h')^{\otimes d}(\pi_1 u \otimes \pi_2 v), u' \otimes v') \\
&= h(s_p u, u') \otimes h'(s_q v, v').
\end{aligned}$$

□

注 3.28. 如果 $d \leqslant \deg(A)$，那么厄米形式$\mathrm{Alt}^d(\langle 1\rangle_\sigma)$ 在 $\lambda^d(A)$上诱导出伴随对合 $\sigma^{\wedge d}$。这本质上与 [12] 中 $\sigma^{\wedge d}$的定义相同（而且确实是同一个对合）。但是，在厄米形式的层面而非对合的层面定义它，可以研究它与加法结构的相互作用，进而研究预-λ-环结构。

一般而言，若 $B = \mathrm{End}_A(V)$ 且 $d \leqslant \mathrm{rdim}(V)$，则定义在 $\lambda^d(B)$ 上的 $\mathrm{Alt}^d(h)$ 的伴随对合为 $\sigma_h^{\wedge d}$。

3.4 预-λ-(半)环结构

现在我们证明，先前的构造确实在我们各种半环和环上赋予了预期的结构。

定理 3.29. 设 (A,σ) 是 (K,ι) 上的带 *involution* 的 *Azumaya* 代数。则运算

$$\mathrm{Alt}^d : SW^{\varepsilon}(A^{\otimes n},\sigma^{\otimes n}) \to SW^{\varepsilon^d}(A^{\otimes nd},\sigma^{\otimes nd})$$

对于 $d\in\mathbb{N}$ 和 $\varepsilon\in U(K,\iota)$ 将 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 变成刚性 $\Gamma_{\mathbb{N}}$-结构半环，$\widehat{\ }$ 带有增广 rdim。

此外，$(A,\sigma)\mapsto\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 是从 $\mathbf{Br}_h(K,\iota)$ 到带有松弛态射的 $\Gamma_{\mathbb{N}}$-结构半环范畴的一个函子。

证明. Alt^d 定义分次预-λ-半环结构这一事实，简单地由命题 3.27 和例 3.26 得出。

容易看出 $\widehat{\ }$ rdim 是一个分次半环态射（另见 [10, 命题 4.8]），因此我们需要验证它是一个 λ-态射，这正是命题 3.5 的内容。为证明 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 具有刚性，注意根据约化维数的定义，若 $h\in SW^{\varepsilon}(A^{\otimes n},\sigma^{\otimes n})$ 满足 $\mathrm{rdim}(h)=0$，则$h=0$；此外，$\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 中的线元恰好是 $SW^{\varepsilon}(A^{\otimes n},\sigma^{\otimes n})$ 中的 1 维厄米形式，其中 n 满足 $A^{\otimes n}$ 是分裂的；显然，这类元素是拟可逆的：在 Morita 等价意义下，乘以这类元素等同于乘以某个 $\langle a\rangle_{\iota}\in SW(K,\iota)$，而后者显然诱导 Witt 半群的一个同构。

只需证明函子性。设 $f:(B,\tau)\to(A,\sigma)$ 是 $\mathrm{Br}_h(K,\iota)$ 中的一个态射$\widehat{\ }^{\bullet}$。我们已经知道诱导映射 f_* 在 $SW_{\mathbb{N}}$ 上是一个分次半环同构，它保持约化维数；还需检查它保持 λ-运算。因此设 (V,h) 是 $(B^{\otimes n},\tau^{\otimes n})$ 上的一个 ε-厄米模，并设 $d\in\mathbb{N}$。我们想要证明的是

$$f_*^{\otimes nd}(\mathrm{Alt}^d(h)) = \mathrm{Alt}^d(f_*^{\otimes n}(h)). \tag{15}$$

如有必要，将 f 替换为 $f^{\otimes n}$，只需处理 $n=1$ 的情形即可。

令(U,g)为 (A,σ) 上定义 f 的厄米空间。那么，(15) 左侧的底层模是

$$(s_dV^{\otimes d})\otimes_{B^{\otimes d}}U^{\otimes d},$$

and on the right-hand side:

$$s_d(V\otimes_B U)^{\otimes d}.$$

There is an obvious bimodule isomorphism between the two, given by

$$(v_1\#\ldots\#v_d)\otimes(u_1\otimes\cdots\otimes u_d)\mapsto(v_1\otimes u_1)\#\ldots\#(v_d\otimes u_d),$$

并且，如果考察 $g^{\otimes d}\circ\mathrm{Alt}^d(h)$ 和 $\mathrm{Alt}^d(g\circ h)$ 的定义，我们会发现需要证明：对于任意的 u_i、$u_i'\in U$ 和 v_i、$v_i'\in V$，

$$g^{\otimes d}(u_1\otimes\cdots\otimes u_d, h^{\otimes d}(v_1\otimes\cdots\otimes v_d, v_1'\#\ldots\#v_d')(u_1'\otimes\cdots\otimes u_d'))$$

等于

$$(g\circ h)^{\otimes d}((v_1\otimes u_1)\otimes\cdots\otimes(v_d\otimes u_d),(v_1'\otimes u_1')\#\ldots\#(v_d'\otimes u_d')).$$

于是，利用命题 3.1，可以直接计算得出这两个表达式相等。

$$\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_d}(-1)^{\pi}\left[\bigotimes_i g(u_i,h(v_i,v'_{\pi^{-1}(i)})u'_{\pi^{-1}(i)})\right]\pi.$$ □

$\widehat{\ }^{\bullet}$ $\widehat{\ }^{\bullet}$ $\widehat{\ }^{\bullet}$推论 *3.30*。分次半环 $SW_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$、$GW_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 和 $GW_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$ 自然地是 $\Gamma_{\mathbb{N}}$-和 $\Gamma_{\mathbb{Z}}$-结构半环，使得 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$（分别地，$\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$）是 $\widehat{GW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$（分别地，$\widehat{GW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$）上的正结构。它们定义了从 $Br_h(K,\iota)$ 到带有松弛态射的结构半环范畴的函子，使得下面的方块。

$$\begin{array}{ccc}\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma) & \longrightarrow & \widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)\\ \downarrow & & \downarrow\\ \widehat{GW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma) & \longrightarrow & \widehat{GW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)\end{array}$$

is a commutative diagram of structured semirings, natural over $\mathbf{Br}_h(K,\iota)$.

证明。回顾一下，$\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$只是 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$与 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}({}^{\iota}A,{}^{\iota}\sigma)$的粘合，因此 λ-运算可延拓至 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$，而命题 1.5$\widehat{\ }^{\bullet}$表明，这也在$SW_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$ 上定义了一个分次的预-λ-环结构。我们还$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }^{\bullet}$可以使用命题1.5 来证明，典范映射 $\mathrm{rdim}\colon\ SW_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)\to\mathbb{N}[\mathbb{Z}]$ 是一个 λ-态射。

我们需要证明 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$ 是刚性的。$\mathrm{rdim}(x)=0$蕴含 $x=0$这一事实与 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 的情况一样清楚。设 $x\in SW^{\varepsilon}(A^{\otimes d},\sigma^{\otimes d})$ 是 λ-维数为 1 的齐次元素。我们可以假设 $d\geqslant 0$，否则我们对 $({}^{\iota}A,{}^{\iota}\sigma)$ 应用相同的推理。与 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 的情况不同，x是分次可逆的这一点并不那么明显，因为乘以 x 还必须对负 $\mathbb{Z}$-次数的分量诱导同构。但是 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 是刚性的这一事实表明 $\mathrm{rdim}(x)=1$（命题 1.23），因此 $A^{\otimes d}$ 是分裂的。选择 $(A^{\otimes d},\sigma^{\otimes d})$ 与 (K,ι) 之间的一个等价，我们看到 x 是某个一维元素$\widehat{\ }^{\bullet}y\in SW_{\mathbb{Z}}(K,\iota)$ 在环态射 $SW_{\mathbb{Z}}(K,\iota)\to SW_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$ 下的像$\widehat{\ }^{\bullet}$ $\widehat{\ }^{\bullet}$。利用命题 2.7，我们看到 y实际上在$\widehat{\ }^{\bullet}SW_{\mathbb{Z}}(K,\iota)$ 中是可逆的，因为 $SW^{\bullet}(K,\iota)$ 中的一维元素是可逆的。这表明 x 是可逆的，特别地是分次可逆的。

这一 $\Gamma_{\mathbb{Z}}$结构的半环在 $\mathrm{Br}_h(K,\iota)$ 上具有函子性，这直接源于 $SW_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 和 $SW_{\mathbb{N}}({}^{\iota}A,{}^{\iota}\sigma)$ 的相应陈述。

我们只需应用命题 1.20，即可得到 $\widehat{GW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 和 $\widehat{GW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$ 上的结构；函子性则直接由 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)\widehat{\ }^{\bullet}$ 和 $SW_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$ 的情形以及格罗滕迪克环的函子性推出。关于交换方块的陈述由构造可知。

□

注 3.31。请注意，由于 $GW_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 是一个分次预-λ-环，因此它特别也是一个非分次预-λ-环，但在此语境下，$\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$不是 正结构，因为线元并非可逆（只有分次可逆）。另一方面，$\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$ 是 $\widehat{GW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma)$ 上的一个非分次正结构，因为分次是定义在一个群上的，所以分次可逆元素就是可逆元素。

推论 3.32。如果 $\iota = \mathrm{Id}_K$，SW （A， σ） 和 GW （A， σ） 是自然的 Γ-结构半环，其中 $\widetilde{SW}^{\bullet}$（A， σ） 是刚性的，并且是$\widetilde{GW}^{\bullet}$（A， σ）上的正结构。此外，它们定义了从 $\mathbf{Br}_h$（K， Id）到带有松弛态射的 Γ-结构半环范畴的函子，使得该方块

$$\begin{array}{ccc} \widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma) & \twoheadrightarrow & \widetilde{SW}^{\bullet}(A,\sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{GW}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(A,\sigma) & \twoheadrightarrow & \widetilde{GW}^{\bullet}(A,\sigma) \end{array}$$

is a natural commutative diagram of structured semirings.

证明。由于 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma) \to \widetilde{SW}^{\bullet}(A,\sigma)$ 是一个压缩映射，我们可以如命题 1.29 所示将结构转移到 $\widetilde{SW}^{\bullet}(A,\sigma)$ 上，这表明它是刚性的。

$\widehat{GW}^{\bullet}(A,\sigma)$ 上的结构既可以由压缩映射 $GW_{\mathbb{N}}(A,\sigma) \to \widetilde{GW}^{\bullet}(A,\sigma)$ 得到，也可以将其视为 $SW(A,\sigma)$ 的格罗滕迪克环。显然，这两种方式得到的结构相同。函子性可如推论 3.30 所示轻易建立，而交换图则由结构的定义直接得出。

□

如果(V,h) 是(A,σ) 上的 ε-厄米模，则其通过 λ^d 运算在 $\widetilde{GW}^{\bullet}(A,\sigma)$ 中的像记为

$$(\Lambda^d(V),\lambda^d(h)) \in SW^{\varepsilon^d}(A^{\otimes r},\sigma^{\otimes r}),$$

where $r \in \{0,1\}$ has the same parity as d.

注释 3.33。注意，与 $(\mathrm{Alt}^d(V),\mathrm{Alt}^d(h))$不同，后者是定义良好的厄米模，只有 $(\Lambda^d(V)\ \lambda^d(h))$ 的等距类是定义良好的，因为它是由一个 Morita 等价构造的。这一区别是我们通常更方便先在 $\widehat{SW}^{\bullet}_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$ 中证明结果的一个原因，在那里我们可以使用实际的模，再通过 Morita等价将结果转移到 $\widetilde{GW}^{\bullet}(A,\sigma)$ 中。但在第4 节中，我们构造了等距类$(\Lambda^d(V)\ \lambda^d(h))$ 的一个显式代表元 $(\mathrm{RAlt}^d(V),\mathrm{RAlt}^d(h))$。

还请注意，$\Lambda^d(V)$ 作为双模的同构类依赖于 σ 而不仅仅是 V，但不依赖于 h（参见第4节中 $\mathrm{RAlt}^d(V)$ 的构造）。此外，如果 $d > \mathrm{rdim}_A(V)$，则 $\Lambda^d(V) = 0$。

例 3.34。我们由命题 2.7 知道，作为一个环 $GW(K,\mathrm{Id}) \simeq GW^{\bullet}(K,\mathrm{Id})[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$。我们还由命题1.8知道，$GW^{\bullet}(K,\mathrm{Id})[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$具有规范的 Γ-分次预-λ-环结构，因为根据例 1.13 $GW^{\bullet}(K,\mathrm{Id})$ 是一个 $\mu_2(K)$-分次预-λ-环。于是实际上，$\widetilde{GW}(K,\mathrm{Id}) \simeq GW^{\pm}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ 作为 Γ-分次预-λ-环。

注3.35。如果 $f\colon (B,\tau) \to (A,\sigma)$ 是$\mathrm{Br}_h(K)$ 中的一个态射，对应于 ε-厄米形式 h，那么根据定义 $f_*(\langle 1\rangle_\tau) = h$；由于 f_* 与 λ-运算相容，我们有 $\lambda^d(h) = f_*(\lambda^d(\langle 1\rangle_\tau))$。因此，为了能够计算任意 ε-厄米形式的外幂，我们只需能够在对角形式 $\langle 1\rangle_\tau$ 对于任意对合 τ 的特殊情形下进行计算。

4 Reduced alternating power and trace forms

给定一个关于 (A,σ) 的厄米空间 (V,h)，我们可以根据 $\mathfrak{S}_d$ 对 $V^{\otimes d}$的作用，对$(\mathrm{Alt}^d(V),\mathrm{Alt}^d(h))$给出相当明确的描述。当$\sigma$ 是第一类时，我们更关注 $\lambda^d(h)$；它通过Morita等价由 $\mathrm{Alt}^d(h)$定义，并且仅作为一个等距类存在，而不是一个具体定义的空间（见注 3.33）。

在本节中，我们始终假设 σ 是第一类的（因此$\iota = \mathrm{Id}_K$），并将定义称为“约化交错幂”的显式空间，通过基本上经历定义它们的 Morita 等价来给出等距类$(\Lambda^d(V)\ \lambda^d(h))$的代表元。当 d 为偶数时，这是一个二次空间；当 d 为奇数时，这是一个厄米空间。由于这两种情形的性质略有不同，尽管两种情形中的基本思想相同，但我们将分别处理它们。

在 (V,h) 为 $(A,\langle 1\rangle_\sigma)$ 的特殊情形下，我们给出一种简化的构造。该构造实际上对偶数次幂具有普遍性，并特别表明，若基域的特征足够大，则 $\lambda^{2d}(h)$ 可在相差一个标量的意义下实现为某个对合迹形式的子形式（见注 4.16）。

4.1 偶次数的约化交错幂

模的约化张量幂

设 (A,σ) 是 K 上的第一类带对合的阿祖玛亚代数。设 V 是一个右 A-模，且令 $d \in \mathbb{N}$。定义

$$V^{[2d,\sigma]} = V^{\otimes d} \otimes_{A^{\otimes d}} {}^{\sigma}V^{\otimes d} \tag{16}$$

其中 ${}^{\sigma}V$ 是左 A-模，其作为向量空间为 V，作用为 $a \cdot v = v \cdot \sigma(a)$。注意，$({}^{\sigma}V)^{\otimes d}$ 和 ${}^{\sigma^{\otimes d}}(V^{\otimes d})$ 作为 $A^{\otimes d}$-模是相同的，因此我们的记号可以表示其中任意一个。

我们称 $V^{[2d,\sigma]}$ 为 V 的第 $2d$个约化张量幂，它取决于 σ。当可从上下文理解 σ 时，我们只写作 $V^{[2d]}$。

如果 $x,y \in V^{\otimes d}$，我们记 $x \odot y$ 为 $V^{[2d]}$ 中由 $x \otimes y \in V^{\otimes d} \otimes_{A^{\otimes d}} {}^{\sigma}V^{\otimes d}$定义的元素。这是为了将此元素与 $x \otimes y \in V^{\otimes 2d}$区分开来。根据构造，作为 K-向量空间 $V^{[2d]}$ 是 $V^{\otimes 2d}$的商，商映射由 $x \otimes y \mapsto x \odot y$给出。

引理 4.1. 设 (A,σ) 是 (K,Id)上的带对合的阿祖玛亚代数，并设 V 是一个右 A-模。在 $V^{[2d,\sigma]}$ 与 $V^{\otimes 2d} \otimes_{A^{\otimes 2d}} |A^{\otimes d}|_{\sigma^{\otimes d}}$之间存在一个 K-向量空间的自然同构，其两个方向分别由$x \odot y \mapsto (x \otimes y) \otimes 1$ 和 $(x \otimes y) \otimes a \mapsto (xa)\ \odot y = x \odot (y\sigma^{\otimes d}(a))$给出。

证明。可以直接验证，这些映射是良定义的，并且互为逆映射。例如，若 x、$y \in V^{\otimes d}$ 和 $a \in A^{\otimes d}$，$(xa)\odot y$ 和 $x\odot(y\sigma^{\otimes d}(a))$ 分别映射为

$$(xa \otimes y) \otimes 1 = ((x \otimes y) \cdot (a \otimes 1)) \otimes 1 = (x \otimes y) \otimes a$$

and

$$(x \otimes y\sigma^{\otimes d}(a)) \otimes 1 = ((x \otimes y) \cdot (1 \otimes \sigma^{\otimes d}(a))) \otimes 1 = (x \otimes y) \otimes a$$

它们确实相等，记住 $|A^{\otimes d}|_{\sigma^{\otimes d}}$的模结构。 □

注记 4.2. 我们选择以这样的方式定义 $V^{[2d,\sigma]}$ in，使得根据定义$V^{[2d,\sigma]} = (V^{\otimes d})^{[2,\sigma^{\otimes d}]}$。我们也可以选择 $V^{[2d,\sigma]} = (V^{[2,\sigma^{\otimes d}]})^{\otimes d}$，在这种情况下，在引理 4.1 中我们将用 $|A|_{\sigma}^{\otimes d}$替换 $|A^{\otimes d}|_{\sigma^{\otimes d}}$。由于这两个 $A^{\otimes 2d}$-模是同构的，这不会改变任何事情，我们发现我们的约定总体上更方便。

厄米形式的约化张量幂

现在假设 V 带有一个 ε-厄米形式 h over (A,σ)。我们定义 $V^{[2d]}$ 上的对称双线性形式 $h^{[2d]}$ by

$$h^{[2d]}(x \odot y, x' \odot y') = \mathrm{Trd}_{A^{\otimes d}}(\sigma^{\otimes d}(h^{\otimes d}(x,x'))h^{\otimes d}(y,y')) \tag{17}$$

with $x, x', y, y' \in V^{\otimes d}$.

命题 4.3. 设 (A,σ) 是定义在 (K,Id)上的带对合的 *Azumaya* 代数，并设(V,h)是 (A,σ)上的 ε-厄米模。在引理 *4.1* 给出的向量空间同构下，双线性空间$(V^{[2d]}, h^{[2d]})$ 与复合态射相对应。

$$(|A^{\otimes d}|_{\sigma^{\otimes d}}, T_{\sigma^{\otimes d}}) \circ (V^{\otimes 2d}, h^{\otimes 2d}).$$

特别地，$(V^{[2d]}, h^{[2d]})$的等距类作为 $SW(K)$中的元素，是 $\widetilde{SW}^{\bullet}(A,\sigma)$ 中 (V,h) 的等距类的 $2d$ 次幂，该等距类属于 $SW^{\varepsilon}(A,\sigma)$。

证明。根据定义，从 $T_{\sigma^{\otimes d}} \circ h^{\otimes 2d}$ 到 $V^{[2d]}$ 的复合的传递由

$$\begin{aligned}(x \odot y, x' \odot y') &\mapsto T_{\sigma^{\otimes d}}(1, h^{\otimes 2d}(x \otimes y, x' \otimes y') \cdot 1) \\ &= T_{\sigma^{\otimes d}}(1, h^{\otimes d}(x,x')\sigma^{\otimes d}(h^{\otimes d}(y,y'))) \\ &= \mathrm{Trd}_{A^{\otimes d}}(\sigma^{\otimes d}(h^{\otimes d}(x,x'))h^{\otimes d}(y,y')).\end{aligned}$$

根据 $SW(A,\sigma)$的构造，(V,h) 的等距类的 $2d$ 次幂恰好是 $T_{\sigma^{\otimes d}} \circ h^{\otimes 2d}$ 的等距类。 □

The canonical action of the symmetric group

由引理4.1 可知，$V^{[2d]}$ 自然地是 $V^{\otimes 2d}$ 作为向量空间的一个商，并且如果 $B = \mathrm{End}_A(V)$，则它可以看作左 $B^{\otimes 2d}$-模的一个商。特别地，它具有 $K[\mathfrak{S}_{2d}]$-模的规范结构，我们仍将其称为 $K[\mathfrak{S}_{2d}]$（或 $\mathfrak{S}_{2d}$）在 $V^{[2d]}$上的 Goldman作用。我们希望描述该作用限制到 $\mathfrak{S}_{2d}$的两个特定子群上的情形。

首先，通过将群 $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ 识别为杨子群$\mathfrak{S}_{d,d}$，可以将其嵌入 $\mathfrak{S}_{2d}$。

引理 4.4。 设(A,σ)是(K,Id)上的带 *involution* 的 *Azumaya* 代数，且令 V为右 A-模。给定 $g,h\in\mathfrak{S}_d$和 $x,y\in V^{\otimes d}$，$\mathfrak{S}_d\times\mathfrak{S}_d$在 $V^{[2d]}$上的作用由$(g,h)\cdot(x\odot y)=(gx)\odot(hy)$给出，其中使用 $\mathfrak{S}_d$ 在 $V^{\otimes d}$上的左 *Goldman* 作用。

证明。这是直接的，因为 $B^{\otimes 2d}$-模结构 $V^{[2d]}$ 是 $B^{\otimes 2d}$-模结构 $V^{\otimes 2d}$ 的商结构，所以对于任意 a、$b\in B^{\otimes d}$ 和x、$y\in V^{\otimes d}$，我们得到 $(a\otimes b)\cdot(x\odot y)=(ax)\odot(by)$。由于 $\mathfrak{S}_{2d}$ 的作用是通过 $B^{\otimes 2d}$ 定义的，引理得证。 □

其次，我们可以通过将 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$ 映入 $\mathfrak{S}_{2d}$：把 $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant d}\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$ 送到交换 i 和 $i+d$（对所有满足 $x_i=1$的 $1\leqslant i\leqslant d$），并保持其他元素不变的置换。换句话说，第 i个生成元 $(0,\dots,1,\dots,0)$ 被送到对换 $(i,i+d)$。

对于任意 $g\in\mathfrak{S}_{2d}$，我们将其 σ-符号 $\varepsilon(\sigma)^g$ 定义为 $\varepsilon(\sigma)$，如果 g 是奇置换；如果 g 是偶置换，则为 1。因此，当 σ 是正交的，$\varepsilon(\sigma)^g$ 总是 1；而当 σ 是辛的时，这就是 g 的通常符号。

注意，与 Goldman作用不同，$\mathfrak{S}_{2d}$ 在 $V^{\otimes 2d}$ 上的置换作用不能下降到 $V^{[2d]}$。例如，如果 $d=2$，对换$(1,2)$ 的作用并不定义一个良好的映射 $(x_1\otimes x_2)\odot(x_3\otimes x_4)\mapsto(x_2\otimes x_1)\odot(x_3\otimes x_4)$。另一方面，当我们限制到 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$ 时：

引理 4.5。 设 (A,σ) 是(K,Id)上的带 *involution* 的 *Azumaya* 代数，且 V 是一个右 A-模。考虑 $\mathfrak{S}_{2d}$ 在$V^{\otimes 2d}$上的置换作用。此作用限制到子群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d\subset\mathfrak{S}_{2d}$ 后，可经由自然商映射 $V^{\otimes 2d}\to V^{[2d]}$分解；由此得到的$V^{[2d]}$ 上的作用与该子群的 *Goldman* 作用相同，相差一个 σ-符号。

证明。我们可以很容易地归结为 $d=1$ 的情形，并证明 $g_B\in B^{\otimes 2}$ 在 $V\otimes_A V$上的作用由 $g_B\cdot(x\odot y)=\varepsilon(\sigma)y\odot x$ 给出。

由命题 3.1 可知 $g_B(x\otimes y)g_A=y\otimes x$。$(x\otimes y)g_A\in V^{\otimes 2}$ 在 $V^{[2]}$ 中的像为 $xb\odot y$，其中 $b=\mu((\mathrm{Id}\otimes\sigma)(g_A))$，记 $\mu\colon A^{\otimes 2}\to A$ 为乘法映射。我们只需证明 $b=\varepsilon(\sigma)$.

这可以通过归约到分裂情形来证明，或者由 [12,练习I.12], 可得，因为按构造，b等于 $g_A\cdot 1$，利用了 $A^{\otimes 2}$ 在 $|A|_\sigma$上的扭曲作用。 □

由于 $\mathfrak{S}_d\times\mathfrak{S}_d$ 和 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$ 生成 $\mathfrak{S}_{2d}$，这些引理完全刻画了 $\mathfrak{S}_{2d}$的作用。

模的约化交错幂

由于约化张量幂 $V^{[2d]}$ 通过由 $|A^{\otimes d}|_{\sigma^{\otimes d}}$给出的 Morita 等价对应于 $A^{\otimes 2d}$-模 $V^{\otimes 2d}$，因此我们自然地将约化交错幂定义为 $V^{[2d]}$的相应子空间。

定义 4.6. 若 (A,σ) 是 K 上的第一类带对合的 *Azumaya* 代数，且 V 是右 A-模，则我们将其第 $2d$ 个约化交错幂定义为

$$\mathrm{RAlt}^{2d,\sigma}(V)=s_{2d}\cdot V^{[2d,\sigma]}\subset V^{[2d,\sigma]}$$

using the Goldman action of $\mathfrak{S}_{2d}$ *on* $V^{[2d]}$.

类似于约化张量幂，我们通常省略记号中的 σ，直接写作$\mathrm{RAlt}^{2d}(V)$。根据定义，$\mathrm{RAlt}^{2d}(V)$ 是子空间 $\mathrm{Alt}^{2d}(V) \subset V^{\otimes 2d}$ 在规范商映射 $V^{\otimes 2d} \to V^{[2d]}$ 下的像。

对于任意 $1 \leqslant i \leqslant d$，设 $\tau_i \colon V^{[2d]} \to V^{[2d]}$ 为线性自同构，它通过交换 x 和 y 的第 i 个张量因子而作用于 $x \odot y$。我们称 $x \in V^{[2d]}$ 为反镜像元素，如果对于任意 $i \in \{1, \dots, d\}$，$\tau_i(x) = -\varepsilon(\sigma)x$，并记 $AM^{2d,\sigma}(V)$ 为反镜像元素的子空间。

命题 4.7. 设 (A, σ) 为 K 上的第一类带对合的阿祖玛亚代数，且 V 为右 A-模。$V^{[2d]}$ 的子空间 $\mathrm{RAlt}^{2d,\sigma}(V)$ 是 $AM^{2d,\sigma}(V)$ 与 $\mathrm{Alt}^{d}(V) \otimes_{A^{\otimes d}} {}^{\sigma}V^{\otimes d}$ 的交。

证明. 考虑如上所述 $\mathfrak{S}_{2d}$ 中的子群 $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ 和 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$。群 $\mathfrak{S}_{2d}$ 由 $\mathfrak{S}_d \times \{1\}$ 和 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$ 生成，因此根据引理 3.2，$s_{2d}V^{[2d]}$ 是对 $g \in \mathfrak{S}_d \times \{1\}$ 和 $g \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$ 的 $\ker(1 - (-1)^g g)$ 的交。

利用引理 4.5，$\ker(1 - (-1)^g g)$ 与 $g \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$ 的交恰为 $AM^{2d,\sigma}(V)$。再利用引理 4.4，$\mathfrak{S}_d \times \{1\}$ 的作用仅仅是 $\mathfrak{S}_d$ 在$V^{[2d]} = V^{\otimes d} \otimes_{A^{\otimes d}} {}^{\sigma}V^{\otimes d}$ 的左因子上的 Goldman 作用，因此再次利用引理3.2，$\ker(1 - (-1)^g g)$ 对于 $g \in \mathfrak{S}_d \times \{1\}$ 的交为 $s_d V^{\otimes d} \otimes_{A^{\otimes d}} {}^{\sigma}V^{\otimes d}$，由此得到第一个等式。 □

Reduced alternating powers of a hermitian form

如果我们再次假设 V 带有一个关于(A, σ)上的 ε-厄米形式，我们将 h 的 $2d$次约化交错幂定义为定义在 $\mathrm{RAlt}^{2d}(V)$ 上的对称双线性形式，该形式为

$$\mathrm{RAlt}^{2d}(h)(s_{2d}x, s_{2d}y) = h^{[2d]}(s_{2d}x, y) = h^{[2d]}(x, s_{2d}y). \tag{18}$$

命题 4.8. 设 (A, σ) 为 K 上的带 *involution* 的 *Azumaya* 代数第一类，并设 (V, h) 为 (A, σ) 上的 ε-厄米模。在引理 *4.1* 给出的向量空间同构的限制下，双线性空间 $(\mathrm{RAlt}^{2d}(V), \mathrm{RAlt}^{2d}(h))$ 被等同于复合

$$(|A|_{\sigma^{\otimes d}}, T_{\sigma^{\otimes d}}) \circ (\mathrm{Alt}^{2d}(V), \mathrm{Alt}^{2d}(h)).$$

特别地，$(\Lambda^{2d}(V)\ \lambda^{2d}(h))$ 是$(\mathrm{RAlt}^{2d}(V), \mathrm{RAlt}^{2d}(h))$的等距类。

证明。 我们由命题 4.3 知道，$(V^{[2d]}, h^{[2d]})$ 与复合相对应

$$(|A^{\otimes d}|_{\sigma^{\otimes d}}, T_{\sigma^{\otimes d}}) \circ (V^{\otimes 2d}, h^{\otimes 2d}).$$

令 b 为定义在$\mathrm{RAlt}^{2d}(V)$ 上的双线性形式，使得在此对应关系下，$(\mathrm{RAlt}^{2d}(V)\ b)$ 对应于

$$(|A^{\otimes d}|_{\sigma^{\otimes d}}, T_{\sigma^{\otimes d}}) \circ (\mathrm{RAlt}^{2d}(V), \mathrm{Alt}^{2d}(h)).$$

Then considering that by definition

$$\mathrm{Alt}^{2d}(h)(s_{2d}x, s_{2d}y) = h^{\otimes 2d}(s_{2d}x, y) = h^{\otimes 2d}(x, s_{2d}y)$$

我们必须有 b 满足公式 (18)。 □

推论 4.9. $h^{[2d]}$ 到 $\mathrm{RAlt}^{2d}(V) \subset V^{[2d]}$ 的限制是 $\langle(2d)!\rangle\mathrm{RAlt}^{2d}(h)$。

证明。这是命题3.25 的直接推论，因为 $h^{[2d]}$ 和$\mathrm{RAlt}^{2d}(h)$ 是通过同一个 Morita 等价由 $h^{\otimes 2d}$ 和 $\mathrm{Alt}^{2d}(h)$ 得到的。 □

Reduced alternating powers of $\langle 1\rangle_\sigma$

当 $(V,h)=(A,\langle 1\rangle_\sigma)$ 时，我们给出的描述可以稍作简化。

引理 4.10。令 (A,σ) 为 K上的第一类带对合的 *Azumaya* 代数。映射 $x\odot y\mapsto x\sigma(y)$ 是从 $A^{[2d,\sigma]}$ 到 $|A^{\otimes d}|_{\sigma^{\otimes d}}$的左 $A^{\otimes 2d}$-模同构，其逆为 $x\mapsto x\odot 1=1\odot\sigma^{\otimes d}(x)$。

证明。这只是将引理 4.1 中的同构与 $A^{\otimes 2d}\otimes_{A^{\otimes 2d}}|A^{\otimes d}|_{\sigma^{\otimes d}}$ 和 $|A^{\otimes d}|_{\sigma^{\otimes d}}$ 之间的典范同构复合。 □

因此，作为向量空间，$A^{[2d,\sigma]}$ 可与 $A^{\otimes d}$等同，而我们所用的$\mathfrak{S}_{2d}$ 在 $A^{\otimes d}$ 上的作用来自 $|A^{\otimes d}|_{\sigma^{\otimes d}}$ 的左 $A^{\otimes 2d}$-模结构（该作用由$\sigma^{\otimes d}$扭曲，回顾（6））。

我们将 $A^{\otimes d}$ 中对应于 $\mathrm{RAlt}^{2d,\sigma}(A)$（即 $\mathrm{RAlt}^{2d}(A,\sigma)=s_{2d}A^{\otimes d}$）的子空间记作 $\mathrm{RAlt}^{2d}(A,\sigma)\subset A^{[2d,\sigma]}$。

对于任意 $1\leqslant i\leqslant d$，记 $\sigma_i=1\otimes\cdots\otimes\sigma\otimes\cdots\otimes 1$，其中 σ 位于第 i个位置，并将 $A^{\otimes d}$ 中全然 σ-反对称元素构成的子空间定义为

$$TA^{2d}(A,\sigma)=\{x\in A^{\otimes d}\mid\forall i\in\{1,\dots,d\},\ \sigma_i(x)=-\varepsilon(\sigma)x\}.$$

特别地，$TA^{2d}(A,\sigma)\subset\mathrm{Sym}^{(-\varepsilon(\sigma))^d}(A^{\otimes d},\sigma^{\otimes d})$。

命题 4.11. 设(A,σ) 是 K 上的第一类带对合的阿祖玛亚代数。在引理 *4.10* 的恒等对应 $A^{[2d,\sigma]}\simeq A^{\otimes d}$ 下，反镜像元素子空间 $AM^{2d,\sigma}(A)$ 对应于全 σ-反对称元素子空间 $TA^{2d}(A,\sigma)$，并且

$$\mathrm{RAlt}^{2d}(A,\sigma)=TA^{2d}(A,\sigma)\cap\mathrm{Alt}^d(A)\subset A^{\otimes d}.$$

证明。这是命题 4.7 的直接推论，因为根据定义很容易看出，在恒等对应 $x\odot y\mapsto x\sigma(y)$ 下，τ_i 对应于 σ_i。 □

最后，我们可以辨认出 $\langle 1\rangle_\sigma$ 的约化张量幂和交错幂。

命题 4.12. 设(A,σ) 是 K 上的第一类带对合的阿祖玛亚代数。在引理 *4.10* 的恒等对应 $A^{[2d,\sigma]}\simeq A^{\otimes d}$ 下，双线性形式 $\langle 1\rangle_\sigma^{[2d]}$ 对应于 $T_{\sigma^{\otimes d}}$，而 $\mathrm{RAlt}^{2d}(\langle 1\rangle_\sigma)$ 对应于

$$(s_{2d}x,s_{2d}y)\mapsto(-\varepsilon(\sigma))^d\,\mathrm{Trd}_{A^{\otimes d}}((s_{2d}x)y)=(-\varepsilon(\sigma))^d\,\mathrm{Trd}_{A^{\otimes d}}(x(s_{2d}y)).$$

Proof. The bilinear form corresponding to $\langle 1\rangle_\sigma^{[2d]}$ sends (x,y) to

$$\begin{aligned}\langle 1\rangle_\sigma^{[2d]}(x\odot 1,y\odot 1)&=\mathrm{Trd}_{A^{\otimes d}}(\sigma^{\otimes d}(\langle 1\rangle_\sigma^{\otimes 2d}(x,y))\langle 1\rangle_\sigma^{\otimes 2d}(1,1))\\&=\mathrm{Trd}_{A^{\otimes d}}(x\sigma^{\otimes d}(y))\end{aligned}$$

即为 $T_{\sigma^{\otimes d}}$。然后根据(18)，与 $\mathrm{RAlt}^{2d}(\langle 1\rangle_\sigma)$ 对应的形式将 $(s_{2d}x, s_{2d}y)$ 发送到

$$\begin{aligned} T_{\sigma^{\otimes d}}(s_{2d}x, y) &= \mathrm{Trd}_{A^{\otimes d}}(\sigma^{\otimes d}(s_{2d}x)y) \\ &= (-\varepsilon(\sigma))^d \,\mathrm{Trd}_{A^{\otimes d}}((s_{2d}x)y) \end{aligned}$$

其中我们用到 $\sigma^{\otimes d}(s_{2d}x) = (-\varepsilon(\sigma))^d s_{2d}x$，因为 $s_{2d}x$ 属于 $TA^{2d}(A,\sigma)$。

另一个等式成立是因为双线性形式是对称的。 □

注 4.13. 我们验证了我们的等同确实给出了预期的双线性形式，但就其本身而言，$\langle 1\rangle_\sigma^{2d}$ 是 $T_{\sigma^{\otimes d}}$ 的等距类这一事实实际上是由 $\widetilde{SW}^\bullet(A,\sigma)$ 的定义得出的。

推论 *4.14.* 设 (A,σ) 为 K 上带 *involution* 的第一类 *Azumaya* 代数。$T_{\sigma^{\otimes d}}$ 到 $RAlt^{2d}(A,\sigma) \subset A^{\otimes d}$ 的限制等距于 $\langle (2d)!\rangle\lambda^{2d}(\langle 1\rangle_\sigma)$。因此，若 $char(K) \leqslant 2d$，则 $T_{\sigma^{\otimes d}}$ 到 $RAlt^{2d}(A,\sigma)$ 的限制是全迷向的；若 $char(K) > 2d$，则 $\lambda^{2d}(\langle 1\rangle_\sigma)$ 等距于 $\langle (2d)!\rangle$ 倍的 $T_{\sigma^{\otimes d}}$ 到 $Alt^d(A) \cap TM^{2d}(A,\sigma)$ 的限制。

证明。这是推论 4.9 的直接结果。 □

推论 4.15。设 (A,σ) 是定义在 K 上的第一类带对合的阿祖玛亚代数。那么在 $SW(K)$ 中：

$$\lambda^2(\langle 1\rangle_\sigma) = \langle 2\rangle T_\sigma^{-\varepsilon(\sigma)}.$$

注 4.16。事实上，正如我们在注 3.35 中所观察到的，对于定义在 (A,σ) 上的任意 (V,h)，若 $B = \mathrm{End}_A(V)$ 且 $\tau = \sigma_h$ 是伴随对合，则 $\lambda^{2d}(h) = \lambda^{2d}(\langle 1\rangle_\tau)$，因此命题 4.12 足以计算任意偶数 λ 次幂。我们甚至可以给出更明确的描述：$B^{\otimes d} \simeq \mathrm{End}_{A^{\otimes d}}(V^{\otimes d})$，而 [12, §5.A] 中给出的标准同一 $V^{\otimes d} \otimes_{A^{\otimes d}} {}^{\sigma^{\otimes d}}V^{\otimes d} \simeq B^{\otimes d}$ 在 $V^{[2d]}$ 与 $B^{\otimes d}$ 之间建立了一个同一，从而将 $\mathrm{RAlt}^{2d}(h)$ 与 $\mathrm{RAlt}^{2d}(\langle 1\rangle_\tau)$ 对应起来。

特别地，对于任意 h，只要域的特征严格大于 $2d$，我们总能将 $\lambda^{2d}(h)$ 实现为某个对合迹形式的缩放子形式。

注 4.17。我们在命题 4.12 中对 $\mathrm{RAlt}^2(\langle 1\rangle_\sigma)$ 的描述，给出了 $\lambda^2(\langle 1\rangle_\sigma)$ 的另一种描述。若 σ 是正交的，则 $\mathrm{RAlt}^2(A,\sigma)$ 是 A 中的交错元素空间，其意义见 [12, §2.A], , 而 $\mathrm{RAlt}^2(\langle 1\rangle_\sigma)$ 是

$$(x - \sigma(x), y - \sigma(y)) \mapsto \mathrm{Trd}_A(x(y - \sigma(y))).$$

若 σ 是辛的，$\mathrm{RAlt}^2(A,\sigma)$ 是如 [12,§2.A], 中所述的对称化元素空间，而 $\mathrm{RAlt}^2(\langle 1\rangle_\sigma)$ 是

$$(x + \sigma(x), y + \sigma(y)) \mapsto \mathrm{Trd}_A(x(y + \sigma(y))).$$

这些是 [12, 练习 2。15],中描述的形式，它们在特征 2 中也有意义。

4.2 奇数次的约化交错幂

现在我们对奇数 λ 次幂进行类似的构造，这在很大程度上依赖于偶数情形。由于我们在应用中主要关注偶数 λ 次幂，故不再详述。

若 V 是右 A-模，且 $d \in \mathbb{N}$，我们定义

$$V^{[2d+1,\sigma]} = V^{[2d,\sigma]} \otimes_K V. \tag{19}$$

与前面一样，我们通常在记号中省略 σ。若 $B = \mathrm{End}_A(V)$，我们知道 $V^{[2d]}$ 是左 $B^{\otimes 2d}$-模，因此 $V^{[2d+1]}$ 自然是一个 $B^{\otimes 2d+1}$-A-双模。特别地，它是左 $K[\mathfrak{S}_{2d+1}]$-模，于是我们可以定义

$$\mathrm{RAlt}^{2d+1,\sigma}(V) = s_{2d+1} V^{[2d+1,\sigma]} \subset V^{[2d+1,\sigma]}. \tag{20}$$

当 V 带有一个 ε-厄米形式时，我们可以在 $V^{[2d+1]}$ 上定义一个 ε-厄米形式 $h^{[2d+1]}$，其定义为

$$h^{[2d+1]} = h^{[2d]} \otimes h \tag{21}$$

并在 $\mathrm{RAlt}^{2d+1}(V)$ 上定义一个 ε-厄米形式 $\mathrm{RAlt}^{2d+1}(h)$，其定义为

$$\mathrm{RAlt}^{2d+1}(h)(s_{2d+1}x, s_{2d+1}y) = h^{[2d+1]}(s_{2d+1}x, y). \tag{22}$$

命题 *4.18*。 *设 (A,σ) 是 K 上的第一类带对合的阿祖玛亚代数，且 (V,h) 是 (A,σ) 上的 ε-厄米模。那么，$(V^{[2d+1]}, h^{[2d+1]})$ 的等距类是 (V,h) 在 $\widetilde{SW}^{\bullet}(A,\sigma)$ 中的 $(2d+1)$ 次幂，并且 $(\Lambda^{2d+1}(V)\ \lambda^{2d+1}(h))$ 是 $(\mathrm{RAlt}^{2d+1}(V), \mathrm{RAlt}^{2d+1}(h))$ 的等距类。*

证明。 根据 $\widetilde{SW}^{\bullet}(A,\sigma)$ 的结构定义，$(V,h)^{2d+1}$ 是 $(V^{\otimes 2d+1}, h^{\otimes 2d+1})$ 与 $(|A^{\otimes d}|_{\sigma^{\otimes d}}, T_{\sigma^{\otimes d}})\ \otimes_K (|A|, \langle 1\rangle_\sigma)$ 的复合。该复合是

$$(|A^{\otimes d}|_{\sigma^{\otimes d}}, T_{\sigma^{\otimes d}}) \circ (V^{\otimes 2d}, h^{\otimes 2d})$$

我们由命题 4.3 知其为 $(V^{[2d]}, h^{[2d]})$ 以及

$$(A, \langle 1\rangle_\sigma) \circ (V, h)$$

它典范地为 (V,h) 的张量幂。因此 $(V,h)^{2d+1}$ 是 $(V^{[2d+1]}, h^{[2d+1]})$ 的类。

关于 $\lambda^{2d+1}(h)$ 的陈述随之得出，利用 $h^{\otimes 2d+1}$ 与 $\mathrm{Alt}^{2d+1}(h)$ 之间的联系，完全如同命题 4.8 的证明中那样。 □

注 4.19. 与偶数 λ-幂的情形不同（见注 4.16），我们不能简单地将 $\lambda^{2d+1}(h)$ 计算为 $\lambda^{2d+1}(\langle 1\rangle_\tau)$，其中 τ 是 h 的伴随对合。相反，$\lambda^{2d+1}(h) \in SW^{\varepsilon}(A,\sigma)$ 是从 $\lambda^{2d+1}(\langle 1\rangle_\tau) \in SW(B,\tau)$ 利用从 (B,τ) 到 (A,σ) 的 Morita 等价得到的，该等价恰好由 (V,h) 给出。

5 The determinant ofan involution

由于行列式是二次型最基本且最有用的不变量之一，因此人们希望将其推广到带对合的代数和厄米形式，这是有道理的。

设 (A,σ)是 (K,ι) 上带对合的 Azumaya 代数，且(V,h)是 (A,σ) 上的 ε-厄米模，其约化维数为 $n\in\mathbb{N}$。然后将 Proposition 1.26 应用于 $SW_{\mathbb{N}}(A,\sigma)$，我们可以定义$\det(h)=\lambda^n(h)\in\ell(SW_{\mathbb{N}}(A,\sigma))$。特别地，我们将 (A,σ)（或简称 σ）的行列式定义为

$$\det(A,\sigma)=\det(\sigma)=\det(\langle 1\rangle_\sigma)\in\ell(\widehat{SW}^\bullet_{\mathbb{N}}(A,\sigma)). \tag{23}$$

现在，$\ell(SW_{\mathbb{N}}(A,\sigma))$ 是 $SW_{\mathbb{N}}(A,\sigma)^\times$ 的一个子幺半群，并带有一个自然态射∂：$\ell(\widehat{SW}^\bullet_{\mathbb{N}}(A,\sigma))\to\Gamma_{\mathbb{N}}$。我们将它与自然投影 $\Gamma_{\mathbb{N}}\to\mathbb{N}$复合，得到 ∂'：$\ell(\widehat{SW}^\bullet_{\mathbb{N}}(A,\sigma))\to\mathbb{N}$。显然，$SW^\bullet(A^{\otimes d},\sigma^{\otimes d})$ 只有在 $A^{\otimes d}$ 分裂时才含有约化维数为 1 的元素；在这种情况下，选取一个 Morita 等价，可将这些线元的集合（依赖于这一选择）与 $\ell(SW^\bullet(K,\iota))$ 识别。令 $e\in\mathbb{N}$为 A的指数。那么，∂'：$\ell(\widehat{SW}^\bullet_{\mathbb{N}}(A,\sigma))\to\mathbb{N}$的像为 $e\mathbb{N}$；若 $m\in\mathbb{N}$，则 em上方的纤维与 $\ell(SW^\bullet(K,\iota))\simeq K^\times/N_{K/k}(K^\times)$ 之间存在非典范双射。事实上，我们可以看到，$(A^{\otimes d},\sigma^{\otimes d})$ 与 (K,ι) 之间任意一个 Morita 等价的选择，都会在 $(\partial')^{-1}(d\mathbb{N})$ 与 $d\mathbb{N}\times K^\times/N_{K/k}(K^\times)$ 之间诱导一个幺半群同构。因此，特别地，$(A^{\otimes e},\sigma^{\otimes e})$ 与 (K,ι) 之间的一个等价选择给出

$$\ell(\widehat{SW}^\bullet_{\mathbb{N}}(A,\sigma))\approx e\mathbb{N}\times K^\times/N_{K/k}(K^\times).$$

因此 $\det(h)$ 位于 $n\in e\mathbb{N}$ 上方的纤维中，但这只能非典范地将 $\det(h)$ 与 $K^\times/N_{K/k}(K^\times)$ 中的一个类对应起来。当 n 是 $r=\deg(A)$ 的倍数时（因此当 h 同构于一个对角形式时，除非 $(A,\sigma)=(K,\mathrm{Id})$ 且 h 是反对称的），我们可以做得更好一些。事实上，$(A^{\otimes d},\sigma^{\otimes d})$ 与 (K,ι) 之间存在一个典范等价，由 $(\mathrm{Alt}^r(A),\mathrm{Alt}^r(\langle 1\rangle_\sigma))$ 给出。这定义了一个典范同构

$$\ell(\widehat{SW}^\bullet_{\mathbb{N}}(A,\sigma))\supset(\partial')^{-1}(r\mathbb{N})\simeq r\mathbb{N}\times K^\times/N_{K/k}(K^\times)$$

它将 $\det(\sigma)$映射到 $(r,1)$。换言之，我们是在说，$(\partial')^{-1}(rm)$ 的任意元素，对于某个 $m\in\mathbb{N}$（特别地，如果 $n=rm$，则$\det(h)$也属于其中），都具有形如$\lambda\cdot\det(\sigma)^m$ 的形式，其中唯一确定的类为 $\lambda\in K^\times/N_{K/k}(K^\times)\simeq\ell(SW^\bullet(K,\iota))$。当给定 h 的一个对角化时，我们可以给出更明确的描述。

引理 5.1. 设 A 是 K上的阿祖玛亚代数，次数为 n。那么对任意$a\in A^\times$，我们有 $s_n a^{\otimes n}=\mathrm{Nrd}_A(a)s_n$。

证明。等式可在扩张标量后验证，因此只需证明 A 是分裂的情形。在这种情况下，$A\simeq\mathrm{End}_K(U)$，且 $\dim(U)=n$，a对应于某个自同态 $f:U\to U$，该公式等价于对所有 $u_1,\dots,u_n\in U$，都有$f(u_1)\wedge\cdots\wedge f(u_n)=\det(f)(u_1\wedge\cdots\wedge u_n)$。□

命题 5.2。设 (A,σ) 是定义在 (K,ι) 上的带对合的 *Azumaya* 代数，并设 $a_1,\dots,a_m\in\mathrm{Sym}^\varepsilon(A^\times,\sigma)$ 属于某个 $\varepsilon\in U(K,\iota)$。则

$$\det(\langle a_1,\dots,a_m\rangle_\sigma)=\langle\prod_{i=1}^m\mathrm{Nrd}_A(a_i)\rangle_\iota\det(\sigma)^m.$$

证明。 由于 $\det(h+h') = \det(h)\det(h')$，我们可以轻松归约到 $m=1$，并证明 $\mathrm{Alt}^n(\langle a\rangle_\sigma) = \langle \mathrm{Nrd}_A(a)\rangle_\iota \mathrm{Alt}^n(\langle 1\rangle_\sigma)$。令 $x,y\in A^{\otimes n}$。然后

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}^n(\langle a\rangle_\sigma)(s_n x, s_n y) &= \langle a\rangle_\sigma^{\otimes n}(s_n x, y)\\ &= \sigma^{\otimes n}(s_n x)a^{\otimes n}y\\ &= \sigma^{\otimes n}(x)s_n a^{\otimes n}y\\ &= \mathrm{Nrd}_A(a)\sigma^{\otimes n}(x)s_n y\\ &= \mathrm{Nrd}_A(a)\langle 1\rangle_\sigma^{\otimes n}(x, s_n y)\\ &= \mathrm{Nrd}_A(a)\,\mathrm{Alt}^n(\langle 1\rangle_\sigma)(s_n x, s_n y).\end{aligned}$$ □

总结而言，$\det(h)$ 典范地是 $\ell(\widetilde{SW}^\bullet_{\mathbb{N}}(A,\sigma))$ 中的一个元素，仅在给定 Morita 等价的选择时才能等同于 $K^\times/N_{K/k}(K^\times)$ 中的一个元素，但如果 $\mathrm{rdim}(h) = m\deg(A)$，我们可以通过 $K^\times/N_{K/k}(K^\times)$ 中的一个类将 $\det(h)$ 与 $\det(\sigma)^m$ 联系起来。

通常，当 $\iota=\mathrm{Id}_k$ 时，在 $\widetilde{SW}^\bullet(A,\sigma)$ 中工作会舒适得多，并将 $\det(h)$ 特别是 $\det(\sigma) = \det(\langle 1\rangle_\sigma)$ 定义为 $\ell(\widetilde{SW}^\bullet(A,\sigma))$ 中的一个元素（这是一个群）。

当 A 不分裂时，我们容易看出 $\ell(\widetilde{SW}^\bullet(A,\sigma)) \simeq K^\times/(K^\times)^2$ 因为 $SW^\varepsilon(A,\sigma)$ 中没有线元。当 A 分裂时，态射 $\ell(\widetilde{SW}^\bullet(A,\sigma)) \xrightarrow{\partial} \Gamma \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 诱导出一个典范正合序列

$$1 \to K^\times/(K^\times)^2 \to \ell(\widetilde{SW}^\bullet(A,\sigma)) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0 \tag{24}$$

它是分裂的，但并非规范地分裂。事实上，在 (A,σ)与 (K,Id) 之间任意选择一个 Morita 等价，都会定义一个同构

$$\ell(\widetilde{SW}^\bullet(A,\sigma)) \approx \ell(\widetilde{SW}^\bullet(K,\mathrm{Id})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times K^\times/(K^\times)^2.$$

任意两个这样的等价选择相差于乘以某个 $\widetilde{\langle\lambda\rangle}^\bullet$ 且满足 $\lambda\in K^\times$，这会诱导出 $\ell(SW(K,\mathrm{Id}))$的自同构，该自同构对应于 $([i],[a]) \mapsto ([i],[\lambda^i a])$且满足 $[i]\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 和 $[a]\in K^\times/(K^\times)^2$ (特别地，它在 $\ell(\widetilde{SW}^\bullet(K,\mathrm{Id}))$ 的“偶分量”上是恒等的)。

当$\mathrm{rdim}(h)$为偶数时，$\det(h)$ 随即被规范地识别为 $K^\times/(K^\times)^2$ 中的一个类。这尤其适用于 $\deg(A)$ 为偶数时的 $\det(\sigma)$。

当 $\mathrm{rdim}(h)$ 为奇数时，必然 A 是分裂的，并且$\det(h)$属于 $\ell(\widetilde{SW}^\bullet(A,\sigma))$的奇分- 量，该分量与 $K^\times/(K^\times)^2$ 非典范地对应。 当 $\deg(A)$ 为奇数时，这同样适用于 $\det(\sigma)$；在这种情况下，对于任意具有奇约化维数的 h，我们可以写成 $\det(h) = \langle\lambda\rangle\det(\sigma)$，并且 λ 的平方类是唯一确定的。

不过，当 $\iota=\mathrm{Id}_k$ 时，让我们将这些观察与文献 [12]进行比较。其中，$\det(\sigma)\in K^\times/(K^\times)^2$ 仅在 σ 正交且 $\deg(A)$ 为偶数时定义，而在这种情况下它与我们的定义一致。事实上，我们可以找到 L/K 的一个分裂扩张 A，使得 $K^\times/(K^\times)^2 \to L^\times/(L^\times)^2$ 是单射的（例如，我们可以取 L 为 A 的Severi-Brauer簇的函数域）。然后，我们可以选取一个从 (A_L,σ_L) 到 (L,Id) 的 Morita 等价 (V,b)，并且无论对于我们的定义还是 [12], 的定义，$\det(\sigma_L)=\det(b)$ 都成立；由单射性可知

这表明两个 det(σ) 相等。当然，关键在于这一点与 b 的选择无关，因为任何其他选择都与某个 $\lambda \in L^\times$ 对应的 $\langle\lambda\rangle b$ 等距，并且由于 dim(V) $=$ deg(A) 为偶数，det($\langle\lambda\rangle b$) $=$ det(b)。从我们的观点来看，可以说 det(σ_L) 属于 $\ell(\widetilde{SW}^\bullet(A_L,\sigma_L))$ 的偶分量，因此其在 $\ell(\widetilde{SW}^\bullet(L,\mathrm{Id}))$ 中的像不依赖于 Morita 等价的选择。

当 σ 为正交但 deg(A) 为奇数时，[12] 不能定义 det(σ)，因为先前的技巧不起作用：由于 dim(V) 为奇数，det($\langle\lambda\rangle b$) $=\langle\lambda\rangle$det(b)，所以这个类确实取决于 b 的选择。用我们的语言来说，det(σ_L) 属于 $\ell(\widetilde{SW}^\bullet(A_L,\sigma_L))$ 的奇分量，因此它在 $\ell(\widetilde{SW}^\bullet(L,\mathrm{Id}))$ 中的像确实取决于 Morita 等价的选择。在这种情况下，我们的定义仍然为 det(σ) 提供了意义，但它不是一个平方类。可以通过选择 (A,σ) 与 (K,Id) 之间的一个等价，将其与平方类联系起来，但所诱导的同构$\ell(\widetilde{SW}^\bullet(A,\sigma))$ $\approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times K^\times/(K^\times)^2$ 确实取决于这一选择（至少在奇分量上如此）。一般而言，如果 (V,h) 定义了 (B,τ) 与 (A,σ) 之间的一个 Morita 等价，那么所诱导的同构 $\ell(\widetilde{SW}^\bullet(B,\tau)) \xrightarrow{\sim} \ell(\widetilde{SW}^\bullet(A,\sigma))$ 会将 det(τ) 发送到 det(σ)，但群本身会发生变化。

对于辛对合，情况更为简单：det(σ) 显然是平凡的（例如，可以使用上述的分裂技巧看出这一点）。这并不令人意外，因为对于辛对合，不存在次数为1的非平凡上同调不变量（基本上是因为辛群是连通的）。相反，在文献中可以找到将辛对合的“行列式”定义为次数为 3 的上同调不变量的做法，参见 [1] 和 [9]。

References

[1] Grégory Berhuy、MarinaMonsurro 和 Jean-PierreTignol。辛对合的判别式。太平洋数学杂志，209(2)：201–218，2003年。[2] P.Berthelot、O. Jussila、A. 格罗滕迪克、M. Raynaud、S. Kleiman、L. Illusie 和 PierreBerthelot。交理论与黎曼–罗赫定理，《数学讲义》丛书第225 卷。施普林格柏林海德堡，柏林，海德堡，1971 年。[3]James Borger。λ环与一元域。https://arxiv.org/abs/0906.3146，2009年。[4] Nicolas布尔巴基。代数：第*1* 至*3* 章。施普林格科学与商业媒体，2007 年。[5] Richard Elman、NikitaKarpenko 和 AlexanderMerkurjev。二次型的代数与几何理论，第 58 卷。美国数学学会，2008年。[6] Uriya First。带对合的Azumaya 代数的Witt群的一个 8-周期正合序列。数学手稿，170(1)：313–407，2023 年 1 月。[7] SkipGaribaldi。上同调不变量：例外群与 *Spin* 群。美国数学学会，2009年。

[8] Skip Garibaldi、AlexanderMerkurjev和Jean-Pierre Serre。《上同调不变量与伽罗瓦上同调》。美国数学学会，2003年。[9] Skip Garibaldi、RamanParimala和 Jean-Pierre Tignol。辛对合的判别式。《纯粹与应用数学季刊》，5(1)：349，2009年。[10] NicolasGarrel。第一类带对合的代数的混合 Witt环。即将出版，2019年。[11] Nicolas Garrel。Witt 类的 Witt 不变量与上同调不变量。《K 理论年刊》，5(2)：213–248，2020年。[12] Max-Albert Knus、Alexander Merkurjev、Markus Rost 和 Jean-PierreTignol。《对合之书》。美国数学学会，1998年。[13] T.Y. Lam。《域上的二次型导论》。美国数学学会，2005年。[14] SeanMcGarraghy。对称双线性形式的外幂。载于《代数学报》，第9卷，第197–218页，2002年。[15] OnoratoTimothyO'Meara。《二次型导论》，第117卷。施普林格，2013年。[16] Anne Quéguiner。带对合的代数的上同调不变量。《代数学杂志》，184：299–330，1997年。[17]Markus Rost。关于$spin$(14)的伽罗瓦上同调。https://www.math.uni-bielefeld.de/~rost/data/spin-14.pdf，1999年。[18] Markus Rost、Jean-PierreSerre 和 Jean-Pierre Tignol。四次中心单代数的迹形式。《数学报告》，342(2)：83–87，2006年1月。[19] KazimierzSzymiczek。《双线性代数：二次型的代数理论导论》，第7卷。CRC出版社，1997年。[20] DonaldYau。《λ环》。世界科学出版社，新加坡；哈肯萨克，新泽西州，2010年。[21] Marcus Zibrowius。对称表示环是 λ-环。《纽约数学杂志》，2015年。