arXiv:2304.02620v1 [math.NT] 5 Apr 2023

Birch 关于具有 Hessian 条件的多变量型的定理

SHUNTARO YAMAGISHI

Abstract. 设 $F \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ 为一个次数为 $d \geq 2$的齐次形式，且 V_F^*为超曲面 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} : F(\mathbf{x}) = 0\}$的奇异轨迹。Birch 的一个长期结果表明，只要$n > \dim V_F^* + (d-1)2^d$，并且对于所有素数 p，在 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Q}_p$ 中存在一个非奇异解，则方程 $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ 存在一个非平凡整数解。在本文中，我们给出这一结果的另一种表述。更确切地说，我们将 $\dim V_F^*$替换为一个用 F 的海森矩阵定义的量 $\mathcal{H}_F$。该量满足 $0 \leq \mathcal{H}_F \leq \dim V_F^*$；因此，当$\mathcal{H}_F < \dim V_F^*$时，我们改进了上述 Birch 的结果。我们还证明了对于等次数的形式系统，相应的结果同样成立。

1. Introduction

设 F_1、…、 $F_R \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ 为次数相同且均为 $d \geq 2$ 的齐次形式。我们定义

$$V_{\mathbf{F}}^* = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} : \operatorname{rank} \left[\frac{\partial F_\ell}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right]_{\substack{1 \leq \ell \leq R \\ 1 \leq i \leq n}} < R \right\}.$$

Birch 的一个长期结果 [1]陈述如下。

定理 1.1（Birch）。设 $F_1, \dots, F_R \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ 是次数为 $d \geq 2$ 的齐次形式。设 $\mathcal{B} \subseteq [-1, 1]^n$ 是一个盒，其各边长度至多为 1，且平行于坐标轴。假设

$$n > \dim V_{\mathbf{F}}^* + R(R+1)(d-1)2^d.$$

令 $\delta > 0$ 足够小。则存在 $c_{\mathbf{F}} \geq 0$，使得

$$\#\{\mathbf{x} \in P\mathcal{B} \cap \mathbb{Z}^n : F_1(\mathbf{x}) = \cdots = F_R(\mathbf{x}) = 0\} = c_{\mathbf{F}} P^{n-d} + O(P^{n-d-\delta}), \tag{1.1}$$

对于 $P > 0$。此外， $c_{\mathbf{F}} > 0$ 如果方程组 $F_1(\mathbf{x}) = \cdots = F_R(\mathbf{x}) = 0$ 在 $\mathcal{B}$ 的内部以及 $\mathbb{Q}_p$ 中对所有素数 p都存在非奇异解。

Birch的这一经典结果产生了深远影响。关于一般信息，请参阅综述 [3] ，关于三次情形的全面概述，请参阅著作 [4]。这里我们仅提及一些相关结果。在 $R = 1$的情形下，诸多工作 [7, 15, 22], 改进了所需的变量数；而当 $R > 1$ 时，Rydin Myerson取得了重大进展 [19, 20, 21]。对于涉及不同次数的形式系统，Schmidt [26] 以及Browning和Heath-Brown [6]取得了一些成果。Lee [17] 建立了Birch定理在函数域 $\mathbb{F}_q(t)$上的结果，随后Browning和Vishe [9, 10] 以及Browning和Sawin [8]的工作进一步改进了相关技术，并将其应用于代数几何。还可以考虑具有素数坐标的整数点的Birch定理，其中Cook和Magyar [11] 首次取得了与之类似的重大结果，类似于

日期：修订于2023年4月6日。2010年数学主题分类。11P55（11G35，14G05）。

上述定理在这一情形下，作者 [27, 28] 以及刘和赵 [18]作了进一步发展。

在许多涉及Birch定理技术的这些问题中，通常考虑 $V^*_{\mathbf{F}}$的余维数，也就是说，如果 $V^*_{\mathbf{F}}$ 的余维数大于某个依赖于次数的量，则结果成立。在本文中，我们证明了定理 1.1的一个变体，该变体以 $F_1, \dots, F_R$的海森矩阵上的条件来表述，其中所需的变量数总是小于或等于Birch上述结果中的变量数。还值得一提的是Dietmann [14] 和Schindler [23], 的工作，其中Birch定理是根据束中形式的奇异轨迹的维数来证明的。

给定一个齐次形式 $G \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$，我们定义 H_G 为 G 的海森矩阵，即。

$$H_G(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) \right]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}.$$

注意，如果 $\deg G = 2$，那么 $H_G(\mathbf{x})$ 的每个坐标都是常数；因此，在这种情况下，我们写作 $H_G(\mathbf{x}) = H_G$。

定义

$$\mathcal{H}_G = \begin{cases} \max_{0 \le r \le n} \dim\{\mathbf{x} \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} : \operatorname{rank} H_G(\mathbf{x}) \le r\} - r & \text{if } d > 2, \\ n - \operatorname{rank} H_G & \text{if } d = 2. \end{cases} \tag{1.2}$$

量 $\dim\{\mathbf{x} \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} : \operatorname{rank} H_G(\mathbf{x}) \le r\}$ 并不罕见，且此前已在文献中出现过，例如在 [5] 和 [16] 中（不过在后一项工作中，这仅针对三次情形，并且是以整数点的数量来表述的）。事实上， [5, 引理2] 证明了

$$0 \le \mathcal{H}_G \le \dim V^*_G. \tag{1.3}$$

在本文中，我们证明可以将定理 1.1 中的 $\dim V^*_{\mathbf{F}}$ 替换为

$$\max_{\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^R \setminus \{\mathbf{0}\}} \mathcal{H}_{\mathbf{c}.\mathbf{F}}, \tag{1.4}$$

其中 $\mathbf{c}.\mathbf{F} = c_1 F_1 + \cdots + c_R F_R$。

定理 1.2。设 F_1、.....、 $F_R \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ 和 $\mathcal{B}$如定理 1.1 中所述。假设

$$n > \max_{\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^R \setminus \{\mathbf{0}\}} \mathcal{H}_{\mathbf{c}.\mathbf{F}} + R(R+1)(d-1)2^d.$$

令 $\delta > 0$ 充分小。则存在 $c_{\mathbf{F}} \ge 0$ 使得

$$\#\{\mathbf{x} \in P\mathcal{B} \cap \mathbb{Z}^n : F_1(\mathbf{x}) = \cdots = F_R(\mathbf{x}) = 0\} = c_{\mathbf{F}} P^{n-d} + O(P^{n-d-\delta}), \tag{1.5}$$

对于 $P > 0$。此外， $c_{\mathbf{F}} > 0$ 如果满足与定理 1.1 中相同的局部条件。

由（1.3）和 [23, pp. 209] 可得。

$$0 \le \mathcal{H}_{\mathbf{c}.\mathbf{F}} \le \dim V^*_{\mathbf{c}.\mathbf{F}} \le \dim V^*_{\mathbf{F}}$$

对于所有$\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^R \setminus \{\mathbf{0}\}$。因此，定理 1.2中所需的变量数从不多于定理1.1 中的变量数。看起来，在上述许多与 Birch定理 相关的结果中，我们或许可以像在我们的定理中那样，用(1.4)替代 $V^*_{\mathbf{F}}$ 的维数。我们将在第4节中给出一些例子，其中 $\mathcal{H}_F = 0$，而 $\dim V^*_F = n/2$。最后，有趣的是注意到，作者与Schindler 的工作 [25], 中，建立了某些流形上具有有界高度的有理点数目的一个上界，

关于海森矩阵的线性组合的一个条件也出现在该结果的陈述中，这可能与当前工作有关，也可能无关。

致谢。作者在乌特勒支大学期间获得 NWO Veni 资助项目 016.Veni.192.047，并在撰写本文期间于奥地利科学技术研究所获得 FWF 资助项目 P 36278 的支持。他还要感谢 Tim Browning、JakobGlas 和Simon Rydin Myerson 提供的宝贵建议并进行有益的交流。

2. A variant of the classical Weyl differencing argument

给定一个次数为 $d \geq 2$ 的齐次形式，我们记为 $G \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$

$$G(\mathbf{x}) = \sum_{j_1,\dots,j_d=1}^{n} G_{\mathbf{j}} x_{j_1} \cdots x_{j_d}, \tag{2.1}$$

其中，$G_{\mathbf{j}} \in \mathbb{Q}$ 关于 $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_d)$ 对称。我们将与 G 相关联的多重线性形式记为 Γ_G，其定义为

$$\Gamma_G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d) = d! \sum_{\mathbf{j}} G_{\mathbf{j}} x_{1,j_1} \cdots x_{d,j_d}, \tag{2.2}$$

其中求和范围与（2.1）中的相同。我们将在第3节证明以下估计。

引理 2.1. 设 $G \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ 是次数为 $d \geq 2$ 的齐次形式。设 $B \geq 1$。则

$$\begin{aligned} &\#\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d-1} \in ([-B, B] \cap \mathbb{Z})^n : \Gamma_G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d-1}, \mathbf{e}_i) = 0 \ (1 \leq i \leq n)\} \\ \ll\ & B^{(d-2)n+\mathcal{H}_G}, \end{aligned}$$

其中隐常数仅依赖于 d 和 n。

当 $R = 1$ 时，[1] 中用于该量的相应界为 $\ll B^{(d-2)n+\dim V_F^*}$，这导致定理1.1的陈述中出现 $\dim V_F^*$；因此，通过改用这一估计并沿着 [1], 中的证明进行推导，我们得到定理 1.2。然而，我们将沿用 [23] 中的论证，该论证在 $R > 1$时不同于 [1] 中的论证；这种方法的优点是能够轻松利用引理 2.1处理形式系统。

设 $F_1, \dots, F_R \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ 为次数为 d 的齐次形式，且 $\mathcal{B}$ 如定理 1.1。对于 $P > 0$ 和 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^R$，我们定义

$$S(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\mathbf{x} \in P\mathcal{B}} \exp\left(2\pi i \sum_{\ell=1}^{R} \alpha_\ell F_\ell(\mathbf{x})\right).$$

为简便起见，我们记作 $\Gamma_\ell = \Gamma_{F_\ell}$。令 $\varepsilon > 0$。按照 [1]或[1] [24, 第 13] 页（含 $P = P_1 = \cdots = P_n$ 且不含光滑权重）中的论证，我们对任意$0 < \eta < 1$，得到：

$$|S(\boldsymbol{\alpha})|^{2^{d-1}} \ll P^{n(2^{d-1}-d+1)+\varepsilon} P^{(1-\eta)(d-1)n} \# N^{(d-1)}(P^\eta; \boldsymbol{\alpha}), \tag{2.3}$$

[1]论证的这部分主要参见 [12]中的 [1] 。

其中

$$N^{(d-1)}(P^\eta;\boldsymbol{\alpha}) \;=\; \{(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{d-1})\in([-P^\eta,P^\eta]\cap\mathbb{Z})^{n(d-1)}:\\ \|\sum_{\ell=1}^{R}\alpha_\ell\Gamma_\ell(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{d-1},\mathbf{e}_i)\|<P^{(\eta-1)(d-1)-1}\ (1\le i\le n)\}$$

且隐常数与 P、 η 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 无关。这里， $\|\cdot\|$ 表示到最近整数的距离。记

$$\sigma=\max_{\mathbf{c}\in\mathbb{Z}^R\setminus\{\mathbf{0}\}}\mathcal{H}_{\mathbf{c}.\mathbf{F}}.$$

引理 2.2.设 $P>0$、 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^R$ 和 $\eta\in$ 属于 (0,1)。则以下情形之一成立。

(i) 对任意 $\varepsilon>0$，我们有

$$|S(\boldsymbol{\alpha})|\ll P^{n-\frac{(n-\sigma)\eta}{2^{d-1}}+\varepsilon},$$

其中隐常数仅依赖于 d、 n 和 ε。

(ii)存在 $q,a_1,\dots,a_R\in\mathbb{Z}$ 使得最大公约数$(q,\mathrm{a})=1$,

$$1\le q\ll P^{R(d-1)\eta}\quad\text{and}\quad |q\alpha_\ell-a_\ell|\ll P^{-d+R(d-1)\eta}\ (1\le\ell\le R),$$

其中，隐常数仅取决于 d、 n、 R 以及 F 的系数。

证明。对于每个 $1\le j\le n$，我们令 M_j 为其列向量为_久久爱

$$\begin{bmatrix}\Gamma_1(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{d-1},\mathbf{e}_j)\\ \vdots\\ \Gamma_R(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{d-1},\mathbf{e}_j)\end{bmatrix}$$

对于 $N^{(d-1)}(P^\eta;\boldsymbol{\alpha})$ 中的每个 $(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{d-1})$。然后我们将这些矩阵放在一起并定义

$$M=[M_1\cdots M_n].$$

我们根据 M 的秩分两种情况；秩为 $M=R$ 的情况对应引理陈述中的选项 (ii)，秩为 $M<R$ 的情况对应 (i)。

首先，我们假设秩为 $M=R$。那么存在一个 $R\times R$ 子矩阵

$$M_0=[\Gamma_\ell(\mathbf{x}_1^{(s)},\dots,\mathbf{x}_{d-1}^{(s)},\mathbf{e}_{j_s})]_{1\le\ell,s\le R}$$

其秩为 R。根据 $N^{(d-1)}(P^\eta;\boldsymbol{\alpha})$ 的定义，存在 $m_s\in\mathbb{Z}$ 和 $|\gamma_s|<P^{-d+(d-1)\eta}$ 满足

$$\sum_{\ell=1}^{R}\alpha_\ell\Gamma_\ell(\mathbf{x}_1^{(s)},\dots,\mathbf{x}_{d-1}^{(s)},\mathbf{e}_{j_s})=m_s+\gamma_s,$$

对于每个 $1\le s\le R$。令 $\mathfrak{C}=[\mathfrak{c}_{\ell,s}]_{1\le\ell,s\le R}$ 为 M_0 的余子式矩阵，即它是一个元素位于 $\mathbb{Z}$ 中的矩阵，满足

$$M_0\mathfrak{C}^T=(\det M_0)I_{R\times R}=\mathfrak{C}M_0^T,$$

其中， $I_{R\times R}$ 是 $R\times R$ 单位矩阵。因此，我们得到

$$\begin{bmatrix}(\det M_0)\alpha_1-\sum_{s=1}^R\mathfrak{c}_{1,s}m_s\\ \vdots\\ (\det M_0)\alpha_R-\sum_{s=1}^R\mathfrak{c}_{R,s}m_s\end{bmatrix}=\mathfrak{C}M_0^T\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_R\end{bmatrix}-\mathfrak{C}\begin{bmatrix}m_1\\ \vdots\\ m_R\end{bmatrix}=\mathfrak{C}\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_R\end{bmatrix},$$

由此可得

$$\left|(\det M_0)\alpha_\ell - \sum_{s=1}^{R} \mathfrak{c}_{\ell,s} m_s\right| \ll P^{\eta(R-1)(d-1)} P^{-d+(d-1)\eta} = P^{-d+R(d-1)\eta} \ (1 \le \ell \le R).$$

然后令

$$q = \frac{|\det M_0|}{\mathfrak{d}} \quad \text{and} \quad a_\ell = \frac{\operatorname{sign}(\det M_0)}{\mathfrak{d}} \sum_{s=1}^{R} \mathfrak{c}_{\ell,s} m_s \ (1 \le \ell \le R),$$

其中

$$\mathfrak{d} = \gcd\left(\det M_0, \sum_{s=1}^{R} \mathfrak{c}_{1,s} m_s, \dots, \sum_{s=1}^{R} \mathfrak{c}_{R,s} m_s\right),$$

我们注意到以下事实，从而证明引理的备选项 (ii)

$$1 \le |\det M_0| \ll P^{\eta R(d-1)}.$$

接下来我们假设秩为 $M < R$。那么存在 $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^R \setminus \{\mathbf{0}\}$，使得

$$0 = \sum_{\ell=1}^{R} c_\ell \Gamma_\ell(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d-1}, \mathbf{e}_j) \ (1 \le j \le n),$$

对于所有 $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d-1})$ 属于 $N^{(d-1)}(P^\eta; \boldsymbol{\alpha})$。由于

$$\sum_{\ell=1}^{R} c_\ell \Gamma_\ell(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d-1}, \mathbf{e}_j) = \Gamma_{\mathbf{c}.\mathbf{F}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d-1}, \mathbf{e}_j) \ (1 \le j \le n),$$

于是可得

$$\begin{aligned} & \#N^{(d-1)}(P^\eta; \boldsymbol{\alpha}) \\ \le \ & \#\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d-1} \in ([-P^\eta, P^\eta] \cap \mathbb{Z})^n : \Gamma_{\mathbf{c}.\mathbf{F}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d-1}, \mathbf{e}_j) = 0 \ (1 \le j \le n)\} \\ \ll \ & P^{\eta((d-2)n + \mathcal{H}_{\mathbf{c}.\mathbf{F}})}, \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由引理 2.1应用于 $G = \mathbf{c}.\mathbf{F}$ 和 $B = P^\eta$ 得出。因此，由 (2.3) 可得

$$|S(\boldsymbol{\alpha})|^{2^{d-1}} \ll P^{n(2^{d-1}-d+1)+\varepsilon} P^{(1-\eta)(d-1)n} P^{\eta((d-2)n+\sigma)} = P^{n2^{d-1}+\varepsilon} P^{-\eta(n-\sigma)}, \tag{2.4}$$

而这个估计给出了引理陈述中的备选结论 (i)。 □

此引理表明， K 在 [1,引理 4。3], 其定义为

$$K = \frac{n - \dim V_{\mathbf{F}}^*}{2^{d-1}}$$

可替换为

$$K = \frac{n - \sigma}{2^{d-1}}.$$

最后，按照 [1] 中结合引理 2.2 的证明，我们将 $\dim V^*_{\mathbf{F}}$替换为 σ，从而得到定理 1.1，即定理 1.2。

3. Proof of Lemma 2.1

对于每个 $0 \le r \le n$，我们定义

$$Z(r) = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d-2} \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} : \operatorname{rank}\, [\Gamma_G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d-2}, \mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b)]_{1\le a,b\le n} = r\}$$

and

$$Z_+(r) = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d-2} \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} : \operatorname{rank}\, [\Gamma_G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d-2}, \mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b)]_{1\le a,b\le n} \le r\}.$$

我们注意到， $Z_+(r)$是由齐次形式定义的仿射簇。为了理解 $Z_+(r)$ 的维数，我们利用以下引理。

引理 **3.1**。令 $d \ge 2$。对于任意 $1 \le a$、$b \le n$，我们有

$$\Gamma_G(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}, \mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = \frac{d!}{d(d-1)} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x_a \partial x_b}(\mathbf{x}).$$

证明。我们固定对某个 $1 \le m \le d$ 的一个 $1 \le \ell_1 < \cdots < \ell_m \le n$ 选择。由线性性，只需证明该陈述对于

$$G(x_1, \dots, x_n) = x_{\ell_1}^{c_1} \cdots x_{\ell_m}^{c_m} = \sum_{\mathbf{j}} G_{\mathbf{j}}\, x_{j_1} \cdots x_{j_d},$$

其中 $c_1 + \cdots + c_m = d$ 且

$$G_{\mathbf{j}} = \begin{cases} \frac{c_1! \cdots c_m!}{d!} & \text{if } x_{j_1} \cdots x_{j_d} = x_{\ell_1}^{c_1} \cdots x_{\ell_m}^{c_m}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

首先，我们讨论 $a \ne b$ 的情形。我们假设 a 和 b 都出现在 $\{\ell_1, \dots, \ell_m\}$ 中，否则结论显然成立。令 $\ell_h = a$ 和 $\ell_k = b$。根据 Γ_G 的定义可得

$$\begin{aligned} \Gamma_G(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}, \mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) &= d! \sum_{\mathbf{j}} G_{\mathbf{j}} x_{j_1} \cdots x_{j_{d-2}} \mathbb{I}^{j_{d-1}=a} \mathbb{I}^{j_d=b} \\ &= d! \frac{x_{\ell_1}^{c_1} \cdots x_{\ell_m}^{c_m}}{x_a x_b} \sum_{\mathbf{j}} G_{\mathbf{j}} \mathbb{I}^{j_{d-1}=a} \mathbb{I}^{j_d=b} \\ &= \frac{d!}{c_h c_k} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x_a \partial x_b}(\mathbf{x}) \sum_{\mathbf{j}} G_{\mathbf{j}} \mathbb{I}^{j_{d-1}=a} \mathbb{I}^{j_d=b} \end{aligned}$$

and

$$\sum_{\mathbf{j}} G_{\mathbf{j}} \mathbb{I}^{j_{d-1}=a} \mathbb{I}^{j_d=b} = \frac{c_1! \cdots c_m!}{d!} \cdot \frac{(d-2)! c_h c_k}{c_1! \cdots c_m!} = \frac{c_h c_k}{d(d-1)}.$$

因此，我们得到

$$\Gamma_G(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}, \mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b) = \frac{d!}{d(d-1)} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x_a \partial x_b}(\mathbf{x}).$$

接下来，假设 $a = b$。证明与上述情形类似，但为完整起见，我们仍将其列出。我们采用与上文相同的记号。由于其他情况下结论显然成立，现假设 $c_h > 1$，则

否则是平凡的。于是我们有

$$\begin{aligned}\Gamma_G(\mathbf{x},\dots,\mathbf{x},\mathbf{e}_a,\mathbf{e}_a) &= d!\sum_{\mathbf{j}} G_{\mathbf{j}} x_{j_1}\cdots x_{j_{d-2}}\mathbb{I}^{j_{d-1}=a}\mathbb{I}^{j_d=a}\\ &= d!\frac{x_{\ell_1}^{c_1}\cdots x_{\ell_m}^{c_m}}{x_a^2}\sum_{\mathbf{j}} G_{\mathbf{j}}\mathbb{I}^{j_{d-1}=a}\mathbb{I}^{j_d=a}\\ &= \frac{d!}{c_h(c_h-1)}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x_a^2}(\mathbf{x})\sum_{\mathbf{j}} G_{\mathbf{j}}\mathbb{I}^{j_{d-1}=a}\mathbb{I}^{j_d=a}\end{aligned}$$

and

$$\sum_{\mathbf{j}} G_{\mathbf{j}}\mathbb{I}^{j_{d-1}=a}\mathbb{I}^{j_d=a} = \frac{c_1!\cdots c_m!}{d!}\cdot\frac{(d-2)!c_h(c_h-1)}{c_1!\cdots c_m!} = \frac{c_h(c_h-1)}{d(d-1)}.$$

因此，我们得到

$$\Gamma_G(\mathbf{x},\dots,\mathbf{x},\mathbf{e}_a,\mathbf{e}_a) = \frac{d!}{d(d-1)}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x_a^2}(\mathbf{x}).$$

□

我们需要以下估计，即 [2, (3.1)]。

引理 3.2. 设 $T\subseteq\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{\nu}$ 为一个仿射簇（不一定不可约）。那么

$$\#\{\mathbf{t}\in T\cap\mathbb{Z}^{\nu}:|\mathbf{t}|\le B\}\ll B^{\dim T},$$

其中隐常数仅依赖于 ν and deg T.

Wi有了这两个引理，引理 2.1 的 $d=2$ 情形便很容易得到 :

$$\begin{aligned}&\#\{\mathbf{x}_1\in([-B,B]\cap\mathbb{Z})^n:\Gamma_G(\mathbf{x}_1,\mathbf{e}_b)=0\ (1\le b\le n)\}\\ =\ &\#\{\mathbf{y}\in([-B,B]\cap\mathbb{Z})^n:y_1\Gamma_G(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_b)+\cdots+y_n\Gamma_G(\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_b)=0\ (1\le b\le n)\}\\ =\ &\#\{\mathbf{y}\in([-B,B]\cap\mathbb{Z})^n:\mathbf{y}^T\cdot[\Gamma_G(\mathbf{e}_a,\mathbf{e}_b)]_{1\le a,b\le n}=\mathbf{0}\}\\ =\ &\#\{\mathbf{y}\in([-B,B]\cap\mathbb{Z})^n:H_G^T\cdot\mathbf{y}=\mathbf{0}\}\\ \ll\ &B^{n-\operatorname{rank}H_G}\\ =\ &B^{(d-2)n+\mathcal{H}_G}.\end{aligned}$$

此处的隐常数仅依赖于 n。因此，在本节余下部分，我们假设 $d>2$ 根据引理 3.1可得

$$\begin{aligned}&Z_+(r)\bigcap\bigcap_{2\le k\le d-2}\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{d-2}\in\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n:\mathbf{x}_k=\mathbf{x}_1\}\\ =\ &\{\mathbf{x}_1\in\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n:\operatorname{rank}\,[\Gamma_G(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_1,\mathbf{e}_a,\mathbf{e}_b)]_{1\le a,b\le n}\le r\}\\ =\ &\{\mathbf{x}\in\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n:\operatorname{rank}\,H_G(\mathbf{x})\le r\}.\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\dim\{\mathbf{x}\in\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n:\operatorname{rank}\,H_G(\mathbf{x})\le r\}\ge\dim Z_+(r)+n-(d-2)n,$$

i.e.

$$\begin{aligned}\dim Z_+(r) &\le (d-3)n+\dim\{\mathbf{x}\in\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n:\operatorname{rank}\,H_G(\mathbf{x})\le r\}\\ &\le (d-3)n+r+\mathcal{H}_G,\end{aligned}\tag{3.1}$$

wh其中第二个不等式由(1.2)中给出的 $\mathcal{H}_G$ 的定义得出。

现在我们可以完成引理2.1 的证明。首先，根据 Γ_G 的多重线性性以及引理 3.2，我们注意到

$$
\begin{aligned}
(3.2)\qquad & \#\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{d-1}\in([-B,B]\cap\mathbb{Z})^n : \Gamma_G(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{d-1},\mathbf{e}_i)=0\ (1\le i\le n)\}\\
&= \sum_{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{d-2}\in([-B,B]\cap\mathbb{Z})^n}\\
&\quad \#\{\mathbf{y}\in([-B,B]\cap\mathbb{Z})^n : \mathbf{y}^T\cdot[\Gamma_G(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{d-2},\mathbf{e}_a,\mathbf{e}_b)]_{1\le a,b\le n}=\mathbf{0}\}\\
&= \sum_{0\le r\le n}\ \sum_{(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{d-2})\in Z(r)\cap([-B,B]\cap\mathbb{Z})^{(d-2)n}}\\
&\quad \#\{\mathbf{y}\in([-B,B]\cap\mathbb{Z})^n : \mathbf{y}^T\cdot[\Gamma_G(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{d-2},\mathbf{e}_a,\mathbf{e}_b)]_{1\le a,b\le n}=\mathbf{0}\}\\
&\ll \sum_{0\le r\le n}\ \sum_{(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{d-2})\in Z(r)\cap([-B,B]\cap\mathbb{Z})^{(d-2)n}} B^{n-r},
\end{aligned}
$$

其中隐常数仅依赖于 n。接下来，由引理 3.2 和 (3.1)，我们有

$$\#Z(r)\cap([-B,B]\cap\mathbb{Z})^{(d-2)n}\le \#Z_+(r)\cap([-B,B]\cap\mathbb{Z})^{(d-2)n}\ll B^{\dim Z_+(r)}\le B^{(d-3)n+r+\mathcal{H}_G},$$

其中隐常数仅依赖于 d、n 和 r。将此估计代入 (3.2)，我们得到

$$
\begin{aligned}
& \#\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{d-1}\in([-B,B]\cap\mathbb{Z})^n : \Gamma_G(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{d-1},\mathbf{e}_i)=0\ (1\le i\le n)\}\\
\ll\ & \sum_{0\le r\le n} B^{(d-3)n+r+\mathcal{H}_G}B^{n-r}\\
=\ & nB^{(d-2)n+\mathcal{H}_G},
\end{aligned}
$$

正如所期望的
那样。

4. Examples

例 4.1. 设 $n=2m+k$, $d>1$ 和

$$F(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{m}a_jx_{2j-1}^dx_{2j}^d+\sum_{i=1}^{k}b_ix_{2m+i}^{2d},$$

其中 $a_j, b_i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$。则

$$V_F^*=\bigcap_{1\le j\le m}\{\mathbf{x}\in\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n : x_{2j-1}x_{2j}=0\}\bigcap\bigcap_{1\le i\le k}\{\mathbf{x}\in\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n : x_{2m+i}=0\}$$

and

$$\dim V_F^*=m.$$

另一方面， H_F 是一个分块对角矩阵

$$H_F(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} a_1dB_1 & \cdots & [0] & [0]\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ [0] & \cdots & a_mdB_m & [0]\\ [0] & \cdots & [0] & 2d(2d-1)D\end{bmatrix},$$

其中

$$B_j = \begin{bmatrix} (d-1)x_{2j-1}^{d-2}x_{2j}^{d} & dx_{2j-1}^{d-1}x_{2j}^{d-1} \\ dx_{2j-1}^{d-1}x_{2j}^{d-1} & (d-1)x_{2j-1}^{d}x_{2j}^{d-2} \end{bmatrix} \text{ and } D = \begin{bmatrix} b_1x_{2m+1}^{2d-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_kx_{2m+k}^{2d-2} \end{bmatrix}.$$

显然,

$$\dim\{\mathbf{x} \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n : \text{rank } H_F(\mathbf{x}) \leq n\} \leq n$$

and

$$\dim\{\mathbf{x} \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n : \text{rank } H_F(\mathbf{x}) \leq n-1\} \leq n-1.$$

对于每个 $0 \leq r \leq n-2$，我们有

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n : \text{rank } H_F(\mathbf{x}) \leq r\} \subseteq \bigcup_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-r} \leq n} \{\mathbf{x} \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n : x_{i_1} = \cdots = x_{i_{n-r}} = 0\}$$

and

$$\dim\{\mathbf{x} \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n : \text{rank } H_F(\mathbf{x}) \leq r\} \leq r.$$

因此，在这种情况下，我们得到 $\mathcal{H}_F = 0$ 。

例 4.2. 设 $n = 2m$、 $d > 3$ 以及

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} a_j \left(x_{2j-1}x_{2j}^{d-1} - \frac{1}{d}x_{2j-1}^{d} \right),$$

其中 $a_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。则

$$V_F^* = \bigcap_{1 \leq j \leq m} \left(\{\mathbf{x} \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n : x_{2j}^{d-1} - x_{2j-1}^{d-1} = 0\} \bigcup \{\mathbf{x} \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n : x_{2j-1}x_{2j} = 0\} \right)$$

and

$$\dim V_F^* = m.$$

另一方面， H_F 是一个分块对角矩阵

$$H_F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_1(d-1)B_1 & \cdots & [0] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & \cdots & a_m(d-1)B_m \end{bmatrix},$$

其中

$$B_j = \begin{bmatrix} -x_{2j-1}^{d-2} & x_{2j}^{d-2} \\ x_{2j}^{d-2} & (d-2)x_{2j-1}x_{2j}^{d-3} \end{bmatrix}.$$

由于

$$\text{rank } B_j = \begin{cases} 1 & \textit{if precisely one of } (d-2)x_{2j-1}^{d-1} + x_{2j}^{d-1} = 0 \textit{ or } x_{2j} = 0 \textit{ holds,} \\ 0 & \textit{if } x_{2j-1} = x_{2j} = 0, \end{cases}$$

可以验证

$$\dim\{\mathbf{x} \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n : \text{rank } H_F(\mathbf{x}) \leq r\} \leq r,$$

对于每个 $0 \leq r \leq n$。因此，在这种情况下我们也得到 $\mathcal{H}_F = 0$ 。

References

[1] B.J. Birch, 《多变量中的形式》。《皇家学会学报》A辑265，1961/1962，245–263。[2] T.D.Browning, 《射影簇的定量算术》。《数学进展》第277卷，Birkh¨auser出版社，巴塞尔，2009年。[3] T.D.Browning, 《圆法在有理点问题中的应用综述》。《算术与几何》，伦敦数学学会讲义丛书，第420卷，剑桥大学出版社，剑桥，2015年，第89–113页。[4] T.D.Browning, 《三次形式与圆法》。《数学进展》第343卷，Birkh¨auser，2021年。[5] T.D.Browning和D.R. Heath-Brown, 《四次超曲面上的有理点》。《纯粹与应用数学杂志》629（2009），37–88。[6] T.D. Browning和D.R.Heath-Brown, 《多变量及不同次数的形式》。《欧洲数学学会杂志》19（2017），第2期，第357–394页。[7] T.D. Browning和S.M.Prendiville, 《关于多变量形式的Birch定理的改进》。《纯粹与应用数学杂志》731（2017），203–234。[8] T.D.Browning和W. Sawin, 《圆法的几何版本》。《数学年刊》（第2辑）191（2020），第3期，893–948。[9] T.D.Browning和P.Vishe, 《 $\mathbb{F}_q$上的三次超曲面t》。《几何与泛函分析》25（2015），671–732。[10] T.D.Browning和P. Vishe, 《低次数光滑超曲面上的有理曲线》。《代数与数论》11（2017），1657–1675。[11] B. Cook和 ´A. Magyar, 《素数中的丢番图方程》。《数学发明》198（2014），701–737。[12] H.Davenport, 《32个变量中的三次形式》。《哲学学报》A辑251（1959），193–232。[13] H.Davenport, 《丢番图方程与丢番图不等式的解析方法》第二版。剑桥大学出版社，剑桥，2005年。[14] R.Dietmann, 《Weyl不等式与形式系统》。《季度数学杂志》66(1)（2015），97–110。[15]M.A.Hanselmann, 《四次超曲面上的有理点》博士论文，路德维希-马克西米利安-慕尼黑大学，¨Universit¨at M[16] unchen，2012年。[17] D.R.Heath-Brown, 《14个变量中的三次形式》。《数学发明》170（2007），199–230。[18] S.A. Lee, 《圆法在函数域中的应用及相关主题》博士论文，布里斯托尔大学，2013年。[19] J.Liu和L. Zhao, 《关于素数变量中的形式》。。arXiv:2105.12956。[20] S.L. Rydin Myerson, 《多变量中的二次形式与形式系统》。《数学发明》213（2018），205–235。[21] S.L.RydinMyerson, 《多变量中的三次形式系统》。《纯粹与应用数学杂志》2019（757），309–328。[22] S.L. RydinMyerson, 《多变量中的形式系统》。。arXiv:1709.08917。[23] O.Marmon和P.Vishe, 《关于四次超曲面的Hasse原理》。《杜克数学杂志》168(14)（2019），2727–2799。[24] D.Schindler, 《形式系统的Weyl不等式变体及其应用》。载于：《数论进展》，Fields研究所通讯，第77卷，第207–218页。Fields数学科学研究所，多伦多，安大略省（2015）。[25] D.Schindler和E. Sofos, 《完全交的Sarnak饱和问题》。《Mathematika》65（2019），第1期，1–56。[26] D. Schindler和S.Yamagishi, 《具有某些曲率条件的紧流形附近/上的有理点密度》。《数学进展》403（2022），论文编号108358，共36页。[27] W.M. Schmidt, 《齐次簇上整点的密度》。《数学学报》154（1985），第3–4期，243–296。[28] S.Yamagishi, 《素数中的丢番图方程：仿射超曲面上素数点的密度》。《杜克数学杂志》171(4)（2022），831–884。S.Yamagishi, 《素数中的丢番图方程：仿射超曲面上素数点的密度II》。。arXiv:2111.06122。

IST Austria, Am Campus 1, 3400 Klosterneuburg, Austria
电子邮件地址：shuntaro.yamagishi@ist.ac.at