从数据重构耦合离散混沌单元的网络动力学

Irem Topal* 和Deniz Eroglu†*Faculty of Engineering and Natural Sciences, Kadir Has University, 34083 Istanbul, Turkey*

从数据重构网络动力学，对于预测神经元网络等复杂系统的动力学变化至关重要；然而，先前研究表明，只有在严格限制条件下（例如需要大量数据或系统规模较小），才能实现重构。在此，我们提出一种结合理论模型降阶与稀疏恢复的恢复方案，用于识别复杂网络上弱耦合混沌映射的控制方程及其相互作用，从而放宽不切实际的限制，使其适用于现实世界的应用。学习动力学和连接关系有助于检测参数变化引起的临界转变。我们将该技术应用于真实小鼠新皮层上的现实神经元系统（有噪声和无噪声两种情况），以及人工网络。

arXiv:2304.02670v1 [math.DS] 5 Apr 2023

动力学网络包括电网、食物网、气候网络和神经元网络，它们由在复杂网络上振荡的动力学单元构成，是我们日常生活的基本组成部分。调节网络动力学对于预测并进而控制这些系统的行为、实现所需功能至关重要。神经元网络是与人类健康息息相关的一类重要动力学网络，因为相互作用的变化可能导致不良的病理状况。例如，癫痫发作与动力学网络参数变化时出现的神经网络同步有关 [1]。因此，预判向神经元同步的临界转变并发明能够检测预警信号的预测技术，以防止潜在悲剧，至关重要 [2]。对于由神经元固有功能和神经元间耦合方案构成的神经元网络动力学而言，无法直接确定向同步的临界转变。因此，必须根据节点的观测结果重构控制方程，以预测参数变化导致的临界转变。

从数据中重构网络动力学是一个非常活跃的研究领域 [3–8]。人们提出了各种方法，在某些约束条件下推断连接矩阵，例如要求系统处于稳态 [9]，或需要预先了解动力学 [10–12] ，或需要了解耦合强度 [13]。除了通过控制信号或解析解揭示连接矩阵的研究之外，人们还引入了压缩感知等统计学习方法，用于学习完整的未知动力学 [14, 15], ，该方法也能推断连接结构。然而，统计学习技术无法扩展到大型网络，或者需要较长的时间序列测量。因此，一个自然的问题是：在不要求了解系统节点行为和耦合方案的情况下，是否可以利用相对较短的数据揭示弱相互作用混沌振荡器的网络动力学？这一问题在弱耦合状态下尤其重要，因为对于混沌振荡器而言，同步状态不稳定，相关性呈指数衰减，这意味着相似性度量无法捕捉相互作用拓扑结构。

这篇快报报告了一种通过将动力系统理论中的平均场方法与统计学习工具相结合，从时间序列观测中进行动力学网络重构的重建方法。神经网络由混沌孤立动力学 [16], 弱相互作用节点 [17] 以及通过无标度型网络的相互作用 [18]来描述。我们的重建方法假设我们具有所述的神经科学设置，并能访问所有节点的数据，而节点的局部动力学、它们之间的耦合函数以及相互作用结构是未知的。我们的方法使用相当短的时间序列就能准确识别它们，并且独立于网络规模，这一点很重要，因为通常不可能获得长时间的真实世界观测，而且真实网络规模很大。最后，由于重构方法包括平均场近似，由于动力单元的混沌性质，推断的模型可能无法估计系统的确切未来状态。然而，重构的模型使我们能够预测考虑参数变化时动力学网络的涌现集体行为，这对于避免癫痫发作等真实世界应用中的不良行为至关重要。

模型——具有类似扩散相互作用的弱耦合相同 n 振荡器的网络动力学由

$$\boldsymbol{x}_i(t+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_i(t), \boldsymbol{x}_j(t)) + \boldsymbol{\eta}_i(t) \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 表示节点的孤立动力学，我们假设其是混沌的 [19]。 $\boldsymbol{H}$

*电子邮箱：irem.topal@khas.edu.tr
†电子邮箱：deniz.eroglu@khas.edu.tr

是一个扩散耦合函数 ($\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H}(0) = 0$和 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$). $\boldsymbol{W} = [w_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$是加权有向网络的邻接矩阵，其中 $w_{ij} \geq 0$ 是从节点-j 到节点-i的相互作用强度。噪声项， $\boldsymbol{\eta}_i(t)$，是均匀分布的 $\|\boldsymbol{\eta}_i(t)\| \leq \eta_0$ 对于所有节点，其中 η_0 是噪声强度。该网络动力学，方程 (5)，用于模拟众多现实世界应用，包括脑网络 [20], 电网 [21, 22], 超导体 [23], 和心脏起搏器细胞 [24]。

约化定理.—Eq. (5)的低维约化是我们网络动力学重建方法的关键。约化定理采用平均场方法，依赖于两个主要陈述：(i)节点动力学的统计行为（状态的频率分布）必须保持，以及(ii)网络中大部分节点必须至少与少数几个节点相互作用。这些陈述在约化定理的给定假设下得到满足：混沌的局部动力学 扩张映射和弱耦合 （以保持节点状态分布免受相互作用或外部噪声引起的波动）以及无标度网络 （大多数节点具有小度 $k \sim n^{\epsilon}$，一些节点是枢纽，度 $k \sim n^{\frac{1}{2}+\epsilon}$其中 ϵ是任意小的数），这也模拟了大脑网络动力学。使用该定理，Eq. (1)的耦合项可以约化如下：

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j) \approx k_i \int \alpha\tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)d\mu(\boldsymbol{x}_j)$$
$$= k_i\alpha(\tilde{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}_i) + \tilde{C}) = k_i\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_i) + C$$

其中， $\boldsymbol{V}$是有效耦合函数，$k_i = \sum_j w_{ij}$ 是节点 i的入度， $\boldsymbol{H} = \alpha\boldsymbol{H}$、 α 是耦合函数的乘数， μ 是孤立动力学的物理测度， C 是积分常数，而该积分考虑了相互作用对节点-i的累积效应。由于耦合项会随着不变测度 μ的变化而减小，约化定理适用于处于稳态的系统。此外，要应用这种基于平均场方法的约化定理，必须保留各个动力系统的统计性质，而混沌的振子和弱耦合满足这一条件（见补充材料 II 和参考文献 [25]）。于是，方程（5）可以写为

$$\boldsymbol{x}_i(t+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i(t)) + k_i\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_i(t)) + C + \boldsymbol{\kappa}_i(t) + \boldsymbol{\eta}_i(t) \tag{2}$$

其中， $\boldsymbol{\kappa}_i(t)$是在一段时间内的小幅波动，该时间段长度呈指数级增长，并取决于第 i个节点的邻居状态。

重构方案。—— 为了学习孤立动力学 $\boldsymbol{f}$ 和耦合函数 $\boldsymbol{H}$，我们首先需要根据它们的度对节点进行分类。根据约化定理，具有相似入度的节点必须具有相似的控制方程。为了独立于其他节点识别每个节点的控制方程，我们使用稀疏回归，特别是非线性动力系统的稀疏识别（SINDy）技术 [26]。我们将节点-i 的数据收集由Eq.(5)表示为 $\mathscr{X}_i = [\boldsymbol{x}_i(1)\ldots,\boldsymbol{x}_i(T-1)]^T$和 $\mathscr{X}_i' = [\boldsymbol{x}_i(2)\ldots,\boldsymbol{x}_i(T)]^T$。SINDy对线性方程 $\mathscr{X}_i' = \boldsymbol{\Psi}(\mathscr{X}_i)\boldsymbol{\Xi}_i$ 执行稀疏回归以求解 $\boldsymbol{\Xi}_i = [\xi_i^1,\ldots,\xi_i^p]^T$，这是一个定义动力学的系数向量，其中 $\boldsymbol{\Psi} = [\psi_1,\ldots,\psi_p]$ 表示基函数库并应用于 $\boldsymbol{x}_i$ 作为

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{X}_i) = \overbrace{\begin{bmatrix} \psi_1(\boldsymbol{x}_i(1)) & \psi_2(\boldsymbol{x}_i(1)) & \ldots & \psi_p(\boldsymbol{x}_i(1)) \\ \psi_1(\boldsymbol{x}_i(2)) & \psi_2(\boldsymbol{x}_i(2)) & \ldots & \psi_p(\boldsymbol{x}_i(2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(\boldsymbol{x}_i(T-1)) & \psi_2(\boldsymbol{x}_i(T-1)) & \ldots & \psi_p(\boldsymbol{x}_i(T-1)) \end{bmatrix}}^{\text{candidate functions of } \boldsymbol{x}} \Bigg\downarrow$$

其中， p 是库 $\boldsymbol{\Psi}$中候选函数的数量。（有关基函数库的详细说明，请参见补充材料第VIII节。）稀疏回归的目标是通过在 $\boldsymbol{\Xi}_i$ 中寻找活跃系数（参见补充材料第VII节），确定仅由 $\boldsymbol{\Psi}$ 中少量函数构成的动力学。因此，我们仅使用每个节点自身的相关数据，为每个节点得到一个预测模型；并预期入度 k_i相似的节点会得到相似的模型。通过归一化欧几里得距离得到距离矩阵，以对预测模型进行分类$d_{ij} = (\Sigma_{k=1}^{p} \frac{1}{V_k} |\xi_i^k - \xi_j^k|^2)^{1/2}$，其中 $|\cdot|$ 为绝对值， V_k 为第 $\boldsymbol{\Psi}$ 个函数对应的预测系数k的方差。假设 $\boldsymbol{\Xi}_i$ 和 $\boldsymbol{\Xi}_j$ 分别是节点-i 和 j的两个预测模型，它们表示为库 $\boldsymbol{\Psi}$中若干函数的线性组合。对于一对相似节点 i 和 j，我们得到较小的 d_{ij} ；而对于不同的节点，例如低度节点和枢纽，d_{ij} 会较大。补充材料第VIII节中给出了 d_{ij} 的计算示例。直方图 $P(D)$由距离矩阵 $D_i = \sum_j d_{ij}$的行和得到，它能依据节点的度很好地对模型相似性进行分类（图1(a)）。由于网络中低度节点很多，因此预期它们会落在直方图中最高的区间。

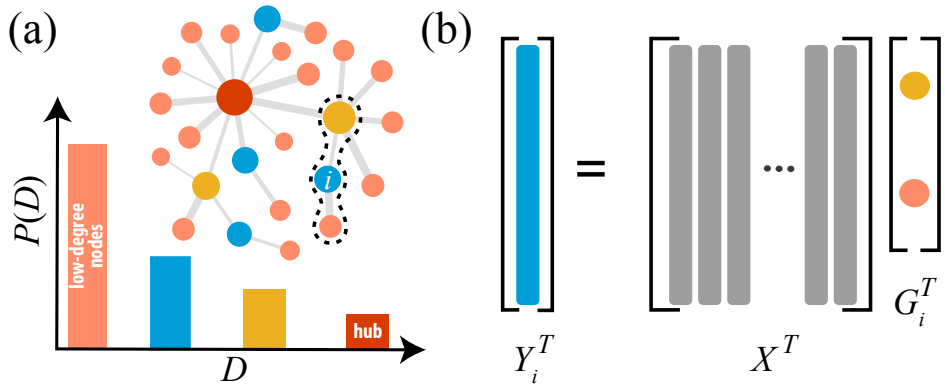

图 1：重构方案示意图。(a) 对每个观测进行稀疏回归，可得到每个节点的预测模型。入度相同的节点由相同的预测模型重构，因此可以根据节点的入度对其进行分类。由于低度节点数量众多，且其代表的孤立动力学仅含可忽略的噪声，因此可以学习 $\boldsymbol{f}$。从枢纽的数据中剔除局部动力学 $\boldsymbol{f}$，即可得到枢纽上的主导耦合效应。因此，可以学习耦合函数 $\boldsymbol{H}$。(b) 学习 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 后，通过减去局部动力学，可将每个节点的问题定义为一个线性问题，从而获得每个节点剩余的相互作用效应。对节点-i 的剩余相互作用动力学进行稀疏回归，其中 $i = 1, \ldots, n$，即可完整重构动力学网络。非零的 $\boldsymbol{G}_i^T$ 元素是第 i 个节点的入边（逐步方案见补充材料第 II 节）。

低度节点的恢复模型被确定为我们的 $\boldsymbol{f}$，其波动可以忽略不计 $\boldsymbol{\kappa}_{i\circ}$ 相反，由于枢纽节点最为稀少，预期距离 D_i 会较大。因此，枢纽位于直方图 $P(D)$中最低的区间（图1(a)）。请注意，重构的成功与否取决于低度节点和枢纽能否依据其度彼此区分，这意味着网络拓扑在此发挥着重要作用 [2],；补充材料第II节对此作了进一步说明。

通过从识别出的枢纽节点数据 $\mathscr{X}_h' - \boldsymbol{f}(\mathscr{X}_h)$ 中剔除已学习的孤立动力学贡献，我们得到枢纽上的累积耦合效应，其中 h 表示枢纽节点。我们对枢纽上的累积耦合效应拟合一个函数，并学习耦合函数 $\boldsymbol{H}$，该函数可能由于积分常数 C 而产生线性偏移（补充材料第 II 节）。利用 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ 可以轻松估算线性偏移的大小。推断相互作用函数对于揭示网络 [27], 至关重要，而从这类约化动力学中学习 $\boldsymbol{H}$ 可提高我们方法的可行性。引入拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}$，其中 $L_{ij} = \delta_{ij}k_i - w_{ij}$，且 δ_{ij} 为克罗内克 δ（当 $i \neq j$ 时，$\delta_{ii} = 1$ 且 $\delta_{ij} = 0$），并假设 $\boldsymbol{H}$ 是线性函数，我们可以将式 (5) 改写为紧凑形式：

$$\boldsymbol{X}(t+1) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(t)) - (\boldsymbol{L} \otimes \boldsymbol{H})(\boldsymbol{X}(t)), \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n]^T$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) \cdots, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)]^T$以及 $\otimes$是克罗内克积（有关用拉普拉斯矩阵和 [28]推导的内容，请参见补充材料第 I 节）。定义 $\boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{X}(t+1) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(t))$，式（8）可写为 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{X}$ 其中 $\boldsymbol{G} = -(\boldsymbol{L} \otimes \boldsymbol{H})$。最后，我们通过求解线性方程 $\boldsymbol{Y}^T = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{G}^T$ 并采用稀疏回归来学习稀疏矩阵 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{mn \times mn}$，即最小绝对收缩和选择算子（LASSO）[29], ，如参考文献 [30]所建议。LASSO在最小二乘损失函数中加入 ℓ_1 正则化惩罚项，以寻找稀疏系数（连接），并被视为一种压缩感知方法 [31]。请注意，对于较长的时间序列，线性方程也可以使用 ℓ_2-范数求解；然而，由于我们关注的是短数据（在时间序列长度为 $T < mn$的情况下），因此必须采用压缩感知方法 [31]。因此，我们学习得到连接矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{L}$，如图 1(b) 所示。同样重要的是要注意，如果不使用约化定理，通过一次稀疏回归学习所有节点的方程，仅对相对较小的网络可行。由于网络规模的增加，库的扩展会导致数据矩阵出现统计相关性，并迅速导致重构失败 [32, 33]。详细讨论请参见补充材料第 XII 节。

小鼠新皮层重构.—一个加权有向神经网络（987个节点和1536 条边），代表小鼠新皮层 [34, 35], ，被加以考察（补充材料第 IV 节）。为模拟神经元，我们使用了类似扩散的电耦合 Rulkov 映射，作为

$$\begin{aligned} u_i(t+1) &= \frac{\beta}{1+u_i(t)^2} + v_i(t) - \sum_j L_{ij}u_j + \eta_i \\ v_i(t+1) &= v_i(t) - \nu u_i(t) - \sigma \end{aligned}$$

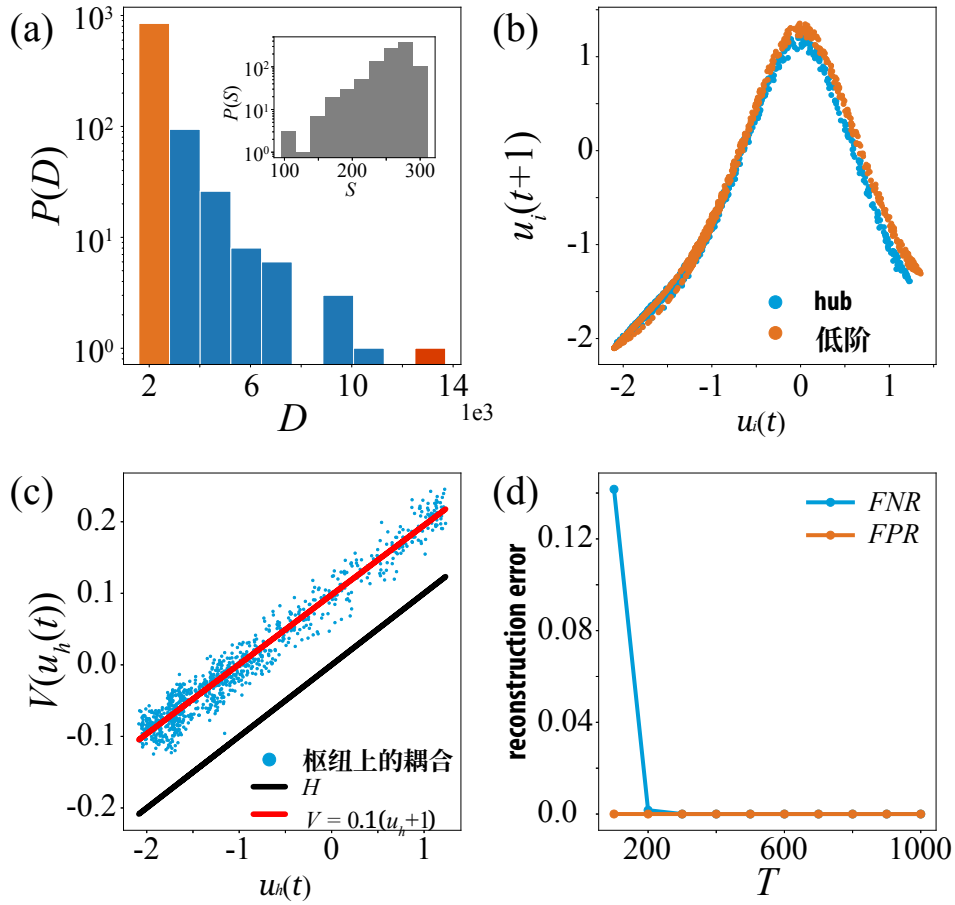

图2：真实小鼠新皮层网络上弱电耦合Rulkov映射的重构过程。(a)节点相似性直方图确定低度节点（橙色柱）和枢纽（红色柱）。插图：直方图 $P(S)$ 展示了原始时间序列之间的相关性。由于Rulkov映射的混沌性质，不可能根据相关性推断连接结构。(b)低度节点和枢纽的回归映射因弱耦合效应而略有不同。(c) 有效耦合 $V(u)$ 由于积分常数1沿水平方向移动。(d) FNR对于不同的时间序列长度。 FPR对于所有时间序列长度均为零。

其中快变量 u_i 是t 膜电位和慢变量 v_i 是离子浓度变化 [36] .
常数参数 $\beta =$ 4.1 和 $\nu = \sigma = 0.001$ 对于混沌爆发动力学 [37]是固定的。

无噪声情况.—遵循重构方案，利用 $\eta_0 = 0$的相似性直方图图2(a)对节点进行分类，而成对皮尔逊相关性并未显示出任何关于度的信息（图2(a)插图）。低度节点与枢纽的返回映射之间的差异如图2(b)所示，与孤立节点动力学的比较见补充材料第V-A节。发现有效耦合 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$近似为 $[0.1(u+1), 0],$，这意味着 α为0。1，并且由于 $\boldsymbol{H}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$， u 变量上的线性偏移为1（图2(c)）。˜最后，我们通过求解线性方程 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{GX}$ ，利用学习得到的 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{H}$来学习网络拓扑。我们使用假阴性（假阳性）占真阳性（真阴性）的比例来度量重构误差，$FNR(FPR)$。对于完美重构，$FNR(FPR)$等于0（补充材料第III节）。这里，我们使用真实拉普拉斯矩阵来评估重构的准确率。当真实值不可用时，可以通过交叉验证技术评估学习得到的模型（补充材料第XI节）。当数据长度大于 $T > 200$ 时，重构误差几乎为零（图2(d)）。此外，我们还根据惩罚项和时间序列长度对我们的方法进行了系统评估。当节点数 n 乘以局部动力学的维数 m 超过时间序列长度 $nm > T$时，这对应于一个欠定线性问题。即使对于短数据（$T \approx 200$），当 $mn = 1974$ 时，使用较小的惩罚项也可以实现成功重构（图3(a)）。需要注意的是，如果问题是超定的 $nm < T$，则可以使用 ℓ_2-范数回归来加快计算（补充材料第IX节）。此外，我们还对H´énon映射提供了重构分析

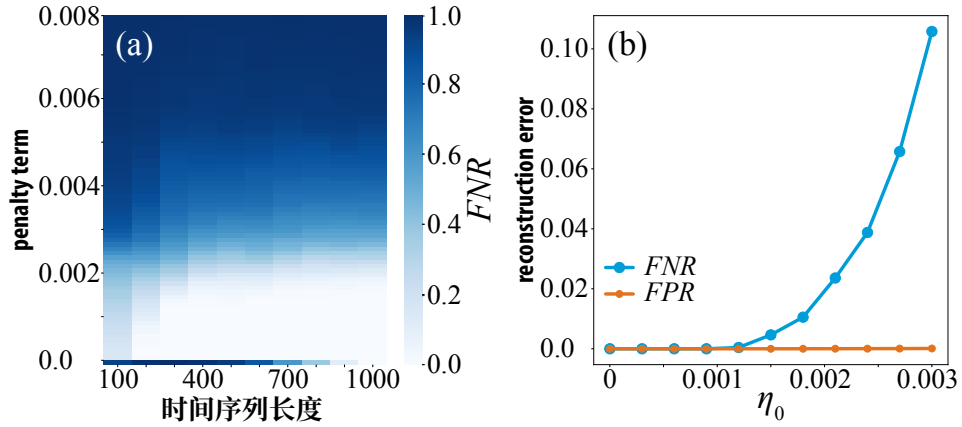

图 3: （a）不同时间序列长度和一系列惩罚项下的重建性能，因为在此情况下， $FNR.FPR$始终等于0。（b）噪声对真实网络上重建性能的影响，在 FNR 和 FPR 时。

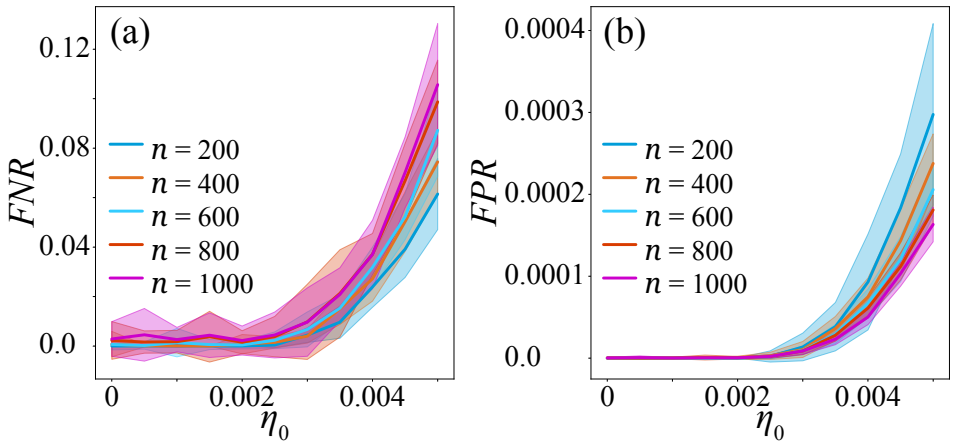

图 4: 使用（a） FNR和（b） FPR展示噪声对重建性能的平均影响，针对系统规模为 $n = 200$, 400, 600、800 和 1000的随机无标度网络进行了50 次模拟实现。所有模拟过程中，时间序列长度固定为 500。阴影区域表示相应的标准差。

以及补充材料第五节中的Tinkerbell 映射。我们还将我们的方法应用于猕猴视觉皮层网络 [35, 38]。该网络并非无标度网络；然而，在已知局部动力学和枢纽节点的情况下，我们重构了网络动力学（见补充材料第六节）。

噪声对重建性能的影响。— 为了衡量我们的方法对噪声的鲁棒性，我们针对合成网络以及真实小鼠新皮层网络上的各种 η_0 值（方程（5））系统地执行了重构过程。对于现实世界示例，重建方法对较小的噪声强度具有鲁棒性（图 3(b)）。对50个不同的有向加权随机无标度网络进行重构过程所得到的平均鲁棒性如图 4所示。无标度网络使用文献 [39], 中的算法生成，权重从区间 $[0.8, 1.2]$中均匀分配。该算法会生成不理想的自环和多重边，因此我们首先将其移除。随着系统规模增大，对于不断增加的噪声强度 η_0 ，重建性能相对于 FNR有所下降（图4(a)），因为噪声变得比弱耦合更具主导性，从而阻碍了利用耦合效应学习 $\boldsymbol{H}$ 。与现实世界的应用类似，在噪声诱导的重构情况下，FPR 结果也可以忽略不计（图4(b)）。我们还通过生成更稠密的网络进行了实验，在这种情况下重建技术会失效，因此网络稀疏性对于重构至关重要（见补充材料第 X 节）。

涌现行为的预测。— 尽管我们恢复了真实的网络结构，约化理论对孤立动力学 $\boldsymbol{f}$ 和耦合函数 $\boldsymbol{H}$ 的近似仍存在幅度较小且有界的波动。由于局部动力学是混沌的，且我们考虑了噪声可能产生的影响，给定系统的时间演化预测可能会偏离♀♀♀♀

原始系统。然而，对于给定的数据，我们以较高的准确率恢复了网络动力学，结果如下，

$$\boldsymbol{X}(t+1) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(t)) + \gamma \boldsymbol{G}\boldsymbol{X}(t), \tag{4}$$

其中， γ 是耦合控制参数，对于重构模型而言，其初始值为 $\gamma = 1$ 。随后，如果重构的耦合函数是单位矩阵 [40]，则可以通过完全解析的方法检测临界耦合强度因子 γ_c ，从而预测动力学网络的涌现行为。对于一般的耦合函数，可以采用主稳定性函数 [41] 或连接图方法 [42] 进行检测（参见补充材料第XIII节）。

结论——在 $\boldsymbol{f}$ 是混沌的、网络为无标度网络且耦合较弱的情况下，我们的方法可以完全恢复该网络。由于节点之间的弱耦合以及局部动力学的混沌性质，所测量时间序列之间的相关性呈指数衰减；因此，不可能通过传统方法重构此类复杂系统。当网络规模较大时，尖端的自主统计学习技术也会失效。我们方法的关键思想是通过约化定理将模型方程拆分为多个部分，并利用稀疏恢复逐一推断每个未知量（$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{H}$和 $\boldsymbol{W}$）。尽管针对一般的混沌离散映射，约化定理尚未建立，但我们在各种映射上证明了其有效性。对于无噪声情况以及噪声强度较小的情况，即使时间序列相对较短且网络规模不受限制，我们的方法也能保证完全重构。然而，随着噪声增大，重构质量会下降，并且随着系统规模增大，噪声的破坏性影响也会增强。最后，获得网络动力学能够让人们预测参数变化下的涌现行为。已有一些基于回归的方法可以利用短时间序列学习网络拓扑 [8]；然而，仅凭连通性不可能检测出临界转变。检测此类转变的能力对于诸如脑网络中向集体行为转变等应用至关重要，因为这可能导致不良后果。因此，有必要提出预防性规范，以避免潜在灾难。

数据和代码可用性——本研究中使用的数据可通过运行公开发布在 GitHub 上的代码 [43] 重新生成。

我们谨向 TiagoPereira、Matteo Tanzi、Sajjad Bakrani、Arash Rezaeinazhad、ThomasPeron 和 J eroen Lamb 致以谢意，感谢他们富有启发性的讨论。本研究得到土耳其科学技术研究委员会（TUBITAK）第 118C236 号项目资助。D.E. 感谢科学学院 BAGEP 奖项的支持。

---

[1] K. Schindler, H. Leung, C. E. Elger 和K.Lehnertz, 《脑》130, e65 (2007)。[2] D. Eroglu, M. Tanzi, S.vanStrien 和 T.Pereira, 《物理评论 X》10,021047 (2020)。[3] T.-T. Gao 和G.Yan, 《自然·计算科学》2,160 (2022)。[4] W.-X.Wang, Y.-C. Lai和 C.Grebogi, 《物理学报告》644, 1 (2016)。[5] M. Nitzan,J. Casadiego 和M.Timme, 《科学进展》3, e1600396 (2017)。[6] T.Stankovski, T. Pereira, P. V. E. McClintock 和 A. Stefanovska, 《现代物理评论》89, 045001 (2017)。[7] M. Timme 和 J. Casadiego, 《物理学杂志 A》47, 343001 (2014)。[8] J. Casadiego, M. Nitzan,S. Hallerberg 和 M. Timme, 《自然·通信》8, 1-10 (2017)。[9] T. S. Gardner, D. D. Bernardo, D. Lorenz 和 J. J. Collins, 《科学》301, 102 (2003)。[10] M. Timme, 《物理评论快报》98, 224101 (2007)。[11] S. G. Shandilya 和 M. Timme, 《新物理学杂志》13, 013004 (2011)。[12] D. Yu, M. Righero 和 L. Kocarev, 《物理评论快报》97, 188701 (2006)。[13] J. Ren, W. X. Wang, B. Li 和 Y. C. Lai, 《物理评论快报》104, 058701 (2010)。[14] W. X. Wang, R. Yang, Y. C. Lai, V. Kovanis 和 M. A. F. Harrison, 《欧洲物理快报》94, 48006 (2011)。[15] W.-X. Wang, Y. C. Lai, C. Grebogi 和 J. Ye, 《物理评论 X》1, 021021 (2011)。[16] H. Korn 和 P. Faure, 《生物学报告》326, 787 (2003)。[17] A. J. Preyer 和 R. J. Butera, 《物理评论快报》95, 138103 (2005)。[18] G. Werner, 《生理学前沿》1, 15 (2010)。[19] B. Barzel 和 A. L. Barab´asi, 《自然·物理》9, 673 (2013)。[20] E. M. Izhikevich, *Dynamical systems in neuroscience* （MIT出版社，2007）。[21] F. D¨orfler, M. Chertkov 和 F. Bullo, 《美国国家科学院院刊》110, 2005 (2013)。[22] A. E. Motter, S. A. Myers, M. Anghel 和 T. Nishikawa, 《自然·物理》9, 191 (2013)。[23] S. Watanabe 和 S. H. Strogatz, 《物理学 D》74, 197 (1994)。[24] A. T. Winfree, *The Geometry of Biological Time*，第12卷（施普林格科学与商业媒体，2001）。[25] T. Pereira, S. van Strien 和 M. Tanzi, 《欧洲数学学会杂志》22, 2183 (2020)。[26] S. L. Brunton, J. L. Proctor, J. N. Kutz 和 W. Bialek, 《美国国家科学院院刊》113, 3932 (2016)。[27] Y. Y. Liu 和 A. L. Barab´asi, 《现代物理评论》88, 035006 (2016)。[28] T. Pereira, D. Eroglu, G. B. Bagci, U. Tirnakli 和 H. J. Jensen, 《物理评论快报》110, 234103 (2013)。

[29] R. Tibshirani, 《J. R. Stat. Soc., B: Stat. Methodol》58, 267 (1996)。[30] X. Han, Z. Shen, W. X. Wang 和 Z. Di, 《Phys. Rev. Lett.》114, 028701 (2015)。[31] E. J. Candes, J. K. Romberg 和 T. Tao, 《Commun. Pure Appl. Math.》59, 1207 (2006)。[32] M. Novaes, E. R. dos Santos 和 T. Pereira, 《Phys. D》424, 132895 (2021)。[33] B. M. de Silva, K. Champion, M. Quade, J.-C. Loiseau, J. N. Kutz 和 S. L. Brunton, 《Journal of Open Source Software》5, 2104 (2020)。[34] N. Kasthuri, K. J. Hayworth, D. R. Berger, R. L. Schalek, J. A. Conchello, S. Knowles-Barley, D. Lee, A. V´azquez-Reina, V. Kaynig, T. R. Jones, *et al.*, 《Cell》162, 648 (2015)。[35] J. T. Vogelstein, E. Perlman, B. Falk, A. Baden, W. G. Roncal, V. Chandrashekhar, F. Collman, S. Seshamani, J. L. Patsolic, K. Lillaney, *et al.*, 《Nat. Methods》15, 846 (2018)。[36] Q. Wang, G. Chen 和 M. Perc, 《PLoS One》6, e15851 (2011)。[37] N. F. Rulkov, 《Phys. Rev. E》65, 041922 (2002)。[38] N. T. Markov, J. Vezoli, P. Chameau, A. Falchier, R. Quilodran, C. Huissoud, C. Lamy, P. Misery, P. Giroud, S. Ullman, *et al.*, 《J. Comp. Neurol.》522, 225 (2014)。[39] B. Bollob´as, *Proceedings of the Fourteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* 2003 03, 132 139 as, C. Borgs, J. Chayes 和 O. Riordan, 载于（Society for Industrial and Applied Mathematics, ）, SODA ' p. – 。[40] D. Eroglu, J. S. Lamb 和 T. Pereira, 《Contemp. Phys.》58, 207 (2017)。[41] L. M. Pecora 和 T. L. Carroll, 《Phys. Rev. Lett.》80, 2109 (1998)。[42] V. N. Belykh, I. V. Belykh 和 M. Hasler, 《Phys. D》195, 159 (2004)。[43] https://github.com/lffrrnt/ReconstructingNetworkDynamics/。[44] W. X. Wang, R. Yang, Y. C. Lai, V. Kovanis 和 C. Grebogi, 《Phys. Rev. Lett.》106, 154101 (2011)。[45] P. Mehta, M. Bukov, C. H. Wang, A. G. Day, C. Richardson, C. K. Fisher 和 D. J. Schwab, 《Phys. Rep.》810, 1 (2019)。[46] D. Donoho, 《IEEE Trans. Inf. Theory》52, 1289 (2006)。[47] S. L. Brunton, J. N. Kutz, *Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*（剑桥大学出版社，2019）。[48] L. Huang, Q. Chen, Y.-C. Lai 和 L. M. Pecora, 《Phys. Rev. E》80, 036204 (2009)。[49] P. Schultz, T. Peron, D. Eroglu, T. Stemler, G. M. Ram´ırez ´Avila, F. A. Rodrigues 和 J. Kurths, 《Phys. Rev. E》93, 062211 2016( )。

从数据重构耦合离散混沌单元的网络动力学：

补充材料

Irem Topal 和 Deniz Eroglu工程与自然科学学院，卡迪尔哈斯大学，土耳其伊斯坦布尔 34083

目录

I. 拉普拉斯形式的连接矩阵 2**II. 玩具模型上的网络重构方案**2**III. 性能评估**4**IV.小鼠新皮层网络** 6**V. 小鼠新皮层网络上的应用** 6

A.Rulkov映射 B.H´enon映射1. u-分量耦合 2. 带正弦函数的 u-分量耦合 C. Tinkerbell 映射 7 7

69**VI. 猕猴视觉皮层网络** 10**VII. 稀疏优化** 10**VIII.基函数库**11**IX. 稀疏回归方法之间的比较**12**X. 网络稀疏性对重建性能的影响**14**XI. 推断的拉普拉斯矩阵的交叉验证** 14**XII. 为什么约化定理对重构大型网络至关重要？** 15**XIII. 一般扩散耦合和主稳定性函数** 16**参考文献** 17

I. 以拉普拉斯矩阵表示连接矩阵

具有扩散的相互作用的网络动力学由下式给出,

$$\boldsymbol{x}_i(t+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i(t)) + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_j) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_i)] \tag{5}$$

其中， $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 是孤立节点的混沌动力学， $\boldsymbol{H}$ 是扩散耦合函数 [1]。$\boldsymbol{W} = [w_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是加权有向邻接矩阵。相互作用的扩散性质使得我们可以用拉普拉斯矩阵表示耦合。

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_j) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_i)] &= \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_j) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_i)\sum_{j=1}^{n} w_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_j) - k_i\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(w_{ij} - \delta_{ij}k_i)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_j)\end{aligned} \tag{6}$$

其中，$k_i = \sum_j w_{ij}$ 是节点 i 的入度， δ_{ij} 是克罗内克 delta。引入拉普拉斯矩阵后， $\boldsymbol{L}$ 满足 $L_{ij} = \delta_{ij}k_i - w_{ij}$，可得:

$$\boldsymbol{x}_i(t+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i(t)) - \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_j) \tag{7}$$

然后，我们可以将方程（7）改写为紧凑形式:

$$\boldsymbol{X}(t+1) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(t)) - (\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{H})(\boldsymbol{X}(t)), \tag{8}$$

where $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n]^T$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) \cdots, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)]^T$，且 $\otimes$是克罗内克积 [2].

II. 玩具模型上的网络重构方案

我们将逐步展示一种重构算法，该算法针对规模为 $n = 20$ 的有向加权网络中的弱耦合混沌映射（图 5(a)）。该网络具有异质性：低度节点数量众多，而枢纽最为稀少，如网络的入度分布所示（图 5(b)）。网络中的 Rulkov 映射通过其 u 分量以扩散方式相互作用:

$$\begin{aligned}u_i(t+1) &= \frac{\beta}{1+u_i(t)^2} + v_i(t) - \sum_{j=1}^{n} L_{ij}u_j(t) \\ v_i(t+1) &= u_i(t) - \nu u_i(t) - \sigma\end{aligned} \tag{9}$$

其中，常数参数 $\beta = 4.1$ 和 $\nu = \sigma = 0.001$ 固定为适用于混沌爆发动力学的值。我们首先对系统进行 15000 个时间步的模拟，并舍弃前 14000 步作为暂态。需要指出的是，在这一过程中，局部动力学（Rulkov 映射）、耦合函数（u 耦合）和连接矩阵（L_{ij}）均未知；不过，为了严谨地展示该方法，我们给出了这个玩具模型中的所有信息。

图 5(c) 展示了来自枢纽和一个低度节点的二维数据。图 5(d) 展示了同一组节点的返回映射，可以看出，主导耦合效应使枢纽节点产生了离散。另一方面，我们计算了时间序列之间的成对皮尔逊相关系数 s_{ij}，见图 5(e)。随后，对图 5(e) 中的相关矩阵按行求和，得到直方图 $P(S)$，如图 5(f) 所示。鉴于 Rulkov 映射具有混沌性质，时间序列之间的相关性无法提供任何有关网络连通性的信息。

重构过程如下所示:

1. **节点分类**。
   低度节点和枢纽的可分离性至关重要，因为如果在重构过程开始时无法分类哪些节点是低度节点或枢纽，那么重构过程就不适用。这种分类使我们能够如下学习孤立动力学 $\boldsymbol{f}$ 和耦合函数 $\boldsymbol{H}$：首先，我们假设耦合是 弱的，这意味着如果我们对低度节点进行分类，就可以将其动力学视为带有一些小波动的局部动力学 $\boldsymbol{f}$。如果我们确定哪个节点是枢纽以及 $\boldsymbol{f}$，那么我们就可以通过利用相互作用的累积效应，从枢纽的时间序列 $\boldsymbol{x}_h(t+1)$ 中去除 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_h(t))$，从而学习耦合函数 $\boldsymbol{H}$。因此，我们的首要目标是根据节点的度对节点进行分类。

   对于分类，我们首先使用稀疏回归方法（补充材料第VII节）为每个时间序列学习控制方程，其基由候选函数组成（补充材料第VIII节）。获得n预测模型后，我们使用预测模型系数之间的归一化欧几里得距离来衡量模型之间的差异，d_{ij}。距离矩阵 $D=[d_{ij}]$ 总结了预测模型之间的不匹配。图5(g)。距离矩阵的行和 $D_i=\sum_j d_{ij}$ 给出直方图 $P(D)$，直方图的每个区间包含具有相似度的节点（图5(h)）。

   还需要注意的是，弱耦合对于避免网络动力学中可能出现的同步也至关重要。如果系统同步，时间序列将完全相同；换句话说，所有预测模型都将相同。这将使分类变得不可能。因此，弱耦合对于该算法按预期工作至关重要。

2. **学习局部动力学**。 为模拟脑网络动力学，我们假设连接矩阵$\boldsymbol{W}=[w_{ij}]$ 表示一个无标度网络，其度分布遵循幂律；换言之，大多数节点的度较小 $k\sim n^{\epsilon}$，而一些节点是枢纽，其度为 $k\sim n^{\frac{1}{2}+\epsilon}$，其中 ϵ 是任意小的数。因此，直方图中最高的区间（频率最高的部分）包含低度节点的模型，因为低度节点数量很多（图 5 (h) 中的橙色柱）。由于低度节点集合中可能存在具有入边的节点 $k_i>0$，这些模型可能包含一些微小波动。因此，我们对低度节点模型的预测系数取平均，以尽可能准确地推断局部动力学。

3.**学习耦合函数**。 沿用上一节中的无标度网络拓扑假设，我们可以看出，直方图中最低的区间（频率最少的部分）包含差异最大的模型，它们属于枢纽（图 5(h) 中的蓝色柱）。随后，从枢纽的测量值$\boldsymbol{x}_h(t+1)$中扣除枢纽的局部动力学（$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_h(t))$），即可得到占主导地位的耦合效应，这正是我们要学习的对象。图 5(i) 展示了剩余的耦合效应。我们对数据拟合一个函数，从而学习得到近似的耦合函数，以及由约化定理产生的积分常数。具体而言，关于积分常数，例如，若扩散耦合函数表示为 $h(x,\ y)=\phi(y)-\phi(x)$，则扩张映射的有效耦合为 $V=\int h(x,\ y)d\mu(y)=-\phi(x)+C$，其中 C 是积分常数；对于数值恢复的有效耦合 V，我们将其称为可能的线性偏移 。由于假设 $\phi(0)=0$，因此可以根据拟合的耦合（图 5 (i)）轻松估算该值。因此，出现的线性偏移就是积分常数 C，其值可能因不同的动力学网络而异。此外，有效耦合是一种近似；当网络模型被视为有向星形图，且在热力学极限下，连边方向由低度节点指向枢纽时，该近似便成为精确结果，其中 $n\to\infty$。按照我们关于节点度的假设（如上所述），对于树状图（例如无标度图），我们可以得到近似的有效耦合。约化过程中有界波动项 κ_i 的大小（正文中的式(2)）可用作近似程度的度量。

   在这里，对于更一般的网络而言，弱耦合和混沌动力学假设再次发挥了重要作用，以保持节点动力学的统计行为。尽管使用混沌振子有助于保持状态分布的稳定性，但大耦合可能会破坏这一性质。因此，如果网络更加稠密，那么耦合常数应缩放为更小的耦合强度，才能使我们的约化定理发挥作用。例如，如果无标度网络中的枢纽较为稀少，则必须将耦合强度缩放为 $n^{1/2}$。如果所有节点都是枢纽，换言之，如果网络是全连接的，则必须将耦合强度缩放为 n。在我们的工作中，鉴于我们考虑的是无标度网络（包含许多低度节点和少量枢纽），我们将 $\boldsymbol{W}$ 中的权重缩放为 $n^{1/2}$，因为本研究聚焦于重构脑网络。同样重要的是需要提醒，在节点分类步骤中，节点的同步会阻碍重构，因为基于机器学习的方法无法区分同步振子之间的数据来源。因此，混沌振子在这里也发挥着重要作用，因为如果我们拥有周期性且相同的振子网络，任何正的耦合强度都可以使模型同步，而这对于重构部分是不希望出现的。因此，弱耦合强度和混沌动力学状态是该理论以及通过学习耦合函数 $\boldsymbol{H}$的数值步骤的关键假设。

4. 学习连接矩阵。 在学习函数 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{H}$之后，我们定义 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}(t+1) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(t))$，因此，方程（8）可写为 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{G} = -(\boldsymbol{L} \otimes \boldsymbol{H})$。因此，通过求解线性方程 $\boldsymbol{Y}^T = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{G}^T$，学习连接关系就转化为一个回归问题。由于我们关注的是从短数据中重构大型网络动力学，因此这里采用使用ℓ_1-范数的压缩感知方法（称为 LASSO）来求解该方程。换言之，当时间序列的长度为 $< m \times n$时，其中m是局部动力学的维度， n 是系统规模，我们旨在求解这一问题。在这一条件下的问题称为欠定回归问题。最后，通过求解线性方程（图 1（j））， 我们确定网络的精确拉普拉斯矩阵。

请注意，在该流程的前几个步骤中，两个节点之间的潜在相互作用函数（如果关注超网络，则还包括更高阶相互作用）并未纳入基函数库。这意味着库的规模不会呈指数级增长。因此，随着网络规模 n增大，该算法无需更长的时间序列即可重建网络动力学。在最后这一步中，我们也仅对一个线性方程进行稀疏求解，其中 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{mn \times mn}$是一个方阵。关于时间序列长度与稀疏性之间关系的讨论，见补充材料第 XII 节。

III. 评估性能

我们使用两个标准指标来评估我们方法的重建性能：假阴性占阳性的比例（FNR）和假阳性占阴性的比例（FPR）。这些指标对应于网络重构中的两类错误：在确实存在连接的情况下遗漏连接（假阴性），或在两个节点并未连接时判定它们之间存在连接（假阳性）：

$$FNR = \frac{FN}{P} \text{ and } FPR = \frac{FP}{N}$$

其中， FN用于评估正确矩阵的非零项（P）上的误差（低估）， FP用于评估零项（N）上的误差（高估）。我们通过$\sum_{i,\ j} \Theta\left(|L_{ij} - L_{ij}| > \epsilon\right)$统计 FN和 FP条连接，以评估连接强度的准确率；其中， L_{ij} 为预测的拉普拉斯矩阵， ϵ 为容差值，设为 $\boldsymbol{L}$中最小非零值的十分之一。所有分析均采用固定容差值 $\epsilon = 0.0001$ 。

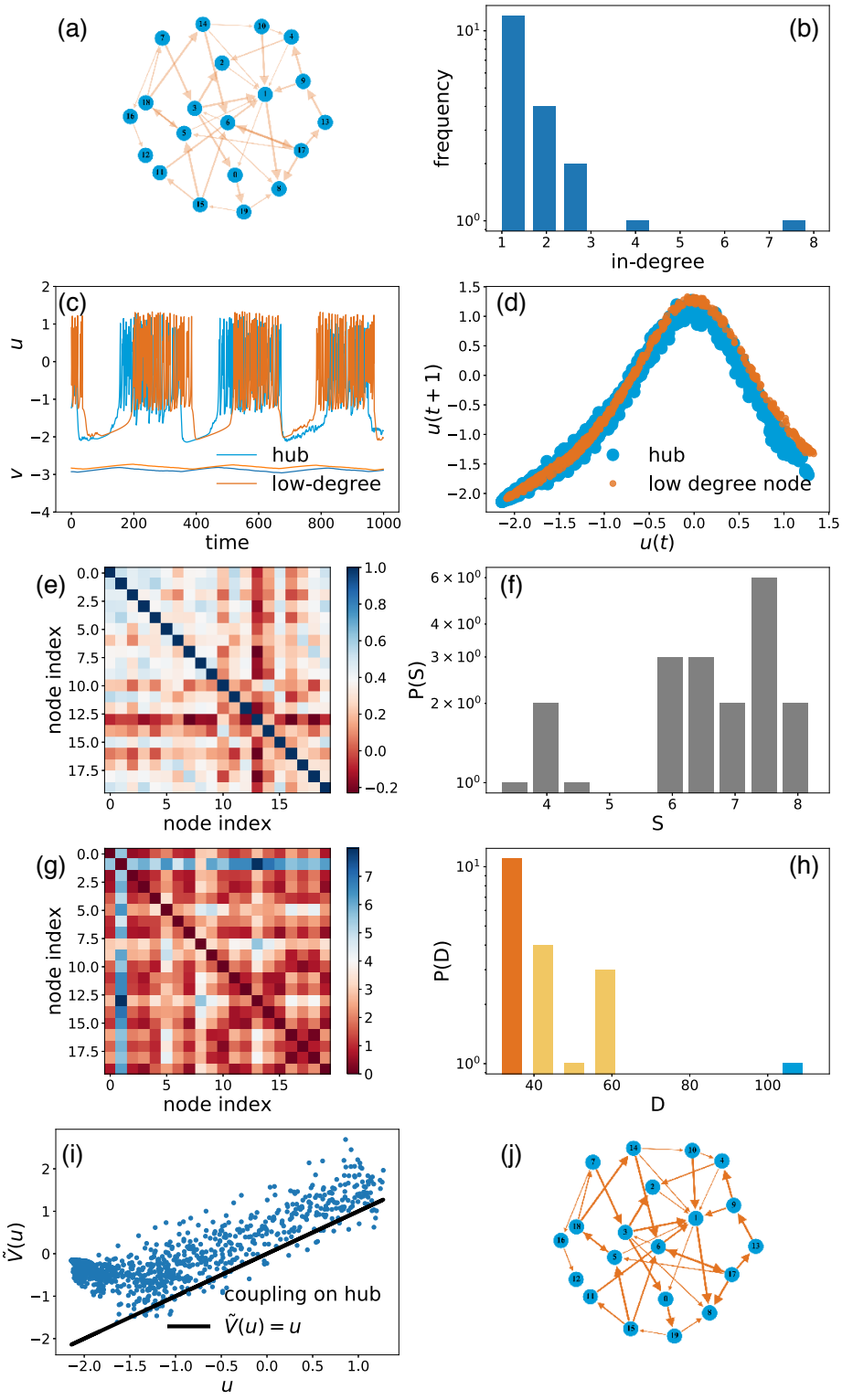

图 5：（a）一个有向加权网络。由于网络初始状态未知，其连接以模糊方式表示。（b）网络对应的入度分布。（c）一个低度节点和枢纽的时间序列。（d）这些时间序列的回归映射。由于累积在枢纽上的耦合效应，枢纽的数据根据低度节点发生了离散。（e）时间序列的成对 Pearson 相关矩阵。由于混沌，即使是相互连接的节点，其动力学之间也没有表现出相似性。（f）通过时间序列相似性矩阵（子图（e））的行和得到的直方图，无法反映网络原始的度分布；因此，不可能识别低度节点或枢纽。（g）在重构过程的第一步中，获得了预测模型之间的成对距离。入度相似的节点表现出较高的相似性。（h）距离矩阵（子图（g））行和的直方图同样不包含网络的精确入度分布（子图（b））， 但可以识别低度节点和枢纽。丰富的模型（（h）中的最高柱）代表低度节点，这些模型表示局部动力学， f。最具区别性的模型（（h）中的最低柱）属于枢纽节点。我们通过从枢纽数据中过滤局部动力学来学习耦合函数。（i）绘出了枢纽上残留的耦合效应

IV. 小鼠新皮层网络

我们选择了一个由 1029 个节点组成的神经元连接网络，这些节点代表一小块成年早期小鼠新皮层 [3]。该网络为有向网络，部分节点之间存在多重边。我们将节点之间这些多重边的数量视为权重。此外，网络中存在一些不连通的部分，我们将其移除，仅保留巨型连通分量。得到的加权有向网络包含 $n = 987$ 个节点和 $m = 1536$ 条连接，其结构如图 6 (a) 所示，入度分布见图 6 (b)。我们将连接矩阵中的元素缩小一个较小的常数 0。1，然后除以枢纽的入度 k_h 进行归一化，使网络不同步。

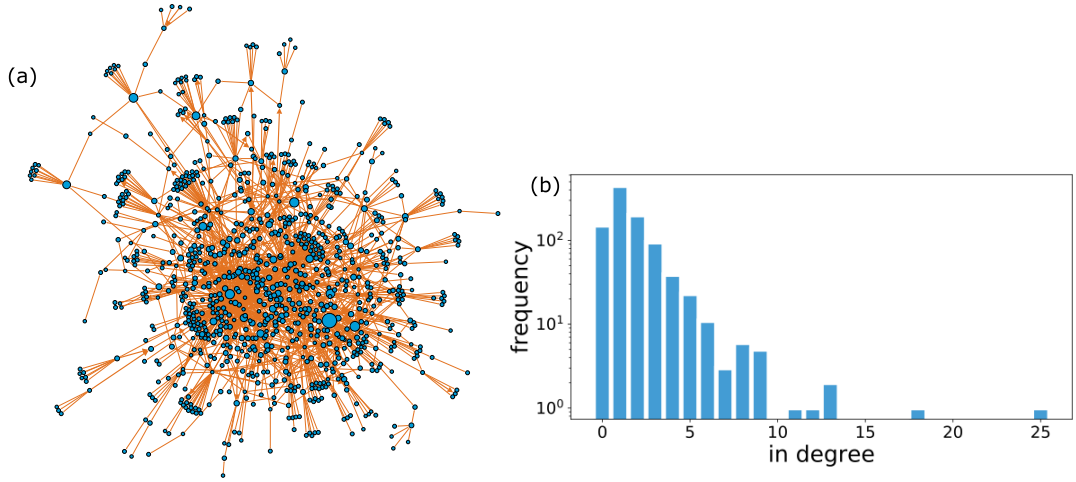

图6：（a）预处理后的小鼠新皮层网络，其中的有向边带有权重。节点的大小表示其入度，箭头的粗细表示其权重。（b）相关真实网络的入度分布。

V. 小鼠新皮层网络上的应用

本节介绍了在各种动力系统上进行重构过程的结果，即 Rulkov 映射、H´enon 映射和 Tinkerbell 映射。对于所有系统，我们均使用第四节中描述的小鼠新皮层网络。

A. Rulkov 映射

我们已在正文中展示了 Rulkov 映射的结果。在我们的重构方案中，我们假设可以将低度节点视为孤立节点，以估计局部动力学 $\boldsymbol{f}$。这里，我们比较了弱耦合作用下低度节点和枢纽节点动力学的返回映射与孤立 Rulkov 映射（图 7）。

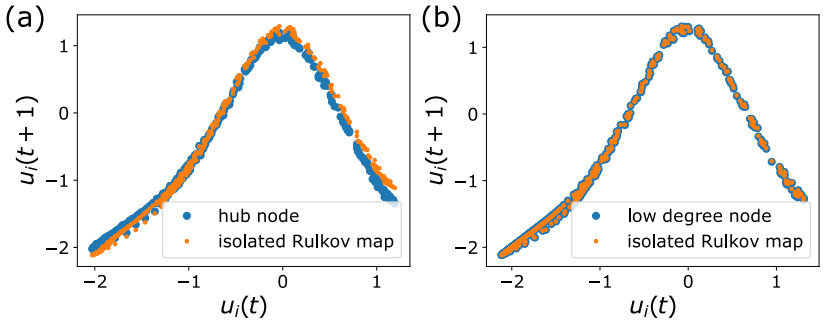

图 7：a)枢纽节点数据与孤立 Rulkov映射的返回映射，以展示弱耦合效应。b)一个低度节点的返回映射表明，这些节点的振荡几乎与孤立的局部动力学一致。

B. H´énon 映射

1. u-component coupling

我们使用 H´enon 映射作为公式 (7) 中的 $\boldsymbol{f}$，一种表现出混沌行为的离散时间动力系统:

$$\begin{aligned} u_i(t+1) &= 1-\alpha u_i(t)^2+v_i(t)-\sum_{j=1}^{n} L_{ij}u_j(t) \\ v_i(t+1) &= \beta u_i(t) \end{aligned} \tag{10}$$

其中，$\alpha = 1.4$ 和 $\beta = 0.3$ 在模拟过程中保持固定。H´énon映射通过其 u分量弱耦合。每个映射的初始位置均从区间 $[0, 0.1]$ 中均匀随机选取。我们迭代 11000步，并舍弃前 10000 步作为暂态。我们的流程从时间序列数据中揭示了局部动力学为*H´énon* 映射，u—分量的相互作用函数为扩散耦合，并最终得出正确的拉普拉斯矩阵。

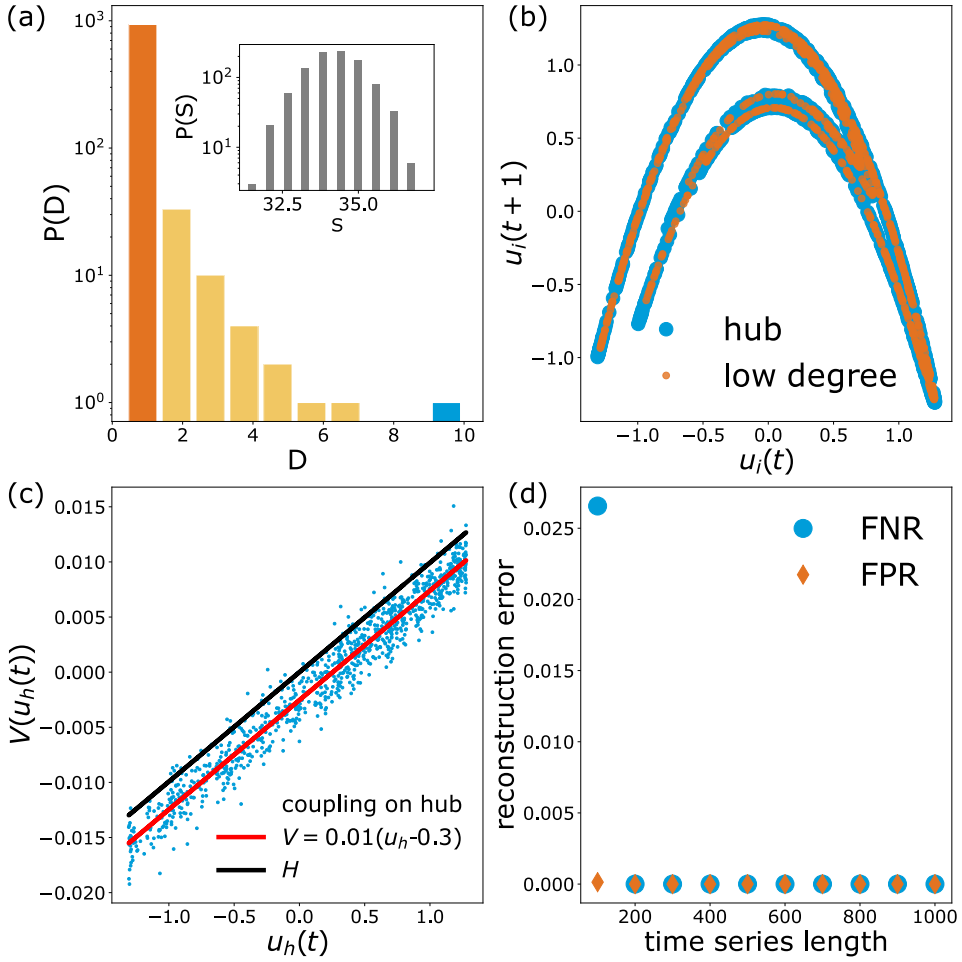

图 8：真实网络上弱 u耦合H´enon 映射的重构过程。首先，我们为每个节点的时间序列数据学习一个模型，以对其进行分类。(a) 基于成对欧氏距离矩阵的直方图 $P(D)$。直方图的最高分箱为我们提供了 $\boldsymbol{f}$，而最低分箱则确定了枢纽。内嵌直方图强调，由于混沌动力学，时间序列观测值的成对相关性无法提供任何有关网络连通性的信息。(b)低度节点和枢纽的回归映射由于弱耦合而略微显示出耦合效应。在 (c)中，我们绘制枢纽上的主导耦合效应，以观察 $\boldsymbol{H}$ 的模型。(d) 展示了不同时间序列长度下的 FNR和 FPR。对于包含 987 个节点的网络，200 个数据点足以完全重构网络动力学。

2. u-component coupling with sinusoidal function

在此示例中，我们使用相同的 $\boldsymbol{f}$，但采用不同的耦合函数 $\boldsymbol{H}$：

$$\begin{aligned} u_i(t+1) &= 1-\alpha u_i(t)^2+v_i(t)-\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\sin(2\pi u_j(t)) \\ v_i(t+1) &= \beta u_i(t) \end{aligned} \tag{11}$$

每个映射的初始位置均从区间 $[0, 0.01]$ 中均匀随机选取。我们迭代 12000 步，并舍弃前 10000 步作为暂态。图 9 显示了正弦耦合 H´enon 映射的重构结果。我们仅在流程的第一步将三角函数加入候选函数库，便通过将局部动力学学习为 *H´enon* 映射 、将耦合函数学习为正弦函数，完整地重构了网络连接。

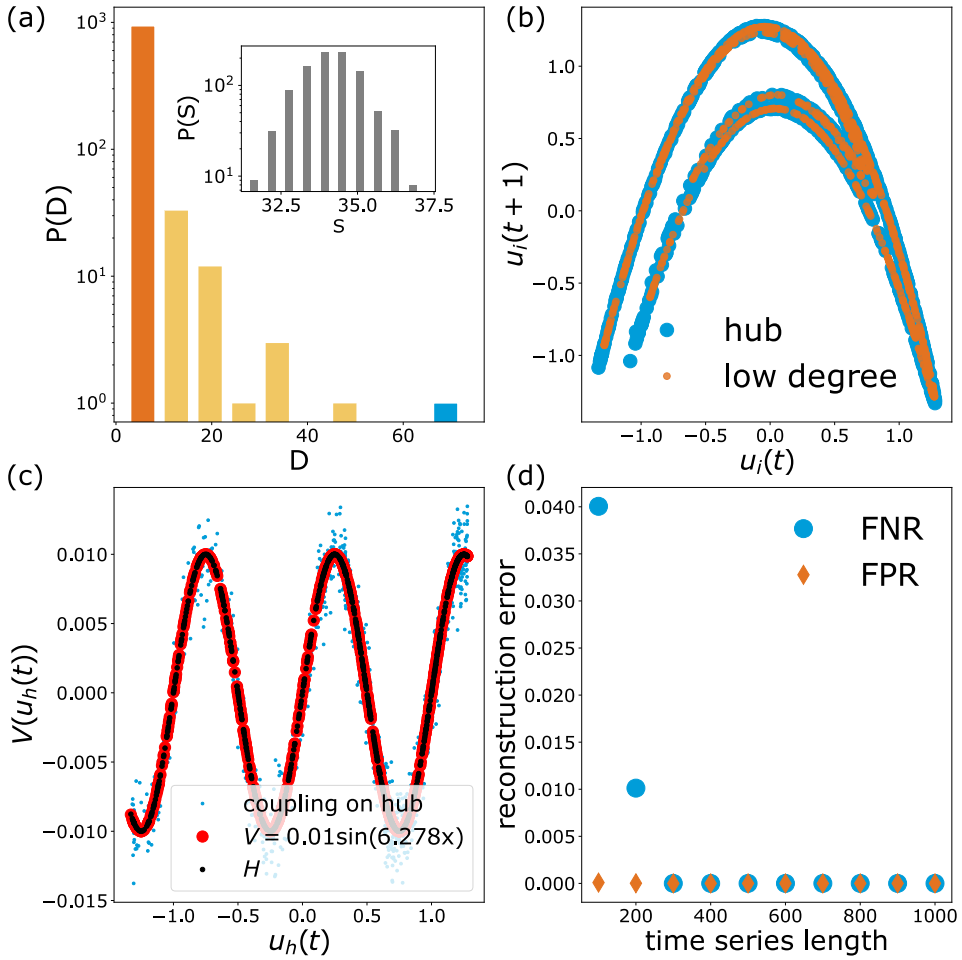

图9：真实网络上弱正弦 u耦合H´enon 映射的重构过程。首先，我们为每个节点的时间序列数据学习一个模型，以对其进行分类。(a)基于成对欧氏距离矩阵的直方图 $P(D)$。虽然直方图的最高箱给出了 $\boldsymbol{f}$，但最低箱确定了枢纽。插图中的直方图强调，由于混沌动力学，时间序列观测值的成对相关性无法提供任何有关网络连通性的信息。(b)低度节点和枢纽的回归映射由于弱耦合而略微显示出耦合效应。在 (c) 中，我们绘制了枢纽上的主导耦合效应，以观察 $\boldsymbol{H}$的模型。(d) 显示了不同时间序列长度下的 FNR和 FPR。对于包含 987 个节点的网络动力学，300 个数据点足以实现完全重构。

C. Tinkerbell 映射

通过其 u 分量以扩散方式耦合的 Tinkerbell 映射为：

$$\begin{aligned} u_i(t+1) &= u_i(t)^2 - v_i(t)^2 + au_i(t) + bv_i(t) - \sum_{j=1}^{n} L_{ij}u_j(t) \\ v_i(t+1) &= 2u_i(t)v_i(t) + cu_i(t) + dv_i(t) \end{aligned} \tag{12}$$

其中，$a = 0.9$，$b = -0.6013$，$c = 2.0$ 和 $d = 0.5$ 在模拟过程中保持固定，以确保处于完全混沌状态。数据通过迭代 u-耦合的Tinkerbell 映射11000个时间步生成，并舍弃前 10000 个时间步作为暂态。我们成功地从时间序列中揭示了 Tinkerbell 映射的局部动力学、相互作用函数，最终还原出了拉普拉斯矩阵。

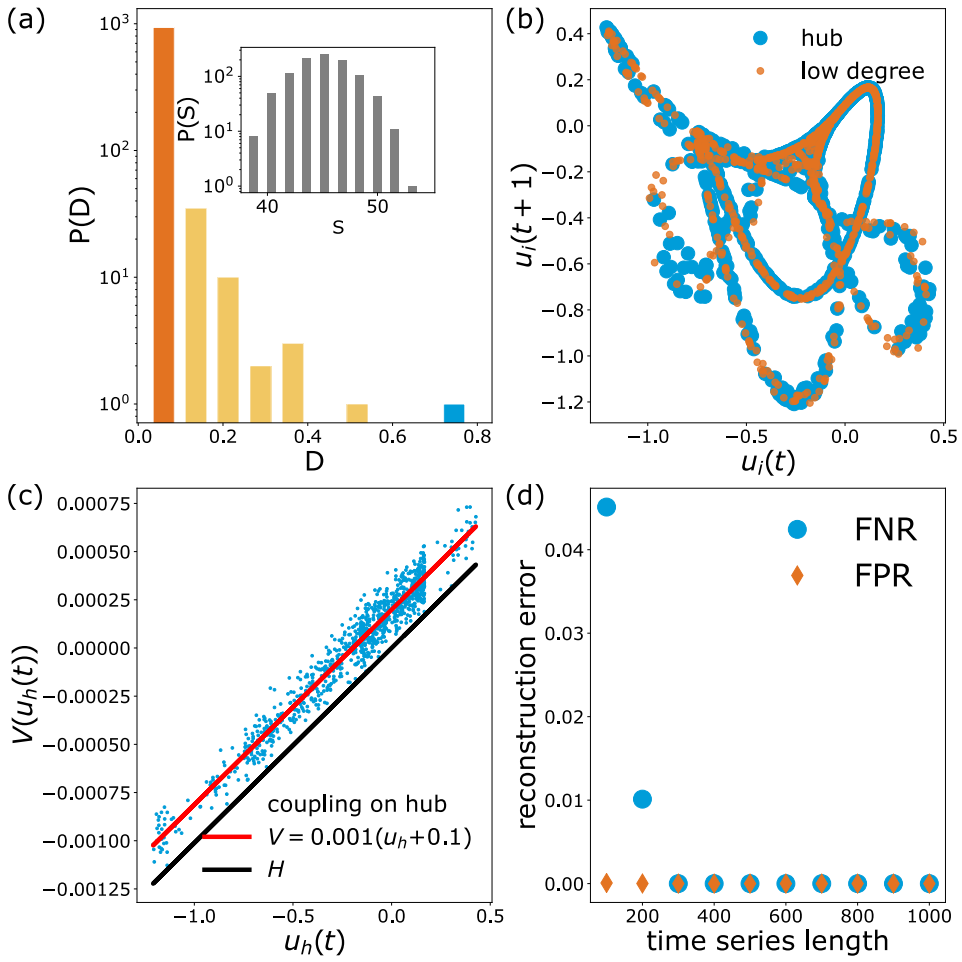

图 10：真实网络上弱耦合 Tinkerbell 映射的重构过程。首先，我们为每个节点的时间序列数据学习一个模型，以对其进行分类。(a) 基于成对欧氏距离矩阵的直方图 $P(D)$。直方图的最高箱体给出 $\boldsymbol{f}$，而最低箱体则确定了枢纽。插图中的直方图强调，由于混沌动力学，时间序列观测的成对相关性无法提供关于网络连通性的任何信息。(b)低度节点和枢纽的回归映射由于弱耦合而略微显示出耦合效应。在 (c) 中，我们绘制了枢纽上的主导耦合效应，以观察 $\boldsymbol{H}$ 的模型。(d) 展示了 FNR和 FPR在不同时间序列长度下的情况。对于具有 987 个节点的网络，300 个数据点足以完全重构网络动力学。

如图8(c)、9(c)和10(c) 所示，数据上的拟合曲线（红色）与预测 H 曲线（黑色）之间的水平偏移对于每个动力系统都不同。这一观察结果与约化定理相符，而该定理仅针对扩张映射 [4]进行了分析证明。我们表明，即使该定理未得到严格

对于 Rulkov映射、H´enon 映射或Tinkerbell 映射，已证明该方法能够准确运行。对于耦合，$H(x,y) = y - x$，$v(x) = \int H(x,y)dm(y)$ 被发现为 $-x$ 加上一个常数。这些常数对于耦合的Rulkov映射为1，对于耦合的 H´enon映射为 -0.3，对于耦合的 Tinkerbell 映射为0.1。对于正弦耦合，$H(x,y) = \sin\ 2\pi y - \sin\ 2\pi x$，$v(x) = \int H(x,y)dm(y)$被发现为 $-\sin\ 2\pi x$ 加上一个常数，并且对于正弦耦合的 H´enon 映射，其值为 0。

VI. 猕猴视觉皮层网络

我们将该程序应用于一个真实的猴视觉皮层网络，该网络不是无标度类型 [5, 6]。该网络由 91 个节点和 581条无向且无权边组成，其结构如图11(a) 所示，图11(b) 给出了其度分布。对于具有这种度分布的网络，不可能按度对节点进行分类；无法对节点进行分类会导致无法学习局部动力学并识别枢纽。因此，我们假设已知局部动力学以及哪个节点是枢纽。在掌握这些初步信息后继续进行时，约化定理使我们能够平滑地学习耦合函数，并实现完全重构。

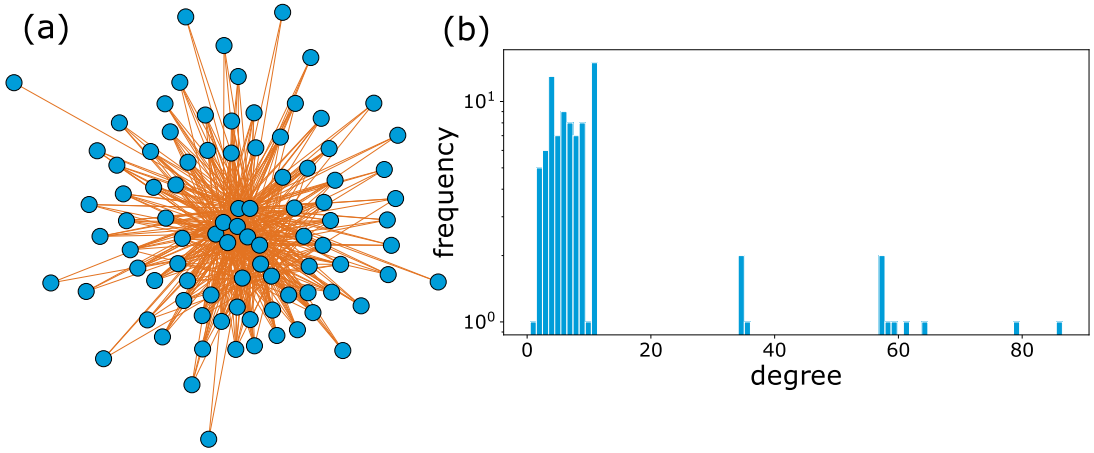

图11：（a）无向且无权重的猕猴视觉皮层网络。（b）相关真实网络的度分布。

VII. 稀疏优化

动力系统的模型由函数 $\boldsymbol{g}$ 给出：

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{k=1}^{p} \psi_k(\boldsymbol{x})\xi^k \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{\Psi(x)} = [\psi_1(\boldsymbol{x})\ \psi_2(\boldsymbol{x}) \ldots, \psi_p(\boldsymbol{x})]$ 是基函数库。只有少数活跃项能表征来自自然系统的数据（在精心选择的基上）；大多数系数 ξ^k 为零。为了找到可解释的模型，稀疏性概念是有益的。这一想法首次在压缩感知框架中使用，因为满足稀疏性要求 [7]。如果我们有先验知识来决定基，稀疏回归有助于避免过拟合和噪声 [8]。在我们的重构过程中，我们分多个步骤使用稀疏回归。

最小绝对收缩与选择算子（LASSO）[9]是一种稀疏回归方法，通过使用 ℓ_1-范数来促进稀疏性。序贯阈值最小二乘（STLS）是 SINDy [10] 的 Python 软件包中实现的另一种方法。在 STLS 中，我们从普通最小二乘解开始，这会导致对时间序列中每个点的拟合过度。随后，我们在每个序列中，将残差低于某个称为稀疏参数的特定截断值的数值进行阈值处理，并反复执行最小二乘。最终得到一个可解释的动力学模型。

VIII. 基函数库

尽管关于动力系统的先验知识总有助于构建基函数库，但在所有情况下都无法获取这些信息。尽管如此，许多函数仍可通过高阶多项式准确估计。例如，在本研究中，我们主要研究了如下定义的 Rulkov 映射，

$$\begin{aligned} u(t+1) &= \frac{\beta}{1+u(t)^2} + v(t) \\ v(t+1) &= v(t) - \nu u(t) - \sigma \end{aligned} \tag{14}$$

使用仅包含多项式的基函数库，可以重构出Rulkov映射的不完善模型，该模型能够生成与原始时间序列相当准确的时间序列（图 12）。对于Rulkov映射而言，唯一的非多项式项是有理项 $\frac{1}{1+u^2}$，而该项在基函数库中不存在。然而，该有理项可以按如下方式展开为幂级数，

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots \tag{15}$$

因此，可以用多项式对Rulkov映射进行粗略建模。由于幂展开的收敛区间为 $[-1,1]$，当轨道超出给定区间时，预测模型会发散。不过，可以通过将时间序列归一化到相应空间来解决此类收敛问题。我们研究中感兴趣的动力学是簇发状态，无需归一化即可对其建模，如图12(b) 所示；因此我们跳过这一步，但模型会因包含许多高阶多项式项而变得非常复杂。

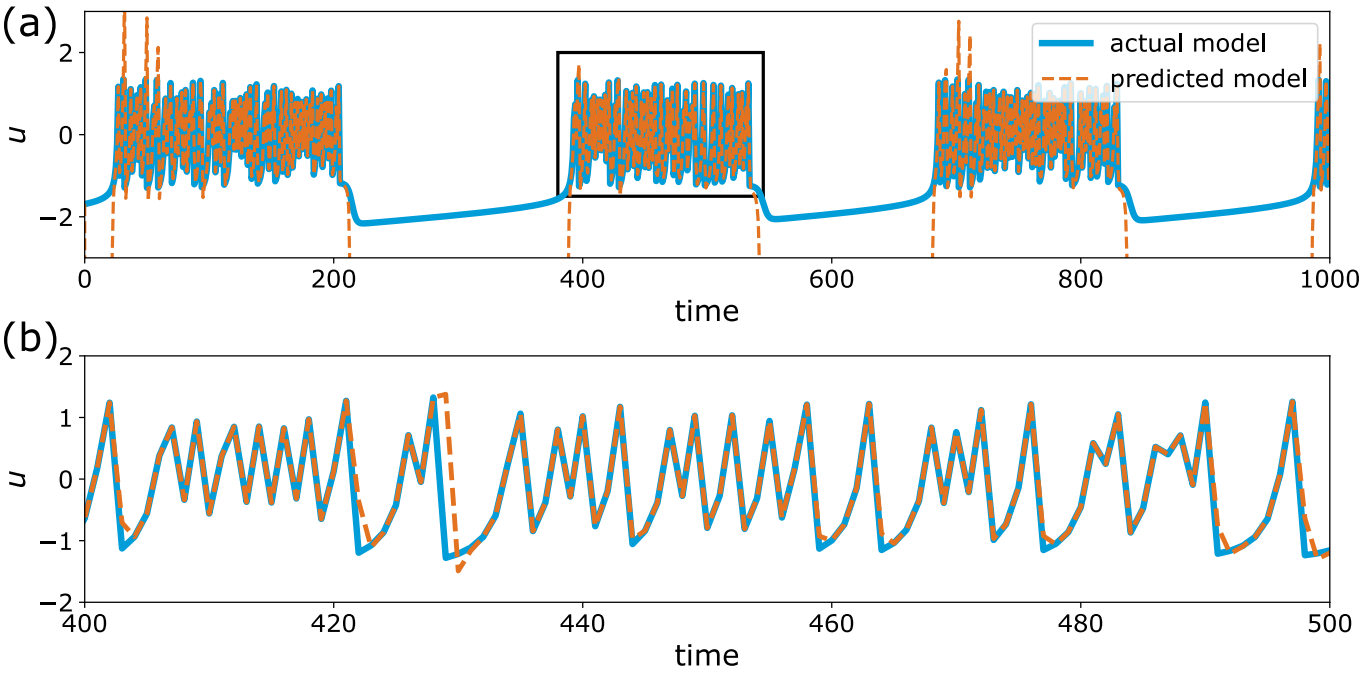

图 12：仅包含多项式的候选函数库所重构的 Rulkov 模型的预测时间序列。a) 模型的预测 u-变量；b) 从 a) 中黑色矩形区域放大的一个簇发状态片段。

为了避免包含许多多项式项且预测可能不准确的复杂模型，我们准备了一个包含常见函数的标准库，例如几何级数和三角函数。尽管不合理地增加库中的函数数量并不可取，但添加此类非多项式项通常可以终止大量多项式。因此，使用以下标准候选库，我们的计算成本总体上会降低：

$$\boldsymbol{\Psi} = \left[\mathbf{1}, \mathscr{P}_d(\boldsymbol{x}), \left\{\sin(i\boldsymbol{x}), \cos(i\boldsymbol{x})\right\}_{i=1}^{r}, \left\{\frac{1}{\boldsymbol{x}^i}, \frac{1}{1 \pm \boldsymbol{x}^i}, \frac{1}{(1 \pm \boldsymbol{x})^i}\right\}_{i=1}^{q}\right]$$

其中， d 是多项式的次数，例如 $\mathscr{P}_2(\boldsymbol{x})$ 是：

$$\mathscr{P}_2(\boldsymbol{x}) = [u, v, u^2, uv, v^2].$$

我们的主要策略是从 $d = r = q = 1$ 开始，并逐步缓慢增加它们，以使用最少数量的候选函数来估计模型。我们的重构算法的第一步旨在通过根据推断模型方程之间的相似性对其进行分类，来学习局部动力学。在这里，我们使用耦合的Rulkov映射（表I），通过一组根据其度数 k_i ($k_0 = 0$, $k_{46} = k_{136} = 4$ 和 $k_{218} = 26$)选定的节点，展示小鼠新皮层网络上的重构模型。由于节点-0 没有传入连接，我们仅重构了Rulkov映射动力学。节点-46有 4 条传入连接，其推断系数并不能反映精确的控制方程，但可以说，其控制方程与节点-136相似，后者也有 4 条传入连接。最显著的 模型属于节点-218，它是该特定网络的枢纽。

node id	1	u	v	$\cdots$	$\cos(u)$	$\frac{1}{1-u}$	$\frac{1}{1+u^2}$
0	-0.000	-0.000	1.000	$\vdots$	0.000	-0.000	4.100
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
46	0.000	-0.015	1.005	$\vdots$	0.005	0.000	4.093
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
136	-0.000	-0.015	1.006	$\vdots$	0.000	-0.000	4.101
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
218	-0.714	0.098	0.783	$\vdots$	0.016	0.001	4.075

表I：一些选定节点对应候选函数的推断系数表。对于任意节点，我们仅列出非零函数。

重构算法的第一步是对节点进行分类，该过程使用节点系数之间的距离。我们将距离度量定义为， $d_{ij} = (\Sigma_{k=1}^{p} \frac{1}{V_k} |\xi_i^k - \xi_j^k|^2)^{1/2}$ 其中 $|\cdot|$ 为绝对值， V_k 为 $\boldsymbol{\Psi}$中第 k 个函数的预测系数的方差。作为示例，我们计算表 I 中给出的学习模型的成对距离：

节点编号	0	46	136	218
0	0.000	2.830	2.105	18.351
46	2.830	0.000	1.925	16.808
136	2.105	1.925	0.000	16.979
218	18.351	16.808	16.979	0.000

表 II：部分选定节点的预测模型的成对距离 .

如表 II 中数值所示， d_{ij} 对于具有相同或相似度的节点较小，例如 46（$k_{46} = 4$）与 136（$k_{136} = 4$）之间的距离为 1.925，而对于不同的预测模型，距离较大，例如 46（$k_{46} = 4$）与 218（$k_{218} = 26$）之间的距离为 18.351。

IX. 稀疏回归方法之间的比较

我们比较两种优化器来执行稀疏回归；LASSO 和 STLS。

LASSO 定义如下： [11]

$$\hat{\boldsymbol{w}}_{LASSO}(\lambda) = \underset{\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^m}{\operatorname{argmin}}(||\boldsymbol{X}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{y}||_2^2 + \lambda||\boldsymbol{w}||_1) \tag{16}$$

对于线性问题 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{w}$，其中 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$、$\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 和 λ 是惩罚项，并使用 ℓ_1-范数对权重进行惩罚。

在 STLS 中，岭回归被使用并由方程 [11] 定义：

$$\hat{\boldsymbol{w}}_{Ridge}(\lambda) = \underset{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m}{\operatorname{argmin}}(||\boldsymbol{X}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{y}||_2^2 + \lambda||\boldsymbol{w}||_2^2) \tag{17}$$

并且 λ 固定为 0.05。通过屏蔽$\hat{}\boldsymbol{w}$ 中低于给定阈值的元素来获得稀疏性。该阈值称为稀疏参数，它是STLS的唯一超参数。在重建方法的最后一步中，我们为 $\boldsymbol{w}$寻找一个稀疏解，在我们的情况下它对应于 $\boldsymbol{L}$ 。从算法角度来看，对超参数进行微调，即LASSO 的惩罚项和STLS 的稀疏参数，对于提高准确率至关重要。然而，这两个参数并不等价，但我们可以对它们作出类似的解释。由于实验中网络规模是固定的，时间序列长度决定了问题类型。时间序列长度低于网络规模（$T < nm = 987 \times 2 = 1974$）时，对于我们所使用的真实网络而言属于欠定情形。

图 13 展示了不同时间序列长度和两个超参数为 $FNR$and FPR 的重建性能。我们比较 FNRvalues 以评估 LASSO 和 STLS 在图 13(a) 和 图 13(c) 中的性能，因为 FPR values 总是非常小。结果表明，对于较短的时间序列，LASSO 优于 STLS。由于 ℓ_1-norm 惩罚解是压缩感知方法的推广，它为欠定情形 [12] 提供了唯一解。另一方面，如果有足够长的数据，从算法角度来看，STLS 成为 LASSO 的快速替代方案，并且对我们的问题效果很好。我们取了一个欠定情形 ($T = 300$) 来比较两种不同稀疏性促进方法在图14中的性能。如果我们数据有限，我们看到 LASSO 实现了完全重构，而 STLS 没有。

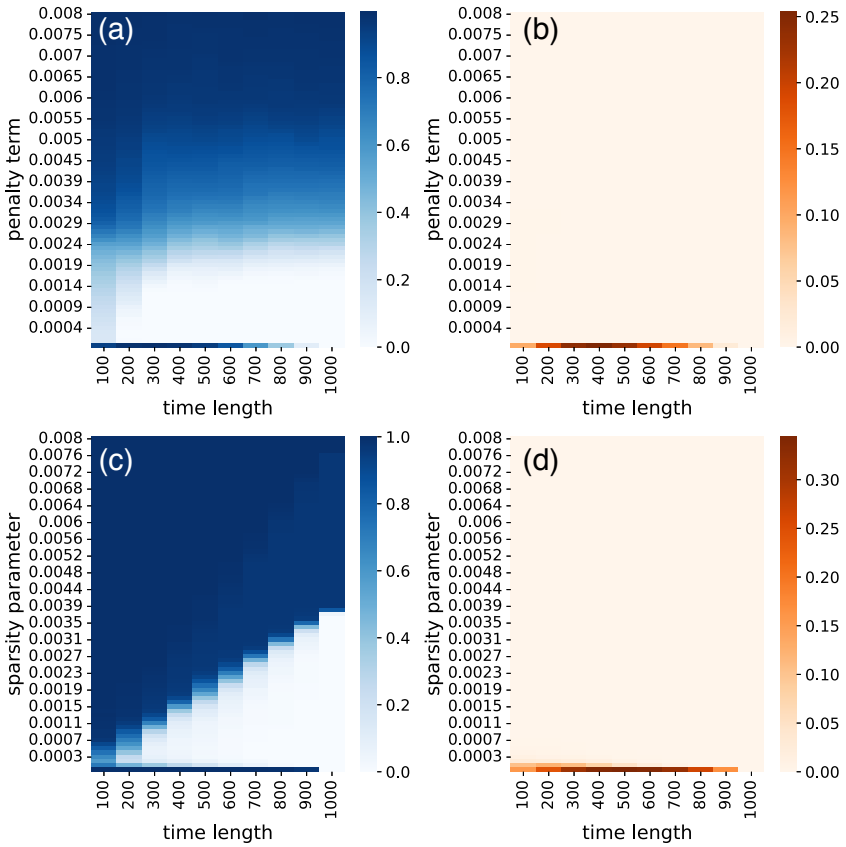

图 13:(a) FNR和(b) FPR对应于 LASSO 的惩罚项列表。(c) FNR和 (d) FPR对应于 STLS 的稀疏参数列表。使用 10 种不同长度的时间序列来比较性能。

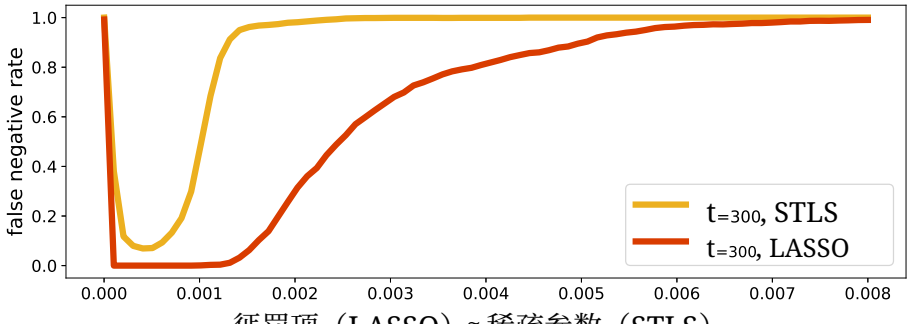

图14： FNR关于LASSO 的惩罚项和STLS 的稀疏参数列表。以（$T = 300$）情况作为短时间序列示例。STLS 没有 完全重构 区域。

X. EF　网络稀疏性对重建性能的影响

除了缺乏足够的数据外，拉普拉斯矩阵的稀疏性条件应得到满足，以便在压缩感知框架内求解线性回归问题。我们基于合成网络在此方向上呈现结果。我们用于生成有向无标度网络的算法具有三个概率参数:α 和 γ 分别是根据入度和出度分布随机选择现有节点并添加连接到该节点的新节点的概率。 β 是在两个现有节点之间添加边的概率。我们使用两种不同的参数设置 $[\alpha = 0.41, \gamma = 0.05, \beta = 0.54]$ 和 $[\alpha = 0.2, \gamma = 0.5, \beta = 0.3]$ 来获得不同稀疏性水平的拉普拉斯矩阵。前者（默认）设置的幂指数约为2，生成更稠密的网络，而后者的幂指数约为1，生成更稀疏的网络。如图15所示，我们在更稀疏的网络中看到完全重构，因为拉普拉斯矩阵满足压缩感知方法的稀疏性条件 [13]。

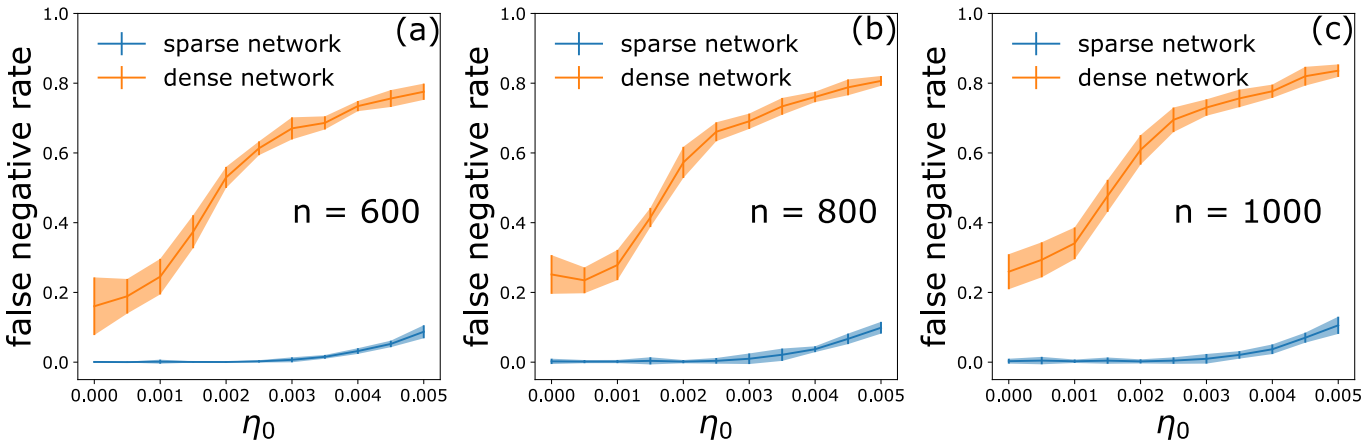

图15：对于网络规模为(a) $n = 600$、(b) $n = 800$ 和(c) $n = 1000$的稀疏网络和稠密网络， FNR随噪声的变化。所有点均表示对无标度网络的 10 个不同实现求得的平均误差，阴影区域表示标准差。时间序列长度为 500，这对应于所有三种网络规模的欠定情形。

XI. 推断拉普拉斯矩阵的交叉验证

在正文中，我们使用真实拉普拉斯矩阵来展示不同超参数和数据长度下的重构性能。然而，在现实世界问题中，通常不可能知道真实矩阵来评估该方法的成功与否。因此，在真实矩阵缺失的情况下，使用交叉验证技术评估重构结果非常重要。为说明交叉验证方法，我们使用针对不同超参数（惩罚项） $\lambda = 0.008$，0。003 和0。0003推断的拉普拉斯矩阵，获得了长度为500的预测时间序列 。在这三个参数中， $\lambda = 0.0003$ 对应的结果给出了最佳拟合，图16(a)。

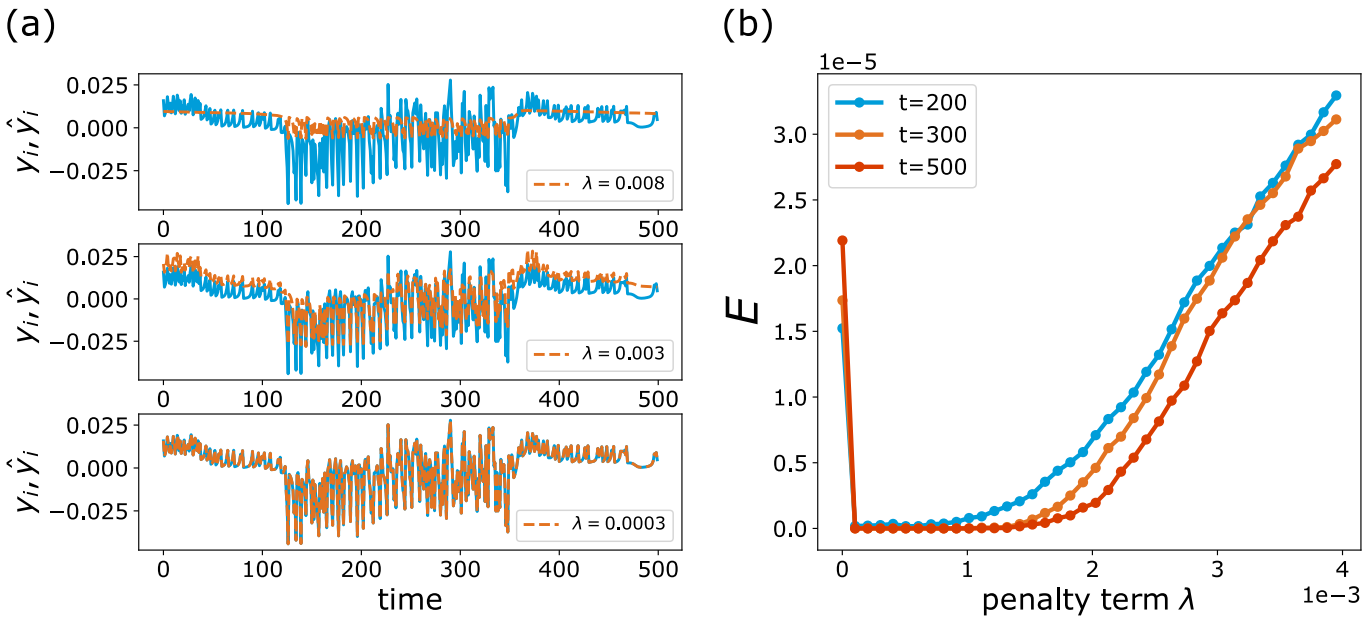

图 16：a) 节点测量值与测试时间序列的比较。每个 λ 参数对应 to
不同的连接矩阵。我们对推断出的模型进行仿真，并获得测试时间序列。b) 交叉验证 of
基于一系列惩罚项对应的连接矩阵推断出的时间序列。为了找到大型网络动力学中的最佳超参数，
我们使用一个误差函数。

$$E = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{i,t} - \hat{y}_{i,t}\right)^2\right) \tag{18}$$

其中，$y_i = x_i(t+1) - f(x_i)$，而$\hat{y}$表示预测值。然后，我们优化超参数，以最小化误差。产生最准确结果的参数可用作最优超参数（图 16(b)）。

XII. 为什么约化定理对于重构大型网络至关重要?

一种完全算法化的方法是将任意稀疏优化技术直接应用于整个多变量时间序列。通过这种方法，最多只能恢复达到一定规模的网络。根据约化定理，我们从低度节点中学习局部动力学，并从枢纽中学习交互动力学。我们并不是在一个包含所有可能函数的庞大函数库中寻找函数的稀疏线性组合。因此，我们的方法不存在网络规模限制。在本节中，我们将通过一个简单的示例来说明这一点：

假设我们有一个包含 5 个节点的网络。如果节点 1 与节点 0、4 和 5 相连，如图 17 所示，那么节点 1 的动力学可简洁地写成拉普拉斯矩阵形式：

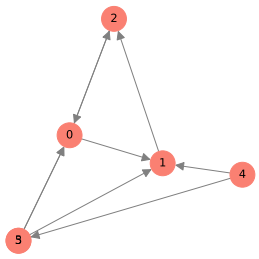

图 17：以 5节点网络 为例。

$$\boldsymbol{x}_1(t+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1(t)) + 3\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_1(t)) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0(t)) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_4(t)) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_5(t)) \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^m$。式（19）采用连接的线性组合形式，因此在基函数库定义明确的情况下，任何稀疏回归算法都能正确捕获参数。对于单个方程而言，这似乎相当可行；但对于一个5节点网络，每个节点包含 m 个分量，我们需要发现 $5m$ 个方程。鉴于对耦合函数已有一些先验知识，假设我们将基函数设为最高二次的多项式以及所有变量的二次组合。这个示例设置对于 $m=3$ 包含9个函数。在这种情况下，对于这个特定示例，我们的基函数包含45个特征。如果没有先验知识，我们会使用一个包含更多候选函数的广泛函数库。我们在这一方向上进行了实验，以了解其局限性。结果表明，随着网络规模增大，即基函数库不断扩展，纯算法式的基于方程的学习方法会失效。Novaes 等人的结果验证了我们的结论：他们表明，由于网络规模增加（最多达到20个节点）而向基函数库中添加新函数，会严重影响重构 [14]。

此外，在最终的稀疏回归步骤中，我们的问题转化为如下线性方程 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^T$、$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{T\times n}$ 和 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$。此处，$\boldsymbol{y}$ 是数据，数据的长度为 T，n 是网络规模。由于数据的可获得性始终有限，我们关注欠定情形（$T<n$）。从压缩感知的角度来看，测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 应满足某些条件，才能通过 ℓ_1-范数使 $\boldsymbol{x}$ 的最稀疏解收敛。其中一个条件可以概括为：时间序列长度随网络规模变化，因此，如果测量矩阵具有更多列，就需要更长的测量序列。其关系式为：

$$T \approx \mathcal{O}(Klog(n/K))$$

其中，K 是网络的稀疏度度量（非零条目数）[15]。如果列数由包含所有可能成对相互作用的基函数决定，而不是由网络规模决定，这意味着需要更长的时间序列。另一方面，相互作用函数的不确定性是推断精确连接矩阵 [16]的障碍。找到 $\boldsymbol{H}$，从而降低完全重构优化问题的维度，扩大了适用范围，也使我们的工作脱颖而出。

十三、 一般扩散耦合和主稳定性函数

考虑函数 $\boldsymbol{h}$： $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$。我们称 $\boldsymbol{h}$ 是扩散的，如果

$$\boldsymbol{h}(x,x)=\boldsymbol{h}(0)=0 \text{ and } \boldsymbol{h}(x,y)=-\boldsymbol{h}(y,x)$$

我们再次考虑一般扩散耦合的模型

$$\boldsymbol{x}_i(t+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i(t))+\gamma\sum_{j=1}^{n}w_{ij}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_i) \tag{20}$$

其中 γ 是耦合强度。

我们在接近同步 $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\xi}_i$ 处进行分析，因此

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\xi}_j,\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\xi}_i)=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})+D_1\boldsymbol{h}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})\boldsymbol{\xi}_j+D_2\boldsymbol{h}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})\boldsymbol{\xi}_i$$

但因为耦合是扩散的

$$D_2\boldsymbol{h}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})=-D_1\boldsymbol{h}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})$$

我们得到

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{s})(\boldsymbol{\xi}_j-\boldsymbol{\xi}_i)+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi}_j)$$

其中 $\boldsymbol{H(s)}=D_1\boldsymbol{h(s,s)}$ 和 $\boldsymbol{R(\xi_i,\xi_j)}$ 含有二次项。接着，给出关于同步流形的第一变分方程

$$\boldsymbol{\xi}_i(t+1) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{s}(t))\boldsymbol{\xi}_i(t)+\gamma\sum_{j=1}^{n}w_{ij}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{s})(\boldsymbol{\xi}_j(t)-\boldsymbol{\xi}_i(t)) \tag{21}$$

$$= D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{s}(t))\boldsymbol{\xi}_i(t)-\gamma\boldsymbol{H}(\boldsymbol{s})\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\boldsymbol{\xi}_j(t). \tag{22}$$

所有模块具有相同的形式，仅因 λ_i（ $\boldsymbol{L}$的第 i个特征值）而不同。然后我们得到模态的参数方程

$$\boldsymbol{u}(t+1) = [D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{s}(t)) - \kappa \boldsymbol{H}(\boldsymbol{s}(t))]\boldsymbol{u}(t)$$

其中 $\kappa = \gamma\lambda_i$。固定 κ 后，我们计算最大李雅普诺夫指数 $\Lambda(\kappa)$，即

$$\|\boldsymbol{u}(t)\| \leq Ce^{\Lambda(\kappa)t}.$$

映射

$$\kappa \mapsto \Lambda(\kappa) \tag{23}$$

被称为主稳定性函数。注意，如果 $\Lambda(\kappa) < 0$ 当 $\kappa > \gamma_c\lambda_2$ 时，则 $\|u\| \to 0$。有关主稳定性函数公式 23 的更多详细信息，请参见例如 [17, 18]。

---

[1] B.Barzel 和A. L. Barab´asi，《自然·物理》9，673（2013），ISSN 17452481。[2] T.Pereira、D. Eroglu、G. B. Bagci、U.Tirnakli 和H. J. Jensen，《物理评论快报》110，234103（2013）。[3] N. Kasthuri、K. J. Hayworth、D. R. Berger、R. L. Schalek、J.A. Conchello、S. Knowles-Barley、D.Lee、A.V´azquez-Reina、V. Kaynig和 T. R. J. *et al.*，《细胞》162，648（2015），ISSN10974172。[4] D. Eroglu、M. Tanzi、S. vanStrien 和 T. Pereira，《物理评论X》10，1（2020），ISSN 2160-3308。[5] N.T. Markov、J.Vezoli、P. Chameau、A. Falchier、R.Quilodran、C. Huissoud、C. Lamy、P. Misery、P.Giroud、S. Ullman 等，《比较神经学杂志》522，225（2014）。[6] J. T.Vogelstein、E. Perlman、B. Falk、A. Baden、W. G. Roncal、V. Chandrashekhar、F. Collman、S.Seshamani、J. L. Patsolic和 K. L. *et al.*，《自然·方法》15，846（2018），ISSN 15487105。[7] W. X. Wang、R. Yang、Y. C. Lai、V. Kovanis 和 C. Grebogi，《物理评论快报》106（2011），ISSN 00319007。[8] S. L. Brunton、J. L. Proctor、J. N.Kutz和 W. Bialek，《美国国家科学院院刊》113，3932（2016），ISSN 10916490。[9] R. Tibshirani，来源：《英国皇家统计学会杂志B辑（方法学）》58，267（1996）。[10] B. M. deSilva、K.Champion、M. Quade、J.-C. Loiseau、J.N. Kutz 和 S. L. Brunton，《开源软件杂志》5，2104（2020），网址 https://doi.org/10.21105/joss.02104。[11] P. Mehta、M. Bukov、C.H. Wang、A. G. Day、C. Richardson、C.K. Fisher和 D. J. Schwab，《物理学报告》810，1（2019），ISSN 03701573，网址 https://doi.org/10.1016/j.physrep.2019.03.001。[12] D. Donoho，《IEEE信息论汇刊》52，1289（2006）。[13] E. J.Candes、J.K. Romberg 和T. Tao，《纯粹与应用数学通讯：由考朗数学科学研究所出版的期刊》59，1207（2006）。[14] M. Novaes、E.R.dosSantos 和 T.Pereira，《物理学D辑：非线性现象》424，132895（2021），ISSN01672789。[15] S.L.Brunton和 J. N. Kutz，*Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning*、 *Dynamical Systems*、 *and Control*（剑桥大学出版社，2019）。[16] Y. Y. Liu 和 A. L.Barab´asi，《现代物理评论》88，035006（2016），ISSN15390756。[17] L. Huang、Q.Chen、Y.-C. Lai和 L. M. Pecora，《物理评论E》80，036204（2009），网址 https://link.aps.org/doi/10. 1103/PhysRevE.80.036204。[18] P. Schultz、T.Peron、D.Eroglu、T.Stemler、G.M. Ram´ırez ´Avila、F.A.Rodrigues 和J.Kurths，《物理评论E》93，062211 2016( )。