arXiv:2304.02622v2 [math.NT] 8 May 2023

THE EXPLICIT LOCAL LANGLANDS CORRESPONDENCE FOR GSp_4, Sp_4 AND STABILITY

with an application to modularity lifting

KENTA SUZUKI AND YUJIE XU

Dedicated to Professor George Lusztig, with admiration.

Abstract. 我们给出 GSp_4 和 Sp_4 显式局部朗兰兹对应的纯局部证明。此外，我们根据 L-参数包的稳定性及其他性质，给出其唯一刻画。最后，在附录中，我们将显式局部朗兰兹对应应用于模提升。

Contents

1.引言2. 预备知识 3. 群侧 4.伽罗瓦侧 5. 混合参数包 6. 1
稳定性 L-参数包7.显式 L-参数8.主定理 附录 A. 3
Taylor-Wiles 方法的应用 参考文献 7
17
25
28
33
36
40
41

1. Introduction

Let F be a non-archimedean local field and $\mathbf{G}$ a connected reductive algebraic group over F. Let $G^\vee$ be the group of $\mathbb{C}$-points of the reductive group whose root datum is the coroot datum of $\mathbf{G}$. The Local Langlands Conjecture predicts a surjective map[1]

$$\left\{\begin{array}{c}\text{irred. smooth}\\ \text{repres. } \pi \text{ of } \mathbf{G}(F)\end{array}\right\}/\text{iso.} \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}L\text{-parameters}\\ \text{i.e. cont. homomorphisms}\\ \varphi_\pi\colon W_F\times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\to G^\vee\rtimes W_F\end{array}\right\}/G^\vee\text{-conj.},$$

其中， W_F 是 F的魏尔群。该映射的纤维称为 L-参数包，预计是有限的。为了在群侧和伽罗瓦侧之间获得双射，上述猜想后来被增强 （按照德利涅、沃根、卢斯蒂格等人的方式）。在伽罗瓦侧，人们考虑增强L-参数。

Many cases of the Local Langlands Conjecture have been established, most notably:

- for $\mathrm{GL}_n(F)$: [HT01, Hen00, Sch13];
- 对于 $\mathrm{SL}_n(F)$: [对于 HS12] 对于 $\mathrm{char}(F)=0$ 和 [ABPS16b] 对于 $\mathrm{char}(F)>0$（另见 [GK81，GK82]）；

[1]为避免超出页边距，我们使用缩写“irred.”表示“不可约”，“repres.”表示“表示”，“iso.”表示“同构”，“cont.”表示“连续”，“conj.”表示“共轭”。为简单起见，我们在引言中仅陈述拟分裂 p-adic 群的猜想，这对我们当前的论文已足够。

- 适用于 F 零特征的准分裂经典群： [Art13, Moe11] 等。
- exceptional group G_2: [AX22a]

对于经典群，文献中的主要方法要么是：（1）通过扭 endoscopy，借助一般线性群的表示来分类这些群的表示，并比较一般线性群一侧的稳定化扭曲迹公式与经典群一侧的稳定化（扭曲）迹公式；要么是（2）使用 theta 对应。

在 [AX22b], 第二作者采取了一种完全不同的方法来构造显式局部朗兰兹对应，针对 p-adic约化群，通过约化到真 Levi 子群的超尖表示的局部朗兰兹对应。该策略随后应用于 [AX22a] 以构造 p-adic G_2的显式局部朗兰兹对应，这是文献中已知的例外群局部朗兰兹对应的第一个案例。在 [SX23], 作者们唯一地刻画了在 [AX22a] 中构造的局部朗兰兹对应，使用 L-参数包的原子稳定性的扩展，由DeBacker、Kaletha等人所阐述（例如见 [Kal22, Conjecture 2.2]），这是 [DR09] 中稳定性的推广。为此，我们基于[HC99, DS00, BM97]中的方法计算某些局部特征标展开的系数。

本文将运用这一由 [AX22a、SX23]开创的一般策略，构造辛群 GSp_4 和 Sp_4 在任意剩余特征为 $\neq 2$的非阿基米德局部域上的显式局部朗兰兹对应，并给出显式的 L参数包，以及群侧与伽罗瓦侧之间的显式匹配。

更确切地说，我们结合运用朗兰兹-沙希迪方法、（扩展仿射）Hecke 代数技巧、Kazhdan-Lusztig 理论和广义 Springer 对应——尤其是关于尖点支撑的 AMS 猜想 [AMS18，猜想 7。8]。对于中间系列，即尖点支撑“介于”环面与 G 自身之间的 Bernstein 系列，我们运用此前在 [AX22b]中得到的关于 Bernstein 系列的 Hecke 代数同构和局部朗兰兹对应的结果。对于主系列（即尖点支撑位于环面上的 Bernstein 系列），我们在先前工作的基础上加以改进，并运用 [Roc98、Ree02、ABPS16a、Ram03] 来匹配群侧与伽罗瓦侧。

对于超尖点表示，我们明确了 [Kal19、Kal21] 关于非奇异超尖点表示及其 L-参数包的理论。对于奇异[2] 超尖点表示，它们在*loc.cit.* 中未被涵盖，我们使用 [AMS18，猜想7。8] （见性质 8.1.19）将它们展示在与非超尖点表示的混合 L-参数包中。这些混合 L-参数包与 L-参数包的超尖点 [Kal19、Kal21]截然不同。

此外，我们的局部朗兰兹对应满足若干预期性质，包括如下预期：$\mathrm{Irr}(S_\varphi)$参数化 L-参数包 $\Pi_\varphi(G)$的内部结构，其中 S_φ 是 L-参数 φ（的像）的中心化子的分支群。此外，我们还明确计算了某些非超尖点表示的哈里希-钱德拉特征标的局部特征标展开的系数（见 §6），这使我们能够利用 L-参数包的稳定性给出我们的局部朗兰兹对应的唯一刻画。

最后，明确的局部朗兰兹对应（例如，明确的 Kazhdan–Lusztig 三元组）在数论中有重要应用，例如 Taylor–Wiles 方法和模性提升定理。在附录 A中，我们遵循 [BCGP21、Tho22、Whi22]，记录了这样一个应用。

1.1. 主要结果. 我们现在陈述我们的主要结果。设不可约表示$\mathfrak{s}(G)$为附着于惯性类 $\mathfrak{s}=[L,\sigma]$ 的Bernstein系列（更多细节见 [AX22a, (3.3.2)] ）。设 $\Phi_e(G)$表示 G的增强 L-参数的$G^\vee$-共轭类的集合。设 $\Phi_e^{\mathfrak{s}^\vee}(G)\subset\Phi_e(G)$ 为伽罗瓦侧的Bernstein系列，其尖点支撑位于 $\mathfrak{s}^\vee=[L^\vee,(\varphi_\sigma,\rho_\sigma)]$, 即$L$ 的局部朗兰兹对应下 $\mathfrak{s}$ 的像（更多细节见 [AX22a, §2.4] ）。对于任意 $\mathfrak{s}=[L,\sigma]_G\in\mathfrak{B}(G)$， L 的局部朗兰兹对应由

[2]which we define to be simply the ones that are *not non-singular in the sense of* [Kal21]

$\sigma \mapsto (\varphi_\sigma, \rho_\sigma)$ is expected to induce a bijection (see [AMS18, Conjecture 2] and Conjecture 8.1.23):

$$\mathrm{Irr}^{\mathfrak{s}}(G) \xrightarrow{\sim} \Phi_{\mathrm{e}}^{\mathfrak{s}^\vee}(G). \tag{1.1.1}$$

对于群 GSp_4 和 Sp_4，通过 [AX22b，主定理]，我们对每个中间系列的 Bernstein 系列不可约表示存在这样的双射（1.1.1），即$^{\mathfrak{s}}(G)$的中间系列。另一方面，与（1.1.1）类似的双射适用于主系列 Bernstein 块，这归功于 [Roc98、Ree02、ABPS16a、AMS18]。

Let $G = \mathrm{GSp}_4(F)$ or $\mathrm{Sp}_4(F)$, and $p \neq 2$. Combined with the detailed analysis in all of §3 through §6, we explicitly construct the Local Langlands Correspondence

$$\begin{aligned} \mathrm{LLC}\colon \mathrm{Irr}(G) &\xrightarrow{\text{1-1}} \Phi_{\mathrm{e}}(G) \\ \pi &\mapsto (\varphi_\pi, \rho_\pi), \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

and obtain the following result (see Theorem 8.2.8).

定理1.1.3。显式局部朗兰兹对应 (1.1.2) 验证了 $\Pi_{\varphi_\pi}(G) \xrightarrow{\sim}$不可约表示$(S_{\varphi_\pi})$对任意 $\pi \in$不可约表示(G)，并且对任意 (1.1.1) 满足 $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$，其中 $\mathfrak{s}^\vee = [L^\vee, (\varphi_\sigma, \rho_\sigma)]_{G^\vee}$，以及一组性质（见 §8.1），这些性质唯一刻画了我们的对应。

In other words,

(1) 对每个明确描述的 $\pi \in$ 不可约表示(G)，我们附加一个明确的 L-参数 φ_π，并明确确定其增强 ρ_π；(2) 对每个 $\varphi \in \Phi(G)$，我们描述其 L-参数包 $\Pi_\varphi(G)$的（形状），并用 $\rho \in$不可约表示(S_φ)给出内部参数化；(3)此外，对于非超尖点表示，我们具体说明它所出现于其中的精确抛物诱导。

致谢。Y.X. 得到了 NSF 项目 DMS 2202677 的资助。K.S. 得到了 MIT-UROP 的部分资助。作者感谢 Jack Thorne 提请他们关注显式局部朗兰兹对应在模性提升中的应用，并协助查找参考文献。作者还感谢 Anne-Marie Aubert、Stephen DeBacker、Dick Gross、Ju-Lee Kim、George Lusztig、Maarten Solleveld、Loren Spice、Jack Thorne 和 Dmitri Whitmore 就本项目相关问题所进行的有益交流。作者感谢 George Lusztig 和 Wei Zhang 一直以来的关注与鼓励。

The authors would like to thank Maarten Solleveld for helpful feedback on a previous version of this paper. The authors would like to thank MIT for providing an intellectually stimulating working environment.

2. Preliminaries

Let F be a nonarchimedean local field. Let $J_2 := \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ and $\beta := \begin{pmatrix} & J_2 \\ -J_2 & \end{pmatrix}$. Consider the following groups

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_4 &:= \{g \in \mathrm{GL}_4(F) : {}^T g \beta g = \beta\} \\ \mathrm{GSp}_4 &:= \{g \in \mathrm{GL}_4(F) : {}^T g \beta g = \mu(g)\beta, \text{ for some } \mu(g) \in F^\times\}. \end{aligned}$$

特别地，有一个正合序列 $1 \to \mathrm{Sp}_4(F) \to \mathrm{GSp}_4(F) \xrightarrow{\mu} F^\times \to 1$. 朗兰兹对偶群为 $\mathrm{GSp}_4^\vee = \mathrm{GSpin}_5(\mathbb{C})$ 和 $\mathrm{Sp}_4^\vee = \mathrm{PGSpin}_5(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SO}_5(\mathbb{C})$。这里 $\mathrm{GSpin}_5 := (\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{Spin}_5)/\mu_2$，其中 μ_2 如 [Asg02，定义 2.3] 中所示对角嵌入。

2.1. 根数据。

以下是 Sp 的根数据：$_4$,GSp_4 [Tad94，Asg02，AS06]，类型为 C_2。我们也将所有内容表示为环面 $T = \{(a_1, a_2, b_2, b_1) : a_1 b_1 = a_2 b_2 = \mu\}$。

- 对于 Sp，格为 $X^*(T) := \mathbb{Z}\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$，根为 $\Delta := \{\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2, \pm 2\epsilon_1, \pm 2\epsilon_2\}$，简单根为 $\{\epsilon_1 - \epsilon_2, 2\epsilon_2\}$。
- 对于 GSp，其格为 $X^*(T) := \mathbb{Z}\{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2\}$，根为 $\Delta := \{\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2\} \cup \{\pm(\epsilon_0 - 2\epsilon_1) \pm(\epsilon_0 - 2\epsilon_2) \pm(\epsilon_0 - \epsilon_1 - \epsilon_2)\}$，简单根为 $\{\epsilon_1 - \epsilon_2, 2\epsilon_2 - \epsilon_0\}$。

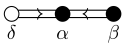
这里，$\epsilon_i(a_1, a_2, b_1, b_2) = a_i$ 对于 $i = 1, 2$ 和 $\epsilon_0(a_1, a_2, b_2, b_1) = \mu$。

根群如下：

$$
\begin{aligned}
U_{\epsilon_i - \epsilon_j} &= \begin{pmatrix} 1 + x\mathbf{1}_{ij} & \\ & 1 - x\mathbf{1}_{n+1-j,n+1-i} \end{pmatrix} \\
U_{\epsilon_i + \epsilon_j} &= \begin{pmatrix} 1 & x(\mathbf{1}_{i,n+1-j} + \mathbf{1}_{j,n+1-i}) \\ & 1 \end{pmatrix} \\
U_{2\epsilon_i} &= \begin{pmatrix} 1 & x\mathbf{1}_{i,n+1-i} \\ & 1 \end{pmatrix} \\
U_{-\epsilon_i - \epsilon_j} &= \begin{pmatrix} 1 & \\ x(\mathbf{1}_{n+1-i,j} + \mathbf{1}_{n+1-j,i}) & 1 \end{pmatrix} \\
U_{-2\epsilon_i} &= \begin{pmatrix} 1 & \\ x\mathbf{1}_{n+1-i,i} & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbf{1}_{ij}$ 是一个矩阵，只有 (i, j) 分量为 1。

令 $\alpha := \epsilon_1 - \epsilon_2$ 和 $\beta := 2\epsilon_2$（对于 GSp 则为 $2\epsilon_2 - \epsilon_0$），以及 $\delta := -2\epsilon_1$（对于 GSp 则为 $\epsilon_0 - 2\epsilon_1$），我们得到：

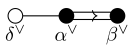


余根由 $\alpha^\vee := {}^2_{(\alpha,-)}\ {}_{(\alpha,\alpha)}$ 给出。对于 Sp_4 和 GSp_4，它们的类型为 B_2：

- $X_*(T) := \mathbb{Z}\{\epsilon_1^\vee, \epsilon_2^\vee\}$，而简单余根为 $\{\alpha^\vee := \epsilon_1^\vee - \epsilon_2^\vee, \beta^\vee := \epsilon_2^\vee\}$。
- $X_*(T) := \mathbb{Z}\{\epsilon_0^\vee, \epsilon_1^\vee, \epsilon_2^\vee\}$，简单余根为 $\{\alpha^\vee := \epsilon_1^\vee - \epsilon_2^\vee, \beta^\vee := \epsilon_2^\vee\}$。

Here, $\epsilon_0^\vee(t_0)\epsilon_1^\vee(t_1)\epsilon_2^\vee(t_2) = (t_1, t_2, t_0 t_2^{-1}, t_0 t_1^{-1})$.

The Dynkin diagram is:



Remark 2.1.1. GSp_4 happens to be self-dual, under the following isomorphism:

$$
\begin{aligned}
X^*(T) = \mathbb{Z}\{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2\} &\to X_*(T) = \mathbb{Z}\{\epsilon_0^\vee, \epsilon_1^\vee, \epsilon_2^\vee\} \\
\epsilon_0 &\mapsto -2\epsilon_0^\vee - \epsilon_1^\vee - \epsilon_2^\vee \\
\epsilon_1 &\mapsto -\epsilon_0^\vee \\
\epsilon_2 &\mapsto -\epsilon_0^\vee - \epsilon_2^\vee,
\end{aligned} \tag{2.1.2}
$$

其中 $\alpha_1 \mapsto \alpha_2^\vee$ 和 $\alpha_2 \mapsto \alpha_1^\vee$，其逆由 $\epsilon_0^\vee \mapsto -\epsilon_1, \epsilon_1^\vee \mapsto \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_0, \epsilon_2^\vee \mapsto \epsilon_1 - \epsilon_2$ 给出。

注 2.1.3。 通过例外同构 $B_2 = C_2$，我们得到 GSp_4 和 Sp_4 中幂零轨道的如下描述（参见 [CM93，定理 5.1.2、5.1。3]）：

	Orbits of B_2	Orbits of C_2	Roots of C_2	Levi subgroup of GSp_4
regular	$[5]$	$[4]$	$e_\alpha + e_\beta$	GSp_4
subregular	$[3, 1^2]$	$[2^2]$	e_β	$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GSp}_0$
minimal	$[2^2, 1]$	$[2, 1^2]$	e_α	$\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GSp}_2$
zero	$[1^5]$	$[1^4]$	0	T

供后文使用（例如 §6），我们记录下表 1，列出了 GSp_4 和 Sp_4 的外尔群共轭类。我们还需要下面这幅建筑中 C_2-公寓的图 $\mathcal{B}(\mathrm{GSp}_4)$。

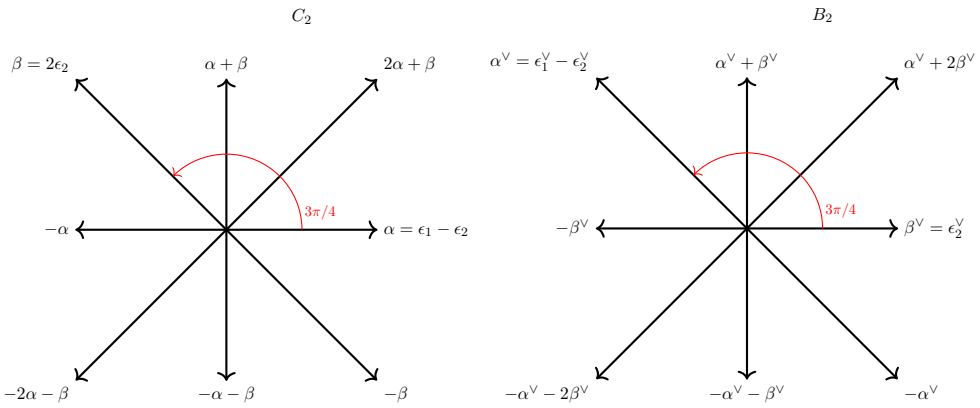


FIGURE 1. Root diagram for $B_2 = C_2$

names	cycle types
e	$(1)(1)$
A_1	$(1)(\bar{1})$
$\widetilde{A}_1$	(2)
$A_1 \times A_1$	$(\bar{1})(\bar{1})$
C_2	$(\bar{2})$

TABLE 1. Weyl group conjugacy classes

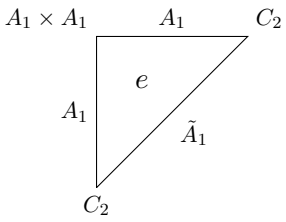


FIGURE 2. The apartment in $\mathcal{B}(\mathrm{GSp}_4)$

2.2. **Levi子群。** GSp_4（分别地，Sp_4）的Levi子群为：

- GSp_4 (resp., Sp_4)
- $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GSp}_0$ (resp., $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{Sp}_0$). Explicitly, it is $\mathrm{GSp}_4 \cap (\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_1)$.
- $\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GSp}_2$ (resp., $\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{Sp}_2$). Explicitly, it is $\mathrm{GSp}_4 \cap (\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2)$.
- $\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GSp}_0$ (resp., $\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{Sp}_0$), the maximal torus.

给定表示 π GL_2 的特征 χ_1， χ_2， χ_3，令 $\pi \rtimes \chi_1$， $\chi_1 \rtimes \pi$，以及 $\chi_1 \times \chi_2 \rtimes \chi_3$分别为从 $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GSp}_0$, $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GSp}_2$, 和 $\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GSp}_0$,诱导的（归一化）抛物诱导，记号采用 [ST93，§1]。

注 2.2.1. 注 2.1.1 中的例外同构 $\mathrm{GSp}_4^\vee \cong \mathrm{GSp}_4$ 给出了以下对偶 Levi子群之间的对应关系：

$$\begin{aligned}
\mathrm{GSp}_4^\vee &\cong \mathrm{GSp}_4 \\
(\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GSp}_0)^\vee &\cong \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GSp}_2 \\
(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GSp}_2)^\vee &\cong \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GSp}_0 \\
(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GSp}_0)^\vee &\cong \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GSp}_0.
\end{aligned}$$

注 2.2.2 ($\mathrm{GSp}_4(F)$ 的 Levi子群的局部朗兰兹对应)。 根据注 2.1.1，极大环面 T的局部朗兰兹对应为：

$$\hom(W_F, T(\mathbb{C})) \cong \mathrm{Irr}(T)$$
$$(\chi_1(w), \chi_2(w), \chi_0\chi_2^{-1}(w), \chi_0\chi_1^{-1}(w)) \mapsto \widehat{\chi_0}^{-1}\widehat{\chi}_1\widehat{\chi}_2 \otimes \widehat{\chi}_1\widehat{\chi}_2^{-1} \otimes \widehat{\chi}_1^{-1}.$$

类似地，Levi 子群 $\mathrm{GL}_2(F) \times \mathrm{GSp}_0(F) \subset \mathrm{GSp}_4(F)$ 的局部朗兰兹对应为：

$$\hom(W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \times \mathrm{GSp}_2(\mathbb{C})) \cong \mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_2(F) \times \mathrm{GSp}_0(F))$$
$$(\rho \otimes \varphi) \mapsto (\widehat{\rho} \otimes \pi_\varphi^\vee) \boxtimes \widehat{\rho}^{-1},$$

其中，π_φ 是 φ 在 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的局部朗兰兹对应下的像。最后，Levi 子群 $\mathrm{GL}_1(F) \times \mathrm{GSp}_2(F) \subset \mathrm{GSp}_4(F)$ 的局部朗兰兹对应为：

$$\hom(W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GSp}_0(\mathbb{C})) \cong \mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_1(F) \times \mathrm{GSp}_2(F))$$
$$(\varphi \otimes \rho) \mapsto (\widehat{\rho}^{-1}\omega_{\pi_\varphi}) \boxtimes \pi_\varphi^\vee,$$

其中，$\omega_{\pi_\varphi} = \det(\varphi)$ 是 π_φ的中心特征。

2.3. **抛物型子群**。 极大抛物型子群的约化商的类型，可通过从扩展 Dynkin 图表中删除一个节点得到。我们固定一组标准的抛物型子群，其根如图 3所示。对于 $\mathrm{GSp}_4(F)$，顶点 β 和 δ 在建筑中的同一轨道上：

- 删除 δ （或 β）得到 Dynkin 图表 C_2，从而得到抛物型子群 $\mathrm{GSp}_4(\mathfrak{o}_F)$，其约化商为 $\mathrm{GSp}_4(k)$。
- 去掉 α 得到 Dynkin 图表 $A_1 \sqcup A_1$，给出群

$$G_\alpha := \mathrm{GSp}_4(F) \cap \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{-1} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \end{pmatrix} \supset G_{\alpha+} = \mathrm{GSp}_4(F) \cap \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & 1+\mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & 1+\mathfrak{p} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p}^2 & \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & 1+\mathfrak{p} \end{pmatrix},$$

具有约化商 $\mathrm{GSp}^{2,2}(k) := \{(g,h) \in \mathrm{GSp}_2 \times \mathrm{GSp}_2 : \mu(g) = \mu(h)\}$。

类似地，对于 $\mathrm{Sp}_4(F)$，我们有：

- 去掉 δ 得到 Dynkin 图表 C_2，给出仿射抛物子群 $\mathrm{Sp}_4(\mathfrak{o}_F)$ 具有约化商 $\mathrm{Sp}_4(k)$。
- 去掉 β 得到 Dynkin 图表 C_2，给出仿射抛物子群

$$\mathrm{Sp}_4(F) \cap \begin{pmatrix} M_2(\mathfrak{o}) & M_2(\mathfrak{p}^{-1}) \\ M_2(\mathfrak{p}) & M_2(\mathfrak{o}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi^{-1}I_2 & \\ & I_2 \end{pmatrix} \mathrm{Sp}_4(\mathfrak{o}_F) \begin{pmatrix} \varpi I_2 & \\ & I_2 \end{pmatrix}$$

具有约化商 $\mathrm{Sp}_4(k)$。这里矩阵 $\mathrm{diag}(\varpi I_2, I_2)$ 在 $\mathrm{GSp}_4(F)$ 中，但不在 $\mathrm{Sp}_4(F)$ 中。

- 去掉 α 后得到 Dynkin 图表 $A_1 \sqcup A_1$，对应的群为

$$G_\alpha := \mathrm{Sp}_4(F) \cap \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{-1} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \end{pmatrix} \supset G_{\alpha+} = \mathrm{Sp}_4(F) \cap \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & 1+\mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & 1+\mathfrak{p} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p}^2 & \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & 1+\mathfrak{p} \end{pmatrix},$$

其约化商为 $\mathrm{Sp}_2(k) \times \mathrm{Sp}_2(k)$。

然而，请注意，上述 $G_\alpha/G_{\alpha+}$ 与 $\mathrm{GSp}^{2,2}(k)$（分别为 $\mathrm{Sp}_2(k) \times \mathrm{Sp}_2(k)$）的同构并非典范的（即取决于对一致化元 ϖ 的选择）。为使这些同构

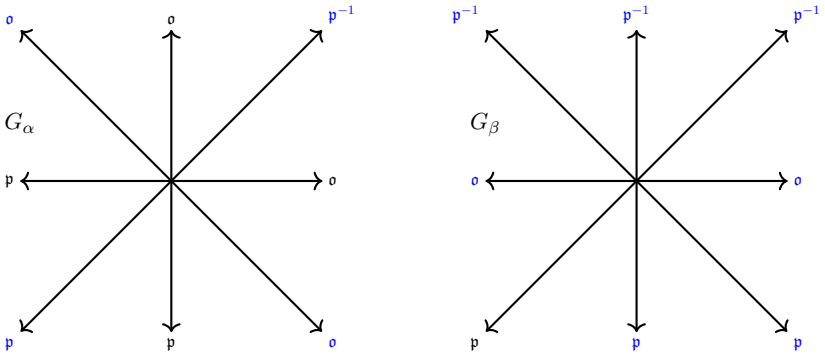


FIGURE 3. 仿射抛物子群 G_α 和 G_β

更具典范性，考虑端oscopic子群 $H := \mathrm{Z}_G(s)$，其中 $s = \mathrm{diag}(1, -1, -1, 1)$，它与 $\mathrm{GSp}_{2,2}(F)$（分别为 $\mathrm{Sp}_{2,2}(F)$）同构：

$$\mathrm{GSp}_{2,2}(F) \xrightarrow{\sim} H$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} a_2 & & & b_2 \\ & a_1 & b_1 & \\ & c_1 & d_1 & \\ c_2 & & & d_2 \end{pmatrix}$$

现在存在 $G_\alpha/G_{\alpha+}$ 与仿射抛物子群的约化商的典范同构

$$H_\alpha := \{(g,h) \in M_2(\mathfrak{o}) \times \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{-1} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \end{pmatrix} : \det(g) = \det(h) \in \mathfrak{o}^\times\}.$$

3. THE GROUP SIDE

3.1. **超尖点表示。**

3.1.1. Sp4,和GSp4的深度零超尖点表示.

3.1.1. 首先，我们回顾一些关于深度零超尖点表示的一般事实。设 π 是 G的一个不可约深度零超尖点表示。那么存在一个顶点 $x \in \mathcal{B}_{\mathrm{red}}(G,F)$以及 $\mathbb{G}_x(\mathbb{F}_q)$的一个不可约尖点表示 τ，使得 π 对G_x,0的限制包含 τ 的膨胀（见 [Mor96, §1-2] 或 [MP96, 命题 6.6]）。G 中G_x,0的正规化子 N_G(G_x,0)是一个模中心紧的全不连通群；根据 [BT84，(5.2.8) 的证明，它与 G 在 G 的约化建筑上的作用下 $[x]$ 的稳定子 $G_{[x]}$ 重合。于是，π由 N_G(G_x,0)的一个表示紧诱导而来，即

$$\pi = \text{c-Ind}_{G_{[x]}}^{G}(\boldsymbol{\tau}). \tag{3.1.2}$$

表示 π 的许多性质已经可以从 $G_{[x]}$的表示 $\boldsymbol{\tau}$ 中看出：

Lemma 3.1.3. [AX22a, Prop 3.2.4] *The formal degree of the depth-zero representation* $\pi = \text{c-Ind}_{G_{x,0}}^{G} \tau$ *is*

$$\mathrm{fdeg}(\pi) = \frac{q^{rk(G)/2} \dim(\tau_{unip})}{|(Z_{\mathbb{G}_{x,0}^\vee}(s))(\mathbb{F}_q)|_{p'}},$$

其中 $|\cdot|_{p'}$ 表示与 p 互素的阶。

以下构造给出了一类特殊的超尖点表示，即 G 中的深度零正则超尖点表示， [Kal19，引理 3.4。12]:

定义3.1.4。对于 $S \subset G$ 一个最大非分歧椭圆极大环面和 θ： $S(F) \to \mathbb{C}^\times$一个零深度的正则特征，令 $\pi_{(S,\theta)} := \mathrm{c\text{-}Ind}_{S\,F}^{G(F)}\,()^{G_{x,\,0}}(\theta \otimes \pm R^{\theta}_{S'})$。

可以推广上述构造，并考虑一类更大的超尖表示，称为“非奇异”超尖表示；它们是完全包含在超尖点 L参数包中的最大的超尖表示类（例如参见 [AX22a]以了解更多阐述）。

3.1.5. 更具体地说， G 的深度零不可约超尖点表示由极大抛物型子群的约化商 $\mathbb{G}_x$ 的不可约尖点表示参数化，这些表示可以提升为 $G_{x,\,0}$，并且（非唯一地）延拓为 $G_{[x]_\circ}$。回顾经典的 Deligne-Lusztig理论 [DL76，§10] 以及 [Lus84a， （8.4.4）], 我们有双射

$$\mathrm{Irr}(\mathbb{G}_x) \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{(s)} \mathcal{E}(\mathbb{G}_x(\mathbb{F}_q), s) \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{(s)} \mathcal{E}(\mathrm{Z}_{\mathbb{G}_x^\vee}(s), 1), \tag{3.1.6}$$

其中，(s) 遍历 $\mathbb{G}_x^\vee$中半单元素的共轭类。此外，这些双射保持尖点性。我们希望了解 $\mathbb{H}^\vee = \mathrm{Z}^{\mathbb{G}_x^\vee}(s)$ 何时具有幺幂尖表示。我们将反复使用以下结果:

Lemma 3.1.7 ([Lus78, Thm 3.22],[Lus77, 8.11])**.**

- $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{F}_q)$ *has a unique unipotent cuspidal representation exactly when* $n = s^2 + s$ *for some integer* $s \geq 1$*, of dimension*
$$\frac{|\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{F}_q)|_{p'} q^{\binom{2n}{2}+\binom{2n-2}{2}+\cdots}}{2^n(q+1)^{2n}(q^2+1)^{2n-1}\cdots(q^{2n}+1)}.$$
- $\mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{F}_q)$ 恰好当 $n = 4s^2$ 对于某个$s \geq 1$时具有唯一的幺幂尖表示。非分裂形式 $\mathrm{SO}^-_{2n}(\mathbb{F}_q)$ 恰好当 $n = (2s+1)^2$ 对于某个 $s \geq 1$时具有唯一的幺幂尖表示。
- GL_n *has no unipotent cuspidal representations for any* $n \geq 1$.

3.1.8. 对我们而言，根据 §2.3，约化商 $\mathbb{G}_x$ 是 $\mathrm{Sp}_4(k)$ 或 $\mathrm{Sp}_2(k) \times \mathrm{Sp}_2(k)$，对应于 $G = \mathrm{Sp}_4(F)$；而 $\mathrm{GSp}_4(k)$ 或 $\mathrm{GSp}_{2,2}(k) := \{(g,h) \in \mathrm{GSp}_2(k) \times \mathrm{GSp}_2(k) : \mu(g) = \mu(h)\}$ 对应于 $G = \mathrm{GSp}_4(F)$。利用 (3.1.6)，我们对这些群的尖点表示进行分类:

引理*3.1.9.*$\mathrm{GSp}_{2,2}(\mathbb{F}_q)$ 的每个尖点表示（定义于*§2.3*）均由下式给出，对于$s = (g,h) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)/\mathbb{F}_q^\times$其中 g 的特征值为 λ_1、 λ_1^q， 而 h 的特征值为 λ_2、 λ_2^q， 其中 λ_1、 $\lambda_2 \in \mathbb{F}_{q^2} \backslash \mathbb{F}_q$:

- *if* $\lambda_1^{q-1} \neq -1$ *or* $\lambda_2^{q-1} \neq -1$*, then*
$$\mathcal{E}(\mathrm{GSp}_{2,2}(\mathbb{F}_q), s) \cong \mathcal{E}(R_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}\mathbb{G}_m \times R_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}\mathbb{G}_m/\mathbb{F}_q^\times, 1) = \{1\}.$$
Denote such a cuspidal representation as $\overline{\rho}_{(\alpha,\beta)}$.
- *if* $\alpha^{q-1} = \beta^{q-1} = -1$*, then*
$$\mathcal{E}(\mathrm{GSp}_{2,2}(\mathbb{F}_q), s) \cong \mathcal{E}(R_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}\mathbb{G}_m \times R_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}\mathbb{G}_m/\mathbb{F}_q^\times \rtimes \mu_2, 1) = \{1, \mathrm{sgn}\}.$$
Denote such cuspidal representations as $\overline{\rho}^+_{(\alpha,\beta)}$ *and* $\overline{\rho}^-_{(\alpha,\beta)}$.

注记 3.1.10。尖点表示 ρ^+ (α,β)被刻画为诱导表示 $\mathrm{Ind}_{\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2}^{\mathrm{GL}_2} (R_T^\alpha \boxtimes R_T^\beta)$与 Gelfand–Graev 表示 $\Gamma^{\mathrm{GL}_2}_{,\mathcal{O}}{}^2$ 的公共不可约成分，其中 $\mathcal{O}$ 是 $(\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix})$ 的轨道。 ρ^+ (α,β) 在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ 上的限制为 $R'_+(\theta_0) \boxtimes R'_+(\theta_0)^- + R'_-(\theta_0) \boxtimes R'_-(\theta_0)$，采用 [Bon11 第 55] 页的记号。

引理 3.1.11。 以下是$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_q)$的尖点表示 :

- *The $q-1$ twists of the unique unipotent cuspidal, i.e., in $\mathcal{E}(\mathrm{GSp}_4, s)$ where $s \in \mathrm{Z}(\mathrm{GSpin}_5)$.*
- *R_T^θ where T is an anisotropic maximal torus and θ is a regular character.*

Lemma 3.1.12. *The following are the cuspidal representations of $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_q)$:*

- *The unique unipotent cuspidal.*
- *For any $\alpha \in \mu_{q+1}\backslash\{\pm 1\}$ then for any $s \in \mathrm{SO}_5(\mathbb{F}_q)$ with eigenvalues $1, -1, -1, \alpha^{\pm 1}$,*

$$\mathcal{E}(\mathrm{Sp}_4, s) \cong \mathcal{E}(\mathrm{O}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{U}_1(\mathbb{F}_q), 1) = \{1, \mathrm{sgn}\}.$$

  There are $(q-1)/2$ such conjugacy classes, giving rise to $q-1$ representations.
- *For $\alpha \neq \beta^{\pm 1} \in \mu_{q+1}\backslash\{\pm 1\}$ and s with eigenvalues $1, \alpha^{\pm 1}, \beta^{\pm 1}$,*

$$\mathcal{E}(\mathrm{Sp}_4, s) \cong \mathcal{E}(T, 1) = \{1\}.$$

  where $T = R_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}\mathbb{G}_m \times R_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}\mathbb{G}_m$ is an isotropic maximal torus.
- *For $\alpha \in \mu_{q^2+1}\backslash\{\pm 1\}$ and s with eigenvalues $1, \alpha, \alpha^q, \alpha^{q^2}, \alpha^{q^3}$,*

$$\mathcal{E}(\mathrm{Sp}_4, s) \cong \mathcal{E}(T, 1) = \{1\},$$

  where $T = \{t \in \mathbb{F}_{q^4} : \mathrm{Nm}_{\mathbb{F}_{q^4}/\mathbb{F}_{q^2}} t = 1\}$ is an anisotropic maximal torus.

As a consequence of Lemma 3.1.9, Lemma 3.1.11, and Lemma 3.1.12, we obtain the following classifications of depth-zero supercuspidals of GSp_4 and Sp_4.

3.1.13. Firstly, we have the following classification of depth-zero supercuspidals of $\mathrm{GSp}_4(F)$.

Proposition 3.1.14. *The depth-zero supercuspidal representations π of $G = \mathrm{GSp}_4(F)$ are:*
(1) $\pi = \pi_{(S,\theta)}$ 对于某个最大非分歧椭圆极大环面 S 及一个零深度正则特征θ 。这些是正则超尖点表示。*(2)* $\pi_\beta(\theta_{10} \otimes \chi) := \text{c-Ind}_{G_\delta Z}^{G}(\theta_{10} \otimes \chi)$，其中 θ_{10} 是由 $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_q)$ 的唯一么正尖点θ_{10}提升而来，且 χ 是 Z 的一个特征，满足 $\chi(Z_{\mathrm{GSp}_4(\mathfrak{o}_F)}) = 1$。这是 F-奇异的。*(3)* $\pi_\alpha(\eta_2; \chi) := \text{c-Ind}_{G_\alpha}^{\mathrm{GSp}_4} Z\,(\omega^{\eta_2}$尖点 $\otimes \chi)$，它是 k_F-奇异的，因而是 F-奇异超尖点表示，其中:

- *η_2 is a ramified quadratic character and $\varpi \in F$ is a uniformizer such that $\eta_2(\varpi) = 1$*
- ω^{η_2}尖点 $:= (\rho^+(\lambda,\lambda))(I_2, \mathrm{diag}(\varpi, 1))$，其中 $\lambda^{q-1} = -1$，且 $\rho^+(\lambda,\lambda)$ 是引理 *3.1.9* 中定义的 $\mathrm{GSp}_{2,2}(\mathbb{F}_q)$ 的表示，该表示通过用 $(I_2, \mathrm{diag}(\varpi, 1))$ 共轭而被视为 $G_\alpha/G_{\alpha+}$ 的表示。

- *χ is an unramified character of* Z.

(4) 诱导表示 $\pi_{(S,\theta\boxtimes\theta\otimes\chi)}$ 其中 $S = \{(x, y) \in E^\times \times E^\times : \mathrm{Nm}^{E/F} x = \mathrm{Nm}_{E/F} y\}$且 θ 是 $E^\times$ 的一个特征，由此得到 S的一个特征 $\theta \boxtimes \theta$，而 χ 是 $F^\times$的一个特征，通过$\mathrm{Nm}^{E/F}$将其视为 S的一个特征。这是一个 F-奇异但 k_F-非奇异表示。

注记 3.1.15. 由注记 3.1.10，该表示 $\tilde{\rho}(\eta_2)$ 被刻画为尖点的共同不可约成分 R_T^θ 与 $\theta^2 = 1$ 以及 Gelfand–Graev 表示对应于幂零轨道 $(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \varpi \\ & 1 \end{pmatrix})$ 的 $H_{\alpha\circ}$

由引理 3.1.3，奇异零深度超尖点的形式度 $\pi_\beta(\theta_{10} \otimes \chi)$ 为

$$\mathrm{fdeg}(\pi_\beta(\theta_{10} \otimes \chi)) = \frac{q^{11/2} q (q-1)^2}{2(q-1)(q^2-1)(q^4-1)} = q^{1/2} \frac{q^6}{2(q+1)(q^4-1)}, \tag{3.1.16}$$

因为 $\dim(\tilde{\theta}_{10}) = \frac{q(q-1)}{2}^2, \dim(\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_q)) = 11$ 且 $|\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_q)| = (q-1)q^4(q^2-1)(q^4-1)$ 见 [Car93, p.75]。注意，[DR09] 给出的体积归一化保证了 GSp_4 的形式度公式中有一个$q^{1/2}$ 因子。

为了计算 $\pi_\alpha(\eta_2;\chi)$ 的形式度：由于 $\dim R_T^\epsilon = (q-1)^2$, 我们有 $\dim(\omega^{\eta_2\text{尖点}}) = 1\,2(q-1)^2$。注意 $|\mathrm{GSp}^{2,2}(\mathbb{F}_q)| = (q-1)q^2(q^2-1)^2$ 且 $\dim \mathrm{GSp}^{2,2}(\mathbb{F}_q) = 7$。因此，我们有

$$\mathrm{fdeg}\,(\pi_\alpha(\eta_2;\chi)) = \frac{\frac{1}{2}(q-1)^2}{(q-1)q^2(q^2-1)^2q^{-7/2}} = q^{1/2}\frac{q}{2(q+1)(q^2-1)}. \tag{3.1.17}$$

$\pi_{(S,\theta\boxtimes\theta\otimes\chi)}$ 的形式度类似：

$$\mathrm{fdeg}\,\left(\pi_{(S,\theta\boxtimes\theta\otimes\chi)}\right) = \frac{(q-1)^2}{(q-1)q^2(q^2-1)^2q^{-7/2}} = q^{1/2}\frac{q}{(q+1)(q^2-1)}. \tag{3.1.18}$$

剩余的形式度情形可以很容易计算，因为它们是非奇异超尖点。

3.1.19. $\mathrm{Sp}_4(F)$ 的情形如下给出。

命题 3.1.20. $G = \mathrm{Sp}_4(F)$ 的深度零超尖点表示由以下给出：

(1) $\pi = \pi_{(S,\theta)}$ 对某个最大非分歧椭圆极大环面 S 及一个零深度正则特征θ 而言。这些是正则超尖点表示。*(2)* 诱导表示 $\textit{c-Ind}_{G_\beta}^G \rho$ 和 $\textit{c-Ind}_{G_\gamma}^G \rho$，其中 ρ 是以下 $\textit{Sp}_4(\mathbb{F}_q)$ 表示之一，经由 $G_\beta, G_\gamma \to \textit{Sp}_4(\mathbb{F}_q)$ 膨胀得到：*(a)* $\textit{Sp}_4(\mathbb{F}_q)$ 的唯一尖点幺幂表示 θ_{10}，它产生 F-奇异表示 $\pi_\beta(\theta_{10}) := \textit{c-Ind}_{G_\beta}^G \textit{inf}\,\theta_{10}$ 和 $\pi_\gamma(\theta_{10}) := \textit{c-Ind}_{G_\gamma}^G \textit{inf}\,\theta_{10}$，分别来自 G_β 和G_γ。这些表示是 k_F-奇异的，因而是 F-奇异超尖点表示。*(b)* 在 *(3.1.6)* 下，对应于 $\mathbb{G}_s = \textit{O}_2(\mathbb{F}_q) \times \textit{U}_2(\mathbb{F}_q)$ 的特征 *1*、*sgn*；这产生 k_F-非奇异表示，因而也是 F-非奇异表示。总计得到 $q-1$个非奇异表示；

(3) 诱导表示 $\pi_\alpha^\pm(\eta_2) := \textit{c-Ind}_{G_\alpha}^{\mathrm{Sp}_4}(R'_\pm(\theta_0) \times R'_\pm(\theta_0)^{\mathrm{diag}(\varpi,1)})$，其中 $R'_\pm(\theta_0)$ 是 [*Bon11, §5.2*] 中定义的 $\textit{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的表示。这是 k_F-奇异的，因此也是 F-奇异的。

(4) 诱导表示 $\pi_{\mathrm{P}_{G_\alpha}^4(R_T^\theta\boxtimes(R_T^\theta)^{\mathrm{diag}(\varpi,1)})} := \text{c-Ind}_{\mathrm{S}}$，其中 θ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的各向异性环面 T 的正则特征。这是 F-奇异的，但 k_F-非奇异。

根据引理3.1.3，奇异超尖点表示π_β（θ_{10}）和π_γ（θ_{10}）的形式度为

$$\mathrm{fdeg}(\pi_\beta(\theta_{10})) = \mathrm{fdeg}(\pi_\gamma(\theta_{10})) = \frac{\frac{1}{2}q(q-1)^2}{q^4(q^2-1)(q^4-1)q^{-10/2}} = \frac{q^2}{2(q+1)^2(q^2+1)} \tag{3.1.21}$$

因为 $\dim(\theta_{10}) = \frac{1}{2}q(q-1)^2$，依据 [Lus77, Theorem 8.2], $\dim |\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_q)| = 10$ 和 $|\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_q)| = q^4(q^2-1)(q^4-1)$。注意，$\pi_\beta(\theta_{10})$ 和 $\pi_\gamma(\theta_{10})$ 属于同一个 L-参数包 $\Pi_{\varphi(\eta)}$，并与两个主系列表示混合，如 §6 L-参数包 (5.2.2) 中所示。

为了计算 $\pi_\alpha^\pm(\eta_2)$的形式度：由于 $\dim(R'_\pm(\theta_0) \times R'_\pm(\theta_0)^{\mathrm{diag}(\varpi,1)}) = \frac{1}{4}(q-1)^2$,$\dim(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2) = 6$ 且 $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)| = q^2(q^2-1)^2$, 我们有

$$\mathrm{fdeg}(\pi_\alpha^\pm(\eta_2)) = \frac{\frac{1}{4}(q-1)^2}{q^2(q^2-1)^2q^{-6/2}} = \frac{q}{4(q+1)^2}. \tag{3.1.22}$$

These representations live in stable mixed L-packets as in Corollary 6.5.6.

类似地，$\pi_\alpha(\theta)$ 的形式度为

$$\mathrm{fdeg}(\pi_\alpha(\theta)) = \frac{(q-1)^2}{q^2(q^2-1)^2q^{-6/2}} = \frac{q}{(q+1)^2}. \tag{3.1.23}$$

该表示属于混合 L参数包（5.2.6）。

3.1.2. Sp4, 和 GSp4 的正深度超尖点表示。

3.1.24. 类型数据。 回顾 Yu 对任意深度超尖表示的类型数据分类 [Yu01]（后来在 [KY17] 中将其推广，以纳入非超尖点类型）。

定义 3.1.25. 一个尖点 G-数据 是一个元组 $\mathcal{D}:=(\vec{G},\ y,\ \vec{r},\ \pi^0,\ \vec{\phi})$，由以下部分组成：

(1) 一个温和分歧的 Levi 序列 $\vec{G}=(G^0\subset G^1\subset\cdots\subset G^d=G)$，由 G 的扭曲 E-Levi 子群组成，且 $\mathbf{Z}_{\mathbf{G}^0}/\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}$ 各向异性；(2) 一个点 y，属于 $\mathcal{B}(G^0,F)\cap\mathcal{A}(T,E)$，其在 G^0 的约化建筑上的投影是一个顶点，其中 T 是 G^0 的极大环面（因而也是 G^i 的极大环面），且该环面在 E 上分裂；(3) 一个实数序列 $\vec{r}=(r_0,r_1,\dots,r_d)$，满足若 $d>0$ 则 $0<r_0<r_1<\cdots<r_{d-1}\le r_d$，且若 $d=0$ 则 $0\le r_0$；(4) 一个 $K^0=G^0_{[y]}$ 的不可约零深度超尖点表示 ρ^0，其在 $G^0_{y,0+}$ 上的限制为平凡表示，并且紧诱导表示 $\mathrm{c\text{-}Ind}_{K^0}^{G^0}\rho^0$ 是不可约超尖点表示；(5) 一个特征序列 $\vec{\phi}=(\phi_0,\phi_1,\dots,\phi_d)$，其中 ϕ_i 是 G^i 的一个特征，在 G^i_{y,r_i+} 上平凡，在 G^i_{y,r_i} 上非平凡（对 $0\le i\le d-1$），且满足

- ϕ_d is trivial on G^d_{y,r_d+} and nontrivial on G^d_{y,r_d} if $r_{d-1}<r_d$, and $\phi_d=1$ if $r_{d-1}=r_d$ (with r_{-1} defined to be 0).
- Moreover, ϕ_i is G^{i+1}-generic of depth r_i relative to y in the sense of [Yu01, §9] for $0\le i\le d-1$.

按照 [Yu01]的意义，任意深度温和超尖点表示的形式度可以按照 [Sch21，定理A]计算。设 $\mathbf{G}$ 是一个半单 F-群，并设 $\mathcal{D}$ 是一个尖点$\mathbf{G}$-数据，其关联的超尖点表示为 π。令 R_i 表示$\mathbf{G}^i$相对于扭曲Levi 序列（$\mathbf{G}^i$）的绝对根系$_{0\le i\le d}$。令$\exp_q(t):=q^t$。

Proposition 3.1.26. *The formal degree of π is given by*

$$\mathrm{fdeg}(\pi)=\frac{\dim\rho}{[G^0_{[y]}:G^0_{y,0+}]}\exp_q\left(\frac{1}{2}\dim G+\frac{1}{2}\dim\mathbb{G}^0_{y,0}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{d-1}r_i(|R_{i+1}|-|R_i|)\right). \tag{3.1.27}$$

注 3.1.28。 形式次数猜想 [HII08], 描述任意不可约光滑表示 π的形式度 $\mathrm{fdeg}(\pi)$ G，其以伴随伽马因子表示，已针对正则超尖表示在 [Sch21，定理 B], 中的非奇异超尖表示、 [Oha21，定理 9 2], 中的幺幂超尖点表示以及[FOS20，定理 3]中得到证明。

3.1.29. Twisted Levi Sequences. We first classify twisted Levi subgroups in Sp_4 and GSp_4.

Proposition 3.1.30 ([Wal01, page 23])**.** *Conjugacy classes of maximal tori in $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ are given by the data of:*

- *finite extensions $F_1^\#,\dots,F_r^\#/F$;*
- *2-dimensional étale $F_i^\#$-algebras F_i; and*

使得 $n=\sum_{i=1}^r[F_i:F]$。然后， $W:=\bigoplus_{i=1}^r F_i$ 是 F 上的 $2n$ 维向量空间，带有辛形式

$$q(\sum_{i=1}^r w_i,\sum_{i=1}^r w_i')=\sum_{i=1}^r\frac{1}{[F_i:F]}\mathrm{tr}_{F_i/F}(c_i w_i\overline{w}_i'), \tag{3.1.31}$$

其中元素 $c_i \in F_i^\times$ 使得 $c_i = -c_i$，其中 $\cdot$ 表示 $F_i/F_{\#i}$ 的唯一非平凡自同构。然后存在一个环面（其共轭类仅依赖于 c_i 模 $N_{F_i/F_i^\#}\mathbb{G}_m$）

$$T^{(1)}_{F_1/F_1^\#,\dots,F_r/F_r^\#} := \prod_{i=1}^r R_{F_i^\#/F} R^{(1)}_{F_i/F_i^\#}\mathbb{G}_m \tag{3.1.32}$$

acting component-wise on W. Similarly, conjugacy classes of $\mathrm{GSp}_{2n}(F)$ are given by the same data, giving rise to the torus

$$T_{F_1/F_1^\#,\dots,F_r/F_r^\#} := \{(x_i) \in \prod_{i=1}^r R_{F_1/F}\mathbb{G}_m : \mathrm{Nm}_{F_1/F_1^\#}(x_1) = \cdots = \mathrm{Nm}_{F_r/F_r^\#}(x_r) \in F^\times\}. \tag{3.1.33}$$

For $\mathrm{Sp}_4(F)$, the anistropic maximal tori are thus of the following form:

- $T^{(1)}_{F_1/F,F_2/F}(c_1,c_2) = R^{(1)}_{F_1/F}\mathbb{G}_m \times R^{(1)}_{F_2/F}\mathbb{G}_m$, with $F_1, F_2/F$ quadratic extensions, where $c_i \in F^\times/N_{F_i/F}(F_1^\times)$;
- $T^{(1)}_{F_1^\#\oplus F_1^\#/F_1^\#} = \{(x,y) \in R_{F_1^\#/F}\mathbb{G}_m \times R_{F_1^\#/F}\mathbb{G}_m : xy = 1\}$ with $F_1^\#/F$ a quadratic extension; and
- $T^{(1)}_{F_1/F_1^\#}(c) = R_{F_1^\#/F}R^{(1)}_{F_1/F_1^\#}\mathbb{G}_m$, with $F_1/F_1^\#/F$ a tower of quadratic extensions, where $c \in (F_1^\#)^\times/N_{F_1/F_1^\#}(F_1^\times)$.

Twisted Levi subgroups are obtained as centralizers of coroots into these tori.

For the torus

$$T^{(1)}_{F_1/F,F_2/F}(c_1,c_2) = R^{(1)}_{F_1/F}\mathbb{G}_m \times R^{(1)}_{F_2/F}\mathbb{G}_m \subset \mathrm{SL}_2(F)\times\mathrm{SL}_2(F) \subset \mathrm{Sp}_4(F),$$

其子环面 $R^{(1)}_{F_1/F}\mathbb{G}_m \times 1$（分别为 $1 \times R^{(1)}_{F_2/F}\mathbb{G}_m$）的中心化子为 $R^{(1)}_{F_1/F}\mathbb{G}_m \times \mathrm{SL}_2(F)$（分别为 $\mathrm{SL}_2(F) \times R^{(1)}_{F_2/F}\mathbb{G}_m$）。

当 $F_1 = F_2$ 环面 $T^{(1)}_{F_1/F,F_2/F}(c_1,c_2)$还具有对角子环面 $\Delta(R^{(1)}_{F_1/F}\mathbb{G}_m)$，其中心化子为 $\mathrm{U}^{F_1/F}(c_1, c_2)$，即埃尔米特空间 $E \oplus E$ 及其埃尔米特形式$h(w_1\oplus w_2, w_1'\oplus w_2') = \frac{1}{2}(c_1 w_1 w_1' + c_2 w_2 w_2')$。

环面 $T^{(1)}_{F_1^\#\oplus F^{\#1}/F_{\#1}}$具有子环面 $\{(x,y) \in F^\times\times F^\times : \ xy = 1\}$，其中心化子为 $\mathrm{GL}_2(F) \times \mathrm{Sp}_0(F)$。

The torus $T^{(1)}_{F_1/F_1^\#}$ has no nontrivial F-rational sub-tori.

Similarly, for $\mathrm{GSp}_4(F)$, the maximal tori which are anisotropic modulo center are thus of the following form:

- $T_{F_1/F,F_2/F}(c_1,c_2) = \{(x,y) \in R_{F_1/F}\mathbb{G}_m \times R_{F_2/F}\mathbb{G}_m : \mathrm{Nm}_{F_1/F}\, x = \mathrm{Nm}_{F_2/F}\, y\}$对于二次域扩张 $F_1, F_2/F$;
- $T_{F^{\#1}\oplus F_{\#1}/F_{\#_1}} = \{(x,y) \in R_{F^{\#}_1/F}\mathbb{G}_m \times R_{F^{\#}_1/F}\mathbb{G}_m : \ xy \in F^\times\}$对于二次扩张$F_{\#_1}/F$; 及
- $T_{F_1/F^{\#1}}(c) := \{x \in R_{F_1/F}\mathbb{G}_m : \mathrm{Nm}_{F_1/F_{\#_1}}\ x \in F^\times\}$，其中 $F_1/F_{\#1}$是二次域扩张。

对于环面 $T_{F_1/F,F_2/F} \subset \{(x,y) \in \mathrm{GL}_2(F)\times\mathrm{GL}_2(F) : \det(x) = \det(y)\} \subset \mathrm{GSp}_4(F)$，其子环面 $\{(x,y) \in R_{F_1/F}\mathbb{G}_m \times F^\times : \mathrm{Nm}_{F_1/F}\, x = y^2\}$的中心化子为

$$\{(x,y) \in R_{F_1/F}\mathbb{G}_m \times \mathrm{GL}_2(F) : \mathrm{Nm}_{F_1/F}\, x = \det(y)\}.$$

到 F_1 的基变换得到 Levi子群 $F_1^\times \times \mathrm{GL}_2(F_1)$。

当 $F_1 = F_2$时，它还有对角子环面 $\Delta(R_{F_1/F}\mathbb{G}_m)$，其中心化子为 $\mathrm{GU}^{F_1/F}(2)$，它到 F_1 的基变换得到Levi子群 $F_1 \times \mathrm{GL}_2(F_1)$。

最后，环面 $T_{F^{\#_1} \oplus F^{\#}{}_1 / F_1^{\#}}$和 $T_{F_1/F_1^{\#}}$没有有趣的子环面。

4 Explicit 型 data for $\mathrm{GSp}_4(F)$ and $\mathrm{Sp}_4(F)$

3.1.3

。对于 $G = \mathrm{Sp}_4$，类型数据为：(正深度1) $\vec{G} = (T(1)^{F_1/F_1^{\#}})$，对应一列二次扩张 $F_1/F\#_1/F$。这里 G^0是阿贝尔的，因此 $\dim \rho^0 = 1$。相应的表示是非奇异的。(正深度2) $\vec{G} = (T(1)_{F_1^{\#} \oplus F^{\#}{}_1 / F\#1})$，对应一个二次扩张 $F\#_1/F$。这里 G^0是阿贝尔的，因此 $\dim \rho^0 = 1$。相应的表示是非奇异的。(正深度3) $\vec{G} = (T^{(1)}_{F_1/F, F_2/F})$，其中 $F_1, F_2/F$是二次扩张。 G^0是阿贝尔的，因此 $\dim \rho^0 = 1$。相应的表示是非奇异的。(正深度4) $\vec{G} = (R^{(1)}_{F_1/F}\mathbb{G}_m \times \mathrm{SL}_2(F) \subset G)$，对应一个二次扩张 F_1/F。正深度表示是非奇异的，因为 $R^{(1)}_{F_1/F}\mathbb{G}_m \times \mathrm{SL}_2(F)$ 没有奇异超尖点表示。(正深度5) $\vec{G} = (\mathrm{U}^{F_1/F}(c_1, c_2) \subset G)$，对应一个二次扩张 F_1/F。这里，特征 ϕ_0是平凡的，因为 G^0 没有有意义的特征。酉群 $G^1 = \mathrm{U}^{F_1/F}(c_1, c_2)$ 是准分裂的，当且仅当判别式 $-c_1c_2 \in Nm_{F_1/F}(F_1^{\times})$。因此， G^1有奇异超尖表示，当且仅当 G^0是准分裂的；这在 $-c_1c_2 \in Nm_{F_1/F}(F_1^{\times})$ 时成立。(正深度6) $\vec{G} = (T(1)^{F_1/F, F_2/F} \subset R^{(1)}_{F_1/F}\mathbb{G}_m \times \mathrm{SL}_2(F) \subset G)$，对应二次扩张 $F_1, F_2/F$。这里 G^0是阿贝尔的，因此 $\dim \rho^0 = 1$。相应的表示是非奇异的。(正深度7) $\vec{G} = (T^{(1)}_{F_1/F, F_1/F} \subset \mathrm{U}^{F_1/F}(c_1, c_2) \subset G)$，对应一个二次扩张 F_1/F。这里 G^0是阿贝尔的，因此 $\dim \rho^0 = 1$。此外， G^1 没有有意义的特征，因此 $\phi_1 = 1$。相应的表示是非奇异的。(正深度8) $\vec{G} = (T(1)^{F\#_1 \oplus F\#_1/F_1^{\#}} \subset \mathrm{GL}_2(F) \times \mathrm{Sp}_0(F) \subset G)$，对应一个二次扩张 $F\#_1/F_1$。这里 G^0是阿贝尔的，因此 $\dim \rho^0 = 1$，且该表示是非奇异的。 $G = \mathrm{GSp}_4$ 的可能情形如下：(正深度1) $\vec{G} = (G^0 = T_{F_1/F_1^{\#}} \subset G)$，对应一列二次扩张 $F_1/F\#_1/F$。由于 G^0是阿贝尔的，$\dim \rho^0 = 1$。相应的表示是非奇异的。(正深度2) $\vec{G} = (G^0 = T_{F^{\#_1} \oplus F\#_1/F_1^{\#}} \subset G)$，对应一个二次扩张 $F\#_1/F$。由于 G^0是阿贝尔的，$\dim \rho^0 = 1$。相应的表示是非奇异的。(正深度3) $\vec{G} = (G^0 = T_{F_1/F, F_2/F} \subset G)$，其中 $F_1, F_2/F$ 是二次扩张。由于 G^0是阿贝尔的，$\dim \rho^0 = 1$。相应的表示是非奇异的。(正深度4) $\vec{G} = (G^0 = \{(x, y) \in R_{F_1/F}\mathbb{G}_m \times \mathrm{GL}_2(F) : \mathrm{Nm}^{F_1/F} x = \det(y)\} \subset G^1 = G)$，对应一个二次扩张 F_1/F。正深度表示是非奇异的，因为 $R_{F_1/F}\mathbb{G}_m \times \mathrm{GL}_2(F)$ 没有奇异超尖点表示。(正深度5) $\vec{G} = (G^0 = GU_{F_1/F}(c_1, c_2) \subset G^1 = G)$，对应一个二次扩张 F_1/F。酉群$G^0 = \mathrm{GU}^{F_1/F}(c_1, c_2)$ 是准分裂的，当且仅当判别式 $-c_1c_2 \in Nm_{F_1/F}(F_1^{\times})$。因此， G^0 有奇异超尖表示，当且仅当 G^0 是准分裂的；这在$-c_1c_2 \in Nm_{F_1/F}(F_1^{\times})$ 时成立。(正深度6) $\vec{G} = (G^0 = T_{F_1/F, F_2/F} \subset G^1 = \{(x, y) \in R_{F_1/F}\mathbb{G}_m \times \mathrm{GL}_2(F) : \mathrm{Nm}^{E/F} x = \det(y)\} \subset G^2 = G)$，对应二次扩张 $F_1, F_2/F$。相应的表示是非奇异的。

(正深度7) $\vec{G}=(G^0=T_{F_1/F,\ F_1/F}\subset GU_{F_1/F}(2)\subset G^1=G)$，对应一个二次扩张 F_1/F。相应的表示是非奇异的。(正深度8) $\vec{G}=(T_{(1)_{F_1^{\#}\oplus F^{\#1}}/F_{\#_1}}\subset \mathrm{GL}_2(F)\times \mathrm{GSp}_0(F)\subset G)$，对应一个二次扩张 $F_{\#_1}/F_1$。这里，G^0是阿贝尔的，因此 $\dim\rho^0=1$，且该表示是非奇异的。

注意，紧致酉群 SU(2) 的平凡表示是一个奇异超尖点表示，它只在 Vogan 参数包层面上可见；它与 $\mathrm{SL}_2(F)$ 的 Steinberg 表示混合。

3.2. **诱导表示的可约性**。

命题 *3.2.1*（[*Sha91*，命题 *6.1*]）。（*a*）设 F 为一个非阿基米德域上的 $G=GSp_4(F)$。设 α 和 β 分别为 G 的短单根和长单根。设 $P=MN$ 为满足 M 由 α 生成且 $M\cong GL_2\times GL_1$ 的极大抛物子群。固定 $M=M(F)$ 的一个不可约酉超尖点表示 $\sigma=\sigma_1\otimes\chi$，其中 σ_1 是 $GL_2(F)$ 的超尖点酉表示，其中心特征为 ω，而 χ 是 F^* 的酉特征。那么 $I(\sigma)$ 总是不可约的。当且仅当 $\omega=1$ 且 $s=\pm\frac{1}{2}$ 时，表示 $I(\sigma_1\nu^s\otimes\chi)$ 可约；其中 ν 表示 $GL_2(F)$ 上的 $\nu=|det()|$。表示 $I(\sigma_1\nu^{1/2}\otimes\chi)$ 有唯一的泛型特殊子表示，以及唯一的不可约、预酉、非缓增、非泛型商。对于 $0<s<1/2$，所有表示 $I(\sigma_1\nu^s\otimes\chi)$ 都属于互补级数，而 $s=1/2$ 是它们的端点。

(b) 令 $G=\mathrm{Sp}_4(F)$，表示 $I(\sigma)$ 可约，当且仅当 $\sigma\cong\widetilde{\sigma}$（因此 $\omega^2=1$）且 $\omega\neq 1$。设 $\omega=1$，从而 $I(\sigma)$ 不可约。则 $I(\sigma\nu^s)$ 可约，当且仅当 $s=\pm 1/2$。表示 $I(\sigma\nu^s)$ 具有唯一的泛型特殊子表示，以及唯一的不可约前酉非缓增非泛型商。对于 $0<s<1/2$，所有表示 $I(\sigma\nu^s)$ 都属于互补级数，且 $s=1/2$ 是它们的端点。

(c) The Plancherel measure $\mu(s\widetilde{\alpha},\sigma)$ is given by the formula

$$\mu(s\widetilde{\alpha})=\begin{cases}\gamma(G/P)^2q^{n(\sigma_1)}\frac{(1-\omega(\varpi)q^{-2s})(1-\omega(\varpi)^{-1}q^{2s})}{(1-\omega(\varpi)q^{-1-2s})(1-\omega(\varpi)^{-1}q^{-1+2s})} & \text{if } \omega \text{ is unramified}\\ \gamma(G/P)^2q^{n(\sigma_1)+n(\omega)} & \text{otherwise}\end{cases}\tag{3.2.2}$$

Here $n(\sigma_1)$ and $n(\omega)$ are the conductors of σ_1 and ω, respectively.

For a character χ of $F^\times$, let $e(\chi):=\log_q|\chi(\varpi)|$ be the unique real number such that $\chi=\nu^{e(\chi)}\chi_0$ where χ_0 is a unitary character.

引理 3.2.3 ([ST93，引理 3.2])。设 χ_1，χ_2，以及 θ 是 $F^\times$的特征。那么 $\chi_1\times\chi_2\rtimes\theta$ 可约当且仅当 $\chi_1=\nu^{\pm1}$，$\chi_2=\nu^{\pm1}$，或 $\chi_1=\nu^{\pm1}\chi_2^{\pm1}$。

We thus have the following theorem:

Theorem 3.2.4. *A representation of $\mathrm{GSp}_4(F)$ parabolically induced from a Levi $L\subset G$ is not irreducible exactly in the following cases:*

(1) When $L=T$, the representation $\chi_1\times\chi_2\rtimes\theta$ is reducible when either:
(a) if $\chi_1\times\chi_2\rtimes\theta$ is regular, i.e., $\chi_1\neq 1,\chi_2\neq 1,\chi_1\neq\chi^{\pm1}$
$_2$: (*i*) $\chi_1=\nu\chi_2$ 其中 $\chi_2^2\neq\nu^{-2},\nu^{-1},1$ 以及 $\chi_2\neq\nu^{-2},\nu$。那么 $\nu\chi_2\times\chi_2\rtimes\theta$ 的长度为2，且在格罗滕迪克环中

$$\nu\chi_2\times\chi_2\rtimes\theta=\nu^{1/2}\chi_2 1_{\mathrm{GL}_2}\rtimes\theta+\nu^{1/2}\chi_2\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\rtimes\theta.$$

朗兰兹分类为

$$\nu^{1/2}\chi_2\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\rtimes\theta=\begin{cases}J(\nu^{1/2}\chi_2\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2};\theta) & e(\chi_2)>-\frac{1}{2}\\ J(\nu^{1/2}\chi_2\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\rtimes\theta) & e(\chi_2)=-\frac{1}{2}\\ J(\nu^{-1/2}\chi_2^{-1}\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2};\nu\chi_2^2\theta) & e(\chi_2)<-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\nu^{1/2}\chi_2 1_{\mathrm{GL}_2}\rtimes\theta=\begin{cases}J(\nu\chi_2,\chi_2;\theta) & e(\chi_2)>0\\ J(\nu\chi_2,\chi_2\rtimes\theta) & e(\chi_2)=0\\ J(\nu\chi_2,\chi_2^{-1};\chi_2\theta) & 0>e(\chi_2)\geq-\frac{1}{2}\\ J(\chi_2^{-1},\nu\chi_2;\nu\chi_2\theta) & -\frac{1}{2}>e(\chi_2)>-1\\ J(\chi_2^{-1};\nu^{-1}\chi_2^{-1}\rtimes\nu\chi_2^2\theta) & e(\chi_2)=-1\\ J(\chi_2^{-1},\nu^{-1}\chi_2^{-1};\nu\chi_2^2\theta) & e(\chi_2)<-1\end{cases}$$

(ii) $\chi_2=\nu$ *and* $\chi_1\neq 1,\nu^{\pm1},\nu^{\pm2}$. *Then* $\chi_1\times\nu\rtimes\theta$ *has length* 2 *and in the Grothendieck ring*

$$\chi_1\times\nu\rtimes\theta=\chi_1\rtimes\nu^{1/2}\theta\mathrm{St}_{\mathrm{GSp}_2}+\chi_1\rtimes\nu^{1/2}\theta 1_{\mathrm{GSp}_2}.$$

Then,

$$\chi_1\rtimes\nu^{1/2}\theta\mathrm{St}_{\mathrm{GSp}_2}=\begin{cases}J(\chi_1;\nu^{1/2}\theta\mathrm{St}_{\mathrm{GSp}_2}) & e(\chi_1)>0\\ J(\chi_1\rtimes\nu^{1/2}\theta\mathrm{St}_{\mathrm{GSp}_2}) & e(\chi_1)=0\\ J(\chi_1^{-1};\nu^{1/2}\chi_1\theta\mathrm{St}_{\mathrm{GSp}_2}) & e(\chi_1)<0\end{cases}$$

$$\chi_1\rtimes\nu^{1/2}\theta 1_{\mathrm{GSp}_2}=\begin{cases}J(\chi_1,\nu;\theta) & e(\chi_1)>0\\ J(\nu;\chi_1\rtimes\theta) & e(\chi_1)=0\\ J(\chi_1^{-1},\nu;\chi_1\theta) & e(\chi_1)<0\end{cases}$$

(iii) $\chi_1=\nu^2$ *and* $\chi_2=\nu$. *Then* $\nu^2\times\nu\rtimes\theta$ *has length* 4, *consisting of:*

$$\nu^{3/2}\theta\mathrm{St}_{\mathrm{GSp}_4},\nu^{3/2}\theta 1_{\mathrm{GSp}_4},J(\nu^2;\nu^{1/2}\theta\mathrm{St}_{\mathrm{GSp}_2}),J(\nu^{3/2}\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2};\theta)$$

(iv) $\chi_1=\nu\chi_2$ 和 χ_2 的阶为2。那么， $\nu\chi_2\times\chi_2\rtimes\theta$ 的长度为4，其中有一个唯一的本质平方可积子商，记为 $\delta([\chi_2,\nu\chi_2],\theta)$，以及

$$J(\nu^{1/2}\chi_2\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2};\theta),J(\nu^{1/2}\chi_2\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2};\chi_2\theta),J(\nu\chi_2;\chi_2\rtimes\theta).$$

(b) if $\chi_1\times\chi_2\rtimes\theta$ *is not regular:*

(i) $\chi_1=\nu,\chi_2=1$ 则 $\nu\times 1\rtimes\theta$ 的长度为 ***4***，由本质缓增表示 $\tau(S,\theta)$ 和 $\tau(T,\theta)$ 构成，使得 $1\rtimes\nu^{1/2}\theta\mathbf{St}=\tau(S,\theta)+\tau(T,\theta)$，以及 $J(\nu;1_{F^\times}\rtimes\theta)$ 和 $J(\nu^{1/2}\mathbf{St}_{\mathrm{GL}_2};\theta)$，其中 $1\rtimes\theta 1_{\mathrm{GSp}_2}=J(\nu;1\rtimes\theta)+J(\nu^{1/2}\mathbf{St};\theta)$

(ii) $\chi_1=\chi_2=\nu$ 则 $\nu\times\nu\rtimes\theta$ 的长度为2，由以下表示构成

$$\nu\rtimes\nu^{1/2}\theta 1_{\mathrm{GSp}_2}=J(\nu;\nu^{1/2}\theta\mathrm{St}_{\mathrm{GSp}_2})$$

$$\nu\rtimes\nu^{1/2}\theta\mathrm{St}_{\mathrm{GSp}_2}=J(\nu,\nu;\theta).$$

(iii) $\chi_1=\nu\chi_2$ 和 $\chi_1^2=\nu$，则 $\nu\chi_2\times\chi_2\rtimes\theta$ 的长度为2，由以下表示构成

$$\nu^{1/2}\chi_2 1_{\mathrm{GL}_2}\rtimes\theta,\nu^{1/2}\chi_2\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\rtimes\theta.$$

此处， $\nu^{1/2}\chi_2\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\rtimes\theta$ 是缓增的，且 $\nu^{1/2}\chi_2 1_{\mathrm{GL}_2}\rtimes\theta=J(\nu\chi_2,\nu\chi_2;\chi_2\theta)$。

(2) 当 $L=\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GSp}_0$，时，表示 $\nu^\beta\rho\rtimes\chi$（其中 $\beta\in\mathbb{R},\rho$ 是GL_2，的酉超尖点表示，且 $\chi\colon F^\times\to\mathbb{C}^\times$）可约，当且仅当 $\beta=\pm1/2$、 $\rho=\rho^\vee$ 和 $\omega_\rho=1$。

此外， $\nu^{1/2}\rho\rtimes\chi$ 具有唯一的泛型特殊子表示和唯一的不可约预酉非缓增非泛型商。

(3) 当 $L=\mathrm{GL}_1\times\mathrm{GSp}_2$，表示 $\chi\rtimes\rho$，其中 $\chi\colon F^\times\to\mathbb{C}^\times$ 且 ρ 是 GSp_2，的超尖表示时，在以下情况下可约：

(a) $\chi=1_{F^\times}$，在这种情况下 $1_{F^\times}\rtimes\rho$ 分解为两个不等价的缓增不可约子表示之和。*(b)* $\chi=\nu^{\pm1}\xi_o$ 其中 $\xi_o\colon F^\times\to\mathbb{C}^\times$ 是一个二阶特征使得 $\xi_o\rho\cong\rho$。则 $\nu\xi_o\rtimes\rho$ 有一个唯一的平方可积不可约子表示。

证明。情形 (1) 来自 [ST93，§3] 而情形 (2) 和 (3) 来自 [ST93，§4]。

更精确地，情形 1(a)i 是 [ST93，引理 3.3]，情形 1(a)ii 是 [ST93，引理 3.4]，情形 1(a)iii 是[ST93，引理3.5]，情形1(a)iv 是 [ST93，引理3.6]，情形1(b)i 是 [ST93，引理 3.8]，情形 1(b)ii 是 [ST93，引理 3.9]，情形 1(b)iii 是 [ST93，引理 3.7]。□

Let ξ have order 2 and write $\xi\rtimes 1=T^1_\xi+T^2_\xi$ as a sum of irreducible representations of Sp_2. Moreover, for any supercuspidal representation σ of $\mathrm{SL}_2(F)$, let

$$F^\times_\sigma:=\{a\in F^\times:\sigma^{\mathrm{diag}(a,1)}\cong\sigma\},$$

which is really a subgroup of the finite group $F^\times/(F^\times)^2$.

The analogue of Theorem 3.2.4 for Sp_4 is:

Theorem 3.2.5. *(1) When $L=T$, the representation $\chi_1\times\chi_2\rtimes 1$ is reducible when:*

(a) 来自不可约表示的GSp_4，，即 $\chi_1\neq\nu^{\pm1}$、 $\chi_2\neq\nu^{\pm1}$和$\chi_1\neq\nu^{\pm1}\chi_2$。然后，$\chi_1\times\chi_2\rtimes1$ 当且仅当 χ_1 或 χ_2 的阶为2时才是可约的。不妨设 χ_2 的阶为2。

(i) If $\chi_1=\chi_2$ or χ_1 is not of order 2 then $\chi_1\rtimes T^1_{\chi_2}$ and $\chi_1\rtimes T^2_{\chi_2}$ are irreducible

(ii) If $\chi_1=\chi_2$ then both $\chi_1\rtimes T^1_{\chi_1}$ and $\chi_1\rtimes T^2_{\chi_1}$ have length two.

(b) if $\chi_1\times\chi_2\rtimes1$ is regular, i.e., $\chi_1\neq1,\chi_2\neq1,\chi_1\neq\chi_2^{\pm1}$:

(i) $\chi_1=\nu\chi_2$ where $\chi_2^2\neq\nu^{-2},\nu^{-1},1$ and $\chi_2\neq\nu^{-2},\nu$. Then

$$\nu\chi_2\times\chi_2\rtimes1=\nu^{1/2}\chi_2 1_{\mathrm{GL}_2}\rtimes1+\nu^{1/2}\chi_2\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\rtimes1$$

has length two.

(ii) $\chi_2=\nu$ and $\chi_1\neq1,\nu^{\pm1},\nu^{\pm2}$. Then

$$\chi_1\times\nu\rtimes1=\chi_1\rtimes\nu^{1/2}\mathrm{St}_{\mathrm{Sp}_2}+\chi_1\rtimes\nu^{1/2}1_{\mathrm{Sp}_2}$$

has length two.

(iii) $\chi_1=\nu^2$ and $\chi_2=\nu$. Then $\nu^2\times\nu\rtimes1$ has length 4, consisting of:

$$\nu^{3/2}\mathrm{St}_{\mathrm{Sp}_4},\nu^{3/2}1_{\mathrm{Sp}_4},J(\nu^2;\nu^{1/2}\mathrm{St}_{\mathrm{Sp}_2}),J(\nu^{3/2}\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2};1)$$

(iv) $\chi_1=\nu\chi_2$ and χ_2 of order 2. Then

$$\nu\chi_2\times\chi_2\rtimes1=\nu^{1/2}\chi_2 1_{\mathrm{GL}_2}\rtimes1+\nu^{1/2}\chi_2\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\rtimes1$$

where $\nu^{1/2}\chi_2 1_{\mathrm{GL}_2}\rtimes1$ and $\nu^{1/2}\chi_2\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\rtimes1$ each have length three.

Otherwise, there are no extra reducibilities.

(c) if $\chi_1\times\chi_2\rtimes1$ is not regular:

(i) $\chi_1=\nu,\chi_2=1$ then $\nu\times1\rtimes1$ has length 4 consisting of essentially tempered representations τ and τ', as well as

$$J(\nu;1_{F^\times}\rtimes1_{\mathrm{Sp}_2}),J(\nu^{1/2}\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2};1)$$

(ii) $\chi_1=\chi_2=\nu$ then

$$\nu\times\nu\rtimes1=\nu\rtimes\nu^{1/2}1_{\mathrm{Sp}_2}+\nu\rtimes\nu^{1/2}\mathrm{St}_{\mathrm{Sp}_2}.$$

*i*在格罗滕迪克环中，其中 $\nu\rtimes\nu^{1/2}1_{\mathrm{Sp}_2}$和 $\nu\rtimes\nu^{1/2}\mathrm{St}^{\mathrm{Sp}_2}$均为不可约表示 .

(iii) $\chi_1 = \nu\chi_2$ 和 $\chi_1^2 = \nu$，则 $\nu\chi_2 \times \chi_2 \rtimes 1$ 的长度为2，由以下部分组成

$$\nu^{1/2}\chi_2 1_{\mathrm{GL}_2} \rtimes 1, \nu^{1/2}\chi_2 \mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \rtimes 1.$$

Otherwise, there are no extra reducibilities.

(2) 当 $L = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{Sp}_0 = \mathrm{GL}_2$, 表示 $\nu^\beta\rho \rtimes 1$，其中 $\beta \in \mathbb{R}$，且 ρ 是 GL_2 的酉超尖点表示时，当且仅当 ρ 是自对偶且：

(a) $\beta = \pm 1/2$ *and* $\omega_\rho = 1_{F^\times}$*; or*
(b) $\beta = 0$ *and* $\omega_\rho \neq 1_{F^\times}$,.

*(3)*当 $L = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{Sp}_2$, 表示 $\nu^\beta\chi \rtimes \rho$ 时，其中 χ 是一个酉特征，且 $\beta \in \mathbb{R}$ 和 ρ 是 Sp_2，的超尖点表示，在以下情况下是可约的：

(a) $\chi = 1_{F^\times}$ *and* $\beta = 0$,
(b) χ *has order two and nontrivial on* $F_\sigma^\times$ *and* $\beta = 0$.
(c) χ *has order two and trivial on* $F_\sigma^\times$ *and* $\beta = \pm 1$.

Proof. See [ST93, Section 5]. □

4. The Galois side

我们关注 $L\mathrm{Sp}\ G = \mathrm{GSp}_4$，的 4,-参数，即满足以下条件的同态 φ: $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to G^\vee$ ： 对于任意 $w \in W_F$， $\varphi(w)$ 都是半单的，并且限制 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ 是复代数群的一个态射。

Lemma 4.0.1. *If* $\mathcal{G}_\varphi^\circ$ *is abelian, then members of the L-packet for* φ *are representations with support* $\mathrm{Z}_{G^\vee}(\mathrm{Z}_{\mathcal{G}_\varphi}^\circ)^\vee$.

证明。设 $\rho \in$ 为S_φ的不可约表示。由于 $\mathcal{G}_\varphi^\circ$ 是阿贝尔群，$(^{u_\varphi}, \rho)$的尖点支撑 $\mathcal{L}^\varphi$ 必须是 $\mathrm{Z}^{\mathcal{G}_\varphi}(\mathcal{G}_\varphi^\circ)$，它按 AMS18 第 5], 页的意义是 $\mathcal{G}_\varphi$ 的一个拟 Levi子群。故 (φ, ρ)的尖点支撑必须是 $\mathrm{Z}_{G^\vee}(\mathrm{Z}_{\mathcal{L}^\varphi}^\circ) = \mathrm{Z}_{G^\vee}(\mathcal{G}_\varphi^\circ)$。根据性质 8.1.19， φ 的 L参数包中的成员具有支撑 $\mathrm{Z}_{G^\vee}(\mathrm{Z}_{\mathcal{G}_\varphi}^\circ)^\vee$。□

令 $G = \mathrm{Sp}_4(F)$ 和 φ: $W_F \times \mathrm{SL}_2 \to G^\vee = \mathrm{SO}_5(\mathbb{C})$ 为一个 L-参数。将 $\varphi|_{W_F}$视为 W_F 的一个带有不变对称内积的五维表示。

我们使用以下来自 §8.1的记号：

$$\mathcal{G}_\varphi = \mathrm{Z}_{\mathrm{SO}_5(\mathbb{C})}(\varphi(W_F)) \quad \text{and} \quad S_\varphi = \pi_0(\mathrm{Z}_{\mathrm{SO}_5(\mathbb{C})}(\varphi(W_F'))).$$

尖支撑映射 Sc: $\Phi_e(G) \to \bigsqcup_{L \in \mathcal{L}(G)} \Phi_{e,\ \mathrm{cusp}}(L)/W_G(L)$ 是通过针对 $\mathcal{G}_\varphi$ 的 Springer 对应[3] 定义的，因此我们根据 L-参数 φ 的形状逐一讨论各种情形。

根据 W_F-表示 U 的分解方式（由 5的分拆参数化），有以下几种情形。

(1) U 它是不可约的，因此 $\mathcal{G}_\varphi = 1$ 和 $S_\varphi = 1$。这是一个超尖单元素包。(2) $U = V \oplus \chi$ 其中 $\dim V = 4$，带有一个对称型 $V \otimes V \to \mathbb{C}$ 和 $\chi^2 = 1$。这里 $\mathcal{G}_\varphi = \mu_2$和 $S_\varphi = \mu_2$。这里，$\mathcal{L}_\varphi = \mu_2$ 所以 $\mathrm{Z}_{G^\vee}(\mathrm{Z}_{\mathcal{L}_\varphi}^\circ) = G^\vee$。因此这是一个大小为 2 的纯超尖点包。(3) $U = V_1 \oplus V_2$ 其中 $\dim V_1 = 3$ 且 $\dim V_2 = 2$，二者均为自对偶并带有不变对称形式。这里 $\mathcal{G}_\varphi = \mu_2$ 和 $S_\varphi = \mu_2$。同样，这是一个大小为 2 的纯超尖点包。(4) $U = V \oplus \chi_1 \oplus \chi_2$ 其中 $\dim V = 3$ 且 V 是自对偶的，并带有不变对称形式。以下二者之一：

[3]文献中对 Springer 对应有不同的规范化方式，例如参见 [CM84]; 构造局部朗兰兹对应时所采用的规范化方式，将正则幂零轨道映到 W的符号表示。

(a) $\chi_1 = \chi_2$ 因此 $\chi_1^2 = \chi_2^2 = 1$ 因为 $\chi_1 \oplus \chi_2$ 必须是自对偶的。现在 $\mathcal{G}_\varphi = \mathrm{S}(\mu_2 \times \mathrm{O}_2(\mathbb{C})) \cong \mathrm{O}_2(\mathbb{C})$，因为 U 的自同构必须在 V 上按标量作用，并在 $\chi_1 \oplus \chi_2$上按正交变换作用。由于 $\mathcal{G}_\varphi$不含幺幂元，$\varphi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$是平凡的，并且 $S_\varphi = \mu_2$。此处 $\mathcal{L}_\varphi = 1 \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$，所以尖点支撑为$\mathrm{Z}_{G^\vee}(\mathrm{Z}^\circ_{\mathcal{L}_\varphi}) = \mathrm{Z}_{G^\vee}(1 \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$。由于 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ 的超尖点 L-参数 $\cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ 具有平凡的幺幂元，根据性质 8.1.5（以及观察到 $\varphi|_{\mathrm{SL}}$），我们有

$$\varphi = \lambda_\varphi = \iota_{\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{SO}_3} \circ \lambda_{\varphi_v} = \iota_{\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{SO}_3} \circ \varphi_v.$$

因此该参数包由抛物诱导 $\widehat{\chi}_1 \rtimes \pi_V$的子商组成，其中 π_V是$\mathrm{Sp}_2(F)$的表示，在$\mathrm{Sp}_2(F) \cong \mathrm{SL}_2(F)$的局部朗兰兹对应下对应于 V（这是良定义的，因为 V 对应于一个单元素包）。

(b) $\chi_1 \neq \chi_2$ 和 $\chi_1^2 = \chi_2^2 = 1$ 则 $\mathcal{G}_\varphi = \mu_2^2$，所以$\varphi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ 是平凡的且 $S_\varphi = \mu_2^2$。由引理 4.0.1，这是一个大小为4的纯超尖点包。

(c) $\chi_1 \neq \chi_2$和 $\chi_1 = \chi_2^{-1}$则 $\chi_1 \oplus \chi_2$携带对称型 $\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle := a_1 b_2 + a_2 b_1$ 所以 $\mathcal{G}_\varphi = \mathbb{C}^\times$ 和 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = 1$ 和 $S_\varphi = 1$。再次由引理 4.0.1， L-参数包唯一成员的支集是 $\mathrm{Z}^{\mathrm{SO}_5}(\mathcal{G}_\varphi^\circ)^\vee = F^\times \times \mathrm{Sp}_2(F)$。通过与情形 4a 相同的论证， L-参数包的成员是 $\chi_1 \rtimes \pi_V$。

(5) $U = V_1 \oplus V_2 \oplus \chi$ where $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$, and $\chi^2 = 1$. Either:

(a) $V_1 \cong V_2$ and V_1 has an invariant symmetric form so $\mathcal{G}_\varphi = \mathbb{C}^\times$ and $S_\varphi = 1$. By Lemma 4.0.1, this is a purely supercuspidal singleton packet.

(b)$V_1 \cong V_2$和 V_1 具有不变辛形式 ω，则 $V_1 \oplus V_1$ 带有对称型 $\langle v_1 \oplus v_2, w_1 \oplus w_2 \rangle := \omega(v_1, w_2) - \omega(v_2, w_1)$。那么 $\chi = 1$和 $\mathcal{G}_\varphi = \mathrm{Sp}_2(\mathbb{C})$。$\mathrm{Sp}_2 \cong \mathrm{SL}_2$ 的Springer对应见表 5b。因此，Levi子群 $\mathcal{L}_\varphi \subset \mathcal{G}_\varphi$要么是 T，要么是$\mathrm{Sp}_2(\mathbb{C})$，而 $\mathrm{Z}_{G^\vee}(\mathrm{Z}^\circ_{\mathcal{L}_\varphi})$则相应地是 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SO}_1(\mathbb{C})$ 或$G^\vee$。因此：

Unipotent pairs	Representations of $W = \mu_2$
$([1^2], 1)$	1
$([2], 1)$	sgn
$([2], -1)$	cusp

TABLE 2. The Springer correspondence for SL_2 [Lus84b, §10.3]

- 当 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2} = 1$ 于是 $S_\varphi = 1$ 所以该 L-参数包是 $\{\pi_V \rtimes 1\}$。这里，由于 V 是一个L到 SL 的参数 2，我们有 $\omega_\rho = 1$，因此根据定理 3.2.5 该表示 $\pi_V \rtimes 1$ 是不可约的。
- 当 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2}$ 非平凡时，则 $S_\varphi = \mu_2$ 因此 L-参数包的大小为 2。该参数包将在第 5 节中确定。具体而言，第二个 L-参数可以视为 $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-表示$U = M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$，其中 W_F通过表示 V_1 以左乘作用于 $M_2(\mathbb{C})$，而 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 以右乘作用于 $M_2(\mathbb{C})$。

(c) $V_1 \ncong V_2$且二者都有不变对称形式，那么 $\chi \cong$行列式$(V_1) \otimes$行列式(V_2)。这里$\mathcal{G}_\varphi = \mu_2^2$以及 $S_\varphi = \mu_2^2$。根据引理 4.0.1 这是一个大小为四的纯超尖点参数包。

(d) $V_1 \ncong V_2$ 和 $V_1 \cong V_2^\vee$然后 $\mathcal{G}_\varphi = \mathbb{C}^\times$ 和 $S_\varphi = 1$。由引理 4.0.1 单元素 L-参数包的成员是 $\pi_V \rtimes 1$，支撑在 $\mathrm{GL}_2(F) \times \mathrm{Sp}_0(F)$。该表示$\pi_V \rtimes 1$ 是不可约的，由定理 3.2.5(2)，因为 π_V 不是自对偶的。

(6) $U = V \oplus \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3$其中 $\dim V = 2$， V带有不变对称形式的自对偶$V \otimes V \to \mathbb{C}$。以下二者之一：

Unipotent pairs	Representations of $W = \mu_2$
$([1^2], 1)$	1
$([2], 1)$	sgn

TABLE 3. Springer Correspondence for $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$

(a) $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3$ 满足 $\chi_1^2 = 1$ 则 $\mathcal{G}_\varphi = \mathrm{SO}_3(\mathbb{C}) \times \mu_2$，且 $\chi_1 = \det(V)$。$\mathrm{SO}_3(\mathbb{C}) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ 的 Springer 对应见表 6a，其中所有局部系统均支撑在环面上。

因此 $\mathcal{L}_\varphi = \mu_2 \times \mathbb{C}^\times \subset \mathcal{G}_{\varphi^\circ}$ 现在 $\mathrm{Z}_{G^\vee}(\mathrm{Z}^\circ_{\mathcal{L}_\varphi}) = \mathbb{C}^\times \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$，而 L-参数包的成员支集位于 $\mathrm{GL}_1(F) \times \mathrm{Sp}_2(F)$ 中。明确地说，限制 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ 或者是：

(i) 平凡，因此 $S_\varphi = \mu_2$。 W_F-表示 $V \oplus \chi_1$ 可以视为一个 L-参数 $W_F \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$，随后在 Sp π_1， π_2 的表示$_2(F)$ 的 $\mathrm{Sp}_2(F)$ 的局部朗兰兹对应下对应于表示 L-参数包包含 $\{\widehat{\chi}_1 \rtimes \pi_1,\ \widehat{\chi}_1 \rtimes \pi_2\}$，根据定理 3.2.5(3) 它们是不可约的。

(ii) 非平凡。因此 $S_\varphi = \mu_2$，并且根据性质 8.1.5 该 L-参数包是 $\{\nu\widehat{\chi}_1 \rtimes \pi_1, \nu\widehat{\chi}_1 \rtimes \pi_2\}$，它们由定理 3.2.5(3) 可知是不可约的。

(b) $\chi_1 = \chi_2 \neq \chi_3$ 然后 $\chi_1^2 = \chi_3^2 = 1$ 和 $\chi_3 =$ 的行列式(V)以及 $\mathcal{G}_\varphi = \mu_2 \times \mathrm{S}(\mathrm{O}_2(\mathbb{C}) \times \mu_2)$，其中 $S_\varphi = \mu_2 \times \mu_2$。根据引理 4.0.1，大小为四的 L- 参数包中的成员支撑在 $\mathrm{GL}_1(F) \times \mathrm{Sp}_2(F)$ 上。根据 $\mathrm{Sp}_2(F)$ 的局部朗兰兹对应， W_F-表示 $V \oplus \chi_3$ 视为一个 L-参数 $W_F \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$，给出一个 L-参数包 $\{\pi_1, \pi_2\}$。现在，根据定理3.2.5(3)，表示 $\chi_1 \rtimes \pi_1$ 和 $\chi_1 \rtimes \pi_2$ 都是长度为二的，因此它们分别分解为，比如说 $\tau_{11} + \tau_{12}$ 和 $\tau_{21} + \tau_{22}$。那么， φ 的 L-参数包为 $\{\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22}\}$。

(c) $\chi_1 \neq \chi_2 \neq \chi_3$ 和 $\chi_1^2 = \chi_2^2 = \chi_3^2 = 1$ 然后 $\mathcal{G}_\varphi = \mu_2 \times \mathrm{S}(\mu_2 \times \mu_2 \times \mu_2)$以及$S_\varphi \cong \mu_2^3$。根据引理 4.0.1，这是一个纯超尖点包。

(d) $\chi_1 \neq \chi_2 \neq \chi_3$ 和 $\chi_1^2 = 1$ 和 $\chi_2 = \chi_3^{-1}$但 $\chi_2^2 \neq 1$。这里有 $\mathcal{G}_\varphi = \mu_2 \times \mathbb{C}^\times$ 和 $S_\varphi \cong \mu_2$。 L-参数包的成员支撑于 $\mathrm{GL}_1(F) \times \mathrm{Sp}_2(F)$中。令 $\{\pi_1, \pi_2\}$ 为在$\mathrm{Sp}_2(F)$的局部朗兰兹对应下、对应于将 $V \oplus \chi_1$ 视为 $W_F \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ 的 W_F-表示的 L-参数包，则 φ的参数包为 $\{\chi_2 \rtimes \pi_1, \chi_2 \rtimes \pi_2\}$，根据定理 3.2.5(3)，它是不可约的。

(7) $U = 1 \oplus \chi_1 \oplus \chi_1^{-1} \oplus \chi_2 \oplus \chi_2^{-1}$.

(a) $\chi_1 = \chi_2 = 1$ then $\mathcal{G}_\varphi = \mathrm{SO}_5(\mathbb{C})$. The Springer correspondence of $\mathcal{G}_\varphi$ is [Lus84b, §10.6]:

Unipotent pairs	Representations of $W = \mu_2^2 \rtimes S_2$
$([5], 1)$	$(\emptyset, [1^2])$
$([3, 1^2], 1)$	$([1], [1])$
$([3, 1^2], -1)$	$(\emptyset, [2])$
$([2^2, 1], 1)$	$([1^2], \emptyset)$
$([1^5], 1)$	$([2], \emptyset)$

其中，我们通过引理识别半直积（$\mathbb{Z}/2$）的表示$^2 \rtimes S_2$（另见4.0.2， [CM84，定理 10.1。2]）。所有表示都是主系列。根据性质8.1.5， L-参数的尖点支撑是

$$\varphi_v(w) = \lambda_{\varphi_v}(w) = \lambda_\varphi(w) = \varphi(\mathrm{diag}(\|w\|^{1/2}, \|w\|^{-1/2})).$$

由注记 2.1.3 所有幂零轨道在 $G^\vee$ 都是诱导自某个正则幂零轨道在Levi子群 $L^\vee \subset G^\vee$。因此 $\varphi(\|w\|^{1/2}, \|w\|^{-1/2})$ 对偶于模

character $\delta_{B_L\backslash L}$. Thus, by Remark 2.2.2, we have $\varphi_v = \widehat{\chi}_1^{-1}\delta_{B_L\backslash L}$. Thus the L-packet contains an irreducible subquotient of $\mathrm{i}_P^G(\mathrm{St}_L)$.

(i) 若 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2}$ 是 $[4]$, , 则 L-参数包中的成员是 $\mathrm{i}_B^G(\delta_{B\backslash G})$ 的子商；根据性质 8.1.20，该表示模中心平方可积。因此， L-参数包为$\{\mathrm{St}_{\mathrm{GSp}_4}\}$。(ii) 若 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2}$ 是 $[2^2]$ ，则 $S_\varphi = \mu_2$，那么 L-参数包中的成员是 $1\rtimes\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}$ 的不可约组成因子。这是情形 1(c)i，且 L-参数包为 $\{\tau(S, \nu^{-1/2}\widehat{\chi}_1^{-1})$ $\tau(T, \nu^{-1/2}\widehat{\chi}_1^{-1})\}$。(iii) 若 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2}$ 是 $[2, 1^2]$。 L-参数包中的成员为 $\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\rtimes 1$，属于情形 1(c)iii。(iv) 若 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2}$ 是平凡的，则 L-参数包为 $\{1\times 1\rtimes 1\}$，其中 $1\times 1\rtimes 1$ 由定理 3.2.5(1a)可知是不可约的。

(b) $\chi_1 = \chi_2 \neq 1$ 则 χ_1 具有 2 阶且 $\mathcal{G}_\varphi = \mathrm{S}(\mathrm{O}_4(\mathbb{C}) \times \mu_2) \cong \mathrm{O}_4(\mathbb{C})$. O 的 Springer 对应[4] 为（见 [CM93, §10.1, 第 166]）：

幺幂对	$W = \mu_2 \rtimes \mu_2$ 的表示 [2]
$(00, 1)$	$(1\otimes 1, 1) = 1_W$
$(00, -1)$	$(1\otimes 1, \mathrm{sgn})$
$(0e, 1) = (e0, 1)$	$(1\otimes \mathrm{sgn}, 1)$
$(ee, (1, 1))$	$(\mathrm{sgn}\otimes\mathrm{sgn}, 1) = \mathrm{sgn}_W$
$(ee, (1, -1))$	(符号表示 $\otimes$ 符号表示，符号表示)
$(ee, (-1, 1))$	cusp
$(ee, (-1, -1))$	cusp

这里右侧的 0 和 e 表示 SL_2, 的幺幂共轭类，它们诱导出 $\mathrm{SO}_4 = (\mathrm{SL}_2\times\mathrm{SL}_2)/\mu_2$上的幺幂共轭类；左侧则是外尔群的表示$W = \mu_2^2 \rtimes \mu_2$ ，通过引理 4.0.2进行参数化。

因此， $\mathcal{L}_\varphi \subset \mathcal{G}_\varphi^\circ = \mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$ 要么是极大环面，要么是 $\mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$。当 $\mathcal{L}_\varphi = \mathrm{SO}_4(\mathbb{C})$ 时，我们有 $\mathrm{Z}_{G^\vee}(\mathrm{Z}^\circ_{\mathcal{L}_\varphi}) = G^\vee$，这对应于 φ 的 L-参数包中的一个超尖点成员。当 $\mathcal{L}_\varphi$ 是极大环面时，我们有 $\mathrm{Z}_{G^\vee}(\mathrm{Z}^\circ_{\mathcal{L}_\varphi})$ 也是一个环面，这产生了 φ 的 L-参数包中的一个主系列表示。此外，由于L-参数有界，根据性质 8.1.20，这些表示是缓增的。要么$\varphi|_{\mathrm{SL}_2}$ 是:

(i) 平凡。此处，$S_\varphi \cong \mu_2$。 L-参数包由$\chi_1\times\chi_1\rtimes 1$的不可约成分组成。这是情形 1(a)i，且 L-参数包为 $\{\widehat{\chi}_1\rtimes T^1_{\widehat{\chi}_1}, \widehat{\chi}_1\rtimes T^2_{\widehat{\chi}_1}\}$。(ii) 嵌入到 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的第一个副本中。此处， $S_\varphi = 1$ ，且 L-参数包由 $\nu^{1/2}\chi_1\times\nu^{-1/2}\chi_1\rtimes 1$ 的一个不可约成分组成，即定理 3.2.5(1b)。由于该成员是缓增的，参数包为 $\{\chi_1\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\rtimes 1\}$。(iii) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的对角嵌入。此处，$S_\varphi \cong \mu_2^2$。具体而言， L-参数φ 可视为 $W_F\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-表示 $U = M_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}$，其中 W_F 通过 χ_1 作用于 $M_2(\mathbb{C})$，而 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 通过共轭作用于 $M_2(\mathbb{C})$。对称型是 $M_2(\mathbb{C})$ 上的迹配对。

Thus in case 7(b)iii the members of the size four L-packet consists of two supercuspidals and two principal series. The L-packet is determined in Section 5.

(c) $\chi_2 = 1$ 和 χ_1 是 2 阶。我们有 $\mathcal{G}_\varphi = \mathrm{S}(\mathrm{O}_3\times\mathrm{O}_2) \cong \mathrm{SO}_3\times\mathrm{O}_2$。由于 SO 的 Springer 对应和 O_3 以及 O_2 都没有任何非平凡的尖点支撑（见表 6a），因此 L-参数包中的成员是主系列。此外，同样地，L-参数包是有界的，因此根据性质 8.1.20 这些表示是缓增的。

(i) 如果 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2} = 1$，那么 $S_\varphi = \mu_2$ ，且参数包由$\chi_1\times 1\rtimes 1$的不可约成分组成。这是情形 1(a)i，因此 L-参数包是 $\{1\rtimes T^1_{\chi_1}, 1\rtimes T^2_{\chi_1}\}$。(ii)如果 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2}$ 是非平凡的，那么 $S_\varphi = \mu_2$ ，且参数包由 $\chi_1\times\nu^{1/2}\rtimes 1$的不可约成分组成。这是情形 1(a)i，且 L-参数包是 $\{\nu^{1/2}\rtimes T^1_{\chi_1}, \nu^{1/2}\rtimes T^2_{\chi_1}\}$。

(d) $\chi_2 = 1$ 和 $\chi_1^2 \neq 1$。这里 $\mathcal{G}_\varphi = \mathrm{SO}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$。根据表 6a 幺幂对都支撑在环面中，因此 L-参数包都是由一个主系列组成的单元素集。限制 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ 或者是：

(i) 平凡，则参数包为 $\{\chi_1 \times 1 \rtimes 1\}$，其中 $\chi_1 \times 1 \rtimes 1$ 根据定理 3.2.5(1a) 为不可约。(ii) 非平凡，则参数包为 $\{\chi_1 \times \nu^{1/2} \rtimes 1\}$，其中 $\chi_1 \times \nu^{1/2} \rtimes 1$ 根据定理 3.2.5(1a) 为不可约。

(e) $\chi_1 \neq \chi_2$ 是互不相同的 2 阶特征。这里 $\mathcal{G}_\varphi = \mathrm{S}(\mathrm{O}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{O}_2(\mathbb{C}) \times \mu_2) \cong \mathrm{O}_2(\mathbb{C})^2$。这里 $S_\varphi = \mu_2^2$ 并且根据引理 4.0.1 ， L-参数包的成员是主系列。L-参数包由 $\chi_1 \times \chi_2 \rtimes 1$ 的不可约成分组成，根据定理 3.2.5(1(a)ii)。

(f) $\chi_1 = \chi_2^{-1} \neq 1$ 和 $\chi_1^2 \neq 1$。这里 $\mathcal{G}_\varphi = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 和 $S_\varphi = 1$。这里 $\mathcal{L}_\varphi \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 是极大环面，因此 L-参数包由主系列表示组成。

(i) 如果 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2}$ 是平凡的，则 L-参数包是 $\{\chi_1 \times \chi_1 \rtimes 1\}$，其中不可约性由定理 3.2.5(1a) 给出。(ii) 如果 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2}$ 是非平凡的，则该成员是 $\nu^{1/2}\chi_1 \rtimes \nu^{-1/2}\chi_1 \rtimes 1$ 的一个不可约成分。如果 $\chi_1 \neq \nu^{\pm 3/2}$ 且 $\chi_1^2 \neq \nu^{\pm 1}$ ，则 L-参数包是 $\{\chi_1\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \rtimes 1\}$。否则，如果 $\chi_1 = \nu^{\pm 3/2}$ ，则 $\nu^{\pm 3/2}\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \rtimes 1$ 长度为二，因为我们处于情形 1(b)iii。根据性质 8.1.3， L-参数包是 $\{J(\nu^{\pm 3/2}\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}; 1)\}$。如果 $\chi_1 = \nu^{\pm 1/2}$ ，则 $\nu^{\pm 1/2}\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \rtimes 1$ 长度为二，因为我们处于情形 1(c)i。如果 $\chi_1 = \nu^{\pm 1/2}\xi_1$ 对于某个 2 阶特征 ξ_1 ，则 $\nu^{\pm 1/2}\xi_1\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \rtimes 1$ 长度为三，且 L-参数包是 $\{J(\nu^{1/2}\xi_1\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}, 1)\}$。

(g) 若 $\chi_1^{\pm 1}$和 $\chi_2^{\pm 1}$彼此均不相同，则 $\mathcal{G}_\varphi = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ 和 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = 1$ 以及 $S_\varphi = 1$。根据引理 4.0.1 ， L-参数包是单元素的 $\{\chi_1 \times \chi_2 \rtimes 1\}$，由定理 3.2.5(1a) 可知它是可约的。

In particular, the only mixed packets occur in cases 5b and 7(b)iii.

We also use the following well-known fact:

Lemma 4.0.2 (Mackey's little groups method, [Ser77, §8.2]). *Let $G = A \rtimes H$ be a finite group, where A is abelian. Then, there is a bijection*

$$\mathrm{Irr}(G) \cong \{\chi \in H\backslash A^*, \rho \in \mathrm{Irr}(H^\chi)\},$$

其中 $H\backslash A^*$ 表示 $A^* =$ 同态$(A, \mathbb{C}^\times)$ 中 H-轨道的集合， H^χ 是 χ的稳定子。一对(χ, ρ) 对应于不可约 G-表示 诱导表示$\mathrm{ind}_{A\rtimes H^\chi}^G(\widetilde{\chi} \otimes \rho)$，其中 $\widetilde{\chi}(ah) := \chi(a)$，对于 $a \in A$ 和 $h \in H^\chi$。

现在，设 $G = \mathrm{GSp}_4(F)$，且 $\varphi\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to G^\vee \cong \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ 是一个 L-参数。现在，$\varphi|_{W_F}$ 可视为一个 4 维的 W_F-表示 U，带有一个不变辛形式 $\omega\colon U \otimes U \to \xi$，其中 ξ 是相似特征。现在， U 按照分拆 $[4], [2^2], [2, 1^2],$ 或 $[1^4]$ 分解为不可约表示（分拆 $[3, 1]$ 不可能，因为相应的双线性形式必然是对称的）。于是， $\mathcal{G}_\varphi$ 是由 W_F-表示的自同态 $g\colon U \to U$ 所构成的群，使得对于某个常数 $c \in \mathbb{C}^\times$ （相似因子），下图交换：

$$\begin{array}{ccc} U \otimes U & \xrightarrow{\omega} & \xi \\ {\scriptstyle g\otimes g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ U \otimes U & \xrightarrow{\omega} & \xi. \end{array}$$

Thus there are the following cases:

（1） U是不可约的， $U \cong \xi U^\vee$ ，且唯一的配对 $U \otimes U \to \xi$ 是反对称的。此处$\mathcal{G}_\varphi = \mathbb{C}^\times$ 且 $S_\varphi = 1$ ，因此该参数包是单元素的超尖点参数包。

（2） $U = V_1 \oplus V_2$，其中 V_1 和 V_2 是二维不可约表示。二者之一：

(a) $V_1 \cong V_2$，带有不变的反对称形式 ω： $V_1 \otimes V_1 \to \xi$。这里 $\xi = \det(V_1)$。然后 U 携带辛形式 $\omega'(v_1 \oplus w_1, v_2 \oplus w_2) = \omega(v_1, w_2) + \omega(w_1, v_2)$。因此， $\mathcal{G}_\varphi = \mathrm{GO}_2(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{C}^\times)^2 \rtimes \mu_2$，嵌入为 $\begin{pmatrix} aI_2 & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ 和 $S_\varphi = \mu_2$。根据注记 4.0.1， L-参数支撑在 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GSp}_0(\mathbb{C})$ 中，因此表示支撑在 $\mathrm{GL}_1(F) \times \mathrm{GSp}_2(F)$ 中。 φ 的尖点支撑是V_1 和 ξ 视为一个 L-参数 $W_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GSp}_0(\mathbb{C})$。根据注记 2.2.2 到表示 $\widehat{\xi}^{-1} \det(\pi_{V_1}) \boxtimes \pi_{V_1}^\vee = 1 \boxtimes \pi_{V_1}^\vee$ 的 $\mathrm{GL}_1(F) \times \mathrm{GSp}_2(F)$，这是 φ的尖点支撑。这里， π_{V_1} 是 $\mathrm{GSp}_2(F)$ 的表示对应于 V_1在 $\mathrm{GSp}_2(F)$ 的局部朗兰兹对应下。因此 L-参数包的成员是 $1 \rtimes \pi_{V_1}^\vee$ 的两个不可约成分（这是情形 3a）。

(b) $V_1 \cong V_2$，带有不变对称形式 $\langle -, - \rangle$： $V_1 \otimes V_1 \to \xi$。这里， $\xi = \det(V_1)$。于是 $\omega(v_1 \oplus w_1, v_2 \oplus w_2) = \langle v_1, w_2 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle$。因此， $\mathcal{G}_\varphi = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$嵌入为 $\mathrm{diag}(g, J^T g^{-1} J^{-1}) \in \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$，且 $S_\varphi = 1$。令$T \subset \mathcal{G}_\varphi$ 为一个极大环面，（平凡地）增强的 L-参数支撑于 $Z_{G^\vee}(T) = \mathrm{GL}_1\mathbb{C} \times \mathrm{GSp}_2\mathbb{C}$ 中，因此参数包的成员支撑于 $\mathrm{GL}_2 F \times \mathrm{GSp}_0 F$ 中。(i)如果 $\varphi(\mathrm{SL}_2) = 1$，那么 φ 的尖点支撑是 ξ，并且将 V视为一个 L-参数$W_F \to \mathrm{GL}_1\mathbb{C} \times \mathrm{GSp}_2\mathbb{C}$。根据注 2.2.2， L-参数包中的成员是 $(\widehat{\xi} \otimes \pi_{V_1}^\vee) \rtimes \widehat{\xi}^{-1}$的一个不可约成分。我们处于情形2。由于 $V_1 \cong \xi V_1^\vee$，我们有 $\pi_{V_1} \cong \widehat{\xi} \otimes \pi_{V_1}^\vee$。因此，如果 $\xi = \nu^\beta \xi'$ 对于一个酉特征 ξ' 且 $\beta \in \mathbb{R}$，那么只要 $\beta \neq \pm 1$， $\pi_{V_1} \rtimes \widehat{\xi}^{-1}$ 就是不可约的。在这种情况下， L-参数包是 $\{\pi_{V_1} \rtimes \widehat{\xi}^{-1}\}$。否则，由于 L-参数 φ 不是（本质上）有界的，单元素L-参数包由 $\pi_{V_1} \rtimes \widehat{\xi}^{-1}$ 的唯一本质缓增子商组成。

(ii)如果 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2}$ 不可平凡，则 φ 的尖点支撑是 $\nu\xi$，并且 $\nu^{1/2}V$视为一个 L-参数 $W_F \to \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GSp}_2(\mathbb{C})$。根据注 2.2.2，该 L-参数包中的成员是 $(\nu^{1/2}\widehat{\xi} \otimes \pi_{V_1}^\vee) \rtimes \nu^{-1}\widehat{\xi}^{-1} \cong \nu^{1/2}\pi_{V_1} \rtimes \nu^{-1}\widehat{\xi}^{-1}$的一个不可约成分。令$\xi = \nu^\beta \xi'$ 如上，如果 $\beta \notin \{0, -2\}$ 那么单元素 L-参数包由 $\nu^{1/2}\pi_{V_1} \rtimes \nu^{-1}\widehat{\xi}^{-1}$的唯一本质缓增子商组成，依据性质 8.1.20。

(c) $V_1 \not\cong V_2$ 然后 $V_1 \cong \xi \otimes V_2^\vee$，因此 $\mathcal{G}_\varphi = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ 和 $S_\varphi = 1$。这里， $\xi = \det(V_1)$。根据引理 4.0.1， L-参数支撑在 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GSp}_0(\mathbb{C})$ 中，由 (V_1, ξ) 给出，将其视为一个 L-参数 $W_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GSp}_0(\mathbb{C})$。因此，根据注 2.2.2， L-参数包成员是 $1 \rtimes \pi_{V_1}^\vee$ 的一个不可约成分，其中 π_{V_1} 是 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的超尖点表示，它在 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的局部朗兰兹对应下对应于 V_1。

(3) $U = V \oplus \chi_1 \oplus \chi_2$其中 V 是维数为 2 的不可约表示， χ_1， χ_2 是 W_F 的特征。存在反对称配对 ω： $V \otimes V \to \xi$，其中 $\xi = \det(V)$。此外， $\chi_1\chi_2 = \xi$，并且在 $\chi_1 \oplus \chi_2$ 上存在由 $\omega'(a_1 \oplus b_1, a_2 \oplus b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ 给出的反对称配对 ω'。二者之一：

(a) $\chi_1 = \chi_2$，然后 $\mathcal{G}_\varphi = \{(z, g) \in \mathbb{C}^\times \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) : z^2 = \det(g)\} \cong \mathbb{C}^\times \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$。根据表 5b，有两种情况：(i) $\varphi|_{\mathrm{SL}_2} = 1$，此时幺正对支撑在 $\mathbb{C}^\times \times T$中。于是 $S_\varphi = 1$，且 L-参数支撑在 $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \times \mathrm{GSp}_2(\mathbb{C})$ 中。其支撑为 V，而 χ_1视为一个 L-参数 $W_F \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \times \mathrm{GSp}_2(\mathbb{C})$。因此，根据备注 2.2.2，该参数包为 $\{(\widehat{\chi}_1 \otimes \pi_V^\vee) \rtimes \widehat{\chi}_1^{-1}\}$。这里，$(\widehat{\chi}_1 \otimes \pi_V^\vee) \rtimes \widehat{\chi}_1^{-1}$由定理3.2.4可知是不可约的，因为 $\det(\chi_1 \otimes V^\vee) = 1$ 意味着表示$\widehat{\chi}_1^{-1}$是酉的。(ii) $\varphi|_{\mathrm{SL}_2}$ 是正则幺正元，此时幺正对支撑在 $\mathbb{C}^\times \times T$ 或 $\mathbb{C}^\times \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 中。因此，该 L-参数包的大小为 2，其中有一个中间

在 $\mathrm{GL}_2(F)\times\mathrm{GSp}_0(F)$ 中由级数表示和一个超尖点表示支撑。该参数包在第5 节中确定。(b) $\chi_1\neq\chi_2$ 和 $\chi_1\chi_2^{-1}=\xi$ 于是 $\mathcal{G}_\varphi=\{(z,g)\in\mathbb{C}^\times\times T:\ z^2=\det(g)\}\cong\mathbb{C}^\times\times\mathbb{C}^\times$，嵌入为 $\begin{pmatrix} a & & & \\ & z & & \\ & & z & \\ & & & b\end{pmatrix}\in\mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$，其中 $ab=z^2$。此处 $S_\varphi=1$，增强的 L-参数支撑在 $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})\times\mathrm{GSp}_2(\mathbb{C})$ 中，由 χ_1 给出，并将 V 视为一个 L-参数 $W_F\to\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})\times\mathrm{GSp}_2(\mathbb{C})$。因此，该 L-参数包成员是$(\widehat{\chi}_1\otimes\pi_V^\vee)\rtimes\widehat{\chi}_1^{-1}$的一个不可约成分。我们处于定理3.2.4的情形2。令 $\beta=e(\chi_1\chi_2^{-1}):=\log_q(\chi_1\chi_2^{-1}(\varpi))$。那么 $(\widehat{\chi}_1\otimes\pi_V^\vee)\rtimes\widehat{\chi}_1^{-1}$除非 $\beta\in\{\pm1\}$，否则是不可约的。如果 $\beta\in\{\pm1\}$，那么该 L-参数包成员是$(\widehat{\chi}_1\otimes\pi_V^\vee)\rtimes\widehat{\chi}_1^{-1}$ 的唯一本质非tempered 子商，因为该 L-参数 φ 不是有界的。

(4) $U=\chi_1\oplus\chi_2\oplus\chi_3\oplus\chi_4$ 其中 χ_i 是 W_F 的特征。以下二者之一成立：(a) $\chi_1=\chi_2=\chi_3=\chi_4$ 且 $\chi_1^2=\xi$，则 $\mathcal{G}_\varphi=G^\vee\mathrm{GSp}G^\vee=$ 的 Springer 对应$_4(\mathbb{C})$ 为（由备注 2.1.3 中的分类可知）：

Unipotent pairs	Representations of $W=\mu_2^2\rtimes S_2$
$([4],1)$	$(\emptyset,[1^2])$
$([2^2],1)$	$([1],[1])$
$([2^2],-1)$	$(\emptyset,[2])$
$([2,1^2],1)$	$([1^2],\emptyset)$
$([1^4],1)$	$([2],\ \emptyset)$

这里，W 的表示由引理4.0.2 参数化（另见[CM84，定理 10.1。2][4]）。由于所有幺幂对都支撑在环面上，这里的所有表示都是主系列。根据性质8.1.5，L-参数的尖点支撑为

$$\varphi_v(w)=\lambda_{\varphi_v}(w)=\lambda_\varphi(w)=\chi_1(w)\varphi(\mathrm{diag}(\|w\|^{1/2},\|w\|^{-1/2})).$$

根据注记2.1.3，$G^\vee$ 中的所有幂零轨道都由某个 Levi子群 $L^\vee\subset G^\vee$中的正则幂零轨道诱导而来。因此，$\varphi(\|w\|^{1/2},\ \|w\|^{-1/2})$ 对偶于模特征 $\delta_{B_L\backslash L}$。因此，根据注记 2.2.2，我们有 $\varphi_v=\widehat{\chi}_1^{-1}\delta_{B_L\backslash L}$。因此，$L$-参数包包含 $\widehat{\chi}_1^{-1}\mathrm{i}_P^G(\mathrm{St}_L)$ 的一个不可约子商。

(i) 若 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2}$ 为 $[4],$，则 L-参数包成员是 $\widehat{\chi}_1^{-1}\mathrm{i}_B^G(\delta_{B\backslash G})$的子商，由性质 8.1.20，它模中心平方可积。因此 L-参数包为$\{\widehat{\chi}_1^{-1}\mathrm{St}_{\mathrm{GSp}_4}\}$。(ii) 若 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2}$ 为 $[2^2]$，则 $S_\varphi=\mu_2$，于是 L-参数包成员是 $1\rtimes\widehat{\chi}_1^{-1}\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}$的不可约组成成分。这是情形 1(b)i，且 L-参数包为 $\{\tau(S,\nu^{-1/2}\widehat{\chi}_1^{-1})\ \tau(T,\nu^{-1/2}\widehat{\chi}_1^{-1})\}$。(iii) 若 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2}$ 为 $[2,1^2]$。L-参数包成员为 $\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\rtimes\widehat{\chi}_1^{-1}$，这是情形 1(a)i。(iv) 若 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2}$ 平凡，则 L-参数包为 $\{1\times1\rtimes\widehat{\chi}_1^{-1}\}$，其中 $1\times1\rtimes\widehat{\chi}_1^{-1}$由引理 3.2.3 不可约。

(b) $\chi_1=\chi_2\neq\chi_3=\chi_4$和 $\chi_1^2=\chi_3^2=\xi$，则 $\mathcal{G}_\varphi=\{(g,\ h)\in\mathrm{GSp}_2\times\mathrm{GSp}_2:\ \mu(g)=\mu(h)\}$。因此 $W_F\to T^\vee\subset\mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ 由$(\chi_1,\ \chi_3,\ \chi_3,\ \chi_1)$ 给出。对于 $\mathcal{G}_\varphi$ 的 Springer 对应为：

[4]Note that our normalization of the Springer correspondence differs with [CM84] by a sgn-twist.

Unipotent pairs	Representations of $W = \mu_2^2$
$(00, 1)$	$1 \otimes 1$
$(0e, 1)$	$1 \otimes \mathrm{sgn}$
$(e0, 1)$	$\mathrm{sgn} \otimes 1$
$(ee, 1)$	$\mathrm{sgn} \otimes \mathrm{sgn}$
$(ee, -1)$	cuspidal

In all cases the image $\varphi(W_F)$ is compact modulo center, so by Property 8.1.20 the representations in the L-packets are essentially tempered. Either:

(i) 如果 $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) = 1$，那么 $S_\varphi = 1$。L-参数支撑于 $\chi_1 \otimes \chi_3 \otimes \xi$ 中，因此根据注记 2.2.2，该成员是 $\widehat{\chi}_1^{-1}\widehat{\chi}_3 \times \widehat{\chi}_1^{-1}\widehat{\chi}_3 \rtimes \widehat{\chi}_1^{-1}$ 的一个不可约成分。根据 [ST93，引理 3.2]，这是不可约的。(ii) 如果 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ 是到 $\mathcal{G}_\varphi$ 第一因子的嵌入，那么 $S_\varphi = 1$，且 L-参数支撑于 $\chi_3 \otimes \nu^{1/2}\chi_1 \otimes \xi$ 中。因此根据注记 2.2.2，该成员是 $\nu^{1/2}\widehat{\chi}_1\widehat{\chi}_3^{-1} \times \nu^{-1/2}\widehat{\chi}_1\widehat{\chi}_3^{-1} \rtimes \widehat{\chi}_1^{-1}$ 的一个不可约成分。这是情形 1(b)iii，因此 L-参数包为 $\{\widehat{\chi}_1 \mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \rtimes \widehat{\chi}_1^{-1}\}$。(iii) 如果$\varphi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ 是到 $\mathcal{G}_\varphi$ 第二因子的嵌入，那么交换 χ_1 和 χ_3 的作用，我们就处于上述情形。(iv) 如果 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ 是正则的，则有 $S_\varphi = \mu_2$，相应的幺幂对支撑于 $T^\vee$ 或 $\mathcal{G}_\varphi$ 中。因此，该参数包的大小为 2，由一个主系列和一个超尖点表示组成。L-参数包在第 5 节中确定。

(c) $\chi_1 = \chi_2 \neq \chi_3 = \chi_4$且 $\chi_1\chi_3 = \xi$，则 $\mathcal{G}_\varphi$是 Levi 子群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GSp}_0(\mathbb{C})$。这里 $S_\varphi = 1$ 和 L-参数包成员是主系列，因为幺幂对支撑在 $T^\vee$中。此外，由于 L-参数通过 Levi 子群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GSp}_0(\mathbb{C})$，该 L-参数包不是离散的，因此根据性质 8.1.20 其成员模中心并非平方可积。

(i) 若 $\varphi(\mathrm{SL}_2) = 1$，则 L-参数的支撑为 $\chi_1 \otimes \chi_1 \otimes \xi$。因此 L-参数包是 $\{\widehat{\chi}_3^{-1}\widehat{\chi}_1 \times 1 \rtimes \widehat{\chi}_1^{-1}\}$，其中不可约性由引理 3.2.3 得出。(ii) 若 $\varphi|_{\mathrm{SL}_2}$ 非平凡，则 L-参数的支撑为 $\nu^{1/2}\chi_1 \otimes \nu^{-1/2}\chi_1 \otimes \xi$，因此 L-参数包成员是 $\widehat{\chi}_3^{-1}\widehat{\chi}_1 \times \nu \rtimes \nu^{-1/2}\widehat{\chi}_1^{-1}$ 的一个不可约成分。若 $\widehat{\chi}_3^{-1}\widehat{\chi}_1 \notin \{1, \nu^{\pm 1}, \nu^{\pm 2}\}$，则这是情形 1(a)ii，且根据性质 8.1.3，L-参数包为 $\{\widehat{\chi}_3^{-1}\widehat{\chi}_1 \rtimes \widehat{\chi}_1^{-1}\mathrm{St}_{\mathrm{GSp}_2}\}$。若 $\widehat{\chi}_3^{-1}\widehat{\chi}_1 = \nu^{\pm 1}$，则我们处于情形 1(b)ii，且 L-参数包必为 $\{\nu^{3/2}\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2};\ \nu^{-1/2}\widehat{\chi}_1^{-1}\}$

否则，$\widehat{\chi}_3^{-1}\widehat{\chi}_1 = \nu^{\pm 2}$ 且我们处于情形 1(a)iii。根据性质 8.1.3，L- 参数包为 $\{J(\nu^2; \widehat{\chi}_1^{-1}\mathrm{St}^{\mathrm{GSp}_2})\}$。

(d) $\chi_1 = \chi_2 \neq \chi_3 \neq \chi_4$ 和 $\chi_1^2 = \chi_3\chi_4 = \xi$ 则该 L-参数 $\varphi|_{W_F}$： $W_F \to T^\vee \hookrightarrow G^\vee$由 $(\chi_3, \chi_1 I_2, \chi_4)$ 给出。这里 $\mathcal{G}_\varphi$ 是 Levi子群 $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \times \mathrm{GSp}_2(\mathbb{C})$，因此根据性质8.1.20，该 L-参数包成员不是模中心平方可积的。这里 $S_\varphi = 1$ 而且该L-参数包成员属于主系列。

(i)若 $\varphi(\mathrm{SL}_2) = 1$ 则 L-参数的支集为 $\chi_1 \otimes \chi_3 \otimes \xi$。$L$-参数包由 $\widehat{\chi}_1^{-1}\widehat{\chi}_3 \times \widehat{\chi}_1\widehat{\chi}_3^{-1} \rtimes \widehat{\chi}_1^{-1}$ 的一个子商组成。有几种情况：

- 如果 $(\widehat{\chi}_1^{-1}\widehat{\chi}_3)^2 = \nu^{\pm 1}$，那么我们处于情形 1(a)i，且 L-参数包为 $\{\nu^{\mp 1/2}\widehat{\chi}_1^{-1}\widehat{\chi}_3 1_{\mathrm{GL}_2} \rtimes \widehat{\chi}_1^{-1}\}$。
- 如果 $\widehat{\chi}_1^{-1}\widehat{\chi}_3 = \nu^{\pm 1}$ 那么我们处于情况 1(b)ii 并且 L-参数包 是 $\{\nu \rtimes \nu^{-1/2}\widehat{\chi}_1^{-1} 1_{\mathrm{GSp}_2}\}$.
- 否则根据引理 3.2.3 参数包为 $\{\widehat{\chi}_1^{-1}\widehat{\chi}_3 \times \widehat{\chi}_1\widehat{\chi}_3^{-1} \rtimes \widehat{\chi}_1^{-1}\}$。

(e) $\chi_1 \neq \chi_2 \neq \chi_3 \neq \chi_4$ 与 $\chi_1\chi_4 = \chi_2\chi_3$ 则 $\mathcal{G}_\varphi$ 是极大环面。因此 $S_\varphi = 1$ 且 L-参数支撑于 $\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \xi$。$L$-参数包成员是 $\widehat{\chi}_1\widehat{\chi}_3^{-1} \times \widehat{\chi}_1\widehat{\chi}_2^{-1} \rtimes \widehat{\chi}_1^{-1}$ 的不可约子商。

If $\widehat{\chi}_i\widehat{\chi}_j^{-1}$ is not of the form $\nu^{\pm 1}$ for any $i \neq j$ then this is irreducible by [ST93, Lem 3.2]. Otherwise:

- 如果 $\widehat{\chi}_1\widehat{\chi}_2^{-1} = \nu$ 且 $\widehat{\chi}_1\widehat{\chi}_3^{-1} \notin \{1, \nu^{\pm 1}, \nu^{\pm 2}\}$，那么我们处于情形 1(a)ii，并且$L$-参数包为 $\{\widehat{\chi}_1\widehat{\chi}_3^{-1} \rtimes \nu^{1/2}\widehat{\chi}_1^{-1}1_{\mathrm{GSp}_2}\}$。
- 如果 $\widehat{\chi}_1\widehat{\chi}_2^{-1} = \widehat{\chi}_2\widehat{\chi}_3^{-1} = \nu$，那么我们处于情形1(a)iii，且 L-参数包为$\{\nu^{3/2}\widehat{\chi}_1^{-1}1_{\mathrm{GSp}_4}\}$。

The mixed packets are cases 3(a)ii and 4b.

5. Mixed packets

将 $F^\times$ 的三个 2 阶特征记为 η，η_2，η_2'，其中 $\eta(x) := (-1)^{v_F(x)}$ 是非分歧的，而η_2 和 η_2' 是分歧二次特征。

5.1. GSp_4 情形。GSp_4 的混合参数包出现在：

(1) 情形3(a)ii

证明。在情形 3(a)ii 中，令 $\varphi_v = (\chi_1, \chi_1\varphi_u): W_F' \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \times \mathrm{GSp}_2(\mathbb{C})$ 为中间系列的尖点支撑，其中根据注 5.2.8，$\varphi_v|_{\mathrm{SL}_2} = 1$，且 $\det(\varphi_u) = 1$。由性质 8.1.5 可得 $\varphi_v(w, x) = \lambda_{\varphi_v}(w) = \lambda_\varphi(w)$。这里，

$$\lambda_\varphi(w) = \mathrm{diag}(\|w\|^{1/2}\chi_1(w), \chi_1(w)\varphi_u(w), \|w\|^{-1/2}\chi_1(w))$$

因此 $\varphi_v(w) = \|w\|^{1/2}\chi_1(w) \otimes \chi_1(w)\varphi_u(w)$。由注 2.2.2，这对应于表示 $\nu^{1/2}\pi_u \boxtimes \nu^{-1/2}\widehat{\chi}_1^{-1}$，其中 π_u 是与局部朗兰兹对应下的 φ_u 相对应的 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的自对偶超尖点表示；此处的局部朗兰兹对应是 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的局部朗兰兹对应。因此，L-参数包中的中间系列成员是 $\nu^{1/2}\pi_u \rtimes \nu^{-1/2}\widehat{\chi}_1^{-1}$ 的一个不可约子商。由定理3.2.4 (2)，它有唯一的不可约子表示 $\delta(\nu^{1/2}\pi_u \rtimes \nu^{-1/2}\widehat{\chi}_1^{-1})$，该表示平方可积。因此 $\delta(\nu^{1/2}\pi_u \rtimes \nu^{-1/2}\widehat{\chi}_1^{-1}) \in \Pi_{\varphi}$。

- when the $\mathrm{PGL}_2(F)$-representation π_u has depth zero, it is classified by a regular depth-zero character $\theta\colon E^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$, where E/F is the unramified quadratic extension.

$$\Pi_{\varphi(\theta)} := \left\{\delta\left(\nu^{1/2}\pi_{(E^\times,\theta)} \rtimes \nu^{-1/2}\widehat{\chi}_1^{-1}\right),\quad \pi_{(S,\theta\boxtimes\theta\otimes\widehat{\chi}_1^{-1})}\right\}, \tag{5.1.1}$$

  where the supercuspidal $\pi_{(S,\theta\boxtimes\theta\otimes\widehat{\chi}_1^{-1})}$ is defined in Lemma 3.1.14.
- when the GL_2-representation π_u has positive depth, the L-packet is of the form

$$\Pi_\varphi := \{\delta(\nu^{1/2}\pi_u \rtimes \nu^{-1/2}\widehat{\chi}_1^{-1}), \pi(\pi_u) \otimes \widehat{\chi}_1^{-1}\}, \tag{5.1.2}$$

  where:
  - π_u 是 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的超尖点表示，在Jacquet-Langlands 对应下，它对应于 $D^\times/F^\times$ 的一个非平凡表示$\mathrm{JL}(\pi_u)$，其中 D/F 为四元数代数。Kim-Yu 类型由扭曲 Levi 子群序列 $(G^0 \subset \cdots \subset G^d = D^\times/F^\times)$ 给出。
  - $\pi(\pi_u)$ 的 Kim-Yu类型由扭曲Levi 子群序列 $(G^0 \subset \cdots \subset G^d = D^\times/F^\times \subset \mathrm{GSp}_4(F))$ 给出。

□

(2) 情形4(b)iv

证明。在 4b 的情形下，令 $\varphi_v\colon W_F' \to T^\vee$ 为该主系列的尖点支撑。由于 $T^\vee$ 没有幺幂元，因此有 $\varphi_v|_{\mathrm{SL}_2} = 1$。根据性质 8.1.5，有 $\varphi_v(w, x) = \lambda_{\varphi_v}(w) = \lambda_\varphi(w)$。这里，

$$\lambda_\varphi(w) = \mathrm{diag}(\|w\|^{1/2}\chi_1(w), \|w\|^{1/2}\chi_3(w), \|w\|^{-1/2}\chi_3(w), \|w\|^{-1/2}\chi_1(w)).$$

备注 2.1.1 中的同构下，L-参数 φ 对应于 $\nu\theta \times \theta \rtimes \nu^{-1/2}\widehat{\chi}_3^{-1}$的一个不可约子商，其中 $\theta := \widehat{\chi}_1\widehat{\chi}_3^{-1}$是 $F^\times$的一个 2 阶特征。根据 [ST93，引理 3。6] 表示 $\nu\theta \times \theta \rtimes \nu^{-1/2}\widehat{\chi}_1^{-1}$ 有一个唯一的本质平方可积

子商 $\delta([\theta,\nu\theta],\ \nu^{-1/2}\widehat{\chi_1^{-1}})$。因此根据性质 8.1.20，有 $\delta([\theta,\nu\theta],\ \nu^{-1/2}\widehat{\chi_1^{-1}})\in\Pi_{\varphi}$。这里 $\theta\in\{\eta,\eta_2,\eta_2'\}$。

The only singular supercuspidal from Theorem 3.1.14 that's unipotent (up to twisting) is $\pi_\beta(\theta_{10}\otimes 1)$. Therefore it must be in the L-packet $\Pi_{\varphi^{(1)}}$.

There are three L-packets, with notation from Proposition 3.1.14.

$$\Pi_{\varphi^{(1)}}:=\{\delta([\eta,\nu\eta],\nu^{-1/2}\widehat{\chi_1^{-1}}),\pi_\delta(\theta_{10}\otimes\widehat{\chi_1^{-1}})\}$$
$$\Pi_{\varphi^{(2)}}:=\{\delta([\eta_2,\nu\eta_2],\nu^{-1/2}\widehat{\chi_1^{-1}}),\pi_\alpha(\eta_2;\widehat{\chi_1^{-1}})\}$$
$$\Pi_{\varphi^{(3)}}:=\{\delta([\eta_2',\nu\eta_2'],\nu^{-1/2}\widehat{\chi_1^{-1}}),\pi_\alpha(\eta_2';\widehat{\chi_1^{-1}})\}.$$

这里 L-参数包 $\Pi_{\varphi^{(2)}}$ 和 $\Pi_{\varphi^{(3)}}$ 在命题中组装 6.5.5 通过特征的稳定性。注意扭曲 $\widehat{\chi_3^{-1}}$可作为表示的中心特征来恢复。

We now compute the formal degree of $\delta([\eta_2,\nu\eta_2],\nu^{-1/2}\widehat{\chi_1^{-1}})$: By [Roc98], we have

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{H}(G,\tau^{\mathfrak{s}}))\xrightarrow{\sim}\mathrm{Irr}(\mathcal{H}(J^{\mathfrak{s}},1)),\tag{5.1.3}$$

在该条件下 $\delta([\eta_2,\nu\eta_2],\ \nu^{-1/2}\widehat{\chi_1^{-1}})$ 对应于 $\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GL}_2/\mathbb{G}_m}$。根据 [Roc98，定理10。7],除去体积的归一化因子外，我们有

$$\mathrm{fdeg}(\pi(\eta_2))=d(\mathrm{St}^{\mathcal{H}}_{\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GL}_2/\mathbb{G}_m}).\tag{5.1.4}$$

Now by [CKK12, Theorem 4.1], we have

$$d(\mathrm{St}^{\mathcal{H}}_{\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GL}_2/\mathbb{G}_m})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{q^2-1}\cdot\frac{q-1}{q^2-1}\cdot q^{3/2}=\frac{q^{3/2}}{2(q+1)^2}.\tag{5.1.5}$$

Thus we have

$$\mathrm{fdeg}(\delta([\eta_2,\nu\eta_2],\nu^{-1/2}\widehat{\chi_1^{-1}}))=\frac{q^{3/2}}{2(q+1)(q^2-1)},\tag{5.1.6}$$

which agrees with the formal degree for the singular supercuspidal computed in (3.1.17). □

5.2. **The Sp_4 case.** The mixed packets for Sp_4 occur in:

(1) 情形7(b)iii，当参数包的大小为 4 时，由两个超尖点和两个主系列的不可约成分组成 $\nu^{1/2}\chi_1\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\rtimes 1$。$L$-参数包由情形 1(b)iv 中的主系列，以及定理 3.1.20 中的深度零超尖点组成。

证明。对于每个 $\widehat{\chi_1}=\eta$、η_2、η_2'，我们将相应的 L-参数记为 $\varphi(\chi_1)$，如情形7(b)iii 中所述。具体而言，$\varphi(\chi_1)\colon W_F'\to\mathrm{SO}_5(\mathbb{C})$对应于 $W_F\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-表示 $U=M_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}$，其中 W_F通过 χ_1 作用于 $M_2(\mathbb{C})$，而 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 通过共轭作用于 $M_2(\mathbb{C})$。特别地，L-参数包 $\Pi_{\varphi(\eta)}$ 是一个幺正的 L-参数包。

主系列成员 $\pi_1(\widehat{\chi_1})\ \pi_2(\widehat{\chi_1})\in\Pi_{\varphi(\chi_1)}$ 根据情形 7(b)iii 的讨论，在 O_4，上具有幺幂对 $(ee,(-1,\pm1))$。令 $\varphi_v(\chi_1)\colon W_F'\to T^\vee$ 为尖点支撑，其中 $\varphi_v(\chi_1)(\mathrm{SL}_2)=1$，因为 $T^\vee$ 没有幺幂元。于是根据性质 8.1.5，我们有

$$\varphi_v(\chi_1)(w,x)=\lambda_{\varphi_v(\chi_1)}(w)=\lambda_{\varphi(\chi_1)}(w)=\varphi(\chi_1)(w,\begin{pmatrix}\|w\|^{1/2}&\\&\|w\|^{-1/2}\end{pmatrix}).$$

This acts on $M_2(\mathbb{C})$ as:

$$\lambda_{\varphi(\chi_1)}(w)(e_{11})=\chi_1(w)e_{11}$$
$$\lambda_{\varphi(\chi_1)}(w)(e_{12})=\|w\|\chi_1(w)e_{12}$$
$$\lambda_{\varphi(\chi_1)}(w)(e_{21})=\|w\|^{-1}\chi_1(w)e_{21}$$
$$\lambda_{\varphi(\chi_1)}(w)(e_{22})=\chi_1(w)e_{22},$$

因此 $\varphi_v(\chi_1) = \|\det\|\chi_1 \otimes \chi_1 \otimes 1$。现在 $\pi_1(\chi_1)$ 和 $\pi_2(\chi_1)$ 是 $\nu\widehat{\chi}_1 \times \widehat{\chi}_1 \rtimes 1 = \nu^{1/2}\widehat{\chi}_1 1_{\mathrm{GL}_2} \rtimes 1 + \nu^{1/2}\widehat{\chi}_1 \mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \rtimes 1$ 的子商。此外，由于 $\pi_1(\chi_1)$和 $\pi_2(\chi_1)$ 根据性质8.1.20 是平方可积的，它们必定是 $\nu^{1/2}\widehat{\chi}_1\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2} \rtimes 1$ 的子商。根据 [ST93，引理3.6]，在GSp4 上，表示 $\nu\widehat{\chi}_1 \times \widehat{\chi}_1 \rtimes 1_{F^\times}$ 包含唯一的平方可积子商$\delta([\widehat{\chi}_1, \nu\widehat{\chi}_1], 1_{F^\times})$。根据 [ST93，命题5.4]，，将其限制到 Sp4 时会分裂成两个不可约表示，而这两个表示恰好是Sp4- 表示 $\nu\widehat{\chi}_1 \times \widehat{\chi}_1 \rtimes 1$ 的平方可积子商。因此，在格罗滕迪克群中

$$\delta([\widehat{\chi}_1, \nu\widehat{\chi}_1], 1_{F^\times})|_{\mathrm{Sp}_4(F)} = \pi_1(\chi_1) + \pi_2(\chi_1). \tag{5.2.1}$$

对于 $\Pi_{\varphi(\eta)}$ 中的超尖表示，根据定理 3.1.20(2a)，只有两个幺幂超尖表示$\pi_\beta(\theta_{10})$ 和$\pi_\gamma(\theta_{10})$。因此，这两个必定属于 L-参数包$\Pi_{\varphi(\eta)}$。请注意，这与 [LS20] 中的幺幂 L-参数包一致。此外， [LS20 的例 9.4] 指出，$\Pi_{\varphi(\eta_2)}$ 和 $\Pi_{\varphi(\eta_2')}$ 包含从 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ 膨胀得到的深度零表示，即定理 3.1.20(3) 中的表示。总之，我们有三个L-参数包

$$\Pi_{\varphi(\eta)} := \{\pi_1(\eta), \pi_2(\eta), \pi_\beta(\theta_{10}), \pi_\gamma(\theta_{10})\} \tag{5.2.2}$$

$$\Pi_{\varphi(\eta_2)} := \{\pi_1(\eta_2), \pi_2(\eta_2), \pi_\alpha^+(\eta_2), \pi_\alpha^-(\eta_2)\} \tag{5.2.3}$$

$$\Pi_{\varphi(\eta_2')} := \{\pi_1(\eta_2'), \pi_2(\eta_2'), \pi_\alpha^+(\eta_2'), \pi_\alpha^-(\eta_2')\}. \tag{5.2.4}$$

在$\Pi_{\varphi(\eta_2)}$ 与 $\Pi_{\varphi(\eta_2')}$ 之间的选择由推论6.5.6 中的特征稳定性确定。与 (5.1.6) 中类似的计算表明， $\pi_i(\eta_2)$ 和$\pi_\alpha^\pm(\eta_2)$ 的形式度相同。 □

Remark 5.2.5. The L-packets $\Pi_{\varphi(\eta_2)}$ and $\Pi_{\varphi(\eta_2')}$ are those in [LS20, Ex 9.4].

(2) case (5b), where the packet is of size 2 consisting of a supercuspidal and an intermediate series.

证明。 设 $\pi \in \Pi_\varphi$ 是中间系列成员。根据性质 8.1.5 我们有 $\lambda_\varphi = \iota_{\mathrm{GL}_2} \circ \lambda_{\varphi_v}$ 在SO_5-共轭意义下。对于中间级数表示，由于 $\varphi_v\colon W_F' \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 是尖点表示，根据注 5.2.8 我们有 $\varphi_v(w, x) = \varphi(w, \begin{pmatrix} \|w\|^{1/2} & \\ & \|w\|^{-1/2} \end{pmatrix})$，其中

acts on $U = V^2 \oplus 1$ as

$$\begin{pmatrix} \|w\|^{1/2}\varphi(w) & & \\ & 1 & \\ & & \|w\|^{-1/2}\varphi(w) \end{pmatrix}.$$

因此， L-参数的尖点支撑是 $\|\det\|^{1/2}\varphi$。令 φ 对应于 σ $\mathrm{GL}_2(F)$ 在 GL 的局部朗兰兹对应下的酉表示，，因此 $\nu^{1/2}\sigma$ 是$\|\det\|^{1/2}\varphi$ 在 GL 的局部朗兰兹对应下的像。因此， $\pi := \pi(\sigma)$ 是诱导表示 $\nu^{1/2}\sigma \rtimes 1$的一个不可约子表示，根据[ST93，命题 5.6(iv)]。根据性质 8.1.20，它必定是该成员。总结如下，

- when φ has depth zero, the L-packet is of the form

$$\Pi_\varphi := \{\pi(\sigma), \pi_\alpha(\eta)\}, \tag{5.2.6}$$

其中 $\pi_\alpha(\eta)$（对于 $\eta \neq \tau_1$， τ_2）是定理3.1.20(3) 中的（奇异）深度零超尖表示。这样的深度零$q-1$ 个 L参数包，其数量与 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的深度零超尖表示数量一致。

- 当 φ 具有正深度时，令 $\pi(\sigma)$ 为中间级数表示，其中 σ 是 PGL_2 的一个正深度超尖点表示，对应于特征 $\psi(\sigma)\colon E^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$。$\mathrm{GL}_2$ （因此也包括 PGL_2）的局部朗兰兹对应给出典范识别 $E^\times/F^\times \xrightarrow{\sim}$

$R^{(1)}_{E/F}\mathbb{G}_m$ 它将 $\psi(\sigma)$: $E^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$ 与特征 $\chi(\sigma)$: $R^{(1)}_{E/F}\mathbb{G}_m \to \mathbb{C}^\times$对应起来。令 π_χ 为相应的正深度奇异超尖点表示。在这种情况下， L-参数包的形式为

$$\Pi_\varphi := \{\pi(\sigma), \pi_{\chi(\sigma)}\}. \tag{5.2.7}$$

□

Remark 5.2.8. Let $\varphi\colon W'_F \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ be a cuspidal L-parameter for GL_n. Then $\varphi(\mathrm{SL}_2) = 1$.

6. Stability of L-packets

6.1. 抛物不变量对于$\mathrm{GSp}_4(F)$ 情形。 通过用GSp_4,的特征 $\nu^{1/2}\widehat{\chi}_3 \circ \mu$进行扭转，我们可以将注意力集中在 $\delta([\eta_2, \nu\eta_2],1)$上。它被刻画为 $\nu\eta_2 \times \eta_2 \rtimes 1$的子表示 $\nu^{1/2}\eta_2\mathrm{St}_{\mathrm{GL}(2)} \rtimes 1$ 和 $\nu^{1/2}\eta_2\mathrm{St}^{\mathrm{GL}(2)} \rtimes \eta_2$ 的交。

We calculate the invariants of $\delta([\eta_2, \nu\eta_2], 1)$ with respect to G_{x+}, where x is a vertex of the Bruhat-Tits building (i.e., α or δ).

6.1.1. 计算 $\delta([\eta_2, \nu\eta_2],1)^{G_{\alpha+}}$.

定义 6.1.1. 设 H_α 为 $\mathrm{GSp}_{2,2}(F)$ 的抛物子群，定义于 §2.3，它包含子群

$$H^0_\alpha := \{(g,h) \in M_2(\mathfrak{o}) \times \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{-1} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \end{pmatrix} : \det(g) = \det(h) = 1\}. \tag{6.1.2}$$

对于 $F^\times$的一个分歧二次特征 η_2 ，设 $\varpi \in F$ 为一致化元，使得 $\eta_2(\varpi) = 1$（在 $(\mathfrak{o}_F^\times)^2$ 意义下唯一）。我们定义 $G_\beta/G_{\beta+} \cong H_\beta/H_{\beta+}$ 的如下不可约表示:

$$\omega^{\eta_2}_{\mathrm{princ}} := \mathrm{Ind}^{G_\beta}_{G^0_\beta \mathrm{Z}}(R_+(\alpha_0) \boxtimes R_+(\alpha_0)^{\mathrm{diag}(\varpi,1)}) \tag{6.1.3}$$

$$\omega^{\eta_2}_{\mathrm{cusp}} := \mathrm{Ind}^{G_\beta}_{G^0_\beta \mathrm{Z}}(R'_+(\theta_0) \boxtimes R'_+(\theta_0)^{\mathrm{diag}(\varpi,1)}) \tag{6.1.4}$$

这与一致化元 ϖ的选择无关。

由 [SX23，引理 2.0.1],我们有:

Le引理 6.1.5. 存在典范的保持支集的 *Hecke* 代数同构 *ms*

$$\mathcal{H}(\mathrm{GSp}_4//I, \epsilon\otimes\epsilon\otimes 1) \cong \mathcal{H}(\widetilde{\mathrm{GSpin}^\vee_4}//J, \epsilon \circ \widetilde{\det}_1) \tag{6.1.6}$$

$$\mathcal{H}(\mathrm{GSp}_4//I, \epsilon\otimes\epsilon\otimes\epsilon) \cong \mathcal{H}(\widetilde{\mathrm{GSpin}^\vee_4}//J, \epsilon \circ \widetilde{\det}_2) \tag{6.1.7}$$

$\widetilde{\ }$其中 $\mathrm{GSpin}^\vee_4 \cong (\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2)/\mathbb{G}_m$ 和 $\det_i(g_1, g_2) := \det(g_i)$ 是定义良好的同态$\widetilde{\ }\mathrm{GSpin}^\vee_4(F) \to F^\times/(F^\times)^2$。在这些同构下， $\delta([\eta_2, \nu\eta_2], 1)$ 对应于 $\eta_2 \circ \det_i \otimes \mathrm{St}^{\mathrm{GSpin}^\vee_4}$。

根据 Mackey 公式，我们有一个 $G_\alpha/G_{\alpha+} \cong \mathrm{GSp}_{2,2}(\mathbb{F}_q)$ 表示的同构

$$(\nu\eta_2 \times \eta_2 \rtimes 1)^{G_{\alpha+}} \cong \bigoplus_{w \in B\backslash G_2/G_\alpha} \mathrm{Ind}^{G_\alpha/G_{\alpha+}}_{G_\beta \cap wBw^{-1}/(G_{\alpha+}\cap wBw^{-1})}(\epsilon\otimes\epsilon\otimes 1)^w, \tag{6.1.8}$$

其中

$$B\backslash G_2/G_\alpha \cong W(G_2)/W(\mathrm{GSp}_{2,2}) = W/\langle s_\beta, s_{2\alpha+\beta}\rangle = \{1, s_\alpha\}. \tag{6.1.9}$$

Therefore, the $G_{\alpha+}$-invariants of $(\nu\eta_2 \times \eta_2 \rtimes 1)^{G_{\alpha+}}$ gives

$$(\nu\eta_2 \otimes \eta_2 \rtimes 1)^{G_{\alpha+}} \simeq \mathrm{Ind}^{\mathrm{GSp}_{2,2}}_B(\epsilon\otimes 1\otimes\epsilon\otimes 1)^2 \tag{6.1.10}$$

Likewise, computing the $G_{\alpha+}$-invariants gives us the following

$$(\nu^{1/2}\eta_2\mathrm{St}\rtimes 1)^{G_{\alpha+}}\simeq(\nu^{1/2}\eta_2\mathrm{St}\rtimes\eta_2)^{G_{\alpha+}}\simeq \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GSp}_{2,2}}(\epsilon\otimes 1\otimes\epsilon\otimes 1). \tag{6.1.11}$$

We pin down the $G_{\beta+}$-invariants of $\pi(\eta_2)$ in Corollary 6.1.13.

Proposition 6.1.12. *The I_+-invariants of $\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1)$ is*

$$\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1)^{I_+}\cong\epsilon\otimes\epsilon\otimes 1+\epsilon\otimes\epsilon\otimes\epsilon.$$

Proof. A priori we know

$$\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1)^{I_+}\hookrightarrow(\nu\eta_2\times\eta_2\rtimes 1)^{I_+}=\bigoplus_{w\in W}(\epsilon\otimes\epsilon\otimes 1)^w=(\epsilon\otimes\epsilon\otimes 1)^4+(\epsilon\otimes\epsilon\otimes\epsilon)^4.$$

根据引理 6.1.5， $\epsilon\otimes\epsilon\otimes 1$ 在 δ（$[\eta_2,\nu\eta_2]$，1）中的重数，即$\widetilde{\ }$在表示 $\epsilon\circ\det_1$ 中的重数 $\eta_2\mathrm{St}_{\mathrm{SO}_4}$，为 1。因此，对于该特征的所有外尔群轨道，结论同样成立。□

Corollary 6.1.13. *There is an isomorphism of $G_\alpha/G_{\alpha+}$-representations*

$$\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1)^{G_{\alpha+}}\cong\omega_{\mathrm{princ}}^{\eta_2}$$

证明。论证与 [SX23] 中推论 3.0.8 的证明相同。由命题 6.1.12，我们得出 $\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1)^{G_{\beta+}}$ 必定是 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{GSp}_{2,2}}{}_B{}^{2}(\epsilon\otimes 1\otimes\epsilon\otimes 1)$ 的一个不可约分量，即 ω^{η_2}主或 $\omega^{\eta_2'}$主。结合引理 6.1.5，我们得出 $\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1)^{G_{\alpha+}}\cong\omega^{\eta_2}$ 主。 □

6.1.2.计算 $\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1)^{G_{\delta+}}$。再次通过 Mackey 理论计算，我们有：

$$(\nu\eta_2\times\eta_2\rtimes 1)^{G_{\delta+}}\cong\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{F}_q)}^{\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_q)}(\epsilon\otimes\epsilon\otimes 1) \tag{6.1.14}$$

$$(\nu^{1/2}\eta_2\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\rtimes 1)^{G_{\delta+}}\cong\mathrm{Ind}_{P_\alpha}^{\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_q)}(\epsilon\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\otimes 1) \tag{6.1.15}$$

$$(\nu^{1/2}\eta_2\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\rtimes\eta_2)^{G_{\delta+}}\cong\mathrm{Ind}_{P_\alpha}^{G_2(\mathbb{F}_q)}(\epsilon\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\otimes\epsilon), \tag{6.1.16}$$

其中 P_α 是 $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_q)$ 的一个抛物子群。因此， $\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1)^{G_{\delta+}}$ 是 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_q)}{}_{P_\alpha(\mathbb{F}_q)}(\epsilon\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\otimes 1)$ 与 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_q)}{}_{P_\alpha(\mathbb{F}_q)}(\epsilon\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\otimes\epsilon)$ 的交，记作 $\omega_{\mathrm{princ}}^{\epsilon}$。根据 Lusztig 等价 [Lus84a，定理 4.23]，，若 $s\in\mathrm{GSpin}_5(\mathbb{F}_q)$ 是一个 2 阶元素，且其在 $\mathrm{SO}_5(\mathbb{F}_q)$ 中的像为 $\mathrm{diag}(-1,-1,1,-1,-1)$，则 $Z_{\mathrm{GSpin}_5(\mathbb{F}_q)}(s)=\mathrm{GSpin}_4(\mathbb{F}_q)\cong\mathrm{GSp}^{2,2}(\mathbb{F}_q)$：

$$\mathcal{E}(\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_q),s)\cong\mathcal{E}(\mathrm{GSp}_{2,2}(\mathbb{F}_q),1)=\{\mathrm{St}_{\mathrm{GSp}_{2,2}},1\boxtimes\mathrm{GSp}_2,\mathrm{GSp}_2\boxtimes 1,1_{\mathrm{GSp}_{2,2}}\}, \tag{6.1.17}$$

and $\omega_{\mathrm{princ}}^{\epsilon}$ corresponds to $\mathrm{St}_{\mathrm{GSp}_{2,2}(\mathbb{F}_q)}$. Thus, in conclusion:

Proposition 6.1.18. *The following are the*

$$\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1)^{G_{\delta+}}\cong\omega_{\mathrm{princ}}^{\epsilon} \tag{6.1.19}$$

$$\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1)^{G_{\alpha+}}\cong\omega_{\mathrm{princ}}^{\eta_2}. \tag{6.1.20}$$

6.2. **Parahoric invariants for the supercuspidal representations.** Recall from Proposition 3.1.14(3), we defined the supercuspidal representation

$$\pi_\alpha(\eta_2;1):=\text{c-Ind}_{G_\alpha Z}^{\mathrm{GSp}_4}(\omega_{\mathrm{cusp}}^{\eta_2}), \tag{6.2.1}$$

其中 ω^{η_2}尖点$:=(\sigma^{+}{}_{(\lambda,\lambda)})^{(I_2,\mathrm{diag}(\varpi,1))}$ 是 $G_\alpha/G_{\alpha+}$ 的一个尖点表示。我们可以很容易地计算超尖点表示 $\pi_\alpha(\eta_2;1)$ 的 G_{x+}-不变量，对于各种顶点 x 在 Bruhat-Tits 建筑中：

Lemma 6.2.2. *Let $\pi_\alpha(\eta_2;1)$ be as defined in (6.2.1). We have*

$$\pi_\alpha(\eta_2;1)^{G_{\alpha+}} \cong \omega_{\mathrm{cusp}}^{\eta_2} \tag{6.2.3}$$

$$\pi_\alpha(\eta_2;1)^{G_{\delta+}} = 0 \tag{6.2.4}$$

证明。 对于每个顶点 x，由 Mackey 理论可得

$$\pi_\alpha(\eta_2;1)^{G_{x+}} \cong \bigoplus_{g\in G_\alpha\backslash G_2/G_x} \mathrm{Ind}_{G_x\cap g^{-1}G_\alpha g}^{G_x}((\omega_{\mathrm{cusp}}^{\eta_2})^g)^{G_{x+}\cap g^{-1}G_\alpha g} \tag{6.2.5}$$

$$= \bigoplus_{g\in G_\alpha\backslash G_2/G_x} \mathrm{Ind}_{G_x\cap G_{g^{-1}\alpha}}^{G_x}((\omega_{\mathrm{cusp}}^{\eta_2})^g)^{G_{x+}\cap G_{g^{-1}\alpha}}. \tag{6.2.6}$$

这里，

$$((\omega_{\mathrm{cusp}}^{\eta_2})^g)^{G_{x+}\cap G_{g^{-1}\alpha}} \cong (\omega_{\mathrm{cusp}}^{\eta_2})^{G_\alpha\cap G_{gx+}},$$

除非 $\alpha = gx$，否则该式为 0；因为在这种情况下 $G_\beta \cap G_{gx+}$ 会包含某个抛物子群的幺幂根基 G_α，因此 $(\omega^{\eta_2\text{尖点}})^{G_\alpha\cap G_{gx+}} = 0$，因为 $\omega^{\eta_2\text{尖点}}$ 是尖点的。 □

6.3. **关于 GSp4 和 Sp4上的稳定分布。** 仅在本节中，我们改用记号 k 表示非阿基米德局部域，因为我们将记号 F 保留给各面。 首先，我们回顾 [DeB02、 DeB06、DK06]中关于与非分歧环面相关的不变分布的一般理论。现在我们回顾一些更精确的结果，以供后文使用。令 $J(\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{g}$上的不变分布空间。令 $J(\mathcal{N})$ 为幂零轨道积分所张成的空间。

对于 G 的每个外尔群共轭类 $[w]$，考虑由一个面$F \in \mathcal{B}(G)$和与 G_F 中对应于 $[w]$ 的环面 S_w 相关联的环面格林函数 $\mathcal{Q}_w^F$（例如参见 [Car93, §7.6]）组成的对 $(F, \mathcal{Q}_w^F)$。令 S 为 G 中的一个极大 K-分裂 k-环面，它提升该对 (F, S_w)。令 $X_{S_w} \in \mathrm{Lie(S)}(k) \subset \mathfrak{g}_F$ 为一个正则半单元素，使得 X_{S_w} 在 $\mathrm{Lie}(G_F)$ 中的像在 G_F 中的中心化子为 S_w。由于 G^{der} 是单连通的， ${}^G(K)$ $X_{S_w} \cap \mathfrak{g}$ 中有理共轭类的数目与 $X_*(T)/(1-w)X_*(T)$ 的挠点群建立双射，其中 T 是 G 的极大环面。下面的表 4 是 [DK06, 表 5] 针对 GSp4 的类比（注意，Sp4 的相应表格在 [Wal01]，中计算过，尽管我们并不需要它），该表记录了相关有理共轭类的数目。

class of w	$\mathrm{tor}[X_*(T)/(1-w)X_*(T)]$
1	0
A_1	0
$\widetilde{A}_1$	0
$A_1 \times A_1$	$\mathbb{Z}/2$
C_2	0

TABLE 4.

For each character κ of $\mathrm{tor}[X_*(T)/(1-w)X_*(T)]$, one can associate a distribution

$$T_w(\kappa) := \sum_{\lambda\in\mathrm{tor}[X_*(T)/(1-w)X_*(T)]} \kappa(\lambda)\cdot\mu_{X_{S_w}^\lambda}, \tag{6.3.1}$$

其中， $X_{S_w}^\lambda$ 属于 ${}^G(K)X_{S_w} \cap \mathfrak{g}$ 中由 λ索引的 G-共轭类。注意，对于任意约化群 G， $T_w(1)$ 都是稳定的。另一方面， ${}^G(K)X$ 中与Lie(S)(k) 相交的有理类由商参数化

$$N(F, S_w) := [N_{G(K)}(\mathbf{S}(K))/\mathbf{S}(K)]^{\mathrm{Gal}(K/k)}/[N_G(\mathbf{S}(k))/\mathbf{S}(k)] \tag{6.3.2}$$

我们在下表中记录上述商集的基数：

class of w	vertex	$\lvert N(F,S_w)\rvert$
$A_1\times A_1$	C_2	1
$A_1\times A_1$	$A_1\times A_1$	1

一般而言，考虑集合 $I^c:=\{(F,\ \mathcal{G})\}$（例如参见 [DK06，§4。3]）由以下对象构成的对组成：一个面F 以及 Lie$(G_F)(\kappa_k)$ 上的尖点广义格林函数；该集合带有等价关系 $\sim$，如定义 4.1.2 所述同上。

令 $\mathfrak{g}_0$ 为 $\mathfrak{g}$ 中紧元素的集合，并令 $J(\mathfrak{g}_0)\subset J(\mathfrak{g})$ 为支集包含于 $\mathfrak{g}_0$ 的分布子空间。令 $\mathcal{D}_0$ 为 Iwahori-Hecke 代数的李代数对应物的不变版本，并令 $\mathcal{D}_0^0$ 为由包含于一个固定的 alcove $F_\varnothing$（的闭包）中的面所张成的子代数。我们回顾 DeBacker 和 Waldspurger 的以下齐次性结果。

Theorem 6.3.3 (Waldspurger, DeBacker)**.** *We have*

(1) 限制$_{\mathcal{D}_0}J(\mathfrak{g}_0)$ =限制$_{\mathcal{D}_0}J(\mathcal{N})$。

(2) 假设 $D\in J(\mathfrak{g}_0)$。我们有

$$\mathrm{res}_{\mathcal{D}_0}D=0\quad \textit{if and only if}\ \mathrm{res}_{\mathcal{D}_0^0}D=0$$

由此可推得以下结论。

推论 6.3.4。设 $D\in J(\mathfrak{g}_0)$。我们有

$$\mathrm{res}_{\mathcal{D}_0}D=0\quad \textit{if and only if}\ D(\hat{\mathcal{G}}_F)=0\quad \textit{for all}\ (F,\mathcal{G})\in I^c/\sim$$

以下是稳定分布的列表:

$$\begin{aligned}
D^{\mathrm{st}}_{C_2}&:=D_{(F_{C_2},\mathcal{Q}^{F_{C_2}}_{S_{C_2}})}\\
D^{\mathrm{st}}_{A_1}&:=D_{(F_{A_1},\mathcal{Q}^{F_{A_1}}_{S_{A_1}})}\\
D^{\mathrm{st}}_{\widetilde{A}_1}&:=D(F_{\widetilde{A}_1},\mathcal{Q}^{F_{\widetilde{A}_1}}_{S_{\widetilde{A}_1}})\\
D^{\mathrm{st}}_{e}&:=D_{(F_e,\mathcal{Q}^{F_e}_{S_e})}\\
D^{\mathrm{st}}_{A_1\times A_1}&:=D_{F_{C_2},\mathcal{Q}^{F_{C_2}}_{S_{A_1\times A_1}}}+D_{(F_{A_1\times A_1},\mathcal{Q}^{F_{A_1\times A_1}}_{S_{A_1\times A_1}})}\\
D^{\mathrm{unst}}_{A_1\times A_1}&:=D_{F_{C_2},\mathcal{Q}^{F_{C_2}}_{S_{A_1\times A_1}}}-D_{(F_{A_1\times A_1},\mathcal{Q}^{F_{A_1\times A_1}}_{S_{A_1\times A_1}})}\\
D^{\mathrm{st}}_{F_{A_1\times A_1},\mathcal{G}_{\mathrm{sgn}}}&:=D_{(F_{A_1\times A_1},\mathcal{G}_{\mathrm{sgn}})}
\end{aligned}\tag{6.3.5}$$

最后，我们记录下 [DK06 中的以下结果，引理 6.4。1]（另见 [Wal01，定理 '四' IV。13]），以备后用。令 $\mathcal{B}^{\mathrm{st}}$ 为上述列表中的稳定分布集合（6.3.5）。

引理 6.3.6（Waldspurer，DeBacker-Kazhdan）。集合 $\{\mathrm{res}_{\mathcal{D}_0}D|D\in\mathcal{B}^{\mathrm{st}}\}$ 中的元素构成 $\mathrm{res}_{\mathcal{D}_0}J(\mathfrak{g}_0)\cap\mathrm{res}_{\mathcal{D}_0}J^{\text{稳定}}(\mathfrak{g})$ 的一个基。

6.4. **Characters on a neighborhood of** 1. In this section, we express $\delta[\eta_2,\nu\eta_2]^{G_{x+}}$ in terms of generalized Green functions, for $x=\alpha,\delta$.

(1)当 $F=F_{C_2}$ 对应于顶点 δ时，我们有 $\delta([\eta_2,\nu\eta_2],\ 1)^{G_{\delta+}}\cong\omega^{\epsilon}_{\mathrm{princ}}$ 对应于 $\mathrm{St}^{\mathrm{GSp}_{2,\ 2}(\mathbb{F}_q)}$ 在 Lusztig 等价（6.1.17）下。由 [DL76], Steinberg 的特征为

$$\mathrm{Ch}_{\mathrm{St}_{\mathrm{GSp}_{2,2}}}=\frac{1}{4}\left(R^{A_1\times A_1}_{A_1\times A_1}-R^{A_1\times A_1}_{A_1\times 1}-R^{A_1\times A_1}_{1\times A_1}+R^{A_1\times A_1}_{1\times 1}\right).\tag{6.4.1}$$

Since Lusztig's equivalence (6.1.17) preserves multiplicities, we have

$$\mathrm{Ch}_{\pi^{\epsilon}_{\mathrm{princ}}}=\frac{1}{4}\left(R^{C_2}_{A_1\times A_1}-2R^{C_2}_{A_1}+R^{C_2}_{1}\right).\tag{6.4.2}$$

Restricting to the unipotent locus, we have

$$\mathrm{Ch}_{\pi^{\epsilon}_{\mathrm{princ}}}(u) = \frac{1}{4}\left(\mathcal{Q}^{F_{C_2}}_{A_1\times A_1} - 2\mathcal{Q}^{F_{C_2}}_{A_1} + \mathcal{Q}^{F_{C_2}}_{1}\right). \tag{6.4.3}$$

（2）当 $F = F_{A_1\times A_1}$ 对应于顶点 α 时，我们有 $\delta([\eta_2,\nu\eta_2],\ 1)^{G_{\alpha+}} \cong \omega^{\eta_2}$主。特征公式可以用与 [SX23, （3.4.5）] 相同的方式计算，并且有

$$\mathrm{Ch}_{\pi^{\eta_2}_{\mathrm{princ}}} = \frac{1}{2}(\mathcal{Q}^{F_{A_1\times\tilde{A}_1}}_{1} \pm q^*\mathcal{G}_{\mathrm{sgn}}). \tag{6.4.4}$$

(3) When $F = F_{A_1}$, since $\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1)^{G_{F+}}$ is the Jacquet restriction $r^{A_1\times A_1}_{A_1}(\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1))$, thus by (6.1.3) on the unipotent locus we have $\mathrm{Ch}(\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1)^{G_{F+}}) = \mathcal{Q}^{F_{A_1}}_1$;

(4) When $F = F_{\tilde{A}_1}$, we have $\mathrm{Ch}(\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1)^{G_{F+}}) = \mathcal{Q}^{F_{\tilde{A}_1}}_1$;

(5) When $F = F_e$, we have $\mathrm{Ch}(\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1)^{G_{F+}}) = 2$.

Similarly, we have for $F = F_{A_1\times A_1}$,

$$\mathrm{Ch}(\pi_\alpha(\eta_2;1)^{G_{F+}}) = \frac{1}{2}(\mathcal{Q}^{F_{A_1\times A_1}}_{A_1\times A_1} \pm q^*\mathcal{G}_{\mathrm{sgn}}). \tag{6.4.5}$$

Therefore, we have the following

命题 6.4.6. 对于任意（可以相同的）分歧二次特征 η_2,η_2'，和式 $\delta([\eta_2,\nu\eta_2],\varrho)+\pi_\alpha(\eta_2';\rho)$ 在拓扑幺幂元素上具有稳定特征。

证明。 正如 §6.1 开头所指出的，只需考虑情形 $\varrho = 1$，按$\delta([\eta_2,\nu\eta_2],\ \varrho)$ 的记号。由上述讨论可知，对于某些可显式计算的常数 c_i,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ch}_{\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1)} &= c_1\cdot\frac{1}{2}(D^{\mathrm{st}}_{A_1\times A_1} - D^{\mathrm{unst}}_{A_1\times A_1}) \pm c_2\cdot D^{\mathrm{st}}_{(F_{A_1\times A_1},\mathcal{G}_{\mathrm{sgn}})} + cD^{\mathrm{st}}_e\\
\mathrm{Ch}_{\pi_\alpha(\eta_2;1)} &= c_1\cdot\frac{1}{2}(D^{\mathrm{st}}_{A_1\times A_1} + D^{\mathrm{unst}}_{A_1\times A_1}) \pm c_2\cdot D^{\mathrm{st}}_{(F_{A_1\times A_1},\mathcal{G}_{\mathrm{sgn}})}
\end{aligned}$$

Thus by Lemma 6.3.6, the sum is always stable. □

6.5. **Characters on a neighborhood of s.** Let

$$s = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GSp}_4(F)$$

为 2 阶，使得 $Z^{\mathrm{GSp}_4}(s) = \mathrm{GSp}^{2,2}$。根据 [AK07 §7], 中的构造，$\mathrm{GSp}_4$ 上的分布$\mathrm{Ch}_{\delta([\eta_2,\nu\eta_2],\varrho)}$ 和 $\mathrm{Ch}_{\pi_\alpha(\eta_2;\varrho)}$ 在 $(\mathrm{GSp}^{2,2})^{0+}$上诱导出分布 $\Theta_{\delta([\eta_2,\nu\eta_2],\varrho)}$ 和 $\Theta_{\pi_\alpha(\eta_2;\varrho)}$，即$\mathrm{GSp}^{2,2,}$ 中的拓扑幂幺元素，使得所附的局部常值函数相容（见 [AK07，引理 7.5]）。我们将看到，何时和$\Theta_{\delta([\eta_2,\nu\eta_2],\varrho)} + \Theta_{\pi_\alpha(\eta_2';\varrho)}$ 是 $(\mathrm{GSp}^{2,2})^{0+}$ 上的稳定分布。

We now look at the characters on an element of the form su for u topologically unipotent. They follow from computations in the previous section §6.4.

（1）当 $F = F_{C_2}$时，由 [DL76定理 4。2], 我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ch}_{\omega^{\epsilon}_{\mathrm{princ}}}(su) &= \frac{1}{4}\left(R^{\epsilon}_{S_{A_1\times A_1}}(su) - 2R^{\epsilon}_{S_{A_1}}(su) + R^{\epsilon}_{S_1}(su)\right)\\
&= (-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{1}{2}\left(\mathcal{Q}^{A_1\times A_1}_{S_{A_1\times A_1}}(u) - \mathcal{Q}^{A_1\times A_1}_{S_{A_1\times 1}}(u) - \mathcal{Q}^{A_1\times A_1}_{S_{1\times A_1}}(u) + \mathcal{Q}^{A_1\times A_1}_{S_1}(u)\right).
\end{aligned} \tag{6.5.1}$$

（2）当 $F = F_{A_1\times A_1}$ 时，我们有

$$\mathrm{Ch}_{\delta([\eta_2,\nu\eta_2],1)^{F_+}}(su) = (-1)^{\frac{q-1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\mathcal{Q}_1^{F_{A_1\times A_1}}(u)\pm q^*\mathcal{G}_{\mathrm{sgn}}(u)\right) \tag{6.5.2}$$

$$\mathrm{Ch}_{\pi_\alpha(\eta_2;1)^{F_+}}(su) = (-1)^{\frac{q+1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\mathcal{Q}_{A_1\times A_1}^{F_{A_1\times A_1}}(u)\pm q^*\mathcal{G}_{\mathrm{sgn}}(u)\right) \tag{6.5.3}$$

The following lemma is an analogue of [SX23, Lemma 3.5.1].

引理 6.5.4。 分布$D_{(F_{A_1\times A_1},\mathcal{G}_{\mathrm{sgn}})}$ 在 $\mathrm{GSp}_{2,2}$ 上不是稳定的。

证明。 $\mathrm{GSp}_{2,2}(F)$上的分布是稳定的当且仅当它在$\mathrm{GL}_2(F)\times\mathrm{GL}_2(F)$的共轭下稳定。因此$\mathrm{GSp}_{2,2}$ 上的所有稳定分布必须从$\mathrm{GL}_2(F)\times\mathrm{GL}_2(F)$上的不变分布限制而来。但$\mathrm{GL}_2(F)\times\mathrm{GL}_2(F)$上的唯一不变分布由半单轨道积分张成，且$D_{(F_{A_1\times A_1},\mathcal{G}_{\mathrm{sgn}})}$ 与它们线性无关（可通过针对 $\mathcal{G}_{\mathrm{sgn}}$求值看出）。 □

命题 *6.5.5.* 设 $G = GSp_4(F)$。对于分歧二次特征 η_2 和 η_2'，特征 $Ch_{\delta([\eta_2,\nu\eta_2],\varrho)} + Ch_{\pi_\alpha(\eta_2';\varrho)}$ 在 s 的一个邻域内稳定，当且仅当 $\eta_2 = \eta_2'$。因此，对于每个分歧二次特征 η_2，$\{\delta([\eta_2,\nu\eta_2],\varrho)\ \pi_\alpha(\eta_2;\varrho)\}$ 是一个 L-参数包，正如性质 *8.1.27* 所规定的那样。

证明。 这由上述计算（6.5.1）、（6.5.2）和（6.5.3），以及引理6.5.4 推出，其中 $D_{(F_{A_1\times A_1},\mathcal{G}_{\mathrm{sgn}})}$ 是 $\mathrm{GSp}_{2,2}$ 上的非稳定分布。□

现在，根据性质 8.1.26，$\mathrm{Sp}_4\to\mathrm{GSp}_4$，的函子性，我们得到命题 6.5.5的以下推论。设 $\pi_i(\eta_2)$ 如（ 5.2.1 ）中所定义。设 $\pi_\alpha^{\pm}(\eta_2)$ 如命题 3.1.20(3) 中所定义。

推论 *6.5.6*。设 $G = Sp_4(F)$。特征 $Ch_{\pi_1(\eta_2)} + Ch_{\pi_2(\eta_2)} + Ch_{\pi_\alpha^+(\eta_2)} + Ch_{\pi_\alpha^-(\eta_2)}$ 在 s 的某个邻域内稳定，对每个分歧二次特征 η_2 都如此。因此，根据性质 *8.1.27* 的规定，我们得到以下显式 L-参数包：

$$\Pi_{\varphi(\eta_2)} := \{\pi_1(\eta_2),\pi_2(\eta_2),\pi_\alpha^+(\eta_2),\pi_\alpha^-(\eta_2)\},$$

for each ramified quadratic character η_2.

Proof. Indeed, by definition we have

$$\delta([\widehat{\chi}_1,\nu\widehat{\chi}_1],1)|_{\mathrm{Sp}_4(F)} = \pi_1(\chi_1)+\pi_2(\chi_1)$$

and

$$\pi_\alpha(\eta_2;1)|_{\mathrm{Sp}_4(F)} = \text{c-Ind}_{G_\alpha}^{\mathrm{Sp}_4}(\omega_{\mathrm{cusp}}^{\eta_2}) \tag{6.5.7}$$

$$= \text{c-Ind}_{G_\alpha}^{\mathrm{Sp}_4}(R'_+(\theta_0)\boxtimes(R'_+(\theta_0))^{\mathrm{diag}(\varpi,1)} + R'_-(\theta_0)\boxtimes(R'_-(\theta_0))^{\mathrm{diag}(\varpi,1)}) \tag{6.5.8}$$

$$= \pi_\alpha^+(\eta_2)+\pi_\alpha^-(\eta_2). \tag{6.5.9}$$

The claim now follows from Proposition 6.5.5. □

7. Explicit L-parameters

我们为定理 L中的每个可约诱导表示构造参数 3.2.4。对于并非本质缓增的表示，我们给出显式的朗兰兹分类，因此根据性质8.1.3，我们得到显式的 L-参数（因为局部朗兰兹对应对于GSp_4的 Levi子群已知）。我们只给出 L-参数对于GSp_4，，但对于 Sp_4 的参数则由函子性、性质8.1.26得到。

7.1.GSp4的主系列。我们继续考察Bernstein块：令 $\mathfrak{s} = [T, \chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \theta]$。那么根据备注2.2.2，$\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \theta$的对偶是同态 $F^\times \to T^\vee(\mathbb{C})$，由$\widehat{\theta}^{-1}$ diag$(1, \widehat{\chi_2}^{-1}, \widehat{\chi_1}^{-1}, \widehat{\chi_1}^{-1}\widehat{\chi_2}^{-1})$给出，其到 $\mathfrak{o}_F^\times$ 的限制 $c^\mathfrak{s}$ 是良定义的。令 $\mathcal{J}^\mathfrak{s} = Z_{G^\vee}(\mathrm{Im}(c^\mathfrak{s}))$，并令 $J^\mathfrak{s}$ 为Langlands 对偶群。那么 [Roc98] 给出$\mathcal{H}(G//J_\chi, \chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \theta)$与 $\mathcal{H}(J^\mathfrak{s}//I^\mathfrak{s}, 1_{I^\mathfrak{s}})$之间的一个（非典范）同构，其中 $I^\mathfrak{s}$是 $J^\mathfrak{s}$的 Iwahori 子群。存在以下情形（在外尔群共轭意义下）：

(J1) 若 $\chi_1 = \chi_2 = 1$ 则 $\mathcal{J}^\mathfrak{s} = G^\vee$。Iwahori-Hecke 代数的表示分类见 [Ram03，表 51]。(J2) 若 $\chi_1 \neq 1$ 且 $\chi_2 = 1$，则 $\mathcal{J}^\mathfrak{s} = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GSp}_0$，因此 $J^\mathfrak{s} = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GSp}_2$。(J3) 若 $\chi_1 = \chi_2^{-1} \neq 1$ 且 $\chi_1^2 = 1$，则 $\mathcal{J}^\mathfrak{s} = \{(g, h) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) : \det(g) = \det(h)\}$。这里$J^\mathfrak{s} = \mathrm{GL}_2(F) \times \mathrm{GL}_2(F)/F^\times$。Iwahori-Hecke 代数的表示分类见[Ram03，表 21]。(J4) 若 $\chi_1 = \chi_2^{-1}$且 $\chi_1^2 \neq 1$作用于 $\mathfrak{o}_F^\times$，则 $\mathcal{J}^\mathfrak{s} = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GSp}_2$，因此 $J^\mathfrak{s} = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GSp}_0$。Iwahori-Hecke 代数的表示分类见 [Ram03，表 21]。

We have the following cases:

- 在情形1(a)i中，唯一的本质缓增表示是 $\nu^{1/2}\chi_2\mathrm{StGL}_2 \rtimes \theta$，其中 $e(\chi_2) = 1^-2$。–如果 χ_2 未分歧，我们处于情形 (J1)。这是 t_e 在表 5.1 的情形，其中 [Ram03] 因此增强的 L-参数为：$(\varphi_\sigma, [1^4], 1)$, $(\varphi_\sigma, [2^2], 1)$。– 在情形 (J3)中，当 χ_2^2 未分歧但 χ_2 不是时，我们有 $J^\mathfrak{s}$，类型为 $A_1 \times A_1$。按照 [Ram03] 的表 2.1 的记号，这是 $t_a \times t_o$，因为诱导表-示的长度为 2，并且有一个缓增子商。因此增强的 L-参数为$(\varphi_\sigma, [1^4], 1)$, $(\varphi_\sigma, [2^2], 1)$。– 在情形 (J4) 中，当 χ_2^2分歧时，我们有 $J^\mathfrak{s} = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GSp}0$，类型为 A_1，这是 [Ram03 的表 2.1] 中的情形 t_a，所以 L-参数为$(\varphi_\sigma, [1^4], 1)$, $(\varphi_\sigma, [2^2], 1)$

- 在情形 1(a)ii 中，唯一的本质缓增表示是 $\chi_1 \rtimes \nu^{1/2}\theta\mathrm{StGSp}2$，对于 $e(\chi_1) = 0$。其中 $\mathfrak{s} = [\chi_1, 1, \theta]$。– 在情形(J1)中，当 χ_1 未分歧时，我们有 $J^\int = G^\vee$。这是 t_e 表5.1 中的情形，见[Ram03]，因此增强的 L-参数为：$(\varphi_\sigma, [1^4], 1)$、$(\varphi_\sigma, [2^2], 1)$。– 在情形 (J2) 中，当 χ_1分歧时，我们有 $J^\int = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GSp}2$。这是 t_a中的情形，见 [Ram03，表 2.1] 因此 L-参数为$(\varphi_\sigma, [1^4], 1)$、$(\varphi_\sigma, [2^2], 1)$
- In case 1(a)iii the Steinberg representation corresponds to $(\varphi_{\sigma,[4]}, 1)$, with the regular unipotent.
- In case 1(a)iv the representation $\delta([\chi_2, \nu\chi_2], \theta)$ is essentially square-integrable, living in the .
  - 在情形(J1)中，当 χ_2 是非分歧二次特征时，我们有 $J^\mathfrak{s} = G^\vee$。这是 [Ram03表5.1] 中的情形 t_a 或 t_c。要确定我们属于哪种情形，注意到$\delta([\eta_2, \nu\eta_2], \theta)^{G_{\delta+}}$在 Lusztig 等价_$\mathcal{E}(\mathrm{GSp}_4, \epsilon \otimes \epsilon \otimes \theta) \cong \mathcal{E}(Z^{\mathrm{GSpin}_5}(s), 1) = \mathcal{E}(\mathrm{GSpin}_4, 1)$下对应于 $\mathrm{St}^{\mathrm{GSpin}_4}$。因此，

$$\begin{aligned}\dim \delta([\eta_2, \nu\eta_2], \theta)^I &= \langle \delta([\eta_2, \nu\eta_2], \theta)^{G_{\delta+}}, R_T^1 \rangle \\ &= \langle \mathrm{St}_{\mathrm{GSpin}_4}, R_T^1 \rangle = 1,\end{aligned}$$

    and we are in case t_a of [Ram03, Table 5.1]. Thus the L-parameter of $\delta([\chi_2, \nu\chi_2], \theta)$ is $(\varphi_{\sigma,1}, 1)$, with trivial unipotent.
  - In case (J4), when χ_2 is ramified, we have $J^\mathfrak{s}$ of type $A_1 \times A_1$. This is case $t_a \times t_a$ in the notation of [Ram03, Table 2.1]. Thus the L-parameters are:

$$(\varphi_{\sigma,[1^4]}, 1), (\varphi_{\sigma,[2,1^2]}, 1), (\varphi_{\sigma,[2,1^2]}, 1), (\varphi_{\sigma,[2^2]}, 1).$$

Here there is a slight abuse of notation; the two unipotents $[2,1^2]$ are embedded into $\mathcal{G}_\varphi$ in different ways.

- 在情形 1(b)i中，其中 $\mathfrak{s}=[T,1\otimes 1\otimes\theta]$，我们有 $J^{\mathfrak{s}}=G^\vee$。这里有两个本质 tempered 子商，因此我们处于 t_b 的 [Ram03，表 5。1]:

Indexing triple	nilpotent orbit	representation
$(t_b,0,1)$	$[1^4]$	$J(\nu;\ 1_{F^\times}\rtimes\theta)$
$(t_b,e_\beta,1)$	$[2^2]$	$J(\nu^{1/2}\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2};\ \theta)$
$(t_b,e_{\alpha_1+\beta},-1)$	$[2,1^2]$	τ
$(t_b,e_{\alpha_1+\beta},1)$	$[2,1^2]$	τ'

We again used that $\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}$ corresponds to the regular unipotent under LLC for GL_2.

- 在情形1(b)iii中，表示 $\nu^{1/2}\chi_2\mathrm{St}_{\mathrm{GL}_2}\rtimes\theta$ 是本质缓增的。其中 $\mathfrak{s}=[T,\chi_1\otimes\chi_1\otimes\theta]$，且 $\chi_1^2=1$，二者必居其一：– 在情形 (J1) 中，当 $\chi_1=1$时，我们有 $J^{\mathfrak{s}}=G^\vee$。于是我们处于 [Ram03 的表 5中的情形 t_e 。因此， L-参数为$(\varphi_{[1^4]},1)$ 和 $(\varphi_{[2^2]},1)$。–在情形 (J4)中，当 $\chi_1\neq 1$ 时，我们有 $J^{\mathfrak{s}}$，其类型为 $A_1\times A_1$。按照 [Ram03 的表 2 中的记号，这是 $t_a\times t_o$ 类型。因此， L-参数为 $(\varphi_{[1^4]},1)$ 和 $(\varphi_{[2^2]},1)$。

7.2. GSp_4 的中间系列。

引理 *7.2.1.* </style>设 φ 是 W_F 的二维不可约半单表示。那么 $\varphi|_{I_F}$ 仍然不可约。

证明。反设结论不成立，即 $\varphi|_{I_F}=\zeta_1\oplus\zeta_2$，其中 ζ_i 是 I_F 的某些特征。由于 W_F 在 $I_F^{\mathrm{ab}}\cong\mathfrak{o}_F^\times$ 上平凡作用，群 W_F 与 $\widehat{\zeta}_1\oplus\widehat{\zeta}_2$ 交织。因此，若 $\widehat{\zeta}_1\neq\widehat{\zeta}_2$，则 φ 也分解为两个不同的特征，矛盾；若 $\zeta_1=\zeta_2$，则对某个 $w\in W_F$，有 $\varphi(w)$，使得 $|w|=1$ 可对角化，从而给出 φ 的一个分解。□

7.2.1.当 $L=\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GSp}_0$，即情形2。设 $\mathfrak{s}=[L,\pi\otimes\chi]$，其中我们假设 $\omega_\pi=1$。根据备注2.2.2，Levi子群的局部朗兰兹对应给出一个 L-参数 $\widehat{\chi}^{-1}\otimes\widehat{\chi}^{-1}\varphi_\pi^\vee=\widehat{\chi}^{-1}(1\otimes\varphi_\pi^\vee)$: $W_F\to\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})\times\mathrm{GSp}_2(\mathbb{C})$，其限制 $c^{\mathfrak{s}}$ 到 I_F 是良定义的。中心化子 $\mathcal{J}^{\mathfrak{s}}:=\mathrm{Z}_{G^\vee}(\mathrm{Im}(c^{\mathfrak{s}}))$与 χ无关。当 $J^{\mathfrak{s}}$连通时，我们有双射 $\mathrm{Irr}^{\mathfrak{s}}(G)\cong\mathrm{Irr}(\mathcal{H}(J^{\mathfrak{s}}//I^{\mathfrak{s}}))$，其中Langlands 对偶群的 F-有理点群 $\mathcal{J}^{\mathfrak{s}}$和 $I^{\mathfrak{s}}$是一个 Iwahori 子群。

根据引理 7.2.1，限制 $\varphi|_{I_F}$保持不可约，因此 $\mathcal{J}^{\mathfrak{s}}=\{(z,\ g)\in\mathbb{C}^\times\times\mathrm{GSp}_2(\mathbb{C}):\ \det(g)=z^2\}\cong\mathbb{C}^\times\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$，从而 $J^{\mathfrak{s}}=F^\times\times\mathrm{PGL}_2(F)$。由于诱导表示的长度为 2，我们处于 t_a 的 [Ram03表 2.1]，，且缓增子表示的 L-参数为$(\varphi_\sigma,\ _{[2,1^2]},\ 1)$。

7.2.2. 当 $L=\mathrm{GL}_1\times\mathrm{GSp}_2$，即，情形 3。设 $\mathfrak{s}=[L,\chi\otimes\pi]$。根据注 2.2.2，Levi子群的局部 Langlands 对应给出一个 L-参数

$$\varphi_\pi^\vee\otimes\det(\varphi_\pi^\vee)\widehat{\chi}^{-1}\colon W_F\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{GSp}_0(\mathbb{C}),$$

whose restriction $c^{\mathfrak{s}}$ to I_F is well-defined. The centralizer $\mathcal{J}^{\mathfrak{s}}:=\mathrm{Z}_{G^\vee}(\mathrm{Im}(c^{\mathfrak{s}}))$ is independent of χ. That is,

$$\varphi_\pi^\vee\otimes\det(\varphi_\pi^\vee)\widehat{\chi}^{-1}(w)=\begin{pmatrix}\varphi_\pi^\vee(w) & \\ & \widehat{\chi}^{-1}(w)\varphi_\pi^\vee(w)\end{pmatrix}.$$

诱导表示 $\chi\rtimes\pi$ 仅在以下情况下不可约：a) $\chi=1_{F^\times}$ 或b) $\chi=\nu^{\pm1}\xi_o$，其中ξ_o 为二阶且 $\xi_o\pi\cong\pi$。在两种情况下，$\widehat{\chi}\varphi_\pi=\varphi_\pi$，因此 I_F-表示 $c^{\mathfrak{s}}$ 就是 $\mathrm{diag}(\varphi_\pi^\vee(w)\ \varphi_\pi^\vee(w))$。

Here, in the notation of [AX22b, §2.1],

$$\mathfrak{X}_{\mathrm{nr}}(M,\pi):=\{\xi\in\mathfrak{X}_{\mathrm{nr}}(M):\xi\otimes\pi\cong\pi\}$$

具有 1 阶或 2 阶，因为 $\xi\otimes\pi\cong\pi$ 蕴含 $\xi^2\omega_\pi=\omega_\pi$. 此外， $W(M,\mathcal{O})$ 是 2 阶，因为外尔群通过 $\chi\otimes\pi\mapsto\chi^{-1}\otimes\chi\pi$. 因此， $W(M,\pi,\mathfrak{X}_{\mathrm{nr}}(M))$ 是 2 阶或 4 阶，并且由 [Sol22], 存在一个双射

$$\mathrm{Irr}^{\mathfrak{s}}(G)\simeq\mathrm{Irr}(\mathbb{C}[\mathfrak{X}_{\mathrm{nr}}(M)]\rtimes\mathbb{C}[W(M,\pi,\mathfrak{X}_{\mathrm{nr}}(M))]).$$

The Kazhdan-Lusztig triples can be computed by following the commutative diagram in Property 8.1.19.

8. Main Theorem

8.1. **Properties of LLC.** We assume for the rest of this paper that p does not divide the order of the Weyl group.

We now state a compatibility property of the LLC with supercuspidal supports.

Definition 8.1.1. [Vog93] The *infinitesimal parameter* of an L-parameter φ for G is $\lambda_\varphi\colon W_F\to G^\vee$ defined by, for $w\in W_F$,

$$\lambda_\varphi(w):=\varphi\left(w,\begin{pmatrix}\|w\|^{1/2}&0\\0&\|w\|^{-1/2}\end{pmatrix}\right)\quad\text{for any } w\in W_F. \tag{8.1.2}$$

Property 8.1.3. *Let (P,π,ν) be a standard triple for G. We have*

$$\varphi_{J(P,\pi,\nu)}=\iota_{L^\vee}\circ\varphi_{\pi\otimes\chi_\nu}.$$

性质 8.1.4. ([Art06, §2], 和 [Kal16, 猜想 B]) 的元素 $\Pi_\varphi(G)$ 与 不可约表示(S_φ)成双射。

以下 性质是 [Vog93, 猜想 7.18],或等价地 [Hai14, 猜想 5.2.2].

性质 8.1.5. 设 $P\subset G$ 为具有*Levi*子群 L的抛物子群，且 σ 为 L的超尖点表示。对于诱导表示 ${}^G_P\sigma$的任何不可约成分 π ，无穷小 L-参数λ_{φ_π} 和 $\iota_{L^\vee}\circ\lambda_\sigma$ 是 $G^\vee$-共轭的。

8.1.6. 以下性质 8.1.19 推广了性质 8.1.5。设 $\mathcal{L}(G)$ 为 G的Levi子群共轭类的一组代表元。由 [ABPS17a, 命题 3.1], 对于任何 $L\in\mathcal{L}(G)$ 存在一个典范同构

$$W_G(L)\xrightarrow{\sim}W_{G^\vee}(L^\vee). \tag{8.1.7}$$

We set the following notations

$$\mathrm{Z}_{G^\vee}(\varphi):=\mathrm{Z}_{G^\vee}(\varphi(W_F'))\quad\text{and}\quad\mathcal{G}_\varphi:=\mathrm{Z}_{G^\vee}(\varphi(W_F)). \tag{8.1.8}$$

We also consider the following component groups

$$A_\varphi:=\mathrm{Z}_{G^\vee}(\varphi)/\mathrm{Z}_{G^\vee}(\varphi)^\circ\quad\text{and}\quad S_\varphi:=\mathrm{Z}_{G^\vee}(\varphi)/\mathrm{Z}_{G^\vee}\cdot\mathrm{Z}_{G^\vee}(\varphi)^\circ. \tag{8.1.9}$$

Recall that $A_{\mathcal{G}_\varphi}(u_\varphi)$ denotes the component group of $\mathrm{Z}_{\mathcal{G}_\varphi}(u_\varphi)$. By [Mou17, § 3.1],

$$A_\varphi\simeq A_{\mathcal{G}_\varphi}(u_\varphi),\text{where } u_\varphi:=\varphi\left(1,\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right). \tag{8.1.10}$$

令 (φ,ρ) 为 G 的增强 L-参数。回忆 $u_\varphi:=\varphi\left(1,\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)$。则 u_φ 是在 (8.1.8) 中定义的（可能不连通的）复约化群 $\mathcal{G}_\varphi$ 中的幂幺元，并且根据 (8.1.10)， $\rho\in\mathrm{Irr}(A_{\mathcal{G}_\varphi}(u_\varphi))$。令 $\mathfrak{t}_\varphi:=(\mathcal{L}^\varphi,(v^\varphi,\epsilon^\varphi))$ 表示 (u_φ,ρ) 的尖点支撑，即.

$$(\mathcal{L}^\varphi,(v^\varphi,\epsilon^\varphi)):=\mathrm{Sc}_{\mathcal{G}_\varphi}(u_\varphi,\rho). \tag{8.1.11}$$

In particular, $(v^\varphi,\epsilon^\varphi)$ is a cuspidal unipotent pair in $\mathcal{L}^\varphi$.

将 φ 与 $\mathrm{Z}^{\mathcal{G}_\varphi}(u_\varphi)$ 中一个适当的元素共轭后，我们可以假设 $\mathcal{L}^\varphi$ 的恒等连通分支对所有 $z\in\mathbb{C}^\times$ 都包含 $\varphi\left(\left(1,\ \left(\begin{smallmatrix}z&0\\0&z^{-1}\end{smallmatrix}\right)\right)\right)$。回想一下，根据雅各布森 – 莫罗佐夫定理

（例如参见 [Car93，第 53]节），任意 v 中的 $\mathcal{L}^\varphi$ 幂幺元都可以扩张为代数群同态

$$j_v\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}^\varphi \text{ satisfying } j_v\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) = v. \tag{8.1.12}$$

Moreover, by [Kos59, Theorem 3.6], this extension is unique up to conjugation in $\mathrm{Z}_{\mathcal{L}^\varphi}(v)^\circ$. We shall call a homomorphism j_v satisfying these conditions to be *adapted to* φ.

By [AMS18, Lemma 7.6], up to $G^\vee$-conjugacy, there exists a unique homomorphism $j_v\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}^\varphi$ which is adapted to φ, and moreover, the cocharacter

$$\chi_{\varphi,v}\colon z \mapsto \varphi\left(1, \left(\begin{smallmatrix}z&0\\0&z^{-1}\end{smallmatrix}\right)\right) \cdot j_v\left(\begin{smallmatrix}z^{-1}&0\\0&z\end{smallmatrix}\right) \tag{8.1.13}$$

has image in $\mathrm{Z}^\circ_{\mathcal{L}^\varphi}$. We define an L-parameter $\varphi_v\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Z}_{G^\vee}(\mathrm{Z}^\circ_{\mathcal{L}^\varphi})$ by

$$\varphi_v(w,x) := \varphi(w,1) \cdot \chi_{\varphi,v}\left(\begin{smallmatrix}\|w\|^{1/2}&0\\0&\|w\|^{-1/2}\end{smallmatrix}\right) \cdot j_v(x) \quad \text{for any } w \in W_F \text{ and any } x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}). \tag{8.1.14}$$

注记 8.1.15. 令 $w \in W_F$ 和 $x_w := \begin{pmatrix}\|w\|^{1/2}&0\\0&\|w\|^{-1/2}\end{pmatrix}$。由（8.1.2），我们有

$$\begin{aligned}\lambda_{\varphi_v}(w) &= \varphi_v(w, x_w) = \varphi(w,1) \cdot \chi_{\varphi,v}(\|w\|^{1/2}) \cdot j_v(x_w)\\ &= \varphi(w,1) \cdot \varphi(1, x_w) \cdot j_v(x_w^{-1}) \cdot j_v(x_w) = \varphi(w, x_w) = \lambda_\varphi(w).\end{aligned} \tag{8.1.16}$$

Definition 8.1.17. [AMS18, Definition 7.7] The *cuspidal support* of (φ, ρ) is

$$\mathrm{Sc}(\varphi,\rho) := (\mathrm{Z}_{G^\vee}(\mathrm{Z}^\circ_{\mathcal{L}^\varphi}), (\varphi_{v^\varphi}, \epsilon^\varphi)). \tag{8.1.18}$$

Property 8.1.19. [AMS18, Conjecture 7.8] *The following diagram is commutative:*

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Irr}(G) & \xrightarrow{\quad\mathrm{LLC}_G\quad} & \Phi_e(G)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sc}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sc}}\\ \bigsqcup_{L\in\mathcal{L}(G)} \mathrm{Irr}_{\mathrm{scusp}}(L)/W_G(L) & \xrightarrow{\bigsqcup \mathrm{LLC}_L} & \bigsqcup_{L\in\mathcal{L}(G)} \Phi_{e,\mathrm{cusp}}(L)/W_G(L)\end{array}$$

Property 8.1.20. [Bor79, §10.3] *Let φ be an L-parameter for G.*

(1) φ 有界当且仅当 $\Pi_\varphi(G)$ 中的一个元素（等价地，任意一个元素）是缓增的；*(2)* φ 离散当且仅当 $\Pi_\varphi(G)$ 中的一个元素（等价地，任意一个元素）模中心平方可积；*(3)* φ 超尖点当且仅当 $\Pi_\varphi(G)$ 中的所有元素都是超尖点的。

Property 8.1.21. [Sha90] *The quantity $\frac{\mathrm{fdeg}(\pi)}{\dim(\rho)}$ is constant in an L-packet.*

性质 8.1.22. [Sha90，猜想 9.4] 如果 φ 是有界的，则 L-参数包 $\Pi_\varphi(G)$ 是 $\mathfrak{w}$-泛型的，对于某个 *Whittaker* 数据 $\mathfrak{w}$。此外，猜想双射 $\iota_{\mathfrak{w}}$: $\Pi_\varphi(G) \to$ 不可约表示(S_φ) 将$\mathfrak{w}$-泛型表示映射到 S_φ的平凡表示。

猜想 8.1.23. [AMS18，猜想 2] 对于任意 $\mathfrak{s} = [L,\sigma]_G \in \mathfrak{B}(G)$，$L$ 的局部朗兰兹对应由$\sigma \mapsto (\varphi_\sigma, \rho_\sigma)$ 诱导一个双射

$$\mathrm{Irr}^{\mathfrak{s}}(G) \xrightarrow{\sim} \Phi_{\mathrm{e}}^{\mathfrak{s}^\vee}(G), \tag{8.1.24}$$

其中 $\mathfrak{s}^\vee = [L^\vee, (\varphi_\sigma, \rho_\sigma)]_{G^\vee}$。

猜想 8.1.23 已对分裂经典群得以证明 [Mou17, §5.3]，对于 $\mathrm{GL}_n(F)$ 和 $\mathrm{SL}_n(F)$[ABPS16b, 定理 5.3 和 5.6]，对于分裂群的主系列表示 [ABPS17b, §16]。对于群 G_2，[AX22b, 定理 3.1.19] 中已构造了 不可约表示$^{\mathfrak{s}}(G)$ 与 $\Phi^{\mathfrak{s}^\vee}$ e (G) 之间的双射。对于 $\mathrm{GSp}_4(F)$ 和 $\mathrm{Sp}_4(F)$，可以轻易验证 [AX22b]，主定理中的公理，因此我们得到一个同构

$$\mathrm{Irr}^{\mathfrak{s}}(G) \xrightarrow{\sim} \Phi_{\mathrm{e}}^{\mathfrak{s}^\vee}(G) \tag{8.1.25}$$

对于每个 Bernstein 系列的不可约表示$^{\mathfrak{s}}(G)$ 属于 中间系列。另一方面，得益于8.1.25，双射 (主系列 区块上的关系成立，参见 [Roc98、Ree02、ABPS16a、AMS18]。

Property 8.1.26 (Functoriality)**.** *There is a commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} \Pi(\mathrm{GSp}_{2n}) & \xrightarrow{\mathrm{LLC}} & \Phi(\mathrm{GSp}_{2n}) \\ \downarrow & & \downarrow std \\ \Pi(\mathrm{Sp}_{2n}) & \xrightarrow{\mathrm{LLC}} & \Phi(\mathrm{Sp}_{2n}) \end{array}$$

这里，左侧的竖直箭头是由 $\Pi(\mathrm{GSp}_{2n}) \times \Pi(\mathrm{Sp}_{2n})$ 的子集定义的对应关系，该子集由满足以下条件的对 (π, ϖ) 组成： ϖ 是 π 限制到 Sp_{2n} 后的一个成分。

Property 8.1.27 (Stability)**.** *Let φ be a discrete L-parameter. There exists a non-zero $\mathbb{C}$-linear combination*

$$S\Theta_\varphi := \sum_{\pi \in \Pi_\varphi} z_\pi \Theta_\pi, \quad \text{for } z_\pi \in \mathbb{C}, \tag{8.1.28}$$

which is stable. In fact, one can take $z_\pi = \dim(\rho_\pi)$ where ρ_π is the enhancement of the L-parameter. Moreover, no proper subset of Π_φ has this property.

8.2. **Main Result.** Construction of the Local Langlands Correspondence

$$\begin{aligned} \mathrm{LLC}\colon \mathrm{Irr}(G) &\xrightarrow{1\text{-}1} \Phi_{\mathrm{e}}(G) \\ \pi &\mapsto (\varphi_\pi, \rho_\pi). \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

Recall from [AX22a, (3.3.2)] and [AX22a, (2.4.3)] that we have

$$\mathrm{Irr}^{\mathfrak{s}}(G) = \bigsqcup_{\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)} \mathrm{Irr}^{\mathfrak{s}}(G) \quad \text{and} \quad \Phi_{\mathrm{e}}(G) = \bigsqcup_{\mathfrak{s}^\vee \in \mathcal{B}^\vee(G)} \Phi_{\mathrm{e}}^{\mathfrak{s}^\vee}(G). \tag{8.2.2}$$

当 $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ 不是超尖点时，我们有 $\mathfrak{s} = [L, \sigma]_G$ 其中 L 是G的真Levi子群。回顾§2.2， L 共轭于 $\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GSp}_0$ （分别为 $\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{Sp}_0$）、$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GSp}_0$（分别为 $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{Sp}_0$）以及 $\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GSp}_2$（分别为 $\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{Sp}_2$）。令 φ_σ： $W_F' \to L^\vee$ 为通过 L 的局部朗兰兹对应附加给 σ 的 L-参数（见 [BH06, LL79]）。 φ_σ 的 $L^\vee$-共轭类由 σ唯一确定，并且容易验证 $\varphi_{(\chi \circ \det) \otimes \sigma} = \varphi_\sigma \otimes \varphi_\chi$（例如参见 [Kal21,命题3.4.6]），即 [AX22b, 性质 3.12(1)]成立。这使我们能够定义

$$\mathfrak{s}^\vee := [L^\vee, (\varphi_\sigma, 1)]_{G^\vee}. \tag{8.2.3}$$

Let $\pi \mapsto (\varphi_\pi, \rho_\pi)$ be the bijection

$$\mathrm{Irr}^{\mathfrak{s}}(G) \xrightarrow{\sim} \Phi_{\mathrm{e}}^{\mathfrak{s}^\vee}(G), \tag{8.2.4}$$

established in [AX22b, Main Theorem] (for intermediate series) and in [ABPS16a] (for principal series). We have given explicit Kazhdan-Lusztig triples and L-packets in §7.

We consider now the case where π is supercuspidal. Hence we have $\mathfrak{s} = [G, \pi]_G$ for π an irreducible supercuspidal representation of G.

(a) 当 π 是非奇异超尖点时，我们将(φ_π, ρ_π) 定义为在 [Kal19,Kal21] 中构造的增强 L-参数。

(b) 当 π 是 G 的幺幂超尖点表示时，我们将 (φ_π, ρ_π) 定义为在 [Lus95], [Mor96, §5.6] 和 [Sol18]中构造的增强 L-参数（另见 [Sol23]）。

- $x = \delta$: 根据 §3.1.1 命题 3.1.14（2），约化商 $\mathbb{G}_\delta \cong \mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_q)$具有唯一的幺幂尖表示 θ_{10}，从而对于每个特征 χ，得到幺幂超尖表示 $\pi_\delta(\theta_{10} \otimes \chi)$。定义如下带有幺幂 $[2^2]$ 的 L-参数 $\varphi(\eta; \chi)$:

$$\varphi(\eta; \chi) := \mathrm{diag}(\widehat{\eta\chi}, \widehat{\chi}, \widehat{\chi}, \widehat{\eta\chi}).$$

根据情形 4(b)iv 我们有 $\mathcal{G}_\varphi \simeq \mathrm{GSp}^{2,2}(\mathbb{C})$ 和 $S_\varphi \simeq \mu_2$。根据 §5 中的讨论，我们有$\varphi(\eta_2;\chi) = \varphi_{\delta([\eta_2,\nu\eta_2],\nu^{-1/2}\chi)}$。

(c) 设 π 是 G 的非幺幂深度零奇异超尖点表示。如（3.1.2）中所回顾的，我们有 $\pi = \text{c-诱导}_{G_{[x]}}^{G}\tau$，其中 x 是 G 的 Bruhat-Tits 建筑中的一个顶点，且 τ 是从 Lusztig 系 $\mathcal{E}(\mathbb{G}_x, s)$ 中的一个表示膨胀而来，其中 $s \neq 1$。由命题 3.1.14，我们有两种情形，其中 $x = \alpha$:

- 根据§3.1.1命题3.1.14(3)，约化商 $\mathbb{G}_\delta \cong \mathrm{GSp}_{2,2}(\mathbb{F}_q) := \{(g,h) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) : \det(g) = \det(h)\}$ 具有一个有理 Lusztig 系列 $\mathcal{E}(\mathbb{G}_{x_1}, s)$，其中 $s = (\lambda,\lambda)$ 对某个 $\lambda \in \mathbb{F}_{q^2}$ 成立，使得 $\lambda^{q-1} = -1$，并带有奇异尖点表示$\omega^{\eta_2}\text{cusp}$。令 $\pi(\eta_2;\chi)$ 表示紧诱导 $\text{c-Ind}_{\mathrm{GSp}_{G_\alpha}{}^4\mathbf{Z}}(\omega^{\eta_2}\text{cusp} \otimes \chi)$，其中每个非分歧特征 χ 取自 $F^\times$。存在两个（深度零） η_2 和 η_2'的分歧三次特征。定义如下具有幂零 $[2^2]$的 L-参数:

$$\varphi(\eta_2;\chi)|_{W_F} := \mathrm{diag}(\widehat{\eta_2}\widehat{\chi}, \widehat{\chi}, \widehat{\chi}, \widehat{\eta_2}\widehat{\chi}). \tag{8.2.5}$$

根据情形4(b)iv，我们有 $\mathcal{G}_\varphi \simeq \mathrm{GSp}^{2,2}(\mathbb{C})$，幂幺元 u 在 $\mathcal{G}_\varphi$中是正则的，并且 $S_\varphi \simeq \mu_2$。根据 § 5中的讨论，我们有 $\varphi(\eta_2;\chi) = \varphi_{\delta([\eta_2,\nu\eta_2],\nu^{-1/2}\chi)}$，其中 $\delta([\eta_2,\nu\eta_2],\nu^{-1/2}\chi)$ 是 $\nu\eta_2 \times \eta_2 \rtimes \nu^{-1/2}\chi$ 的唯一离散系列子商。

根据命题 6.5.5，我们得到两个 L-参数包，大小均为2，对于 $i = 1, 2, 3$,

$$\Pi_{\varphi(\eta_2;\chi)}(G) := \{\pi(\eta_2';\chi), \delta([\eta_2,\nu\eta_2],\nu^{-1/2}\chi)\}. \tag{8.2.6}$$

- 根据§3.1.1 命题 3.1.14(4)，约化商 $\mathbb{G}_\alpha \cong \mathrm{GSp}_{2,2}(\mathbb{F}_q) := \{(g,h) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) : \det(g) = \det(h)\}$ 具有一个尖点表示 $R_T^\theta \boxtimes R_T^\theta$, ，其中 $T \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 是一个各向异性极大环面，且 θ 是 T 的一个特征，使得 θ^2 是正则的。这产生了奇异超尖点表示 $\pi_{(S,\theta\boxtimes\theta)}$，其中 θ 是 $E^\times$的一个正则特征，对应于一个非分歧二次扩张 E/F （见定义 3.1.4）。令 φ_θ 为L-参数，它作为一个 W_F-表示是 $\chi^2 \oplus$ 诱导表示$\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}(\theta)$，其中幺幂 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 作用于 χ^2。

Then by the discussion in §5, the L-packet is

$$\Pi_{\varphi(\theta)} = \{\delta(\nu^{1/2}\pi_{(E^\times,\theta)} \rtimes \nu^{-1/2}\chi_1^{-1}), \pi_{(S,\theta\boxtimes\theta\otimes\widehat{\chi}_1^{-1})}\}.$$

(d) 设 π 是 G的正深度奇异超尖表示。如§5所述，这种奇异超尖点表示必然由 PGL π_u 的自对偶超尖表示$_2$(F通过以下步骤得到:

- π_u 是 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的超尖点表示，它在 Jacquet-Langlands对应下对应于 $D^\times/F^\times$ 的一个非平凡表示$\mathrm{JL}(\pi_u)$，其中D/F 是四元数代数。Kim-Yu 型由扭曲 Levi子群序列 ($G^0 \subset \cdots \subset G^d = D^\times/F^\times$) 给出。
- π has Kim-Yu type given by the twisted Levi sequence $(G^0 \subset \cdots \subset G^d = D^\times/F^\times \subset \mathrm{GSp}_4(F))$.

它与 $\delta(\nu^{1/2}\pi_u \rtimes \nu^{-1/2}\widehat{\chi}^{-1})$一同属于一个混合 L-参数包，后者是 $\nu^{1/2}\pi_u \rtimes \nu^{-1/2}\widehat{\chi}^{-1}$ 的本质缓增子表示。令 φ 为 L-参数 $\chi^2 \oplus V$，其中 V是在$\mathrm{PGL}_2(F)$的局部朗兰兹对应下与 φ_u 对应的 W_F- 表示，带幺幂$[2,1^2]$。然后

$$\Pi_\varphi(G) = \{\pi, \delta(\nu^{1/2}\pi_u \rtimes \nu^{-1/2}\widehat{\chi}^{-1})\} \tag{8.2.7}$$

Let G be the group of F-rational points of the groups Sp_4 and GSp_4. We suppose that the residual characteristic of F is different from 2.

定理 8.2.8。 在 (8.2.1)中定义的显式局部朗兰兹对应满足 (1.1.1)，对任意 $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$，其中 $\mathfrak{s}^\vee = [L^\vee, (\varphi_\sigma, \rho_\sigma)]_{G^\vee}$，并且还满足性质 8.1.3、8.1.4、8.1.19、8.1.20、8.1.22。此外，对于深度零 L参数包，我们有性质 *8.1.21* [5]

此外，性质 8.1.3、8.1.4、8.1.5、8.1.19、以及 *8.1.20* （以及性质 *8.1.26* 对于 Sp_4）唯一刻画了我们的对应。

证明。 根据性质 8.1.3， L-参数 φ_π 每个不可约非温表示 π 的G 都被唯一确定。对于GSp_4, 4，由于 L的真 Levi 子群的表示的 G -参数包 L $\Pi_{\varphi_\pi}(G)$ 都是单元素集，所以该参数包是单元素集。因此，根据性质 8.1.4，我们有 $\rho_\pi = 1$。因此，对于非离散系列缓增表示，映射 (8.2.1)被唯一刻画。这就完成了非离散系列缓增表示的情形。

性质 8.1.20 对超尖点 L参数包成立，这由 [AX22a，引理 10.1.7]给出。对于混合L参数包，这可直接从 §8.2 以及 同上中的列表看出，其中我们指出了给定 L参数包中哪个成员是泛型的。

由于我们已经在 8.2中处理了离散系列，因此我们完成了。对于 $\mathrm{Sp}_4(F)$ ，这由性质 8.1.26得出。最后，性质 8.1.21 由第3节和第 5节中的计算得出，正如 [AX22a] 中所述。注意，我们为 $\mathrm{Sp}_4(F)$ 固定了一个 Whittaker 数据，如 [AMS22] 中所述（另见 [Sol23]）。□

Appendix A. Applications to the Taylor-Wiles method

In this appendix, we adopt notations consistent with standard literature on this topic, though these notations may differ slightly from our main text.

我们应用了在 [Whi22], 中发展起来的理论，该理论给出了一种广义 Taylor-Wiles 方法（例如参见 [Tho22]），使用了（显式）局部朗兰兹对应的输入（例如 [RS07]），不过我们现在已经配备了我们的显式局部朗兰兹对应（1.1.2）

$$\mathrm{LLC}_{\mathrm{SX}} : \pi \mapsto (V_\pi, N_\pi). \tag{A.0.1}$$

此处我们改用记号（V_π、 N_π）同上引，而不再使用我们在（1.1.2）中的原记号。我们通过固定一个同构来使用 $\mathbb{Q}_p$系数 ι： $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p$ ，该同构与选择 $q_v^{1/2}$为同上引中的选择相容。与 [BCGP21], 一样，我们将 LLC 视为把 GSp 的一个光滑不可约$\mathbb{Q}_p$值表示$_4$（F_v）发送到一个取值于 GSp(W_{F_v} 的 Weil-Deligne 表示$\mathbb{Q}_p$）。

Let $\overline{g} \in \hat{T}(k)$ for a split maximal torus $\hat{T}$ contained in a Borel subgroup $\hat{B}$ of $\hat{G}$. Let $M_{\overline{g}} := \mathrm{Z}_{\hat{G}_k}(\overline{g})$ be the scheme-theoretic centralizer of $\overline{g}$.

假设 $q_v \equiv 1$ 模 p。我们的显式局部朗兰兹对应给出了以下“局部引理” [Whi22，命题5.18, 5.19], 它们是GSp的类似物$_4$ 的 [Tho22，命题 3.13]。

命题 *A.0.2*（*Whitmore*）。设 π 是一个容许的不可约 $\mathbb{Q}_p[G(F_v)]$-模，满足 $(\pi^{\mathfrak{p}_1})_{\mathfrak{n}_1} \neq 0$。则 *(1)* π 是某个抛物诱导表示 $i_B^G \chi$ 的子商，其中 $\chi: T(F_v) \to \mathbb{Z}_p^\times$ 是一个温和分歧的光滑特征。*(2)* $\mathcal{O}[T/T\cap\mathfrak{p}_1]^{W_L}$ 在 $\pi^{\mathfrak{p}_1}$ 上作用所经由的特征是 χ 的 W_G-共轭，并且存在 $w \in W_G$ ，使得 $w\chi$ 提升 χ。*(3)* 局部化不变子空间 $(\pi^{\mathfrak{p}_1})_{\mathfrak{n}_1}$ 是一维的，并且 $\mathcal{O}[T/(T\cap\mathfrak{p}_1)]^{W_F}$ 的作用经由 $w\chi$。*(4)* 最后，若 $\mathrm{LLC}_p(\pi) = (V_\pi, N_\pi)$ 是根据局部朗兰兹对应 *(1.1.2)* 与 π 相关联的 *Weil-Deligne* 表示，则 $N_\pi = 0$。

Proof. Statements (1)–(3) follow from [Whi22, Lemma 5.16]. To verify (4), one works case by case according to $M_{\overline{g}}$ up to conjuacy.

- 假设 g 是正则半单的。在这种情况下， L 是一个极大环面，而 π 是一个不可约主系列 $\chi_1 \times \chi_2 \rtimes \sigma$。那么根据§4 情形（4e），我们有 $N_\pi = 0$。

[5] we certainly expect this property to hold for positive-depth L-packets as well.

•假设M_g 与 Klingen 抛物子群 GL2(ℂ) ×GSp0(ℂ) 的一个 Levi子群共轭。在这种情况下，我们声称 π 不可能与某个表示 χStGL$_2 \rtimes \chi'$ 共轭，其中 χ 和 χ'是光滑特征；否则（$\pi^{\mathfrak{p}_1}$）$_{\mathfrak{n}_1} = 0$。首先在 [BZ77] 中应用几何引理，并结合 [Whi22，引理 5.15]，即可看出这一点。然后根据我们的分类 §4 情形（4c），我们有 $N_\pi = 0$。

• 假设M_g 与Siegel抛物子群GL1(ℂ) ×GSp2(ℂ)的一个Levi子群共轭。在这种情况下， L与Klingen抛物子群GL1(F) × GSp0(F)的一个Levi子群共轭。我们声称， π不可能与表示 $\chi \rtimes \chi'$ StGSp2共轭；否则，类似于前一个项目，我们得到($\pi^{\mathfrak{p}_1}$)$_{\mathfrak{n}_1} = 0$，这与矛盾。然后根据§4中的情形(4d)，我们有 $N_\pi = 0$。

• 剩下的情形是 $L = G$。根据§4 情形（4a），我们有 $N_\pi = 0$。

□

以下命题是命题 A.0.2 的类比，适用于具有非零局部化 $\mathfrak{p}$-不变量（而不是 π_1-不变量）的表示。

命题 *A.0.3*（*Whitmore*）。设 π 是一个容许的不可约 $\mathbb{Q}_p[G(F_v)]$-模，满足 $(\pi^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{n}_0} \neq 0$。那么 *(1)* 对某个温和分歧的光滑特征 $\chi: T(F_v) \to \mathbb{Z}_p^\times$， π 是抛物诱导表示 $i_B^G \chi$ 的一个子商。*(2)* $\mathcal{O}[T/T(\mathcal{O}_{F_v})]^{W_L}$ 在 $\pi^{\mathfrak{p}}$ 上作用所经由的特征是 W_G 共轭于 χ，并且存在 $w \in W_G$ 使得 $w\chi$ 提升 χ。*(3)* 局部化不变子空间 $(\pi^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{n}_0}$ 是一维的，且 $\mathcal{O}[T/(T(\mathcal{O}_{F_v}))]^{W_L}$ 的作用经由 $w\chi$。*(4)* 最后，若 $LLC_p(\pi) = (V_\pi, N_\pi)$ 是根据局部朗兰兹对应 *(1.1.2)* 与 π 相关联的 *Weil-Deligne* 表示，则 $N_\pi = 0$；并且 *(5)* 存在一个 $\mathcal{O}[T/T(\mathcal{O}_{F_v})]^{W_G}$-模同构 $(\pi^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{n}_0} \xrightarrow{\sim} \pi^{\mathfrak{g}}$。

证明。 具有 Iwahori 不动向量的表示已在 §7.1中分类，并且我们给出显式的 L- 参数。 □

随后将命题 A.0.2 应用于 [Whi22, 定理 7.7]中的某个 π_v，其中存在某个尖点自守表示 π，其属于 GSp$_4(\mathbb{A}_f)$，以及 $v \in Q$ 一个 Taylor-Wiles 素点，其中 Q 是 Taylor-Wiles 数据（$Q, \{(T_v, B_v)\}_{v \in Q}$）的一部分，如 [Whi22, 定义 3.9], 所述，从而证明与经典权尖点自守表示 π相关的伽罗瓦表示的存在性。结合 [BCGP21, 命题 7.10.1], 中的拼接判据，便可按照 [BCGP21]和 [Whi22, 7.11] 构造拼接模，从而推出阿贝尔曲面的模性提升定理。

References

[ABPS16a] 安娜-玛丽·奥贝尔、保罗·鲍姆、罗杰·普莱曼和马尔滕·索尔维尔德，*Geometric structure for the principal series of a split reductive p-adic group with connected centre* **10** 2016 ，《非交换几何杂志》（），第 2, 663 680 3519048 – 期。MR ABPS b, *The local Langlands correspondence for inner forms of* SL$_n$, 《数学科学研究》**3** （2016），2–34。MR 3579297[ABPS17a] 、*Conjectures about p-adic groups and their noncommutative geometry*, 兰兰兹对应周边， 《当代数学》，第 691, 2017, 15 51 3666049 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，第–页。MR ABPS b, , 《伦敦数学会会刊》（）(2017 5, 798 854 3653247), 第–期。MR AK 杰弗里·D. 阿德勒和乔纳森·科曼， *The local character expansion near a tame, semisimple element*, 《美国数学杂志》**129** （2007），第2期，381–403。MR 2306039[AMS18] 安娜-玛丽·奥贝尔，艾哈迈德·穆萨维和马尔滕·索尔维尔德，*Generalizations of the Springer correspondence and cuspidal Langlands parameters* **157** 2018 1 2, 121 192 ，《手稿数学》（），第-期，–。MR 3845761[AMS22] 安娜-玛丽·奥贝尔、艾哈迈德·穆萨维和马尔滕·索尔维尔德，*Affine Hecke algebras for classical p-adic groups* 2022 ，。

[文章06] JamesArthur, *A note on L-packets*, 《纯粹与应用数学季刊》2（2006），第1期，专刊：致敬John H.Coates。第1部分，199–217页。MR2217572[文章13]，3135650《美国数学学会学术丛书》，第61卷，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2013年，正交群与辛群。MR[06] ASMahdi Asgari和 FreydoonShahidi, *Generic transfer for general spin groups*, 《杜克数学杂志》132（2006），第 1, 137 190 2219256 期–。MRAsg MahdiAsgari, [02] *Local L-functions for split spinor groups*, 《加拿大数学杂志》54（2002），第4期，673–693页。MR 1913914[AX22a] Anne-MarieAubert 和YujieXu, *The explicit local langlands correspondence for gs*, 2022年。[AX22b] *Hecke algebras for p-adic reductive groups and Local Langlands Correspondence for Bernstein blocks* 2202 01305 2022 37 , arXiv: 。 （），第[页。21] George Boxer、Frank Calegari、TobyGee和 VincentPilloni, *Abelian surfaces over totally real fields are potentially modular* **134** 2021 153 501 4349242 , 《高等科学研究院数学出版物》 ´（），–。MR BH Colin J. Bushnell和 Guy Henniart, GL（），《数学科学基础原理》 [《数学科学基础原理》], 第335卷，Springer-Verlag，柏林，2006年。MR 2234120[BM97] DanBarbasch和 Allen Moy, *Local character expansions*, 《高等师范学校科学年鉴》 ´（4）30（1997），第 5, 553 567 1474804 期–。MRBon CedricBonnafe, [06] *The local Langlands conjecture for* 2 *Representations of* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$, 《代数与应用》，第13卷，Springer-Verlag London, Ltd.，伦敦，2011 2732651 。MRBor ArmandBorel, *Automorphic L-functions*, 《自守形式、表示与 *L*-函数》[11] ´ ´ ´ （《纯粹数学专题讨论会论文集》，俄勒冈州立大学，俄勒冈州科瓦利斯，1977年），第2部分，《纯粹数学专题讨论会论文集》，XXXIII，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1979年，第27–61页。MR 546608[BT84] Fran.cois Bruhat 和 JacquesTits, *Groupes réductifs sur un corps local*, *II: Données radicielles valuées*, 《高等科学研究院数学出版物》 **60** 1984 197 376 86 20042 （），–。MR c：BZ JosephBernstein 和 Andrei [79] Zelevinsky, *Induced representations of reductive p-adic groups. I*, 《高等师范学校科学年鉴》´（ 4 **10** 1977 4, 441 472 579172 ）（），第–期。MRCar Roger W. Carter, , Wiley经典[77] *Finite groups of Lie type* 文库，JohnWiley& Sons,Ltd.，奇切斯特，1993年，《共轭类与复特征》，1985年原版的重印本，Wiley-Interscience 出版物。MR 1266626[CKK12] Dan Ciubotaru、Midori Kato 和 Syu Kato, *On characters and formal degrees of discrete series of affine Hecke algebras of classical types* **187** 2012 3, 589 635 , 《数学发明》。（），2891878 第–期。MR[84] CM David H. [93] Collingwood和 WilliamM.McGovern, *Nilpotent Orbits In Semisimple Lie Algebra: AnIntroduction*, 《半单李代数中的幂零轨道：导论》，《正在进行的研究》，Hermann，巴黎，1984年，由 P. Deligne编，1–32页。MR 771671[CM93] , *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, 纽约州纽约：VanNostrandReinhold Company，1993年（英文）。[DeB02] Stephen DeBacker, *Parametrizing nilpotent orbits via Bruhat-Tits theory*, 《数学年刊》（第2辑）156（2002），第1期，295–332页。MR 1935848[DeB06] , *Parameterizing conjugacy classes of maximal unramified tori via Bruhat-Tits theory*, 《密歇根数学杂志》54（2006），第1期，157–178页。MR 2214792[DK06] Stephen DeBacker和 DavidKazhdan, *Stable distributions supported on the nilpotent cone for the group* G_2 244, ¨ 2006, 205 , 《数学的统一性》，《数学进展》，第Birkhauser Boston卷，马萨诸塞州波士顿，第–262页。MR 2181807[DL76] Pierre Deligne 和 GeorgeLusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, 《数学年刊》103（1976），第1期，103–161页。[DR09] Stephen DeBacker和 MarkReeder, *Depth-zero supercuspidal L-packets and their stability*, 《数学年刊》（ 2 **169** 2009 3, 795 901 2480618 ）（），第–期。MR DS StephenDeBacker 和 Paul J. Sally,Jr., , [00] *Germs characters and the Fourier transforms of nilpotent* , , 《 *orbits* 1998 Harish-Chandra 的数学遗产》（马里兰州巴尔的摩，），《纯粹数学专题讨论会论文集》，第68卷，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2000年，第191–221页。MR1767897[FOS20] Yongqi Feng、Eric Opdam 和 MaartenSolleveld, *Supercuspidal unipotent representations: L-packets and formal degrees* **7** 2020 1133 1193 4167790 , 《综合理工学院数学杂志》 ´（），–。[81] *Irreducible constituents of principal series of* MR GKS.S.Gelbart和 A.W.Knapp, $\mathrm{SL}_n(k)$, 《杜克数学杂志》48（ 1981 2, 313 326 620252 ），第–期。[82] MR GK , *L-indistinguishability and R groups for the special linear group* **43** 1982 2, , 《数学进展》101 121 644669 （），第–期。MR

[Hai14] Thomas Haines, *The stable Bernstein center and test functions for Shimura varieties*, 自守形式与伽罗瓦表示。第2卷，伦敦数学会讲义系列，第415卷，剑桥大学出版社，剑桥，2014年，第118–186页。MR 3444233

[HC99] Harish-Chandra, *Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups*, 大学讲座系列，第16卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，1999年，由Stephen DeBacker和Paul J. Sally, Jr.作序并注释。MR 1702257

[Hen00] Guy Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* GL(n) *sur un corps p-adique*, Invent. Math. **139** (2000), no. 2, 439–455. MR 1738446

[HII08] Kaoru Hiraga、Atsushi Ichino 和 Tamotsu Ikeda, *Formal degrees and adjoint γ-factors*, 《美国数学会杂志》**21** (2008)，第 1 期，283–304。MR 2350057

[HS12] Kaoru Hiraga and Hiroshi Saito, *On L-packets for inner forms of* SL_n, Mem. Amer. Math. Soc. **215** (2012), no. 1013, vi+97. MR 2918491

[HT01] Michael Harris与 Richard Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, 《数学年鉴研究》，第151卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2001年，附有 Vladimir G. Berkovich 撰写的附录。MR 1876802

[Kal16] Tasho Kaletha, *The local Langlands conjectures for non-quasi-split groups*, 自守形式族与迹公式, 西蒙斯研讨会, Springer, [沙姆], 2016, 第217–257页. MR 3675168

[Kal19] ———, *Regular supercuspidal representations*, J. Amer. Math. Soc. **32** (2019), no. 4, 1071–1170. MR 4013740

[Kal21] ———, *Supercuspidal L-packets*, arXiv:1912.03274 (2021), 83.

[Kal22] Tasho Kaletha, *Representations of reductive groups over local fields*, 2022.

[Kos59] Bertram Kostant, *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group*, Amer. J. Math. **81** (1959), 973–1032. MR 0114875

[KY17] Ju-Lee Kim 和 Jiu-Kang Yu, *Construction of tame types*, 《表示论、数论与不变论》，数学进展丛书，第 323 卷，Birkh¨auser/Springer，Cham，2017 年，第 337–357 页。MR 3753917

[LL79] J.-P. Labesse 和 R. P. Langlands, *L-indistinguishability for* 2 **31** 1979 4, SL( )，加拿大数学杂志 ()，第 – 期。MR 726 785 540902

[LS20] Jaime Lust 和 Shaun Stevens, *On depth zero L-packets for classical groups*, 《伦敦数学学会会刊》（第 3 辑）**121** （2020 年），第 5 期，1083–1120 页。MR 4118530

[Lus77] G. Lusztig, *Irreducible representations of finite classical groups*, Invent. Math. **43** (1977), 125–175 (English).

[Lus78] 乔治·卢斯蒂格, *Representations of finite Chevalley groups. Expository lectures from the CBMS regional ,,,, conference held at Madison Wisconsin August 8-12 1977* 39, 《区域会议系列：数学》，第卷，美国数学会（AMS），普罗维登斯（罗得岛州），1978年（英文）。

[Lus84a] ———, *Characters of reductive groups over a finite field*, Annals of Mathematics Studies, vol. 107, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984. MR 742472

[Lus84b] ———, *Intersection cohomology complexes on a reductive group*, Invent. Math. **75** (1984), no. 2, 205–272. MR 732546

[Lus95] ———, *Classification of unipotent representations of simple p-adic groups*, Internat. Math. Res. Notices (1995), no. 11, 517–589. MR 1369407

[Moe11] Colette Moeglin, *Multiplicité* 1 *dans les paquets d'Arthur aux places p-adiques*, 关于某些 *L*-函数, Clay Math. Proc., vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 333–374. MR 2767522

[莫尔96] Lawrence Morris, *Tamely ramified supercuspidal representations*, 《瑞士数学评论年刊》**29** （1996），第 5 期，639–667。MR 1399618

[穆萨17] Ahmed Moussaoui, *Centre de Bernstein dual pour les groupes classiques*, 《表示论》**21** （2017），172–246。MR 3694312

[MP96] Allen Moy 和 Gopal Prasad, *Jacquet functors and unrefined minimal K-types*, 《瑞士数学评论》**71** （1996），第 3 期，98–121。MR 1371680

[Oha21] Kazuma Ohara, *On the formal degree conjecture for non-singular supercuspidal representations*, 2021.

[Ram03] Arun Ram, *Representations of rank two affine Hecke algebras*, 代数与几何进展（海得拉巴，2001），Hindustan Book Agency，新德里，2003年，第57–91页。MR 1986143

[Ree02] Mark Reeder, *Isogenies of Hecke algebras and a Langlands correspondence for ramified principal series representations*, Represent. Theory **6** (2002), 101–126. MR 1915088

[Roc98] Alan Roche, *Types and Hecke algebras for principal series representations of split reductive p-adic groups*, 《高等师范学校科学年刊》（第4辑）**31** （1998），第3期，361–413。MR 1621409

[RS07] Brooks Roberts and Ralf Schmidt, *Local newforms for GSp(4)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1918, Springer, Berlin, 2007. MR 2344630

[Sch13] Peter Scholze, *The local Langlands correspondence for* GL_n *over p-adic fields*, 《Invent. Math.》**192** （2013），第3期，663–715。MR 3049932

[Sch21] David Schwein, *Formal degree of regular supercuspidals*, 2021。[Ser77] Jean-Pierre Serre, *Linear representations of finite groups*, 《数学研究生教材》, 第42卷, Springer-Verlag, 纽约—海德堡, 1977年, 由Leonard L. Scott根据第二版法文版翻译。MR 0450380[Sha90] Freydoon Shahidi, *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups* 2 **132** 1990 2, 273 330 1070599 , 《Ann. of Math.》（）（）, 第–期, 第–页。MR[Sha91] , *Langlands' conjecture on Plancherel measures for p-adic groups*, 《约化群上的调和分析》。会议论文集, 会议于1989年7月31日至8月11日在美国缅因州布伦斯维克的鲍登学院举行, 波士顿、马萨诸塞州等地: Birkh¨auser, 1991年, 第277–295页（英文）。[Sol18] Maarten Solleveld, *A local Langlands correspondence for unipotent representations*, 2018年。[Sol22] , 《J. Algebra》606（2022）, 371–470。MR 4432237[Sol23] Maarten Solleveld, *On principal series representations of quasi-split reductive p-adic groups*, 2023年。[ST93] Paul J. Sally, Jr.和Marko Tadi´c, *Induced representations and classifications for* GSp(2, *F*) *and* Sp(2, *F*), M´em. Soc. Math. France（新系列）（1993）, 第52期, 75–133。MR 1212952[SX23] Kenta Suzuki和Yujie Xu, *The explicit local langlands correspondence for g_2 ii: character formulas and stability* 2023 , 。[Tad94] Marko Tadi´c, *Representations of p-adic symplectic groups*, 《Compositio Math.》90（1994）, 第2期, 123–181。MR 1266251[Tho22] Jack A. Thorne, *On the vanishing of adjoint Bloch–Kato Selmer groups of irreducible automorphic Galois representations* 2207 04925 2022 32 arXiv: 。（）, 第页。93] David A. Vogan, Jr., *The local Langlands conjecture*, 《群与代数的表示理论》, 《Contemp. Math.》, 第145卷, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛, 1993年, 第305–379页。MR 1216197[Wal01] Jean-Loup Waldspurger, *Integrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés* ´ 269, ´ ´ ´ 2001 , 《Asterisque》, 第卷。巴黎: 法国数学学会, （法文）。[Whi22] Dmitri Whitmore, *The taylor-wiles method for reductive groups*, 2022年。[Yu01] Jiu-Kang Yu, *Construction of tame supercuspidal representations* 2001 3, , 《J. Amer. Math. Soc.》（）, 第–期。MR 1824988 579 622

M.I.T., 77 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA, USA
Email address: kjsuzuki@mit.edu

M.I.T., 77 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA, USA
Email address: yujiexu@mit.edu