arXiv:2304.02627v1 [math-ph] 5 Apr 2023

由 Parseval框架生成的无界哈密顿量

F. Bagarello[1,2], S. Kuźel[3]

[1]工程系，巴勒莫大学，I-90128 巴勒莫，意大利

[2] INFN, 卡塔尼亚分所, 意大利

[3] AGH大学，克拉科夫，波兰。

摘要

在 [9] 中，人们曾利用 Parseval框架在有限维和无限维希尔伯特空间中定义有界哈密顿量。这里，我们继续这项分析，特别关注定义在无限维希尔伯特空间中的哈密顿算符的离散谱；这些算符是由某个 Parseval框架所确定的秩一算子的加权无穷和。与 [9] 的主要区别在于，我们在这里考虑的算子大多是无界的。相较于我们先前的结果，这是一个有益的拓展，因为在物理上有意义的哈密顿量往往确实是无界的。然而，由于框架通常并非基，哈密顿量的定义并不那么简单，我们的部分结果正是围绕这一问题展开。此外，我们还讨论哈密顿量的特征值，并探讨该框架的一些物理应用。

I 引言

在量子力学中，一个核心对象是人们所关注的物理系统 $\mathcal{S}$ 的哈密顿量 H。对于封闭的保守系统， H 是 $\mathcal{S}$ 的能量。分析 $\mathcal{S}$ 时，第一步通常是求出 H 的特征向量 e_j： $H\,e_j = E_j e_j$、$j = 1$、2、3、.....。如果 H 是自伴的，那么每个 $E_j \in \mathbb{R}$，且对应于不同特征值的特征向量彼此正交： $\langle e_j, e_k\rangle = 0$，若 $E_j \neq E_k$。大多数情况下， $\mathcal{F}_e = \{e_j\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的标准正交基（ONB）； $\mathcal{H}$ 是定义 $\mathcal{S}$ 的希尔伯特空间，而哈密顿量可写为

$$H = \sum_j E_j \langle e_j, \cdot\rangle\, e_j = \sum_j E_j P_j, \tag{1.1}$$

其中我们引入了作用于 $\mathcal{H}$中一般向量 f上的 P_j，如下所示： $P_j f = \langle e_j, f\rangle\, e_j$。由于 $P_j = P_j^* = P_j^2$， H 可以看作是正交投影算子的加权和，权重由其特征值 E_j给出。显然，H的定义域 $\mathcal{D}(H)$不一定是整个$\mathcal{H}$。事实上，我们有 $\mathcal{D}(H) = \{f \in \mathcal{H} : \sum_j E_j^2 |\langle e_j, f\rangle|^2 < \infty\}$，它在 $\mathcal{H}$ 中肯定是稠密的（它包含 e_j的线性张成），但不一定与 $\mathcal{H}$重合。

在过去的30年里，人们越来越清楚地认识到，系统的哈密顿量实际上不必是自伴的，[13]。自这篇开创性论文以来，越来越多的物理学家和数学家开始考虑这种可能性，其中明显非自伴哈密顿量 H 的特征值的实性是由于某种物理对称性，而不是数学上要求 $H = H^*$。然而，即使 H 的特征值是实的，特征向量 φ_j 一般也不再相互正交。尽管如此，如果集合 $\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_j\}$ 是 $\mathcal{H}$的基，则希尔伯特空间还存在第二个（唯一确定的）基 $\mathcal{F}_\psi = \{\psi_j\}$，使得 $\langle \varphi_j, \psi_k\rangle = \delta_{j,k}$，以及 $H^*\psi_k = \overline{E_k}\,\psi_k$。在这种情况下，我们可以将 H 和 H^* 写成如下形式：

$$H = \sum_j E_j \langle \psi_j, \cdot\rangle\, \varphi_j = \sum_j E_j Q_j, \qquad H^* = \sum_j \overline{E_j} \langle \varphi_j, \cdot\rangle\, \psi_j = \sum_j \overline{E_j}\, Q_j^*,$$

其中 $Q_j f = \langle \psi_j, f\rangle\, \varphi_j$是投影算子，但当 $\varphi_j \neq \psi_j$时它不是正交的。这类算子过去曾得到研究，主要是从数学角度进行的。关于一些结果，我们参考 [6]，主要针对 $\mathcal{F}_\varphi$ 和 $\mathcal{F}_\psi$ 是Riesz基的情形。后来，人们考虑了这一情形的推广， [5, 18, 19]。在所有这些推广中，都要求用于定义某个特定哈密顿量的向量集具有双正交性。在 [9], 中，据我们所知，这一假设首次被去除：我们使用了框架，尤其是Parseval框架（伪框架），而不是基。因此，不能保证存在双正交基。我们的兴趣主要在数学方面，但也基于一个非常简单的物理观察：在分析一个具体的物理情形时

可能并非 $\mathcal{H}$ 中的所有向量都与 $\mathcal{S}$的分析相关。例如，当 $\mathcal{S}$ 的能量无法真正增加太多时，或当 $\mathcal{S}$ 局域在有界区域内时，或当 $\mathcal{S}$ 的动量值不能太大时。在所有这些情况下，但不仅限于此，合理的是将物理向量空间 $\mathcal{H}_{ph}$视为数学希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的子集，而 $\mathcal{S}$ 最初定义在该空间上。 $\mathcal{H}_{ph}$ 可通过某个合适的正交投影算子 P 对 $\mathcal{H}$的投影来构造，即 $\mathcal{H}_{ph} = P\mathcal{H}$。由(1.1)定义的 H 限制到 $\mathcal{H}_{ph}$ 上产生新的哈密顿量 $H_{ph} = PHP$（ H的物理部分），作用在 $\mathcal{H}_{ph}$中。

$$H_{ph}f = \sum E_j \langle \varphi_j, f \rangle \, \varphi_j, \tag{1.2}$$

其中，向量集 $\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_j = Pe_j\}$ 不再具有作为 $\mathcal{H}_{ph}$ 的标准正交基这一性质，而是成为 $\mathcal{H}_{ph}$ 的 Parseval框架。

本文进一步探讨这一情形，将我们在 [9] 中得到的结果推广到无界算子；无界算子在具体物理系统 [14, 22] 的分析中往往更具现实意义。

本文分为两部分：第二节介绍我们的数学结果，第三节给出一些详细例子。具体而言，在第二节 1 中介绍一些预备知识后，我们在第二节 2 中针对伪框架 $\{\varphi_j\}$ 引入哈密顿量 $H_{\varphi,\ \mathsf{E}} = \sum_{j\in\mathbb{J}} E_j \langle \varphi_j, \cdot \rangle \, \varphi_j$，并研究其定义域，同时给出 $H_{\varphi,\ \mathsf{E}}$ 有界或无界、自伴或非自伴的条件。随后在第二节 3 中分析其谱。

在第三节 1 中，我们使用 Casazza 和 Christensen 首先引入的一个伪框架来定义一个特定的 $H_{\varphi,\ \mathsf{E}}$，并特别研究其特征值和特征向量。我们还展示了如何引入两组不同的升降算子， a_n 和 V_n。特别是， a_n 及其伴随算子 a_n^* 满足正则对易关系的一个截断版本。据我们所知，这一版本最初用于 [11], ，之后又在 [3] 中得到推广。这些截断的玻色算子可以在费米子和玻色子之间实现插值，从 $n = 2$ 过渡到 $n \to \infty$。我们还将指出，算子 V_n 在信号分析中可能发挥有趣的作用。

III.2节包含第一部分，在这一部分中，我们提出了一种基于标准正交基构造伪框架的具体方法，随后将该方法应用于强磁场中单个电子的哈密顿量。其本征态产生了所谓的朗道能级，这些能级具有无穷重简并性。该哈密顿量是量子霍尔效应分析的基础。特别地，我们将展示，我们的方法可以被视为在每个朗道能级中生成两个不同的晶格。

II 由 Parseval框架生成的哈密顿量

II.1 Parseval框架.

这里以便于本文阐述的形式介绍了关于Parseval框架的所有必要事实。更多细节见 [17, 24]。

设 $\mathcal{K}$ 是一个带有内积 $\langle\cdot$ 的复无穷维可分希尔伯特空间，$\cdot\rangle$ 对第二个变量线性。用 $\mathbb{J}$ 表示一个一般的可数指标集，例如 $\mathbb{Z}$、 $\mathbb{N}$、$\mathbb{N}\cup\{0\}$ 等。

Parseval框架（简称伪框架）是 $\mathcal{K}$ 中的一族向量 $\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_j,\, j \in \mathbb{J}\}$ ，满足的是

$$\sum_{j\in\mathbb{J}} |\langle\varphi_j, f\rangle|^2 = ||f||^2, \quad f \in \mathcal{K}. \tag{2.1}$$

由 (2.1) 可得， $\|\varphi_j\| \leq 1$ 对于 $j \in \mathbb{J}$。

根据Naimark膨胀定理， $\mathcal{K}$ 中的每个伪框架都可以扩展为更大子空间 $\mathcal{H}$的一个正交归一基。

定理 1 ([23]) 设 $\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_j,\, j \in \mathbb{J}\}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 中的伪框架。那么存在一个补希尔伯特空间 $\mathcal{M}$ 和一个伪框架 $\mathcal{F}_\psi = \{\psi_j,\, j \in \mathbb{J}\}$ ，使得它属于 $\mathcal{M}$ 。

$$\mathcal{F}_h = \{h_j = \varphi_j \oplus \psi_j, \quad j \in \mathbb{J}\} \tag{2.2}$$

是 $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$ 的一个标准正交基。

同样，通过直接计算很容易证明，取 $\mathcal{H}$的一个标准正交基 ONB $\{e_n\}$ 和一个正交投影算子 P，集合 $\{Pe_n\}$ 是 $\mathcal{H}_{ph} = P\mathcal{H}$ 中的一个伪框架，正如引言中已经声称的那样。

超额 $e[\mathcal{F}_\varphi]$ （伪框架 $\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_j,\, j \in \mathbb{J}\}$ 的）是最大的整数 n，使得可以从框架 $\mathcal{F}_\varphi$ 中删除 n 个元素后仍然留下一个完备集；如果可删除元素的数量没有上限，则为 ∞ 。由 [12, 引理 4.1] 和定理 1 可知， $e[\mathcal{F}_\varphi]$ 等于 $\dim \mathcal{M}$，其中 $\mathcal{M}$ 是定理 1 中的补希尔伯特空间。超额为零意味着 $\mathcal{F}_\varphi$ 是 $\mathcal{K}$ 的标准正交基。有限超额 $e[\mathcal{F}_\varphi]$ 意味着指标集 $\mathbb{J}$ 可以分解 $\mathbb{J} = \mathbb{J}_0 \cup \mathbb{J}_1$，使得 $\mathcal{F}^0_\varphi = \{\varphi_j, j \in \mathbb{J}_0\}$ 是 $\mathcal{K}$ 中的 Riesz 基，而 $\mathbb{J}_1$ 是有限集 [15]。

每个伪框架 $\mathcal{F}_\varphi$ 都确定一个等距算子 $\theta_\varphi : \mathcal{K} \to \ell_2(\mathbb{J})$:

$$\theta_\varphi f = \{\langle\varphi_j, f\rangle\}_{j\in\mathbb{J}}, \qquad f \in \mathcal{K}, \tag{2.3}$$

这被称为与 $\mathcal{F}_\varphi$ 相关联的分析算子。

伴随算子 $\theta_\varphi^*:\ \ell_2(\mathbb{J}) \to \mathcal{K}$ of θ_φ 称为合成算子，其作用如下

$$\theta_\varphi^*\{c_j\} = \sum_{j\in\mathbb{J}} c_j\varphi_j, \qquad \{c_j\} \in \ell_2(\mathbb{J}). \tag{2.4}$$

设 θ_φ 和 θ_ψ 是与定理 1 中的框架 $\mathcal{F}_\varphi$ 和 $\mathcal{F}_\psi$ 相关联的分析算子。则

$$\ell_2(\mathbb{J}) = \mathcal{R}(\theta_\varphi) \oplus \mathcal{R}(\theta_\psi), \tag{2.5}$$

其中，$\mathcal{R}$（θ_φ）和 $\mathcal{R}$（θ_ψ）分别是算子 θ_φ 和 θ_ψ的像集。

根据 (2.4) 和 (2.5)，对于 $\{c_j\} \in \ell_2(\mathbb{J})$，以下关系成立

$$\sum_{j\in\mathbb{J}} c_j\varphi_j = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \{c_j\} \in \ker\theta_\varphi^* = \ell_2(\mathbb{J}) \ominus \mathcal{R}(\theta_\varphi) = \mathcal{R}(\theta_\psi). \tag{2.6}$$

II.2 算子 $H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}$和 $H_\varphi^{max}{}_{\mathsf{E}}$。

对于给定的伪框架 $\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_j, j \in \mathbb{J}\}$ 和实数量序列 $\mathsf{E} = \{E_j, j \in \mathbb{J}\}$，可以引入一个线性算子

$$H_{\varphi,\mathsf{E}} = \sum_{j\in\mathbb{J}} E_j\langle\varphi_j, \cdot\rangle\,\varphi_j \tag{2.7}$$

在希尔伯特空间 $\mathcal{K}$中。如果 $e[\mathcal{F}_\varphi] = 0$（即，$\mathcal{F}_\varphi$ 是 $\mathcal{K}$ 的标准正交基），则 (2.7)中的量 E_j 结果证明是 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 的特征值。如果 $\mathcal{F}_\varphi$ 是一个伪框架（但不是标准正交基），这一事实通常并不成立（见下文引理 8）。

算子 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 可能是无界的，因此应当明确指定其定义域。对于 $H_{\varphi\mathsf{E}}$，文献中通常使用两个自然定义域:

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_{min} = \{f \in \mathcal{K}\ :\ \textstyle\sum_{j\in\mathbb{J}} E_j^2|\langle\varphi_j, f\rangle|^2 < \infty\}, \\ &\mathcal{D}_{max} = \{f \in \mathcal{K}\ :\ \textstyle\sum_{j\in\mathbb{J}} E_j\langle\varphi_j, f\rangle\,\varphi_j \quad \text{converges unconditionally in} \quad \mathcal{K}\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

由 [24, 定理 7.2 (b)] 可知

$$\mathcal{D}_{min} \subseteq \mathcal{D}_{max}. \tag{2.9}$$

我们注意到，在 (2.9) 中，$\mathcal{D}_{min}$ 确实可能是 $\mathcal{D}_{max}$ 的真子空间。

例 2 令集合 $\mathbb{J} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，并考虑量 $E_n = n^2$、$E_{-n} = 0$（$n \in \mathbb{N}$），以及 $\mathcal{K}$ 的一个标准正交基 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。根据 *[24,* 例 8，$\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_j,\ j \in \mathbb{J}\}$ 这一组向量，其中

$$\varphi_n = \frac{1}{n}e_n, \qquad \varphi_{-n} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}e_n$$

是一个伪框架。在这种情况下，级数

$$\sum_{j\in\mathbb{J}} E_j\langle\varphi_j, f\rangle\,\varphi_j = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle e_n, f\rangle\, e_n$$

对所有 $f \in \mathcal{K}$都无条件收敛。因此， $\mathcal{D}_{max} = \mathcal{K}$。另一方面， $\mathcal{D}_{min} =\{f \in \mathcal{K}: \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2|\langle e_n,\ f\rangle|^2 < \infty\}$ 是 $\mathcal{K}$ 的子集。因此， $\mathcal{D}_{min} \subset \mathcal{D}_{max}$。

框架的特殊性带来了以下奇妙事实。

命题 3 对于任意无界数量集 E 存在不可数多个框架$\mathcal{F}_\varphi$ 使得 $\mathcal{D}_{min}$ 是平凡的，即 $\mathcal{D}_{min} = \{0\}$。

证明：不失一般性，可假设 $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{J})$，其中 $\mathbb{J}$ 是可数指标集。令 $\mathcal{E}$ 为在 $\ell^2(\mathbb{J})$ 中由集合 $\mathrm{E} = \{E_j, j \in \mathbb{J}\}$ 定义的乘法算子：

$$\mathcal{E}\{c_j\} = \{E_j c_j\}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{E}) = \{\{c_j\} \in \ell^2(\mathbb{J}) : \{E_j c_j\} \in \ell^2(\mathbb{J})\}. \tag{2.10}$$

由于集合E是无界的（即 $\sup_{j\in\mathbb{J}}\{|E_j|\} = \infty$），自伴算子 $\mathcal{E}$ is 在 $\ell^2(\mathbb{J})$中是无界的，并且根据 [1, 定理3.19] Schm¨udgen定理的扩展版本 [31,定理 5.1], ，存在不可数多个无限维子空间 $\mathcal{K}$ of $\ell^2(\mathbb{J})$，使得

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) \cap \mathcal{K} = \{0\}. \tag{2.11}$$

对于给定的满足(2.11)的 $\mathcal{K}$，我们用 P 表示 $\ell_2(\mathbb{J})$中到$\mathcal{K}$ 上的正交投影算子，并考虑 $\ell_2(\mathbb{J})$ 的标准正交归一基 $\{e_j,\ j \in \mathbb{J}\}$。则 $\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_j = Pe_j,\ j \in \mathbb{J}\}$ 是 $\mathcal{K}$中的伪框架。相关联的分析算子 θ_φ （见(2.3)）将 $\mathcal{K}$ 映射到 $\ell^2(\mathbb{J})$中，并且

$$\theta_\varphi f = \{\langle\varphi_j, f\rangle\}_{j\in\mathbb{J}} = \{\langle e_j, f\rangle\}_{j\in\mathbb{J}} = \{c_j\} = f, \qquad f = \{c_j\} \in \mathcal{K}.$$

因此， $\mathcal{R}(\theta_\varphi) = \mathcal{K}$ 并且，鉴于(2.10)、(2.11)，对于非零的 $f = \{c_j\} \in\mathcal{K}$有 $\{E_j c_j\} \notin \ell^2(\mathbb{J})$。这意味着

$$\sum_{j\in\mathbb{J}} E_j^2|\langle\varphi_j, f\rangle|^2 = \sum_{j\in\mathbb{J}} E_j^2|\langle e_j, f\rangle|^2 = \sum_{j\in\mathbb{J}} E_j^2|c_j|^2 = \infty, \quad f \in \mathcal{K},\ f \neq 0$$

并且 $\mathcal{D}_{min} = \{0\}$。 □

当然，命题3中框架 $\mathcal{F}_\varphi$ 的选择应当非常特定。考虑E和 $\mathcal{F}_\varphi$ 的特殊类，可以保证 $\mathcal{D}_{min}$ 与 $\mathcal{D}_{max}$ 重合，并且是 $\mathcal{K}$中的稠密集。下面给出一些简单的充分条件。

命题 4 以下断言成立：

（i）若 $\sup_{j\in\mathbb{J}}\{|E_j|\}<\infty$，则 $\mathcal{D}_{min}=\mathcal{D}_{max}=\mathcal{K}$;

(ii) 如果 $\mathbb{J}$ 的指标集能够以这样的方式分解：$\{\varphi_j, j\in\mathbb{J}_0\}$是 $\mathcal{K}$ 中的 Riesz 基且 $\sup_{j\in\mathbb{J}_1}\{|E_j|\}<\infty$，那么 $\mathcal{D}_{min}$ 与 $\mathcal{D}_{max}$ 重合，并且是 $\mathcal{K}$中的稠密集。

证明：(*i*) 记 $\alpha=\sup_{j\in\mathbb{J}}\{|E_j|\}$。则

$$\sum_{j\in\mathbb{J}}E_j^2|\langle\varphi_j,f\rangle|^2\le\alpha^2\sum_{j\in\mathbb{J}}|\langle\varphi_j,f\rangle|^2=\alpha^2\|f\|^2,\qquad f\in\mathcal{K}. \tag{2.12}$$

因此，$\mathcal{D}_{min}=\mathcal{K}$。根据 (2.9)，$\mathcal{D}_{min}=\mathcal{D}_{max}=\mathcal{K}$。

(*ii*)与(2.12)类似，$\sum_{j\in\mathbb{J}_1}E_j^2|\langle\varphi_j,\ f\rangle|^2\le\alpha^2\sum_{j\in\mathbb{J}_1}|\langle\varphi_j,\ f\rangle|^2\le\alpha^2\|f\|^2$，其中 $\alpha=\sup_{j\in\mathbb{J}_1}\{|E_j|\}$ 且 $f\in\mathcal{K}$. 这意味着，由(2.8) 定义的集合 $\mathcal{D}_{min}$ 和 $\mathcal{D}_{max}$ 在我们考虑较小的集合 $\mathbb{J}_0=\mathbb{J}\setminus\mathbb{J}_1$ 而非 $\mathbb{J}$ 时不会改变。

每个 Riesz 基 $\{\varphi_j,j\in\mathbb{J}_0\}$ 是范数下有界的（即 $\inf_{j\in\mathbb{J}}\|\varphi_j\|>0$）。由 [24,定理 8.36] 这意味着 $\mathcal{D}_{min}=\mathcal{D}_{max}$。设 $\{\psi_j,j\in\mathbb{J}_0\}$ 为 $\{\varphi_j,j\in\mathbb{J}_0\}$ 的双正交 Riesz 基。根据 (2.8)，$\psi_j\in\mathcal{D}_{min}$ 对所有 $j\in\mathbb{J}_0$。因此，$\mathcal{D}_{min}$ 是 $\mathcal{K}$中的稠密集。□

在下文中，我们考虑一个稍微更一般的情形，假设 $\mathcal{D}_{min}$ 在$\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{D}_{min}\subseteq\mathcal{D}_{max}$ 中稠密，从而 $\mathcal{D}_{max}$ 自然也在 $\mathcal{K}$ 中稠密。

为(2.7) 配备定义域 $\mathcal{D}_{min}$ 和 $\mathcal{D}_{max}$，我们在 $\mathcal{K}$ 中定义以下算子:

$$\begin{aligned}&H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}f=\textstyle\sum_{j\in\mathbb{J}}E_j\langle\varphi_j,f\rangle\,\varphi_j,\qquad f\in\mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}}^{min})=\mathcal{D}_{min},\\&H_{\varphi\mathsf{E}}^{max}f=\textstyle\sum_{j\in\mathbb{J}}E_j\langle\varphi_j,f\rangle\,\varphi_j,\qquad f\in\mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}}^{max})=\mathcal{D}_{max}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

算子 $H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}$借助Naimark膨胀定理可以得到一种简单的解释。具体而言，在希尔伯特空间 $\mathcal{H}=\mathcal{K}\oplus\mathcal{M}$中，我们考虑由（2.2）定义的标准正交基 $\{h_j,\ j\in\mathbb{J}\}$，并定义一个自伴哈密顿算子

$$H_{h\mathsf{E}}=\sum_{j\in\mathbb{J}}E_j\langle h_j,\cdot\rangle\,h_j,\qquad\mathcal{D}(H_{h\mathsf{E}})=\{f\in\mathcal{H}\ :\ \sum_{j\in\mathbb{J}}E_j^2|\langle h_j,f\rangle|^2<\infty\}. \tag{2.14}$$

根据构造，$H_{h\mathsf{E}}$ 的特征值集合与 $\mathsf{E}=\{E_j\}$ 一致，相应的特征函数为 $\{h_j\}$。比较 (2.13) 和 (2.14)，我们得出结论:

$$H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}f=P_{\mathcal{K}}H_{h\mathsf{E}}f,\qquad f\in\mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}}^{min})=\mathcal{D}_{min}=\mathcal{D}(H_{h\mathsf{E}})\cap\mathcal{K}. \tag{2.15}$$

因此，算子 $H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}$可以解释为作用于 $\mathcal{H}=\mathcal{K}\oplus\mathcal{M}$ 的哈密顿量 $H_{h\mathsf{E}}$在物理空间 $\mathcal{H}_{ph}=\mathcal{K}$上的限制，见 (1.2)。

由 (2.9) 可得

$$H_{\varphi\mathsf{E}}^{min} \subseteq H_{\varphi\mathsf{E}}^{max}. \tag{2.16}$$

稠密定义的算子 $H_{\varphi\mathsf{E}}^{max}$在 $\mathcal{K}$ 中是对称的，因为

$$\langle H_{\varphi\mathsf{E}}^{max} f, f\rangle = \sum_{j\in\mathbb{J}} E_j |\langle\varphi_j, f\rangle|^2, \qquad f \in \mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}}^{max})$$

是实值的。对于 $H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}$也是如此，因为（2.16）成立。

推论 5如果 $H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}$在 $\mathcal{K}$ 中是自伴的，那么 $H_{\varphi\mathsf{E}}^{max}$ 也是自伴的，并且 $H_{\varphi\mathsf{E}}^{min} = H_{\varphi\mathsf{E}}^{max}$。

证明：这直接由关系得出。

$$H_{\varphi\mathsf{E}}^{min} \subseteq H_{\varphi\mathsf{E}}^{max} \subseteq (H_{\varphi\mathsf{E}}^{max})^* \subseteq (H_{\varphi\mathsf{E}}^{min})^* = H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}.$$

□

利用命题 4，很容易推导出 $H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}$ 自伴性的充分条件。

推论 6 以下断言成立：

(i)如果 $\sup_{j\in\mathbb{J}}\{|E_j|\} < \infty$，则 $H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}$是 $\mathcal{K}$ 中的有界自伴算子 ;

(ii) 如果$_{j\in\mathbb{J}}\{|E_j|\} = \infty$ 的上确界和 $\mathcal{F}_\varphi$ 的指标集 $\mathbb{J}$ 可以 $\mathbb{J} = \mathbb{J}_0 \cup \mathbb{J}_1$ 分解，使得 $\{\varphi_j, j \in \mathbb{J}_0\}$ 是 $\mathcal{K}$ 中的 Riesz 基，并且$_{j\in\mathbb{J}_1}\{|E_j|\} < \infty$的上确界，那么 $H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}$是 $\mathcal{K}$上的无界自伴算子。

证明：(i). 由命题 4 和 (2.13)，对称算子 $H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}$定义在整个空间 $\mathcal{K}$。因此， $H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}$是一个有界自伴算子。

(ii)。再次运用命题4，可得 $H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}$是 $\mathcal{K}$中的稠密定义算子。对于 $f \in \mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}})$，我们分解

$$H_{\varphi\mathsf{E}} f = \sum_{j\in\mathbb{J}_0} E_j \langle\varphi_j, f\rangle\, \varphi_j + \sum_{j\in\mathbb{J}_1} E_j \langle\varphi_j, f\rangle\, \varphi_j, \tag{2.17}$$

其中 $\mathcal{F}_\varphi^0 = \{\varphi_j,\ j \in \mathbb{J}_0\}$是一个 Riesz 基在 $\mathcal{K}$且$\sup_{j\in\mathbb{J}_1}\{|E_j|\} < \infty$.

将 $S_0 = \sum_{j\in\mathbb{J}_0}\langle\varphi_j,\ \cdot\rangle\,\varphi_j$记为 Riesz 基 $\mathcal{F}_\varphi^0$ 的框架算子。于是 [17,定理 6.1。1]

$$\varphi_j = S_0^{1/2} e_j, \quad j \in \mathbb{J}_0,$$

其中， $\{e_j,\ j \in \mathbb{J}_0\}$ 是 $\mathcal{K}$的标准正交基。因此，(2.17) 中的第一个算子

$$A_0 = \sum_{j\in\mathbb{J}_0} E_j \langle\varphi_j, \cdot\rangle\, \varphi_j, \quad \mathcal{D}(A_0) = \{f \in \mathcal{K} \ :\ \sum_{j\in\mathbb{J}_0} E_j^2 |\langle\varphi_j, f\rangle|^2 < \infty\}$$

可以改写如下

$$A_0 = S_0^{1/2} H_{e\mathsf{E}_0} S_0^{1/2}, \qquad H_{e\mathsf{E}_0} = \sum_{j\in\mathbb{J}_0} E_j \langle e_j, \cdot\rangle\, e_j, \quad \mathsf{E}_0 = \{E_j, j \in \mathbb{J}_0\}. \tag{2.18}$$

根据该构造，具有定义域的算子 $H_{e\mathsf{E}_0}$

$$\mathcal{D}(H_{e\mathsf{E}_0}) = \{f \in \mathcal{K} \,:\, \sum_{j\in\mathbb{J}_0} E_j^2 |\langle e_j, f\rangle|^2 < \infty\}$$

在 $\mathcal{K}$ 中是自伴的。鉴于 (2.18)， $\mathcal{D}(H_{e\mathsf{E}_0}) = S_0^{1/2}\mathcal{D}(A_0)$ 并且

$$\langle A_0 f, g\rangle = \langle H_{e\mathsf{E}_0} S_0^{1/2} f, S_0^{1/2} g\rangle, \qquad f, g \in \mathcal{D}(A_0). \tag{2.19}$$

关系 (2.19) 意味着 A_0 是自伴的。此外，由命题 4 的证明可知， $\mathcal{D}(A_0) = \{f \in \mathcal{K}$: $\sum_{j\in\mathbb{J}_0} E_j^2 |\langle \varphi_j, f\rangle|^2 < \infty\} = \mathcal{D}_{min} = \mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}}^{min})$。

另一方面，

$$\sum_{j\in\mathbb{J}_1} E_j^2 |\langle \varphi_j, f\rangle|^2 \le \alpha^2 \sum_{j\in\mathbb{J}_1} |\langle \varphi_j, f\rangle|^2 < \alpha^2 \|f\|^2, \quad f \in \mathcal{K}, \quad \alpha = \sup_{j\in\mathbb{J}_1}\{|E_j|\}.$$

这意味着（参见例如 [24, 定理 7.2]），式 (2.17) 中的第二个算子

$$A_1 = \sum_{j\in\mathbb{J}_1} E_j \langle \varphi_j, \cdot\rangle\, \varphi_j$$

定义在 $\mathcal{K}$ 上，且为对称算子（因为对于 $f \in \mathcal{K}$， $\langle A_1 f、\ f\rangle = \sum_{j\in\mathbb{J}_1} E_j |\langle \varphi_j、\ f\rangle|^2$ 均为实值）。因此， A_1 是 $\mathcal{K}$ 上的有界自伴算子。这意味着，定义域为 $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}}^{min})$ 的算子 $H_{\varphi\mathsf{E}} = A_0 + A_1$ 是自伴算子。□

注 7 类似的结果（在 $\mathcal{F}_\varphi$ 涉及 Riesz 基的情况下）可通过扰动理论方法获得，前提是算子 A_1 相对于自伴算子 A_0 足够小（参见例如 *[29,* X.*2]*）。

II.3 谱的 $H_{\varphi\mathsf{E}}$.

接下来，我们假设 $H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}$ 是 $\mathcal{K}$ 中的自伴算子。在这种情况下，根据推论 5， $H_{\varphi\mathsf{E}}$: $= H_{\varphi\mathsf{E}}^{min} = H_{\varphi\mathsf{E}}^{max}$ 是一个自伴算子。

我们考虑 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 作为由一对 ($\mathcal{F}_\varphi$, E) 的伪框架 $\mathcal{F}_\varphi$ 和一组实数 E 生成的哈密顿量。如上所述，哈密顿量 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 是到物理空间 $\mathcal{K}$ 的哈密顿量 $H_{h\mathsf{E}}$ （见 (2.14)）的限制，该哈密顿量作用在更宽的希尔伯特空间$\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$中。根据 (2.14)， $H_{h\mathsf{E}}$ 的点谱与集合 E 重合并且$H_{h\mathsf{E}} h_n = E_n h_n$ ($n \in \mathbb{J}$)。另一方面：

引理 8 以下断言等价：

(i) 对某个 $E_n \in \mathsf{E}$，关系 $H_{\varphi\mathsf{E}}\varphi_n = E_n\varphi_n$ 成立；

(ii) 定理 1 中伪框架 $\mathcal{F}_\psi$ 的向量满足以下条件：

$$\sum_{j\in\mathbb{J}} E_j^2|\langle\psi_j,\psi_n\rangle|^2 < \infty, \qquad \sum_{j\in\mathbb{J}} E_j\langle\psi_j,\psi_n\rangle\varphi_j = 0 \tag{2.20}$$

证明：$(i) \to (ii)$。若 $H_{\varphi\mathsf{E}}\varphi_n = E_n\varphi_n$，则 $\varphi_n \in \mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}}) \cap \mathcal{D}(H_{h\mathsf{E}})$（见 (2.15)）。这意味着，(2.2) 中与 φ_n 对应的向量 ψ_n 也属于 $\mathcal{D}(H_{h\mathsf{E}})$。因此，$\sum_{j\in\mathbb{J}} E_j^2|\langle\psi_j,\psi_n\rangle|^2 = \sum_{j\in\mathbb{J}} E_j^2|\langle h_j,\psi_n\rangle|^2 < \infty$. 此外，关系 $H_{h\mathsf{E}}h_n = E_nh_n$ 意味着 $P_{\mathcal{K}}H_{h\mathsf{E}}h_n = E_j\varphi_n$。考虑到 (2.2) 和 (2.14)，可得

$$0 = P_{\mathcal{K}}H_{h\mathsf{E}}h_n - H_{\varphi\mathsf{E}}\varphi_n = \sum_{j\in\mathbb{J}} E_j\langle h_j,h_n\rangle\varphi_j - \sum_{j\in\mathbb{J}} E_j\langle\varphi_j,\varphi_n\rangle\varphi_j = \sum_{j\in\mathbb{J}} E_j\langle\psi_j,\psi_n\rangle\varphi_j \tag{2.21}$$

由此得到 (2.20)。

$(ii) \to (i)$。(2.20)和(2.14)中的第一部分意味着 $\psi_n \in \mathcal{D}(H_{h\mathsf{E}})$。因此，$\varphi_n = h_n - \psi_n$ 属于 $\mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}}) \cap \mathcal{D}(H_{h\mathsf{E}})$。类似于(2.21)进行推理，我们得到

$$0 = \sum_{j\in\mathbb{J}} E_j\langle\psi_j,\psi_n\rangle\varphi_j = P_{\mathcal{K}}H_{h\mathsf{E}}h_n - H_{\varphi\mathsf{E}}\varphi_n = E_nP_{\mathcal{K}}h_n - H_{\varphi\mathsf{E}}\varphi_n = E_n\varphi_n - H_{\varphi\mathsf{E}}\varphi_n$$

这就完成了证明。 □

如果 $\|\varphi_n\| = 1$，则 $\psi_n = 0$ 且条件 (2.20) 显然满足。在这种情况下，E_n成为 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 的一个特征值。

引理 8表明，集合 E并不总是与 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 的点谱重合。因此，我们将称 E 为 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 的拟特征值集合。

由于假设 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 是自伴的，人们可能会认为 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 也可以表示成类似于 (2.14) 的形式：

$$H_{\varphi\mathsf{E}} = \sum_{j\in\mathbb{J}} E'_j\langle e'_j,\cdot\rangle e'_j, \qquad \mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}}) = \{f \in \mathcal{K} \,:\, \sum_{j\in\mathbb{J}} E'^2_j|\langle e'_j,f\rangle|^2 < \infty\}, \tag{2.22}$$

其中，$\mathcal{F}_{e'} = \{e'_j \in \mathcal{K},\ j \in \mathbb{J}\}$是 $\mathcal{K}$ 的标准正交基，$\mathsf{E}' = \{E'_j,\ j \in \mathbb{J}\}$ 是实数集。公式(2.22)对谱分析更为方便，因为它立即给出了 $H_{\varphi\mathsf{E}}$的特征值集合 E' 。这意味着，按照 [9] 中针对有界算子所提出的观点，($\mathcal{F}_\varphi$,E) 是E–与 $\mathcal{F}_{e'}$相连的。事实上，在这里的假设下，$H_{\varphi\mathsf{E}} = \sum_{j\in\mathbb{J}} E_j\langle\varphi_j,\ \cdot\rangle\varphi_j = \sum_{j\in\mathbb{J}} E'_j\langle e'_j,\ \cdot\rangle e'_j$。

在表述下一条结论之前，我们回顾一下：通过添加一个由 $\mathcal{M}$ 构成的互补伪框架 $\mathcal{F}_\psi$，伪框架 $\mathcal{F}_\varphi$ 可以扩充为 $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$ 中的标准正交基 $\mathcal{F}_h$（如定理 1 所述）。

定理 9 设 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 是由对 $(\mathcal{F}_\varphi, \mathsf{E})$ 生成的哈密顿量，其中 $\mathsf{E} = \{E_j, j \in \mathbb{J}\}$ 是一个严格递增序列 $\ldots < E_j < E_{j+1} \ldots$，并设算子

$$B = \sum_{j\in\mathbb{J}} E_j \langle \varphi_j, \cdot \rangle \, \psi_j \ : \ \mathcal{K} \to \mathcal{M} \tag{2.23}$$

有界。则 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 具有形式 (2.22)，且其离散谱 $\sigma_{disc}(H_{\varphi\mathsf{E}})$ 与 E'一致。

证明：不失一般性，我们可以假设 $\mathbb{J} = \mathbb{N}$。由于$\mathsf{E} = \{E_j, j \in \mathbb{N}\}$ 严格递增，因此存在 $\lambda =$ 极限$_{j\to\infty} E_j$。当 λ 小于无穷大时，E 是一个有界集，并且(2.23) 中 B 的有界性条件自动得到满足。此外，自伴算子

$$\lambda I - H_{h\mathsf{E}} = \sum_{j\in\mathbb{N}} (\lambda - E_j) \langle h_j, \cdot \rangle \, h_j,$$

其中，$H_{h\mathsf{E}}$ 由 (2.14) 定义，在 $\mathcal{H}$ 中为正、有界且紧[1]。算子 $\lambda I - H_{\varphi\mathsf{E}} = P_{\mathcal{K}}(\lambda I - H_{h\mathsf{E}})$ $P_{\mathcal{K}}$ 作用于 $\mathcal{K}$ 时同样具有这些性质。因此，存在由特征向量 e'_j 构成的 $\mathcal{K}$ 的标准正交基 $\{e'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$：

$$(\lambda I - H_{\varphi\mathsf{E}}) e'_j = \mu_j e'_j, \qquad j \in \mathbb{N}, \tag{2.24}$$

对应于递减的特征值序列 μ_j。集合 $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 构成 $\lambda I - H_{\varphi\mathsf{E}}$的离散谱。由(2.24) 可知，$H_{\varphi\mathsf{E}} e'_j = (\lambda - \mu_j) e'_j$。因此，有界算子 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 可由 (2.22) 定义，其中 $E'_j = \lambda - \mu_j$，且其离散谱 $\sigma_{disc}(H_{\varphi\mathsf{E}})$ 与 $\mathsf{E}' = \{E'_j = \lambda - \mu_j, \ j \in \mathbb{N}\}$ 重合。

现在假设 $\lambda = \lim_{j\to\infty} E_j = \infty$。那么算子 $H_{h\mathsf{E}}$ 和 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 都具有下半有界性，并且它们通过关系式 (2.15) 相互联系。算子 $H_{h\mathsf{E}}$ 具有紧预解式（因为其特征向量 $\{h_j\}$ 构成 $\mathcal{H}$ 的标准正交基，且相应的特征值 $\{E_j\}$ 是趋于 ∞的递增序列）。在这种情况下，借助 [30, 定理 XIII.64]，集合

$$Y_{bH_{h\mathsf{E}}} = \{f \in \mathcal{D}(H_{h\mathsf{E}}) : \|f\| \le 1, \ \|H_{h\mathsf{E}} f\| \le b\},$$

在 $\mathcal{H}$ 中对每个 $b \ge 0$都是紧的。考虑与 $H_{\varphi\mathsf{E}}$相关的类似集合

$$Y_{bH_{\varphi\mathsf{E}}} = \{f \in \mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}}) : \|f\| \le 1, \ \|H_{\varphi\mathsf{E}} f\| \le b\}.$$

鉴于 (2.15) 和 (2.23)，对于所有 $f \in Y_{bH_{\varphi\mathsf{E}}}$,

$$P_{\mathcal{M}} H_{h\mathsf{E}} f = P_{\mathcal{M}} \sum_{j\in\mathbb{N}} E_j \langle h_j, f \rangle \, h_j = \sum_{j\in\mathbb{N}} E_j \langle \varphi_j, f \rangle \, \psi_j = Bf,$$

[1]紧致性由 [21, 问题 132] 推出，因为 $\lim_{j\to\infty}(\lambda - E_j) = 0$。

其中， $P_{\mathcal{M}}$ 是 $\mathcal{H}$ 中 $\mathcal{M}$ 上的正交投影算子。此外，

$$\|H_{h\mathsf{E}}f\|^2 = \|P_{\mathcal{K}}H_{h\mathsf{E}}f\|^2 + \|P_{\mathcal{M}}H_{h\mathsf{E}}f\|^2 = \|H_{\varphi\mathsf{E}}f\|^2 + \|Bf\|^2 \le b^2 + c^2, \quad f \in Y_{bH_{\varphi\mathsf{E}}}, \tag{2.25}$$

其中 $c =$ 上确界$_{f\in Y_{bH_{\varphi\mathsf{E}}}} \|Bf\| \le \|B\| < \infty$。因此，

$$Y_{bH_{\varphi\mathsf{E}}} \subset Y_{\sqrt{b^2+c^2}H_{h\mathsf{E}}}. \tag{2.26}$$

考虑一个收敛序列 $\{f_n\}$ 在 $\mathcal{K}$ 中，其中 $f_n \in Y_{bH_{\varphi\mathsf{E}}}$ 并记 $f = \lim f_n$。显然，$f \in \mathcal{K}$ 且 $\|f\| \le 1$。此外，由 (2.26) 和 $Y_{\sqrt{b^2+c^2}H_{h\mathsf{E}}}$ 的紧性，$f \in Y_{\sqrt{b^2+c^2}H_{h\mathsf{E}}}$。这意味着 $f \in \mathcal{D}(H_{h\mathsf{E}}) \cap \mathcal{K} = \mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}})$。假设$\|H_{\varphi\mathsf{E}}f\| > b$，即$\|H_{\varphi\mathsf{E}}f\|^2 = b^2 + \varepsilon(\varepsilon > 0)$。由 (2.25)，$\|Bf\|^2 \le c^2 - \varepsilon$这与 c 的定义矛盾。因此，$\|H_{\varphi\mathsf{E}}f\| \le b$且 $f \in Y_{bH_{\varphi\mathsf{E}}}$。我们验证 $Y_{bH_{\varphi\mathsf{E}}}$是 $\mathcal{K}$ 中的闭集。这一事实、$Y_{bH_{h\mathsf{E}}}$ 的紧性以及 (2.26) 意味着 $Y_{bH_{\varphi\mathsf{E}}}$ 对于每个 $b \ge 0$ 是 $\mathcal{K}$ 中的紧集。再次应用 [30, 定理 XIII.64] 我们得到 $H_{\varphi\mathsf{E}}$在 $\mathcal{K}$ 中有紧预解式。这意味着公式 (2.22) 成立，$H_{\varphi\mathsf{E}}$ 的谱是离散的[2] 并且它与 E' 重合。□

注 10 只要特征值的重数有限，定理 9 的陈述便可轻易推广到递增序列 $\ldots \le E_j \le E_{j+1} \le \ldots$ 的情形。

定理 9 给出了 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 存在离散谱的一个充分条件，无需显式构造。可利用极小极大原理 [32, p. 265] 计算特征值。此外，下文还介绍了一种替代方法，该方法专门针对算子 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 的性质而设计。

命题 11 设 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 是由对 $(\mathcal{F}_\varphi, \mathrm{E})$ 生成的哈密顿量，且 $\mathcal{R}(\theta_\varphi)$ 是与 $\mathcal{F}_\varphi$ 相关的分析算子 θ_φ 的像集（见 (2.3)）。那么，$\mu \in \sigma_p(H_{\varphi\mathsf{E}})$ 当且仅当存在一个序列 $\{c_j\} \in \mathcal{R}(\theta_\varphi)$，使得

$$\{(E_j - \mu)c_j\} \in \ell_2(\mathbb{J}) \ominus \mathcal{R}(\theta_\varphi) = \mathcal{R}(\theta_\psi). \tag{2.27}$$

$H_{\varphi\mathsf{E}}$ 的对应特征向量与 $f = \sum_{j\in\mathbb{J}} c_j\varphi_j$ 重合。

证明：假设 $H_{\varphi\mathsf{E}}f = \mu f$对于某个 $f \in \mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}})$。由于 $\mathcal{F}_\varphi$是一个伪框架，$f = \sum_{j\in\mathbb{J}}\langle\varphi_j, f\rangle\varphi_j$，且关系 $H_{\varphi\mathsf{E}}f = \mu f$ 具有以下形式

$$\sum_{j\in\mathbb{J}}(E_j - \mu)\langle\varphi_j, f\rangle\varphi_j = \sum_{j\in\mathbb{J}}(E_j - \mu)c_j\varphi_j = 0, \qquad c_j = \langle\varphi_j, f\rangle. \tag{2.28}$$

[2] $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 的谱是离散的，并且与E' 重合，对于 $\lambda = \infty$。然而，对于有限的 λ，$H_{\varphi\mathsf{E}}$ 的谱既包括其离散谱部分 E'，也包括本质谱点 λ。

鉴于 (2.3)， $\theta_\varphi f = \{c_j\}$，即序列 $\{c_j\}$ 属于 $\mathcal{R}(\theta_\varphi)$。此外， $\{E_j c_j\} \in \ell_2(\mathbb{J})$，因为 $f \in \mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}})$。结合 (2.6) 和 (2.28)，我们得到 (2.27)。

反之，如果 (2.27) 成立，则 $\{(E_j - \mu)c_j\} \in \ell_2(\mathbb{J})$ 且 $\sum_{j\in\mathbb{J}}(E_j - \mu)c_j\varphi_j = 0$，根据 (2.6)。序列 $\{c_j\} \in \mathcal{R}(\theta_\varphi)$ 确定一个向量 $f = \sum_{j\in\mathbb{J}} c_j\varphi_j \in \mathcal{K}$，其中 $c_j = \langle\varphi_j, f\rangle$。由 (2.27) 可得 $\{E_j\langle\varphi_j, f\rangle\} \in \ell_2(\mathbb{J})$。这意味着$f \in \mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}})$，且关系 $\sum_{j\in\mathbb{J}}(E_j - \mu)$ $c_j\varphi_j = \sum_{j\in\mathbb{J}}(E_j - \mu)\langle\varphi_j, f\rangle\varphi_j = 0$ 等价于 $H_{\varphi\mathsf{E}}f - \mu f = 0$。 □

通常，一个伪框架 $\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_j, j \in \mathbb{J}\}$ 包含一个 Riesz 基分量 $\mathcal{F}_\varphi^0 = \{\varphi_j, j \in \mathbb{J}_0\}$($\mathbb{J}_0 \subset \mathbb{J}$)。当 $\mathcal{F}_\varphi$ 具有有限超额时尤其如此。在这种情况下，由对 ($\mathcal{F}_\varphi$, E) 生成的哈密顿量 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 可以分解为：

$$H_{\varphi\mathsf{E}} = A_0 + A_1, \qquad A_i = \sum_{j\in\mathbb{J}_i} E_j\langle\varphi_j, \cdot\rangle\varphi_j. \tag{2.29}$$

进一步的分析得出以下结果：

命题12 假设一个伪框架 $\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_j, j \in \mathbb{J}\}$ 可以分解 $\mathcal{F}_\varphi = \mathcal{F}_\varphi^0 \cup \mathcal{F}_\varphi^1$，使得 $\mathcal{F}_\varphi^0 = \{\varphi_j, j \in \mathbb{J}_0\}$ 和 $\mathcal{F}_\varphi^1 = \{\varphi_j, j \in \mathbb{J}_1\}$ 分别是 $\mathcal{K}$中的一个Riesz基和一个框架序列。记 S_0 为 $\mathcal{F}_\varphi^0$ 的框架算子，并假设 $\sup_{j\in\mathbb{J}_1}\{|E_j|\} < \infty$。那么，对于所有 $f \in \mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}})$,

$$H_{\varphi\mathsf{E}}f = S_0^{1/2}H_{e\mathsf{E}_0}S_0^{1/2}f + (I - S_0)^{1/2}H_{e\mathsf{E}_1}(I - S_0)^{1/2}f \tag{2.30}$$

其中，自伴算子$H_{e\mathsf{E}_0}$ 由 (2.18)定义，集合 $\{e_j, j \in \mathbb{J}_1\}$ 是子空间 $\mathcal{K}_1 =$span $\mathcal{F}_\varphi^1 = \mathcal{R}($ $I - S_0$)的一个伪框架，而 $H_{e\mathsf{E}_1} = \sum_{j\in\mathbb{J}_1} E_j\langle e_j, \cdot\rangle\, e_j$是 $\mathcal{K}_1$中的有界自伴算子。

证明：由推论 6 的证明可知，(2.29) 中的算子 A_0 与$S_0^{1/2}H_{e\mathsf{E}_0}S_0^{1/2}$ 一致，其中 $H_{e\mathsf{E}0}$ 由 (2.18) 定义。

算子 $I - S_0$ 在 $\mathcal{K}$ 中是非负的，因为

$$((I - S_0)f, f) = \|f\|^2 - \sum_{j\in\mathbb{J}_0}|\langle\varphi_j, f\rangle)|^2 = \sum_{j\in\mathbb{J}_1}|\langle\varphi_j, f\rangle|^2 \geq 0, \quad f \in \mathcal{K}. \tag{2.31}$$

这意味着平方根 $(I - S_0)^{1/2}$ 存在。此外，关系 (2.31) 意味着

$$\ker(I - S_0) = \mathcal{K} \ominus \mathcal{K}_1, \qquad \mathcal{K}_1 = \overline{\text{span } \mathcal{F}_\varphi^1}.$$

因此， $\mathcal{K}_1$ 与 $\mathcal{R}(I - S_0)$重合，且它是 $I - S_0$的约化子空间。记$(I - S_0)|_{\mathcal{K}_1}$ 为 $I - S_0$ 在 $\mathcal{K}_1$ 上的限制。该关系

$$(I - S_0)f = \sum_{j\in\mathbb{J}}\langle\varphi_j, f\rangle\varphi_j - \sum_{j\in\mathbb{J}_0}\langle\varphi_j, f\rangle\varphi_j = \sum_{j\in\mathbb{J}_1}\langle\varphi_j, f\rangle\varphi_j, \quad f \in \mathcal{K}_1$$

这意味着$(I-S_0)|_{\mathcal{K}_1}$是框架 $\mathcal{F}_\varphi^1$在希尔伯特空间 $\mathcal{K}_1$中的框架算子。因此，逆算子$((I-S_0)_{\mathcal{K}_1})^{-1}:\mathcal{K}_1\to\mathcal{K}_1$是有界的，并且 $\mathcal{R}(I-S_0)=\mathcal{R}(I-S_0)$。

由 [17, 定理 6.11] 可知，元素 $\varphi_j\in\mathcal{F}_\varphi^1$ 具有如下形式

$$\varphi_j=(I-S_0)^{1/2}e_j,\qquad j\in\mathbb{J}_1,$$

其中，$\{e_j, j\in\mathbb{J}_1\}$是 $\mathcal{K}_1$的一个伪框架。此外，对于作用于 $\mathcal{K}_1$ 中的算子 A_1，重复关系式 (2.18) 的证明，可得 $A_1=(I-S_0)^{1/2}H_{e\mathsf{E}_1}(I-S_0)^{1/2}$。这里，根据推论 6 的 (i) 部分，算子 $H_{e\mathsf{E}_1}$ 在 $\mathcal{K}_1$ 中是有界自伴算子。□

将 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 视为 A_0 由 A_1 产生的扰动，并假设 A_1 相对于 A_0 足够小，可以预期 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 和 A_0的本质谱相重合。例如，如果 $\mathcal{F}_\varphi$ 具有有限超额，那么 $I-S_0$ 是紧算子，因此（2.30）中的第二个算子也是紧的。在这种情况下，经典魏尔定理 [32, p.182] 意味着 $\sigma_{ess}(H_{\varphi\mathsf{E}})=\sigma_{ess}(A_0+A_1)=\sigma_{ess}(A_0)$。

III 例子

本节致力于对我们先前结果的两个例子进行详细分析，并初步应用于量子力学。

III.1 由 Casazza-Christensen 框架生成的哈密顿量

一般来说，具有无限超额的伪框架可能不包含 Riesz 基作为子集。如果允许框架元素的子序列在范数上收敛到 0，则很容易构造一个不包含 Riesz 基的框架。然而，对于下范数有界的框架，回答类似问题要复杂得多。Casazza 和 Christensen [15] 首次构造了这样一个下范数有界但不包含 Schauder 基的伪框架的例子。我们现在的目标是研究由该伪框架生成的哈密顿量，并讨论它们可能的物理应用。

设 $\mathcal{K}_n(n\in\mathbb{N})$ 是一个具有标准正交基 $\{e_1^{(n)},e_2^{(n)},\dots e_n^{(n)}\}$ 的 n 维希尔伯特空间。则集合 $\mathcal{F}_\varphi^{(n)}=\{\varphi_j^{(n)},j\in\mathbb{J}_n\}$ 其中 $\mathbb{J}_n=\{1,2,\dots,n,n+1\}$ 且

$$\varphi_j^{(n)}=e_j^{(n)}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e_i^{(n)},\quad 1\le j\le n,\qquad \varphi_{n+1}^{(n)}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n e_i^{(n)},\tag{3.1}$$

是 $\mathcal{K}_n$ [17,引理 7.51] 的伪框架。该算子

$$H_{\varphi_n\mathsf{E}_n}=\sum_{j\in\mathbb{J}_n}E_j^{(n)}\langle\varphi_j^{(n)},\cdot\rangle\,\varphi_j^{(n)}=\sum_{j=1}^{n+1}E_j^{(n)}\langle\varphi_j^{(n)},\cdot\rangle\,\varphi_j^{(n)},\qquad \mathsf{E}_n=\{E_j^{(n)},j\in\mathbb{J}_n\}.\tag{3.2}$$

是 $\mathcal{K}_n$. 中的有界自伴算子

对于伪框架 $\mathcal{F}_\varphi^{(n)}$，补希尔伯特空间 $\mathcal{M}_n$ 可以取为 $\mathbb{C}$，而式 (2.2) 中的补伪框架 $\mathcal{F}_\psi^{(n)} = \{\psi_j^{(n)}, j \in \mathbb{J}_n\}$ 具有如下形式 [25]:

$$\psi_j^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad j = 1, \dots n, \qquad \psi_{n+1}^{(n)} = 0. \tag{3.3}$$

考虑直和 $\mathcal{K} = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{K}_n)_{\ell_2}$。希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 由满足 [3] $f_n \in \mathcal{K}_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{K}_n}^2 < \infty$ 的序列 $f = (f_1, f_2, \dots)$ 构成。$\mathcal{K}$ 中的内积定义如下

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_n, g_n\rangle_{\mathcal{K}_n}, \qquad f, g \in \mathcal{K}.$$

由于 $\mathcal{K} = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{K}_n)_{\ell_2}$，伪框架 $\mathcal{F}_\varphi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_\varphi^{(n)}$ 的并集是 $\mathcal{K}$ [17, 的伪框架，见定理 7.5.2]。对于伪框架 $\mathcal{F}_\varphi$，定理 1 中的补希尔伯特空间 $\mathcal{M}$ 可以取为直和

$$\mathcal{M} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{M}_n\right)_{\ell_2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathbb{C}\right)_{\ell_2} = \ell_2(\mathbb{N}).$$

$\mathcal{M}$ 中的伪框架 $\mathcal{F}_\psi$ 与伪框架的并集重合：$\mathcal{F}_\psi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_\psi^{(n)}$。

记

$$\mathsf{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}_n = \{E_j^{(n)},\ n \in \mathbb{N},\ 1 \le j \le n+1\}.$$

对于伪框架 $\mathcal{F}_\varphi$ 和 E，我们考虑由 (2.13) 定义的算子 $H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}$: $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$。

$$H_{\varphi\mathsf{E}}^{min} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n+1} E_j^{(n)} \langle \varphi_j^{(n)}, \cdot\rangle\, \varphi_j^{(n)}, \quad \mathcal{D}(H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}) = \{f \in \mathcal{K} \ :\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n+1} (E_j^{(n)})^2 |\langle \varphi_j^{(n)}, f\rangle|^2 < \infty\}.$$

考虑到分解 $\mathcal{K} = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{K}_n)_{\ell_2}$ 以及 (3.2)，可将最后的公式改写如下

$$H_{\varphi\mathsf{E}}^{min} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_{\varphi_n\mathsf{E}_n}, \qquad \mathcal{D}(H_{\varphi_n\mathsf{E}_n}^{min}) = \{f \in \mathcal{K} \ :\ \sum_{n=1}^{\infty} \|H_{\varphi_n\mathsf{E}_n}\|_{\mathcal{K}_n}^2 < \infty\}.$$

所得到的公式意味着，$H_{\varphi\mathsf{E}}^{min}$在 $\mathcal{K}$ 中是自伴的（因为$H_{\varphi_n\mathsf{E}_n}$ 是 $\mathcal{K}_n$ 中对所有 $n \in \mathbb{N}$均有界的自伴算子）。根据推论5，$H_{\varphi\mathsf{E}} := H_{\varphi\mathsf{E}}^{min} = H_{\varphi\mathsf{E}}^{max}$是由对（$\mathcal{F}_\varphi$,E）生成的哈密顿量。

[3]我们将 $\mathcal{K}_n$ 中的元素与它们在 $\mathcal{K}$中的对应物等同起来，即我们不区分 $f \in \mathcal{K}_n$ 和 $\mathcal{K}$ 中在第 n项为 f 而其余为零的序列。

由于伪框架 $\mathcal{F}_\varphi$ 不包含 Riesz 基 [15], 命题12，无法用于研究 $H_{\varphi\mathsf{E}}$。不过，可以尝试使用定理 9 和命题 11。

假设 $\{E_j^{(n)}\}$ 是一个严格递增序列，即

$$E_1^{(1)} < E_2^{(1)} < E_1^{(2)} < E_2^{(2)} < E_3^{(2)} \ldots < E_1^{(n)} < E_2^{(n)} \ldots < E_n^{(n)} < E_{n+1}^{(n)} < \ldots,$$

其中 $E_j^{(n)} \to \infty$。考虑到 (3.3)，可得由 (2.23) 定义的算子 $B:\ \mathcal{K} \to \ell_2(\mathbb{N})$ 具有如下形式

$$Bf = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} E_j^{(n)} \langle \varphi_j^{(n)}, f \rangle \right\}_{n=1}^{\infty}, \qquad f \in \mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{K}. \tag{3.4}$$

If

$$\sup_{n\in\mathbb{N},\ 1\le j\le n} \frac{1}{\sqrt{n}} E_j^{(n)} < \infty,$$

那么，对于每个 $f \in \mathcal{K}$，(3.4) 的右端都属于 $\ell_2(\mathbb{N})$，且算子 B 有界。在这种情况下，应用定理 9 可得 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 具有离散谱。利用命题 11 可以显式计算离散谱。基于 [9], 中给出的论证，我们得出 $H_{\varphi\mathsf{E}}$ 的离散谱由原有量 [4] $\{E_{n+1}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 以及方程的解 μ_1、$\ldots \mu_{n-1}$ 组成

$$\frac{1}{E_1^{(n)} - \mu} + \frac{1}{E_2^{(n)} - \mu} + \ldots + \frac{1}{E_n^{(n)} - \mu} = 0, \qquad n \ge 2.$$

相应的特征函数为

$$\varphi_{n+1}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i^{(n)} \quad (\text{for the eigenvalues} \quad E_{n+1}^{(n)}) \quad \text{and} \quad f_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{E_i^{(n)} - \mu_j} e_i^{(n)},$$

对应于特征值 μ_j、$1 \le j \le n-1$ $(n \ge 2)$。

此例可用于在信号分析领域构造自然的设置。为此，我们首先需要引入一些升降算子。具体而言，我们现在将引入作用于 $\mathcal{K}_n$的水平升降算子 a_n 和 a_n^*，以及将 $\mathcal{K}_{n+1}$ 映射到 $\mathcal{K}_n$ 并反之亦然的垂直升降算子V_n 和 V_n^*。

首先，我们定义

$$a_n e_j^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{if } j = 1 \\ \sqrt{j-1}\, e_{j-1}^{(n)}, & \text{if } j = 2, 3, \ldots, n, \end{cases}$$

[4] 这一事实立即由推论 8 得出，因为 $\psi_{n+1}^{(n)} = 0$，见 (3.3)

其伴随算子是

$$a_n^* e_j^{(n)} = \begin{cases} \sqrt{j}\, e_{j+1}^{(n)}, & \text{if } j = 1, 2, \ldots, n-1, \\ 0, & \text{if } j = n. \end{cases}$$

这些算子已在 [7] 中与一个生物系统相关联地引入，满足以下对易规则：

$$[a_n, a_n^*] = I_{\mathcal{K}_n} - nP_n^{(n)},$$

其中 $P_n^{(n)} f = \langle e_n^{(n)}, f\rangle_{\mathcal{K}_n} e_n^{(n)}$，对所有 $f \in \mathcal{K}_n$，并且 $I_{\mathcal{K}_n}$ 是 $\mathcal{K}_n$ 上的恒等算子。a_n 作用于由（3.1）定义的向量 $\varphi_j^{(n)}$ 上的结果如下：

$$a_n \varphi_j^{(n)} = \begin{cases} -\tilde{e}^{(n)}, & \text{if } j = 1 \\ \sqrt{j-1}\, \varphi_{j-1}^{(n)} + \frac{\sqrt{j-1}}{\sqrt{n}}\, \varphi_{n+1}^{(n)} - \tilde{e}^{(n)}, & \text{if } j = 2, 3, \ldots, n, \\ \sqrt{n}\, \tilde{e}^{(n)}, & \text{if } j = n+1, \end{cases}$$

其中

$$\tilde{e}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\, e_i^{(n)}.$$

也很容易（但不太重要）推导出 a_n^* 在 $\varphi_j^{(n)}$ 上的作用。

我们还可以如下进一步引入算子 $V_{n+1} : \mathcal{K}_{n+1} \to \mathcal{K}_n$

$$V_{n+1} f = \sum_{j=1}^{n+1} \langle e_j^{(n+1)}, f\rangle_{\mathcal{K}_{n+1}}\, \varphi_j^{(n)}, \qquad f \in \mathcal{K}_{n+1}.$$

特别地，我们看到 $V_{n+1} e_j^{(n+1)} = \varphi_j^{(n)}$。$V_{n+1}$ 的伴随算子可以很容易地推导出来。它是一个将 $\mathcal{K}_n$ 映射到 $\mathcal{K}_{n+1}$ 的算子，如下所示：

$$V_{n+1}^* g = \sum_{j=1}^{n+1} \langle \varphi_j^{(n)}, g\rangle_{\mathcal{K}_n}\, e_j^{(n+1)}, \qquad g \in \mathcal{K}_n.$$

在这种情况下，通常显然有 $V_{n+1}^* \varphi_j^{(n)} \neq e_j^{(n+1)}$。然而，由于 $\{\varphi_j^{(n)}\}_{j=1}^{n+1}$ 是 $\mathcal{K}_n$ 中的伪框架，因此可以检验出 $V_{n+1} V_{n+1}^* = I_{\mathcal{K}_n}$，而 $V_{n+1}^* V_{n+1} \neq I_{\mathcal{K}_{n+1}}$。

至于这个例子以及类梯算子 a_n、V_{n+1}及其伴随算符可能的解释，自然可以从信号分析的角度来理解这一框架：$\mathcal{K}_n$ 是由 n 位组成的信号集合。如果信号 f 是 $f = e_1^{(n)}$，这意味着在一个由 n 位组成的信号中，只有第一位处于“开”状态。类似地，如果 $f = \alpha_1 e_1^{(n)} + \alpha_n e_n^{(n)}$，那么第一位和最后一位处于“开”状态，权重分别为 α_1 和 α_n，且 $|\alpha_1|^2 + |\alpha_n|^2 = 1$。算子 a_n 和 a_n^* 会开启或关闭由 n 位组成的信号中的各个位，而 V_{n+1} 和 V_{n+1}^* 则会添加或移除位

在信号中。此外，在这种语境下，从 $\{e_j^{(e)}\}$ 到 $\{\varphi_j^{(e)}\}$ 也相当自然：框架常用于信号分析，以考虑信号传输过程中可能出现的信息丢失。哈密顿量可以看作信号的能量，其中包含由信号可能具有的不同长度所产生的各种贡献。

III.2 与正则伪玻色子的关系

本节聚焦于一类与所谓正则伪玻色子 [2, 4], 相关的伪框架示例，它们是玻色升降算子 $c = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)$和 $c^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)$的适当形变。

此处的出发点是一个有界算子 X，其具有有界逆 X^{-1}，以及希尔伯特空间 $\mathcal{K}$的一个标准正交基$\mathcal{F}_e = \{e_n \in \mathcal{K},\, n \in \mathbb{J} = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$。于是我们有

命题 13 如果 $\|X^*X\| < 1$，则集合

$$\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_n = X^* e_n,\, n \in \mathbb{J}\}, \qquad \mathcal{F}_{\tilde{\varphi}} = \left\{\tilde{\varphi}_n = (I - X^*X)^{1/2} e_n,\, n \in \mathbb{J}\right\}$$

是 $\mathcal{K}$的Riesz基，其对偶基为

$$\mathcal{F}_\psi = \left\{\psi_n = X^{-1} e_n,\, n \in \mathbb{J}\right\}, \qquad \mathcal{F}_{\tilde{\psi}} = \left\{\tilde{\psi}_n = (I - X^*X)^{-1/2} e_n,\, n \in \mathbb{J}\right\}.$$

此外，集合 $\mathcal{F}_{ex}^{\varphi} = \mathcal{F}_\varphi \cup \mathcal{F}_{\tilde{\varphi}}$是 $\mathcal{K}$的一个伪框架。

如果 $\|X^*X\| > 1$ 那么集合 $\mathcal{F}_{\tilde{\tilde{\psi}}} = \left\{\psi_n = (I - (X^*X)^{-1})^{1/2} e_n, \quad n \in \mathbb{J}\right\}$ 是一个 Riesz 基，并具有对偶基

$$\mathcal{F}_{\tilde{\tilde{\varphi}}} = \left\{\widetilde{\varphi_n} = (I - (X^*X)^{-1})^{-1/2} e_n,\, n \in \mathbb{J}\right\}$$

且集合 $\mathcal{F}_{ex}^{\psi} = \mathcal{F}_\psi \cup \mathcal{F}_{\tilde{\tilde{\psi}}}$是 $\mathcal{K}$ 的伪框架。

证明：如果 $\|X^*X\| < 1$，那么 $I - X^*X$ 是作用于 $\mathcal{K}$上的有界正算子，并且存在其正平方根$(I - X^*X)^{1/2}$ 及其逆$(I - X^*X)^{-1/2}$，它们都是作用于 $\mathcal{K}$上的有界算子。因此，$\mathcal{F}_\varphi$, $\mathcal{F}_\psi$ 和 $\mathcal{F}_{\tilde{\varphi}}$, $\mathcal{F}_{\tilde{\psi}}$具有 Riesz 基的性质显而易见。为证明$\mathcal{F}_{ex}^{\varphi}$ 是一个伪框架（PF），令 $U = X^*X$, 它是有界的、具有有界逆且自伴的，并将一个一般的 $f \in \mathcal{K}$写作 $f = Uf + (I - U)f$。我们有

$$\langle Uf, f\rangle = \langle Xf, Xf\rangle = \sum_{n\in\mathbb{J}} |\langle Xf, e_n\rangle|^2 = \sum_{n\in\mathbb{J}} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2.$$

此外，由于 $I - U$ 是一个正算子，

$$(I - U)f = (I - U)^{1/2}\left((I - U)^{1/2} f\right) = (I - U)^{1/2} \sum_{n\in\mathbb{J}} \langle e_n, (I - U)^{1/2} f\rangle e_n = \sum_{n\in\mathbb{J}} \langle \tilde{\varphi}_n, f\rangle \tilde{\varphi}_n,$$

因此 $\langle (I-U)f,\ f\rangle = \sum_{n\in\mathbb{J}} |\langle \tilde{\varphi}_n,\ f\rangle|^2$。由此

$$\|f\|^2 = \langle Uf, f\rangle + \langle (I-U)f, f\rangle = \sum_{n\in\mathbb{J}} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 + \sum_{n\in\mathbb{J}} |\langle \tilde{\varphi}_n, f\rangle|^2,$$

这意味着我们的断言： $\mathcal{F}_{ex}^{\varphi}$ 是一个伪框架。

命题第二部分的证明与此类似，因此不再重复。

□

备注：– (1) 显然，如果集合 $\mathcal{F}_{\tilde{\varphi}}$ 和 $\mathcal{F}_{\tilde{\psi}}$ 定义良好，那么其他集合 $\mathcal{F}_{\tilde{\tilde{\varphi}}}$ 和 $\mathcal{F}_{\tilde{\tilde{\psi}}}$就没有定义。关键在于 $I-U$ 和 $I-U^{-1}$ 中只有一个可以为正。这并不排除将上述构造扩展到同时考虑这两种可能性的可能性。但我们在此不再进一步探讨这一点。

III.2.1 一个显式构造

正如在 [2, 4], 中特别讨论的，伪玻色子可以被视为我们之前引入的升降算子 c 和 c^* 的适当变形。众所周知，这些算子可用于对角化量子谐振子的哈密顿量 $H_0 = \frac{1}{2}(p^2+x^2)$，其中 p 和 x 分别是动量和位置算符（均为自伴）。事实上，经过一些代数运算，我们可以写出 $H_0 = c^*c + \frac{1}{2}I$，并且其本征态 e_n 可以通过首先固定真空态 e_0来构造，即 $\mathcal{K}$ 中的一个向量使得 $ce_0 = 0$，然后用 c^*的幂次作用于它： $e_n = \frac{(c^*)^n}{\sqrt{n}!}\, e_0$。 然后，$\mathcal{F}_e = \{e_n,\, n \geq 0\}$ 是 $\mathcal{K}$的标准正交基。特别地，在位置表象中，其中 c 和 c^* 是已经引入的微分算子，我们有 $\mathcal{K} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 并且

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} H_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}},$$

其中， $H_n(x)$ 是第 n 个厄米多项式。

备注：–尽管该系统（众所周知的谐振子）表面上很简单，但强调这一点可能仍然是有益的，因为这并不一定是平凡的。事实上，我们可以将 H_0 看作是在适当变量下表示的、处于垂直于某一固定平面的强磁场中的二维电子气的单电子哈密顿量。这正是朗道能级和分数量子霍尔效应背后的物理系统，例如参见 [16, 27] ，并且在过去数年中吸引了大量关注，[10, 20, 26, 28] 等等。在这些论文中的大多数论文里，都利用了修改所谓的最低朗道能级（最低朗道能级）中的单个波函数的可能性，来构造局域于不同晶格点并使气体能量最小化的电子气波函数。

在接下来的工作中，我们受到这样一种可能性的启发：在保持处于同一能级的同时，对最低朗道能级的波函数进行平移。然而，我们不再仅使用平移算子，而是考虑乘法算子和平移算子的组合。更明确地说，设 K 和 T 为如下定义的算子：

$$Kf(x) = m(x)f(x), \qquad Tf(x) = f(x-\alpha), \qquad f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}).$$

其中 $\alpha > 0$ 是固定的，而 $m(x)$ 是一个复值的、光滑[5] 函数，满足 $0 < m \trianglelefteq m(x)$ $| \leq M < 1$ 于 $\mathbb{R}$。这些算子是有界的，且逆算子有界。特别地，T 是酉算子：

$$K^{-1}f(x) = \frac{1}{m(x)}\, f(x), \qquad K^*f(x) = \overline{m(x)}\, f(x), \qquad T^*f(x) = T^{-1}f(x) = f(x+\alpha).$$

现在，如果代入 $X^* = TK$，我们得到以下结果：

$$X^*f(x) = m(x-\alpha)\, f(x-\alpha), \qquad Xf(x) = \overline{m(x)} f(x+\alpha),$$

以及

$$(X^{-1})^*f(x) = \frac{1}{m(x)}\, f(x+\alpha), \qquad X^{-1}f(x) = \frac{1}{\overline{m(x-\alpha)}}\, f(x-\alpha).$$

算子 X^*X 和 XX^* 最终都是乘法算子：

$$X^*Xf(x) = |m(x-\alpha)|^2 f(x), \qquad XX^*f(x) = |m(x)|^2 f(x).$$

由于我们对 m 的假设，我们有 $|m(x-\alpha)|^2 \leq M^2 < 1$，因此 $\|X^*X\| < 1$：我们处于命题 13 的第一种情况，所以集合 $\mathcal{F}_{\widetilde{\varphi}}$ 和 $\mathcal{F}_{\widetilde{\psi}}$ 无法定义。不过我们发现

$$\varphi_n(x) = m(x-\alpha)e_n(x-\alpha), \qquad \psi_n(x) = \frac{1}{\overline{m(x-\alpha)}} e_n(x-\alpha)$$

and

$$\tilde{\varphi}_n(x) = \sqrt{1-|m(x-\alpha)|^2}\, e_n(x), \qquad \tilde{\psi}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-|m(x-\alpha)|^2}}\, e_n(x).$$

这些函数的（成对）双正交性是显而易见的，而 $\mathcal{F}^{\varphi}_{ex} = \mathcal{F}_{\varphi} \cup \mathcal{F}_{\tilde{\varphi}}$是一个伪框架这一事实则不那么清楚，但它是命题 13 的推论。

根据 [4] ，很容易找到 $\mathcal{F}_{\varphi}$ 和 $\mathcal{F}_{\tilde{\varphi}}$的升降算子，以及它们的对偶里斯基。我们如下引入算子a_{φ}、 b_{φ}、 $a_{\tilde{\varphi}}$和 $b_{\tilde{\varphi}}$：

$$a_{\varphi}f(x) = X^*c(X^*)^{-1}f(x), \qquad b_{\varphi}f(x) = X^*c^*(X^*)^{-1}f(x),$$

[5]例如，我们可以取 $m(x) \in C^{\infty}$。

and

$$a_{\tilde{\varphi}}f(x)=(I-X^*X)^{1/2}c(I-X^*X)^{-1/2}f(x),\qquad b_{\tilde{\varphi}}f(x)=(I-X^*X)^{1/2}c^*(I-X^*X)^{-1/2}f(x),$$

$\forall f(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$，即 C^∞的快速衰减函数集合（施瓦茨空间）。通过简单计算，我们可以推导出以下表达式:

$$a_\varphi=c-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha+\frac{m'(x-\alpha)}{m(x-\alpha)}\right),\qquad b_\varphi=c^*-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha-\frac{m'(x-\alpha)}{m(x-\alpha)}\right),$$

当.....
时

$$a_{\tilde{\varphi}}=c-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{q'(x)}{q(x)},\qquad b_{\tilde{\varphi}}=c^*+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{q'(x)}{q(x)},$$

其中 $q(x)=\sqrt{1-|m(x-\alpha)|^2}$。顺便指出，我们可以将 $^{q'}{}_{(x)\ q(x)}=_{d(\log(q(x)))dx}$ 重写为。

赝玻色子算符很有用，因为它们在前面推导出的函数族上充当升降算子。特别地，我们有

$$a_\varphi\varphi_n(x)=\sqrt{n}\varphi_{n-1}(x),\qquad b_\varphi\varphi_n(x)=\sqrt{n+1}\varphi_{n+1}(x),$$

并且类似地

$$a_{\tilde{\varphi}}\tilde{\varphi}_n(x)=\sqrt{n}\tilde{\varphi}_{n-1}(x),\qquad b_{\tilde{\varphi}}\tilde{\varphi}_n(x)=\sqrt{n+1}\tilde{\varphi}_{n+1}(x),$$

在理解 $\varphi_{-1}(x)=\tilde{\varphi}_{-1}(x)=0$ 的前提下。作为结果，各个 $\varphi_n(x)$ 都是 $N_\varphi=b_\varphi a_\varphi$的本征态，而每个 $\tilde{\varphi}_n(x)$ 都是 $N_{\tilde{\varphi}}=b_{\tilde{\varphi}}a_{\tilde{\varphi}}$的本征态，二者的本征值均为 n。如果我们进一步计算这些算子的伴随算符，那么就得到对偶族的升降算子，$\mathcal{F}_\psi$ 和 $\mathcal{F}_{\tilde{\psi}}$，[2, 4]。

现在将向量 Φ_n 定义为

$$\Phi_n(x)=\begin{cases}\varphi_n(x), & n=0,1,2,3,\dots\\ \tilde{\varphi}_{-n-1}(x), & n=-1,-2,-3,\dots\end{cases}$$

以及集合 $\mathcal{F}_\Phi=\{\Phi_n(x)\ \ n\in\mathbb{Z}\}=\mathcal{F}_\varphi\cup\mathcal{F}_{\tilde{\varphi}}$，容易验证，对于任意 $f(x)\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle\Phi_n,f\rangle\Phi_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\langle\varphi_n,f\rangle\varphi_n(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\langle\tilde{\varphi}_n,f\rangle\tilde{\varphi}_n(x)=X^*Xf(x)+(1-X^*X)f(x)=f(x),$$

这正如预期（因为 $\mathcal{F}_\varphi\cup\mathcal{F}_{\tilde{\varphi}}$ 是 $\mathcal{K}=\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 中的伪框架）。现在，给定一组（实）数 E_n，$n\in\mathbb{Z}$，我们可以考虑一个算子

$$H=\sum_{n\in\mathbb{Z}}E_n\langle\Phi_n,\cdot\rangle\Phi_n(x)=H_1+H_2,$$

其中

$$H_1 = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \langle \varphi_n, \cdot \rangle \varphi_n(x), \qquad H_2 = \sum_{n=0}^{\infty} E_{-(n+1)} \langle \tilde{\varphi}_n, \cdot \rangle \tilde{\varphi}_n(x).$$

现在固定 $E_n = E_{-(n+1)} = n$，则

$$H_1 = \sum_{n=0}^{\infty} n \langle \varphi_n, \cdot \rangle \varphi_n(x) = N_\varphi \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi_n, \cdot \rangle \varphi_n(x),$$

而 $H_2 = \sum_{n=0}^{\infty} n \langle \tilde{\varphi}_n, \cdot \rangle \tilde{\varphi}_n(x) = N_{\tilde{\varphi}} \sum_{n=0}^{\infty} \langle \tilde{\varphi}_n, \cdot \rangle \tilde{\varphi}_n(x)$。

关于这两个项可能的解释，我们可以回顾之前的评论，以及函数 $\varphi_n(x)$ 和 $\tilde{\varphi}_n(x)$ 的显式表达式。特别是，后两者与 $e_n(x)$ 成正比（比例因子为权函数 $\sqrt{1-|m(x-\alpha)|^2}$），而函数 $\varphi_n(x)$ 则再次与 $e_n(x)$ 的平移版本成正比（比例因子为另一个权函数 $m(x-\alpha)$）。因此， H_2 可以看作最低朗道能级中粒子的单电子形变哈密顿量，而 H_1 则可以看作它的平移版本（采用不同的权函数）。这与由单个电子构造的晶体有关，可能会很有趣，例如 [10, 20, 26, 28], ，因为它可能产生两个不同的晶格，其中一个相对于另一个发生了平移。在凝聚态物理中，这类晶格很有用，例如所谓的倒易晶格。

这些例子并未涵盖本文所提出的一般策略的所有可能应用。更多结果以及更多应用是我们未来计划的一部分。

致谢

FB 部分得到了巴勒莫大学通过 CORI 2017 行动以及 Indam 的 Gruppo Nazionale di Fisica Matematica 的支持。SK 部分得到了 AGH UST 应用数学学院在科学与高等教育部补贴下的法定任务以及 GNFM 的支持。SK 对巴勒莫大学的热情款待表示感谢。

参考文献

[1] Y. Arlinski˘i, V. A. Zagrebnov, 围绕 Van Daele–Schm ¨udgen 定理。Integr. Equ. Oper. Theory. 81, 53–95, (2015).

[2]F. Bagarello, 《变形的正则（反）对易关系与非厄米哈密顿量》, 载于 F. Bagarello、J. P. Gazeau、F. H. Szafraniec、M. Znojil 编, 《非-

量子物理学中的自伴算子：数学方面，John Wiley and Sons（2015）[3] F. Bagarello，有限维伪玻色子：截断谐振子的非厄米版本。Phys. Lett. A.，382，第36期，2526–2532（2018）。[4] F. Bagarello，伪玻色子及其相干态。Springer（2022）[5] F. Bagarello，G. Bellomonte，由双正交集定义的哈密顿量。J. Phys. A，50，第14期，145203（2017）。[6] F. Bagarello，A. Inoue，C Trapani，由Riesz基定义的非自伴哈密顿量。J. Math. Phys.，55，033501，（2014）。[7] F. Bagarello，F. Gargano，用于模拟癌细胞基本动力学的非厄米算子。Entropy，20(4): 270，（2018）。[8] F. Bagarello，S. Ku˙zel，Krein空间中的广义Riesz系统和正交归一序列。J. Phys. A. 53，085202，（2020）。[9] F. Bagarello，S. Ku˙zel，由Parseval框架生成的哈密顿量。Acta Appl Math. 171（2021）。[10] F. Bagarello，G. Morchio和F. Strocchi，维格纳晶体的量子修正：Hartree-Fock展开。Phys. Rev. B 48，5306，（1993）。[11] B. Bagchi，S.N. Biswas，A. Khare，P.K. Roy，截断谐振子与超对称量子力学。Pramana 49，199–204，（1997）。[12] R. Balan，P. Casazza，C. Heil和Z. Landau，框架的亏损与超额。Advances in Computational Mathematics 18，93—116，（2003）。[13] C. M. Bender，S. Boettcher，具有PT对称性的非厄米哈密顿量的实谱。Phys. Rev. Lett. 80，5243-5246，（1998）。[14] O. Bratteli和D.W. Robinson，算子代数与量子统计力学1。Springer-Verlag，纽约，1987。[15] P.G. Casazza，O. Christensen，包含Riesz基的框架及其在扰动下的性质保持，SIAM J. Math. Anal. 29，266–278，（1998）。[16]T. Chakraborty和P. Pietil¨ainen，分数量子霍尔效应。Springer-Verlag，柏林，纽约，1988。

[17] O.Christensen，《框架与Riesz基导论》。Birkh¨auser，波士顿，（2003）。[18] H.Inoue，正则双正交对及其物理算子的一般理论。J.Math. Phys.57，083511，（2016）。[19] H.Inoue，M. Takakura，由广义Riesz基定义的非自伴哈密顿量。J. Math. Phys.57，083505，（2016）。[20] R.Ferrari，强磁场中的二维电子：单粒子态的一个基。Phys.Rev. B，42，4598–4609，（1990）。[21] P.R. Halmos，《希尔伯特空间问题集》，Springer，纽约，1982。[22] B. C. Hall，《面向数学家的量子理论》，Springer，纽约，2013。[23] D. Han 和 D. R.Larson。框架、基与群表示。Memoirs AMS，2000。[24] C. Heil，《基理论入门：扩展版》。Springer，纽约，2010。[25] A. Kamuda和 S. Ku˙zel 关于对偶框架的描述。应用与计算调和分析 56，351-366，（2021）。[26] R.B. Laughlin，强磁场中三个二维电子的量子化运动。Phys. Rev. B.，27，3383–3389，（1983）。[27] A. H.MacDonald，《量子霍尔效应：一种观点》，Kluwer学术出版社，1989。[28] K. Maki 和 X. Zotos，强磁场中二维维格纳晶体的静态与动态性质。Phys. Rev. B.，28，4349–4356，（1983）。[29]M. Reed，B.Simon，《现代数学物理方法》第二卷：傅里叶分析、自伴性。学术出版社，纽约，1975。[30] M. Reed，B. Simon，《现代数学物理方法》第四卷：算子分析。学术出版社，纽约，1978。[31] K. Schm¨udgen，闭对称算子的幂的定义域。J. Oper. Theory9，53–75，（1983）。[32] K. Schm¨udgen，《希尔伯特空间上的无界自伴算子》。Springer，柏林，2012。