arXiv:2304.02685v1 [math-ph] 5 Apr 2023

关于 C*-代数本征态的概念及其在量子力学中的一些应用

朱塞佩·德·尼蒂斯和达尼洛·波洛

摘要。本文探讨 C*-代数中本征态的概念。在回顾一些基础性和结构性结果之后，我们尝试用（代数）本征态重新诠释量子力学中的若干典型概念（例如动力学平衡态、基态、有隙态和费米面）。

MSC 2010：主要分类：46L30；次要分类：47L80、47L90、82B10。关键词：本征态、基态、有隙态、费米面。

目录

1. 引言 2 2. 复数域*-代数的本征态 3 2.1. 基本定义 3 2.2. 本征态与谱 5 2.3. 本征态与表示 8 2.4. 不同本征态之间的关系 8 2.5. 投影的本征态 9 3. 本征态与动力学 11 3.1. 动力学下的稳定性 11 3.2. 基态条件 12 3.3. 有能隙的基态 14 4. 费米面与本征态 16 4.1. 费米面的标准概念 16 4.2. 费米面的本征态 17 4.3. 一个物理应用：石墨烯 20 4.4. 费米面的广义概念 22 附录 A. 测度的分解 27 参考文献 34

日期：2023年4月7日。

1. 引言

通常，本征态的概念是在量子力学（QM）的希尔伯特空间表述中提出的 [Dira,vNeu]：给定一个作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ （态空间）上的线性算子 H （通常称为可观测量）以及一个数值 $\lambda \in \mathbb{C}$ （测量结果），如果方程 $H\psi = \lambda\psi$ 成立，那么就称 $\psi \in \mathcal{H}$ 是 H 的本征态，其特征值为 λ。然而，在希尔伯特空间表述的量子力学诞生后不久，人们便认识到，量子理论可以用纯粹的代数语言进行严格的重新表述。量子力学的代数基础 [MvN,Sega]被证明是一个比原始希尔伯特空间表述更一般、更灵活的理论。在这一框架下，可观测量被解释为 C*-代数 $\mathfrak{A}$的元素，而态则是连续线性泛函 $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$。它与标准表述之间的联系由GNS表示（见第2.3节）给出，该表示提供了一种方式：对于给定的态 ω，关联一个三元组 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \psi_\omega)$，其中 π_ω 是 $\mathfrak{A}$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\omega$上的表示，而 ψ_ω 是 ψ_ω 中的循环向量，它使得能够重构 ω的统计量（或期望值）。代数方法的主要优势之一在于，它提供了一个适合于毫无歧义地处理具有无限自由度的系统的框架，例如统计力学系统[BR1, BR2] 以及场论 [Haag]。

鉴于上述内容，值得探讨算子的本征态这一概念是否存在代数解释。事实上，这并非如此奇特或困难。给定一个 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 的可观测量 H 和一个数 $\lambda \in \mathbb{C}$，如果相关的GNS表示中满足特征值方程 $\pi_\omega(H)\psi_\omega = \lambda\psi_\omega$，则称态 ω 是 H 的本征态（定理 2.15）。值得注意的是，这一定义在某种程度上自然的本征态概念，可以用一种纯代数的方式加以刻画，而无需借助GNS表示（定义 2.1）。我们尚不清楚这一概念最初是在文献中的何处、何时提出的。然而，不同作者出于不同原因使用了它。例如，在 [Ried1、Ried2] 中，它被用于研究几乎 Mathieu 算子的谱性质；在[MP、Pash2] 中，则被用于研究某些C*-代数的单纯性。最近的一篇综述 [Rine] 专门总结自伴算子的本征态的主要性质。

本工作旨在回顾并推广 aC*-代数中元素的本征态概念，并尝试运用这一概念重新诠释（量子）凝聚态系统中的某些典型思想。通过遵循并拓展[Rine], 中的论述，我们将探讨本征态概念与动态平衡态、基态、有能隙态以及费米面的代数表述之间的关系。在此过程中，我们将给出文献中缺失或零散的证明。

在我们看来，这项工作的主要贡献之一，是建立了费米面 [AM、Call、Kitt、Kuch1] 与本征态之间的联系。具体而言，我们可以证明（定理 4.5），费米面可以恰当地解释为相关

的 C*-代数的本征态）。这为将费米面的概念扩展到周期算子这一通常框架之外铺平了道路。事实上，在第 4.4 节中，我们给出了费米面的一个广义定义。从某种意义上说，可以将其视为通常费米面概念的“非交换版本”。这项工作仅仅迈出了这条道路上的第一步；尽管如此，我们长期以来的目标是完整刻画本征态成为“非交换费米面”所需具备的性质。

论文结构与主要结果。在第2 节中，我们回顾本征态的一些性质，并将 [Rine] 的结果推广到正规元。特别地，我们证明，如果 A 是一个 C*-代数 $\mathfrak{A}$的正规元，那么其谱与其本征态集合之间存在对应关系（参见推论2.10）。我们还证明，对于任意正规元，本征态集合在函数演算下是闭的（参见定理2.13）。此外，我们还从理想和（左）可逆性的角度给出了本征态的其他刻画。第3节致力于研究自伴元的本征态概念与平衡态、基态和有能隙态等概念的代数表述之间的关系。更具体地说，我们证明，在自伴元 H 所生成的动力学下保持不变的纯态，恰好是 H的本征态（命题3.3）；并且我们根据基态和有能隙态给出了本征态的一个显式刻画（命题 3.7 和3.9）。在第 4 节中，我们为 C*-代数 $\mathfrak{A}$中的元引入了费米面的一个新的代数定义。在温和的技术条件下，本节的主要结果表明，可以在适当的 C*-代数中，为自伴元的每个费米面构造一个与之对应的本征态（定理4.5）。第4.3 节详细考察了一个物理实例。附录 A 纳入了有关分解定理的辅助材料。

致谢 GD 的研究得到 Fondecyt Regular- 1190204 项目的资助。DP 的研究得到 ANID-Subdirecci´on de Capital Humano/ Doctorado Na- cional/ 2022-21220144 项目的资助。GD 谨向 J. Bellissard 致以诚挚谢意，感谢他就本征态的代数概念及其与费米面概念的关系进行了多次启发性讨论，并感谢他推荐了相关参考文献 [Ried1， Ried2]。

2. C*-代数的本征态

2.1. 基本定义。 下文中， $\mathfrak{A}$ 始终表示一个含单位元的 C*-代数，其 单位元为 $\mathbf{1}$。事实上，这一假设不失一般性，因为每个不含单位元的 C*-代数都可以按照标准方式赋予一个单位元 [BR1，命题 2.1。5]。 态空间，即 $\mathfrak{A}$上的归一化正线性泛函集合， $\mathfrak{A}$ [BR1，定义 2.3。14],记作 $\mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$。

定义 2.1（本征态）。设 $A \in \mathfrak{A}$。态 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 是 A 的本征态，特征值为 $\lambda \in \mathbb{C}$，当且仅当

$$\omega(BA) = \lambda\, \omega(B)\,, \qquad \forall\, B \in \mathfrak{A}\,.$$

A 的所有特征值集合记为 $\mathrm{Eig}(A)$。

在上述定义中选择 $B = \mathbb{1}$ 后，结果表明

$$\lambda \;=\; \omega(A)\,,$$

即，特征值 λ 的值由本征态 ω对算子 A的赋值确定。

注2.2. 设 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 是 A 的本征态，其特征值为 $\lambda \in \mathbb{C}$。那么，对于每个 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$，ω 也是 $A_0 := A - \lambda_0\mathbb{1}$ 的本征态，其特征值为 $\lambda - \lambda_0$。◀

给定 $A \in \mathfrak{A}$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$ 令

$$\mathfrak{J}_{A,\lambda} \;:=\; \overline{\{J = B(A - \lambda\mathbb{1}) \mid B \in \mathfrak{A}\}} \;\subseteq\; \mathfrak{A}\,. \tag{2.1}$$

是相应的闭左理想。

引理2.3.状态 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 是 $A \in \mathfrak{A}$ 的本征态，其特征值为 $\lambda \in \mathbb{C}$ 当且仅当$\omega|_{\mathfrak{J}_{A,\lambda}} \equiv 0$。

证明。对于蕴含关系 $(\Rightarrow)$，我们先考虑情形 $J = B(A - \lambda\mathbb{1})$。于是

$$\omega(J) \;=\; \omega(BA) \;-\; \lambda\omega(B) \;=\; 0\,.$$

在情形 J 中，$J_n := B_n(A - \lambda\mathbb{1})$ 是该序列的范数极限，因此由连续性可得

$$|\omega(J)| \;=\; |\omega(J - J_n)| \;\leqslant\; \|J - J_n\|$$

进而 $\omega(J) = 0$。蕴含关系 $(\Leftarrow)$ 可通过注意到条件$\omega|_{\mathfrak{J}_{A,\lambda}} \equiv 0$ 蕴含定义 2.1。□

命题 2.4。态 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 是 $A \in \mathfrak{A}$ 的本征态，其特征值为 $\lambda \in \mathbb{C}$，当且仅当

$$\omega\big((A - \lambda\mathbb{1})^*(A - \lambda\mathbb{1})\big) \;=\; 0\,.$$

证明。 蕴含关系 $(\Rightarrow)$ 由引理 2.3可得。蕴含关系 $(\Leftarrow)$ 由态的柯西-施瓦茨不等式 [BR1以及引理 2.3 得出。10]

$$|\omega\left(B(A - \lambda\mathbb{1})\right)|^2 \;\leqslant\; \omega\left(B^*B\right)\,\omega\left((A - \lambda\mathbb{1})^*(A - \lambda\mathbb{1})\right) \;=\; 0\,, \quad \forall\, B \in \mathfrak{A}$$

这意味着，对每个 $B \in \mathfrak{A}$，都有 $\omega(BA) = \lambda\omega(B)$。 □

回顾一下， $A \in \mathfrak{A}$ 是正规元，当且仅当 $AA^* = A^*A$。

推论 2.5. 设 $A \in \mathfrak{A}$ 是一个正规元， $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 是 A 的一个本征态，其特征值为 $\lambda \in \mathbb{C}$。那么 ω 也是 A^* 的一个本征态，其特征值为 $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$。

证明。 鉴于命题 2.4 以及 A 的正规性，成立：

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \omega\big((A - \lambda\mathbb{1})^*(A - \lambda\mathbb{1})\big) \;=\; \omega\big((A - \lambda\mathbb{1})(A - \lambda\mathbb{1})^*\big) \\ &=\; \omega\big((A^* - \overline{\lambda}\mathbb{1})^*(A^* - \overline{\lambda}\mathbb{1})\big)\,. \end{aligned}$$

然后，再次使用命题2.4 即可完成证明。 □

2.2. 本征态与谱。 让我们回顾一下，谱 的 $A \in \mathfrak{A}$ 定义为[BR1，定义 2.2。1]

$$\mathrm{Spec}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda \mathbf{1}) \text{ is not invertible in } \mathfrak{A}\} .$$

下面的结果表明，特征值属于谱。

命题 2.6. 设 $A \in \mathfrak{A}$。那么，$\mathrm{Eig}(A) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$。

证明。 设 $\lambda \in \mathrm{Eig}(A)$ 并且 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 是相应的本征态。反证法，假设 $B = (A - \lambda \mathbf{1})^{-1} \in \mathfrak{A}$。那么，根据引理 2.3，可得

$$\omega(\mathbf{1}) \;=\; \omega\left(B(A - \lambda \mathbf{1})\right) \;=\; 0$$

这就产生了矛盾。因此 $A - \lambda \mathbf{1}$ 不可逆。 □

如果能有一个保证等式成立的判据，将会很有意义

$$\mathrm{Eig}(A) \;=\; \mathrm{Spec}(A) \qquad A \in \mathfrak{A} . \tag{2.2}$$

为此，我们需要以下预备结果。

引理2.7。设 $A \in \mathfrak{A}$。那么， $\lambda \in \mathrm{Eig}(A)$ 当且仅当$\mathbf{1} \notin \mathfrak{J}_{A,\lambda}$。

证明。 蕴含关系 $(\Rightarrow)$ 是引理 2.3的直接推论。事实上，如果 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$是 A 所关联的 $\lambda \in \mathrm{Eig}(A)$的一个本征态，那么 $\omega(J) = 0$ 对于每一个 $J \in \mathfrak{J}_{A,\,\lambda}$，并且根据态的定义 $\omega(\mathbf{1}) = 1$ ，因此 $\mathbf{1} \notin \mathfrak{J}_{A,\,\lambda}$。蕴含关系 $(\Leftarrow)$需要使用 [BR1，命题2.3。24] 这是 Hahn-Banach 定理的一个推论。令 $\mathbf{1} \notin \mathfrak{J}_{A,\,\lambda}$ 并考虑含单位元的 C*-代数

$$\mathfrak{B}_{A,\lambda} := \mathbb{C}\mathbf{1} + \mathfrak{J}_{A,\lambda} \subseteq \mathfrak{A}$$

以及由$\widetilde{\omega} : \mathfrak{B}_{A,\,\lambda} \to \mathbb{C}$ 定义的状态

$$\widetilde{\omega}(\alpha \mathbf{1} + J) \;=\; \alpha , \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{C} , \quad \forall\, J \in \mathfrak{J}_{A,\lambda} .$$

于是，存在一个状态 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 其延拓了 $\widetilde{\omega}$。特别地，这意味着$\omega|_{\mathfrak{J}_{A,\,\lambda}} \equiv 0$ 进而 $\lambda \in \mathrm{Eig}(A)$ 根据引理2.3。□

后续 [Conw1，第 VII 章，定义3。1] 我们引入左谱的$A \in \mathfrak{A}$定义为

$$\mathrm{Spec}_{L}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda \mathbf{1}) \text{ is not left-invertible in } \mathfrak{A}\} .$$

右谱 $\mathrm{Spec}_{R}(A)$ 的定义类似。根据上述定义，可以得出:

$$\mathrm{Spec}(A) \;=\; \mathrm{Spec}_{L}(A) \cup \mathrm{Spec}_{R}(A) .$$

此外有 $\mathrm{Spec}_{L}(A) = \mathrm{Spec}_{R}(A^{*})$ 。

备注 2.8。 设 $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 为作用在某个希尔伯特空间上的有界算子 $\mathcal{H}$ 且 $A \in \mathfrak{A}$。那么，根据 [Conw1，第十一章，命题1。1] 可得

$\mathrm{Spec}_{\mathrm{L}}(A)$ 和 $\mathrm{Spec}_{\mathrm{R}}(A)$ 分别与 A 的近似点谱和满射谱重合。◀

命题 2.9。设 $A \in \mathfrak{A}$。则，$\mathrm{Spec}_{\mathrm{L}}(A) = \mathrm{Eig}(A)$。

证明。包含关系 $\mathrm{Eig}(A) \subseteq \mathrm{Spec}_{\mathrm{L}}(A)$ 是引理2.7 的直接推论。为证明反向包含关系，令 $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{L}}(A)$。为了证明 $\lambda \in \mathrm{Eig}(A)$，根据引理2.7，只需证明$\mathbf{1} \notin \mathfrak{J}_{A,\lambda}$。令$\mathfrak{J}'_{A,\lambda} := \mathfrak{A}(A - \lambda\mathbf{1})$ 为 $\mathfrak{J}_{A,\lambda}$的稠密理想，它由形如 $J = B(A-\lambda\mathbf{1})$ 且满足 $B \in \mathfrak{A}$的元素定义。由于根据定义 $A - \lambda\mathbf{1}$ 不是左可逆的，因此可推出 $\mathbf{1} \notin \mathfrak{J}'_{A,\lambda}$。所以，$\mathfrak{J}'_{A,\lambda}$ 中的任何元素都不可能是可逆的。因此，对于每个 $J \in \mathfrak{J}'_{A,\lambda}$，都有 $0 \in \mathrm{Spec}(J)$，或者等价地，$1 \in \mathrm{Spec}(\mathbf{1} - J)$。由此可得 $\|J - \mathbf{1}\| \geqslant 1$，进而通过连续性论证得到 $\mathbf{1} \notin \mathfrak{J}_{A,\lambda}$。□

结合命题2.6 和2.9 的内容可得

$$\mathrm{Spec}_{\mathrm{L}}(A) \;=\; \mathrm{Eig}(A) \;\subseteq\; \mathrm{Spec}(A) \qquad A \in \mathfrak{A}\,. \tag{2.3}$$

要从（2.3）推出（2.2），还需要一些额外条件，以保证左谱与谱相等。

推论 2.10。对于每个正规元 $A \in \mathfrak{A}$ 等式（2.2）成立。

证明。对于正规元，左谱与谱相等这一结论已在[Conw1第 XI 章命题 1 中得到证明。4]。然后由（2.3）即可得出结论。□

令 $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ 为可分无限维希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上紧算子的（非含幺） C*-代数。和通常一样，为了使其含幺，我们考虑标准扩张 $\mathfrak{K}^+(\mathcal{H}) := \mathbb{C}\mathbf{1} + \mathfrak{K}(\mathcal{H})$。由于 $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ 的结构不依赖于具体的（可分）空间 $\mathcal{H}$，我们将使用简记 $\mathfrak{K}$ 和 $\mathfrak{K}^+$。

推论 2.11. 对于每一个 $A \in \mathfrak{K}^+$ 等式(2.2) 成立。

证明. 设 $A = T + z\mathbf{1} \in \mathfrak{K}^+$ 对于某些 $z \in \mathbb{C}$ 和 $T \in \mathfrak{K}$。根据命题 2.6，我们只需证明 $\mathrm{Spec}(A) \subseteq \mathrm{Eig}(A)$。设 $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$。则 $T - (\lambda - z)\mathbf{1}$不可逆，因此 $\lambda - z \in \mathrm{Spec}(T)$。如果 $\lambda \neq z$，则由里斯-绍德尔定理[RS1, 定理 VI.15] 存在一个 $\psi \neq 0$ 在 $\mathcal{H}$ 中使得 $T\psi = (\lambda - z)\psi$。因此，$A\psi = \lambda\psi$ 且 $\lambda \in \mathrm{Eig}(A)$ 正如我们将在定理 2.15 中看到的。现在，设 $\lambda = z$ 并假设 $\lambda \notin \mathrm{Eig}(A)$。然后，由命题 2.9 可推断存在一个有界算子 S使得

$$\mathbf{1} \;=\; S(A - \lambda\mathbf{1}) \;=\; ST\,.$$

最后一个等式将意味着单位元$\mathbf{1}$ 是紧的，因为 $\mathfrak{K}$ 是一个理想。然而，每当 $\mathcal{H}$ 是无限维时，这是一个矛盾。这完成了证明。□

例 2.12（单边移位）。 不难验证存在一些算子使得等式2.2 不成立。让我们考虑单边移位算子 $\mathfrak{s}$ 在 $\ell^2(\mathbb{N})$上，由

$$\mathfrak{s} : (n_1, n_2, \ldots) \longmapsto (0, n_1, n_2, \ldots), \qquad \forall\, n := (n_1, n_2, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

其伴随为 $\mathfrak{s}^* : (n_1, n_2, \ldots) \mapsto (n_2, n_3, \ldots)$。由 [Conw1，第七章，命题 6.5 与推论 6。6] 可知 $\mathrm{Spec}(\mathfrak{s}) = \mathbb{D}_1 = \mathrm{Spec}(\mathfrak{s}^*)$ 其中 $\mathbb{D}_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant 1\}$ 是闭单位圆盘。另一方面，由 [Conw1，第十一章，命题

1 1] $\quad {}_{L}(\mathfrak{s}) = \quad {}_{a.p.}(\mathfrak{s}) = \partial\mathbb{D}_1 \equiv \mathbb{S}^1 \quad \mathbb{S}^1 := \{\lambda \in$ ，可得 $\mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$

2 9 $\quad (\mathfrak{s}) \simeq \mathbb{S}^1$

SpecSpec其中 。根据命题 。最终得到 Eig这表明$\mathrm{Eig}(\mathfrak{s}) \neq \mathrm{Spec}(\mathfrak{s})$。值得指出的是，算子 $\mathfrak{s}^*$ 满足方程（2.2），因为 $\mathrm{Spec}_{L}(\mathfrak{s}^*) = \mathbb{D}_1$。 ◀

下一个结果使用 $A \in \mathfrak{A}$的正规元的函数演算。在这种情况下， A 和 A^* 生成 C*的一个交换 $\mathfrak{A}$ -代数，该代数同构于C*-代数 $C(\mathrm{Spec}(A))$，即定义在紧集上的连续函数 $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathbb{C}$，这是由 Gelfand-Nainmark 定理 [Conw1第 VII 节得到的。2]特别地，对于每个连续函数 $f \in C(\mathrm{Spec}(A))$，都有一个相应的（正规）元 $f(A) \in \mathfrak{A}$，其谱为 $f(\mathrm{Spec}(A))$ （谱映射定理）。由推论 2.10 可得

$$\mathrm{Eig}(f(A)) = f(\mathrm{Spec}(A)). \tag{2.4}$$

下一个结果联系了 A 的本征态与 $f(A)$ 的本征态，其中 A 是一个正规元。

定理 2.13。设 $A \in \mathfrak{A}$ 是一个正规元，且 $f \in C(\mathrm{Spec}(A))$。如果 ω 是 A 的本征态，对应特征值为 $\lambda \in \mathbb{C}$，那么 ω 也是 $f(A)$ 的本征态，对应特征值为$f(\lambda) \in \mathbb{C}$。

证明。利用对 n 和 m 的归纳以及推论2.5 可得，对于任意单项式$p_{n,}$ ${}_{m}(x) := x^n\overline{x}^m$有

$$\omega(Bp_{n,m}(A)) = \omega(BA^n(A^*)^m) = \lambda^n\overline{\lambda}^m\omega(B) = p_{n,m}(\lambda)\omega(b).$$

然后，由线性性可得，对于每个多项式 p， ω 是 $p(A)$ 的本征态，其特征值为 $p(\lambda)$。最终结果由斯通-魏尔斯特拉斯定理以及 ω的连续性得到。□

推论2.14。设 $A \in \mathfrak{A}$ 是一个正规且 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 是与 A 相关的本征态，其特征值为 $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$。设 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个连续函数。那么，

$$\omega([B, f(A)]) = \omega(Bf(A)) - \omega(f(A)B) = 0$$

对于每一个 $B \in \mathfrak{A}$。

证明。 由定理 2.13可知

$$\omega(Bf(A)) \;=\; f(\lambda)\,\omega(B)\,.$$

另一方面，根据推论 2.5 也有

$$\begin{aligned}\omega(f(A)B) \;&=\; \overline{\omega\,(B^*f(A)^*)} \;=\; \overline{\overline{f(\lambda)}\,\omega\,(B^*)}\\ &=\; f(\lambda)\,\overline{\omega\,(B^*)} \;=\; f(\lambda)\,\omega(B)\,.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

2.3. 本征态与表示。本节将研究本征态这一概念在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界算子代数 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 中的 $\mathfrak{A}$ 代数的 C^*-表示下的行为。

定理 2.15。设 $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 是 $\mathfrak{A}$ 的一个 $*$-表示，并且

$$\omega_\psi(A) \;:=\; \langle \psi, \pi(A)\psi\rangle_{\mathcal{H}}\,, \qquad A \in \mathfrak{A}$$

是与归一化向量 $\psi \in \mathcal{H}$ 相关联的向量态。那么，当且仅当 $\pi(A)\psi = \lambda\psi$ 时， ω_ψ 是 A 的一个本征态，其特征值为 $\lambda \in \mathbb{C}$。

证明。 我们先证明蕴含关系 $(\Rightarrow)$。若 ω_ψ 是一个本征态，那么根据引理 2.3，可得

$$0 \;=\; \omega_\psi\left((A-\lambda\mathbf{1})^*(A-\lambda\mathbf{1})\right) \;=\; \|(\pi(A)-\lambda\mathbf{1})\psi\|^2_{\mathcal{H}}$$

whi这意味着 $\pi(A)\psi = \lambda\psi$。蕴含关系 $(\Leftarrow)$ 可由直接计算得到

$$\omega_\psi(BA) \;=\; \langle\psi, \pi(B)\pi(A)\psi\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \lambda\,\langle\psi, \pi(B)\psi\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \lambda\,\omega_\psi(B)\,.$$

证明完毕。 □

回顾一下，每个状态 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 定义了 GNS表示 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \psi_\omega)$[Conw1，第 VIII 章，定理 5。14]其中 ψ_ω 是该表示的循环向量，并且有

$$\omega(A) \;=\; \langle\psi_\omega, \pi_\omega(A)\psi_\omega\rangle_{\mathcal{H}_\omega}\,, \qquad A \in \mathfrak{A}\,.$$

以下结果是定理 2.15的直接推论。

推论 2.16。设 $A \in \mathfrak{A}$ 和 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 是 A 的一个本征态，其特征值为 $\lambda \in \mathbb{C}$。设 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \psi_\omega)$ 是 ω的 GNS表示。那么

$$\pi_\omega(A)\psi_\omega \;=\; \lambda\psi_\omega\,.$$

2.4. 不同本征态之间的关系。在本节中，我们将研究与不同特征值相关的元素 $A \in \mathfrak{A}$ 的本征态之间的关系。先从定义开始。态的集合 $\{\omega_1, \ldots, \omega_N\} \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 称为线性无关，如果 $\sum_{k=1}^N a_k\omega_k \equiv 0$ 与 $a_j \in \mathbb{C}$ 蕴含 $a_1 = \ldots = a_N = 0$。

定理 2.17. 任何一组由 $A \in \mathfrak{A}$ 个本征态组成、且其特征值 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\} \subset \mathbb{C}$ 两两不同的 $\{\omega_1, \ldots, \omega_N\} \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$，都是线性无关的。

证明. 通过对 N 进行归纳证明。 $N = 1$ 的情形显然。现在假设结论对 $N-1$ 成立，并设 $\sum_{k=1}^{N} a_k\omega_k \equiv 0$。将此和作用于元素 $B(A-\lambda_N\mathbf{1})$，其中某个 $B \in \mathfrak{A}$，可得

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{N} a_k\omega_k\big(B(A-\lambda_N\mathbf{1})\big) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k\omega_k\big(B(A-\lambda_N\mathbf{1})\big) = \sum_{k=1}^{N-1} a_k(\lambda_k-\lambda_N)\omega_k(B)\,. \end{aligned}$$

由归纳假设可知，对于每个 $k = 1$，都有 $a_k(\lambda_k - \lambda_N) = 0 \ldots\ldots N-1$。由于所有特征值互不相同，因此可得 $a_1 = \ldots = a_{N-1} = 0$。最后，鉴于关于 $N = 1$ 的论证，$a_N = 0$。□

根据 [佩，定义 3.2。3], 我们回顾一下，两个线性泛函 ω_1 和 ω_2 在 $\mathfrak{A}$ 上称为正交，如果

$$\|\omega_1 - \omega_2\| = \|\omega_1\| + \|\omega_2\|\,.$$

定理 2.18。设 $A \in \mathfrak{A}$ 为正规元。那么， A 的任意两个具有不同特征值的本征态都正交。

证明。设 ω_1 和 ω_2 是 A 的两个本征态，其特征值分别为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$。根据乌雷松引理，存在一个连续函数 $f \in C(\mathrm{Spec}(A))$，使得 $f(\lambda_1) = 1$， $f(\lambda_2) = -1$ 且 $\|f\|_\infty = 1$。由定理 2.13可得

$$(\omega_1 - \omega_2)(f(A)) = f(\lambda_1) - f(\lambda_2) = 2\,.$$

因此，

$$2 \leqslant \|\omega_1 - \omega_2\| \leqslant \|\omega_1\| + \|\omega_2\| = 2$$

这意味着 ω_1 与 ω_2 之间的正交性。 □

2.5. 投影的本征态。让我们回顾一下，自伴投影是一个元素 $P \in \mathfrak{A}$ 使得 $P^* = P = P^2$。

定理2.19。设 $P \in \mathfrak{A}$ 是一个自伴投影，且 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$。设 $\omega_P \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 是由下式定义的状态

$$\omega_P(A) := \frac{\omega(PAP)}{\omega(P)}\,, \qquad \forall\, A \in \mathfrak{A}\,.$$

以下各项等价：

(i) $\omega_P = \omega$; (ii) ω 是 P 的本征态，
特征值为1; (iii) $\omega(P) = 1$.

证明。 (i) ⇔ (ii)。对于所有 $B \in \mathfrak{A}$ 都有

$$\omega(BP) \;=\; \omega_P(BP) \;=\; \frac{\omega(PBP^2)}{\omega(P)} \;=\; \frac{\omega(PBP)}{\omega(P)} \;=\; \omega_P(B) \;=\; \omega(B)\,,$$

那么 ω 是 P 的本征态，特征值为 1。另一方面，如果 ω 是P 的本征态，特征值为 1，那么对每个 $B \in \mathfrak{A}$都有 $\omega(BP) = \omega(B)$，进而通过取伴随得到 $\omega(PB^*) = \omega(B^*)$。将一般元素 B^* 替换为 BP，可得 $\omega(PBP) =\omega(BP) \;=\; \omega(B)$。这一事实与 $\omega(P) \;=\; 1$ 一起，对每个$B \in \mathfrak{A}$给出 $\omega_P(B) \;=\; \omega(B)$ 。

(ii) ⇔ (iii)。如果 ω 是 P 的本征态，特征值为 1，那么

$$0 \;=\; \omega(0) \;=\; \omega((\mathbb{1} - P)P) \;=\; \omega(\mathbb{1} - P)\,.$$

因此

$$1 \;=\; \omega(\mathbb{1}) \;=\; \omega((\mathbb{1} - P) + P) \;=\; \omega(P)\,.$$

另一方面，由 $\omega(P) = 1$ 可得 $\omega(\mathbb{1}-P) = 0$ 进而 $\omega((\mathbb{1}-P)^*(\mathbb{1}-P)) = \omega(\mathbb{1} - P) = 0$ 这意味着 ω 是的本征态，特征值为 1 根据命题2.4。 □

注 2.20（能隙谱投影的本征态）。设 $H = H^*$ 是 $\mathfrak{A}$ 中的一个自伴元素，且 $\sigma_* \subset \mathrm{Spec}(H) \subset \mathbb{R}$ 是 H 的谱的一个闭（因而紧）子集。假设能隙条件 $\mathrm{dist}(\sigma_*, \mathrm{Spec}(H) \setminus \sigma_*) > 0$ 成立，并用 P_* 表示 H 在 σ_* 上的谱投影。借助函数演算，并考虑到能隙条件，我们可以选取一个实连续函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使其限制在 $\mathrm{Spec}(H)$ 上时与 σ_* 的示性函数一致，且 $f(H) = P_*$。特别地，这保证了 $P_* \in \mathfrak{A}$。我们将 P_* 称为 H 的能隙谱投影。我们的目标是构造 P_* 的一个本征态（特征值为 1）。利用测度分解定理（参见定理 A.2），可以得到一个支集包含于 σ_* 的实概率测度 μ_1。事实上，令 $\nu := \mu \circ f^{-1}$ 为标准勒贝格测度 μ 在 $\mathbb{R}$ 上经 f 推前所得的测度。由定理 A.2，存在一个关于 ν 的 ν-几乎处处唯一确定的 μ 的分解 $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}}$。由于对于 ν-几乎所有 $t \in \mathbb{R}$，μ_t 都支撑在纤维 $f^{-1}(\{t\})$ 上，因此 μ_1 支撑于 $f^{-1}(\{1\}) = \sigma_*$，如所需。利用 μ_1，我们可以构造 P_* 的一个本征态 ω。事实上，根据推论 2.10，对每个 $\lambda \in \sigma_*$，至少存在一个 H 的本征态 ω_λ，其特征值为 λ。假设存在一个逐点连续（或可测）映射 $\sigma_* \ni \lambda \mapsto \omega_\lambda$。那么函数】【。

$$\omega(A) \;=\; \int_{\sigma_*} \mathrm{d}\mu_1(\lambda)\, \omega_\lambda(A)\,, \qquad A \in \mathfrak{A}$$

结果定义良好。此外，可以验证 $\omega(1) = \mu_1(\sigma_*) = 1$，这意味着 $\omega \in E_{\mathfrak{A}}$。最后，直接计算表明

$$\begin{aligned}\omega(P_*) \;&=\; \int_{\sigma_*} \mathrm{d}\mu_1(\lambda)\, \omega_\lambda(P_*) \;=\; \int_{\sigma_*} \mathrm{d}\mu_1(\lambda)\, f(\lambda) \;=\; \int_{\sigma_*} \mathrm{d}\mu_1(\lambda) \\ &=\; \mu_1(\sigma_*) \;=\; 1\end{aligned}$$

并根据定理 2.19， ω 是 P_* 的本征态，其特征值为1。 ◀

上述构造将在更广泛的背景下于第4.2节中加以讨论并推广。

3. 本征态与动力学

在本节中，我们将把自伴算子 H 的本征态概念与由 H 诱导的动力学的某些性质联系起来。

3.1. 动力学下的稳定性。 设 $H = H^*$ 是 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 的一个自伴元。通过函数演算，带有 $t \in \mathbb{R}$的酉元e^{itH} 包含于 $\mathfrak{A}$中。于是，可以将与 H 相关联的动力学定义为由 $t \mapsto \alpha_t^H \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ 定义的单参数自同构群

$$\alpha_t^H(A) := e^{itH}\, A\, e^{-itH}\,, \qquad \forall\, A \in \mathfrak{A}\,. \tag{3.1}$$

上述定义的动力学 α^H 在强连续的意义下是连续的，即函数$t \mapsto \|\alpha_t^H(A)\|$ 对于每个 $A \in \mathfrak{A}$都是连续的。这很容易由 H的有界性推出，而有界性保证了 $t \mapsto \| e^{itH} \|$的连续性。事实证明，该动力学在强可微的意义下也是可微的，即极限

$$\delta_H(A) := i[H, A] = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha_t^H(A) - A}{t}$$

对每个 $A \in \mathfrak{A}$，该极限在范数意义下存在。对易子 δ_H 在 $\mathfrak{A}$ 上作用为一个（有界）导子，称为动力学 α^H的无穷小生成元。

态 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 在由 H 诱导的动力学下不变，当且仅当

$$\omega \circ \alpha_t^H = \omega\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

这等价于 $\omega \circ \delta_H = 0$。根据推论2.14 可知：

命题 3.1. 设 $H = H^*$ 是复数域 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 的一个自伴元，且 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 是 H 的一个本征态，对应于特征值 $\lambda \in \mathrm{Spec}(H)$。则 ω 在由 H 诱导的动力学下不变。

注3.2。不难证明，命题3.1 的逆命题一般并不成立。事实上，存在一些不变态并非本征态。考虑交换C*-代数 $C([0,1])$，由积分给出的态

$$\omega(f) := \int_0^1 ds\, f(s)\,, \qquad f \in C([0,1])\,,$$

以及元素 $\xi(s) := s$ 对所有 $s \in [0,1]$。由于 $\omega(\xi^n) = (n+1)^{-1}$ 对每个$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，可得 $\omega(\xi) = \frac{1}{2}$和 $\omega(\xi^2) \neq \frac{1}{2}\omega(\xi)$。因此， ω 不是 ξ 的本征态（对应于$\lambda = \frac{1}{2}$）。然而，鉴于$C([0,1])$的交换性， ω 在由 ξ 诱导的动力学下显然是不变的。◀

为了得到命题3.1 的逆命题，我们需要对态 ω施加更多条件。我们回顾，态 ω 是纯态 当且仅当其关联的 GNS表示 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \psi_\omega)$ 是不可约的 [BR1，定理 2.3。19]。回顾在交换情形下，纯态与乘性泛函重合 [BR1，推论 2.3。21], 因此它们自动是本征态。

命题 3.3。 设 $H = H^*$ 是 C^*-代数 $\mathfrak{A}$中的一个自伴元， $t \mapsto \alpha_t^H$由 H 根据 (3.1) 生成的动力学，且 $\omega \in \mathbb{E}_\mathfrak{A}$ 是一个纯态。若 ω 在动力学 α_t^H下保持不变，则它是 H的本征态。

证明。 令 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \psi_\omega)$ 是与 ω相关联的GNS表示。由GNS表示 [BR1，推论 2.3.17] 可知，存在唯一的强连续一参数酉算子群 $U_\omega(t)$ 作用于 $\mathcal{H}_\omega$ 上，满足: (i) $U_\omega(t)\pi_\omega(A)\psi_\omega = \pi_\omega(\alpha_t^H(A))\psi_\omega$，以及 (ii) 对每个 $A \in \mathfrak{A}$ 和 $t \in \mathbb{R}$, $U_\omega(t)\psi_\omega = \psi_\omega$。根据Stone 定理，存在 $\mathcal{H}_\omega$上的自伴算子 K_ω，使得对每个 $t \in \mathbb{R}$， $U_\omega(t) = e^{itK_\omega}$，并且鉴于性质(ii)，$K_\omega\psi_\omega = 0$。另一方面，由于 π_ω 是一个表示且 $H \in \mathfrak{A}$，可知

$$\pi_\omega(\alpha_t^H(A)) := e^{it\pi_\omega(H)}\, \pi_\omega(A)\, e^{-it\pi_\omega(H)} .$$

因此， K_ω 和 $\pi_\omega(H)$ 在 $\mathcal{H}_\omega$ 上产生相同的动力学，进而得到相同的对易子。换句话说，有如下关系。

$$[\pi_\omega(H) - K_\omega, \pi_\omega(A)] = 0 , \qquad \forall A \in \mathfrak{A} .$$

通过考察表示的不可约性可得 $\pi_\omega(H) - K_\omega = \lambda \mathbf{1}$ 对于某个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 根据 Schur 引理。这表明 $\pi_\omega(H)\psi_\omega = (K_\omega + \lambda\mathbf{1})\psi_\omega = \lambda\psi_\omega$ 根据推论 2.16，从而完成证明。 □

3.2. 基态条件。本节将介绍基态的概念，并研究它与动力学的关系。

定义3.4（基态）。设 $H = H^*$ 是 C^*-代数中的一个自伴元，$\omega \in \mathbb{E}_\mathfrak{A}$ 是一个状态，$(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \psi_\omega)$ 是相关的 GNS表示。那么， ω 是 H 的基态，当且仅当

$$\omega(H) = \lambda_* := \min \operatorname{Spec}(\pi_\omega(H)) .$$

下一个结果表明，基态自动是一个本征态。

命题 3.5. 设 $H = H^*$ 是 C^*-代数 $\mathfrak{A}$ 的一个自伴元，且 $\omega \in \mathbb{E}_\mathfrak{A}$是 H 的一个基态。那么， ω 是 H 的一个与特征值 λ_* 相关的本征态。

证明。 根据定理 2.15，只需证明

$$\pi_\omega(H)\psi_\omega = \lambda_*\psi_\omega \tag{3.2}$$

其中 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \psi_\omega)$ 是与 ω相关联的GNS表示。假设$\mathrm{Spec}(\pi_\omega(H)) \setminus \{\lambda_*\} \neq \emptyset$，否则它是平凡的。令 E^H 为与 $\pi_\omega(H)$相关联的PVM，并且

$$\pi_\omega(H) \;=\; \int_{\mathrm{Spec}(\pi_\omega(H))} \mathrm{d}E^H(\lambda)\, \lambda$$

其谱分解。于是

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \omega(H) \;-\; \lambda_* \\ &=\; \langle \psi_\omega, (\pi_\omega(H) - \lambda_* \mathbb{1}) \psi_\omega \rangle_{\mathcal{H}_\omega} \\ &=\; \int_{\mathrm{Spec}(\pi_\omega(H))} \langle \psi_\omega,\, \mathrm{d}E^H(\lambda) \psi_\omega \rangle_{\mathcal{H}_\omega}\; (\lambda - \lambda_*) \\ &=\; \int_{\mathrm{Spec}(\pi_\omega(H)) \setminus \{\lambda_*\}} \langle \psi_\omega,\, \mathrm{d}E^H(\lambda) \psi_\omega \rangle_{\mathcal{H}_\omega}\; (\lambda - \lambda_*)\,. \end{aligned}$$

由于差值 $\lambda - \lambda_*$ 在集合 $\mathrm{Spec}(\pi_\omega(H)) \setminus \{\lambda_*\}$ 上严格为正，因此

$$\langle \psi_\omega, E^H(\mathrm{Spec}(\pi_\omega(H)) \setminus \{\lambda_*\}) \psi_\omega \rangle_{\mathcal{H}_\omega} \;=\; 0$$

进而

$$\langle \psi_\omega, E^H(\{\lambda_*\}) \psi_\omega \rangle_{\mathcal{H}_\omega} \;=\; \langle \psi_\omega, E^H(\mathrm{Spec}(\pi_\omega(H))) \psi_\omega \rangle_{\mathcal{H}_\omega} \;=\; \langle \psi_\omega, \psi_\omega \rangle_{\mathcal{H}_\omega} \;=\; 1\,.$$

由于 $E^H(\{\lambda_*\})$ 是正交投影，可得 $\|E^H(\{\lambda_*\})\psi_\omega\|_{H_\omega} = 1$。于是由勾股定理可知

$$E^H(\{\lambda_*\}) \psi_\omega \;=\; \psi_\omega\,.$$

后一个等式以及 H 的谱分解蕴含关系式 (3.2)。 □

注记 3.6（绝对基态）。如果 H 满足以下条件，则称状态 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 为 H 的绝对基态。

$$\omega(H) \;=\; \lambda_0 \;:=\; \min\, \mathrm{Spec}(H)\,.$$

由于 $\mathrm{Spec}(\pi_\omega(H)) \subseteq \mathrm{Spec}(H)$ 可得 $\lambda_0 \leqslant \mathrm{minSpec}(\pi_\omega(H))$。然而，命题3.5 证明中的相同论证表明 λ_0 是 $\pi_\omega(H)$与循环向量 ψ_ω相关的特征值。因此，可得 $\lambda_0 = \mathrm{minSpec}(\pi_\omega(H))$，这意味着绝对基态是根据定义 3.4所定义的基态。 ◀

基态的概念可以用某种动力学条件来表述，见 [BR2，定义 5.3。18]。下面对基态的刻画改编自 [BR2，命题 5.3。19]。

命题 3.7. 设 $H = H^*$ 为 C^*-代数 $\mathfrak{A}$ 的自伴元。若 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 是 H 的基态，则

$$-\,\mathrm{i}\;\omega\big(A^* \delta_H(A)\big) \;\geqslant\; 0\,, \qquad \forall\, A \in \mathfrak{A}\,. \tag{3.3}$$

另一方面，如果 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$ 是满足条件(3.3)的纯态则 ω 是 H的基态。

证明。设 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \psi_\omega)$ 为与态 ω相关联的GNS表示。对于第一个蕴含，我们有

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\ \omega\big(A^*\delta_H(A)\big) &= \omega\big(A^*HA - A^*AH\big) = \omega\big(A^*HA\big) - \omega\big((A^*A)H\big) \\ &= \omega\big(A^*HA\big) - \lambda_*\,\omega\big(A^*A\big) = \omega\big(A^*(H-\lambda_*\mathbb{1})A\big) \\ &= \langle \psi_\omega\,,\, \pi_\omega(A)^*(\pi_\omega(H)-\lambda_*\mathbb{1})\pi_\omega(A)\psi_\omega\rangle \\ &= \langle \psi_A\,,\, (\pi_\omega(H)-\lambda_*\mathbb{1})\psi_A\rangle \geqslant 0\,, \end{aligned}$$

其中，在第二行中我们使用了命题 3.5，它保证 ω 是 H 的本征态，其特征值为 λ_*。在最后一行中，我们引入了 $\psi_A := \pi_\omega(A)\psi_\omega$，而最后一个不等式是由以下事实得出的：根据假设，$\lambda_*$ 是 $\pi_\omega(H)$ 的谱的最小值。对于第二个蕴含，我们先观察到 [BR2，引理 5.3。16] 推出 $\omega \circ \delta_H = 0$，即 ω 在由 H 诱导的动力学下保持不变。假设 ω 是纯态，则可以使用命题 3.3，该命题表明 ω 是 H 的本征态，其特征值为 $\lambda_* := \omega(H)$。根据这一结果，不等式 (3.3) 可写为 $\lambda_*\omega(A^*A) \leqslant \omega(A^*HA)$，对任意 $A \in \mathfrak{A}$ 均成立。由此可得

$$\lambda_* \leqslant \inf_{\substack{A\in\mathfrak{A}\\ \omega(A^*A)>0}} \frac{\omega(A^*HA)}{\omega(A^*A)} = \inf_{\substack{A\in\mathfrak{A}\\ \omega(A^*A)>0}} \frac{\langle \psi_A, \pi_\omega(H)\psi_A\rangle_{\mathcal{H}_\omega}}{\|\psi_A\|^2_{\mathcal{H}_\omega}}\,.$$

鉴于向量 ψ_ω 的循环性，最终可得

$$\lambda_* \leqslant \inf_{\|\phi\|_{\mathcal{H}_\omega}=1} \langle \phi, \pi_\omega(H)\phi\rangle_{\mathcal{H}_\omega} = \inf \mathrm{Spec}\big(\pi_\omega(H)\big)$$

其中最后一个不等式由 [Tesc，定理 2。19]。由于 λ_* 属于谱的 $\pi_\omega(H)$ 由此得出 $\lambda_* = \mathrm{minSpec}\big(\pi_\omega(H)\big)$. □

3.3. 有能隙的基态。在许多应用中，了解系统的基态何时与谱的其余部分之间存在能隙保护是很重要的。下面给出这一概念的精确定义。

定义 3.8 (能隙条件)。令 $H = H^*$ 是 C*代数$\mathfrak{A}$，并令 $\omega \in \mathbb{E}_\mathfrak{A}$ 为 H 的基态（根据定义 3.4）。然后，我们称该基态为 具有能隙，如果

$$\mathrm{Spec}\big(\pi_\omega(H)\big) \cap (\lambda_*, \lambda_* + \Delta) = \emptyset\,. \tag{3.4}$$

对于某个 $\Delta > 0$。此外，如果

$$\mathrm{Ker}(\pi_\omega(H) - \lambda_*\mathbb{1}) = \{\psi_\omega\}$$

我们将称这个有能隙的基态是非简并的。

我们用 $\mathcal{K}_\omega := \mathrm{Ker}(\pi_\omega(H) - \lambda_*\mathbb{1})^\perp$ 在 $\mathcal{H}_\omega$中与基态相关的特征子空间的正交补 λ_*。注意到$\mathrm{Spec}\big(\pi_\omega(H)\big) \setminus \{\lambda_*\}$ 可以借助 [Tesc，定理 2。19] 应用于

子空间 $\mathcal{K}_\omega$，可以将能隙条件改写为

$$\inf_{\substack{\phi\in\mathcal{K}_\omega\\ \|\phi\|_{\mathcal{H}_\omega}=1}} \langle\phi,\pi_\omega(H)\phi\rangle_{\mathcal{H}_\omega} \geqslant \lambda_* + \Delta\,. \tag{3.5}$$

下一个结果表明，能隙条件也可以用一种动力学性质来刻画[FNW，第 6]节。

命题 3.9. 设 $H = H^*$ 是 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 中的一个自伴元，且 $\omega \in \mathbb{E}_{\mathfrak{A}}$是 H的一个基态。那么， ω 是非简并的有能隙基态，当且仅当存在一个 $\Delta > 0$ 使得

$$-\,\mathrm{i}\,\omega\big(A^*\delta_H(A)\big) \geqslant \Delta\left(\omega\big(A^*A\big) - |\omega(A)|^2\right)\,, \qquad \forall\, A\in\mathfrak{A}\,. \tag{3.6}$$

证明。先考虑蕴含关系 $(\Rightarrow)$。由于假设基态是非简并的，因此有 $\mathcal{K}_\omega \subset \mathcal{H}_\omega$ 是由 ψ_ω生成的一维子空间的正交补。令 $\psi_A := \pi_\omega(A)\psi_\omega$ 且 $\psi_A^\perp := \psi_A - \langle\psi_\omega, \psi_A\rangle_{\mathcal{H}_\omega}\psi_\omega$ 是其在 $\mathcal{K}_\omega$上的正交投影。根据（3.5），可得

$$\big\langle\psi_A^\perp, \big(\pi_\omega(H) - (\lambda_* + \Delta)\mathbf{1}\big)\psi_A^\perp\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} \geqslant 0 \tag{3.7}$$

对于每个 $A \in \mathfrak{A}$。然而，直接计算可知

$$\big\langle\psi_A^\perp, \psi_A^\perp\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} = \omega(A^*A) - |\omega(A)|^2 \tag{3.8}$$

and

$$\begin{aligned}\big\langle\psi_A^\perp, \big(\pi_\omega(H) - \lambda_*\mathbf{1}\big)\psi_A^\perp\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} &= \big\langle\psi_A, \big(\pi_\omega(H) - \lambda_*\mathbf{1}\big)\psi_A\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega}\\ &= \omega(A^*(HA - AH))\end{aligned} \tag{3.9}$$

其中，在最后一个等式中，我们利用了 $\lambda_*\omega(A^*A) = \omega(A^*AH)$ 鉴于命题3.5。将不等式（3.7）与（3.8）和（3.9）结合起来，最终可得（3.6）。对于推论 $(\Leftarrow)$ 我们注意到，鉴于（3.8）和（3.9），条件（3.6）等价于条件（3.7）。现在，鉴于 ψ_ω的循环性，对任意 $\phi \in \mathcal{K}_\omega$，存在一个序列 $\{A_n\}_{\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$ 使得 $\psi_{A_n} \to \phi$。这立即意味着$\psi_{A_n}^\perp \to \phi$。因此，有

$$\big\langle\phi, \big(\pi_\omega(H) - (\lambda_* + \Delta)\mathbf{1}\big)\phi\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} = \lim_{n\to\infty}\big\langle\psi_{A_n}^\perp, \big(\pi_\omega(H) - (\lambda_* + \Delta)\mathbf{1}\big)\psi_{A_n}^\perp\big\rangle_{\mathcal{H}_\omega} \geqslant 0$$

鉴于（3.7）。对于每个 $\phi \in \mathcal{K}_\omega$，左侧量的正性推出（3.5），而这等价于能隙条件。□

注记 3.10。命题3.9 中基态非简并的条件对于蕴含关系 $(\Rightarrow)$是必要的。事实上，如果 $\dim\mathrm{Ker}(\pi_\omega(H) - \lambda_*\mathbf{1}) > 1$ 存在一个非零的 $\psi' \in \mathrm{Ker}(\pi_\omega(H) - \lambda_*\mathbf{1})$ 正交于 ψ_ω。为简单起见，我们假设存在一个 $A \in \mathfrak{A}$ 使得 $\psi' := \psi_A$。在这种情况下，(3.9) 中的相同计算给出 $\omega\big(A^*\delta_H(A)\big) = 0$ 并且 ψ_A 与 ψ_ω 之间的正交性读作 $\omega(A) = 0$。总之，我们得到

$$|\omega(A)|^2 - \mathrm{i}\Delta^{-1}\omega\big(A^*\delta_H(A)\big) = 0 < \|\psi_A\|_{\mathcal{H}_\omega}^2 = \omega(A^*A)$$

这与 (3.6) 矛盾。一般情形只需通过类似于命题3.9证明第二部分中所用的稠密性论证即可得出。◀

4. 费米面与本征态

本节中，我们介绍抽象广义（或非交换）费米面的概念 C^*-代数 $\mathfrak{A}$。我们证明，在 $\mathfrak{A}$满足适当条件时，可以构造一个与费米面相关的本征态。物理文献中关于费米面概念的经典参考文献包括[AM、Call、Kitt]。从数学角度来看，我们将参考综述 [Kuch1]。

4.1. 费米面的标准概念。首先，在一个相当标准的框架下介绍费米面的概念。设 X 为紧度量空间，并考虑C^*-代数

$$\mathfrak{A} \;:=\; C(X) \otimes \mathfrak{K} \;\simeq\; C(X, \mathfrak{K}) \,. \tag{4.1}$$

上述同构[Murp，定理 6.4。17] 使我们可以将 $\mathfrak{A}$ 视为 C^*上取值于紧算子的连续函数构成的 X -代数 $\mathfrak{K}$ （作用于某个可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上）。由于我们需要考察 $\mathfrak{A}$ 中元素的谱以及 $\mathfrak{A}$的态，因此我们将 $\mathfrak{A}$ 视为其标准单位化 $\mathfrak{A}^+$ [BR1，命题 2.1。5] 中的子代数，该单位化由形如 $X \ni x \mapsto A(x) + \lambda \mathbb{1}$ 且$A(x) \in \mathfrak{K}$ 、 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的连续函数构成。若将 $\mathfrak{K}$ 替换为矩阵代数$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$，这些技术细节便无关紧要。对于每个 $A \in \mathfrak{A}$ ，以下谱等式成立

$$\mathrm{Spec}(A) \;=\; \bigcup_{x \in X} \mathrm{Spec}\big(A(x)\big) \,. \tag{4.2}$$

公式(4.2)可以由关于算子的直积分谱的一个非常一般的断言[RS2，定理 XIII.85]推导出来。不过，也可以直接证明。首先，由于对于每个固定的 $x \in X$, $A \mapsto A(x)$ 都是一个 $*$-同态，因此有$\mathrm{Spec}(A(x)) \subset \mathrm{Spec}(A)$ ，进而$\bigcup_{x \in X} \mathrm{Spec}(A(x)) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$。反向包含关系由 [Kuch2，定理 1.4.6] 推出，该定理断言：如果对于所有$x \in X$都有 $\lambda \notin \mathrm{Spec}(A(x))$ ，也就是说，如果对于所有 $x \in X$, $A(x) - \lambda \mathbb{1}$ 都是可逆的，那么 $A - \lambda \mathbb{1}$ 是可逆的，进而 $\lambda \notin \mathrm{Spec}(A)$。因此，得到$\bigcup_{x \in X} \mathrm{Spec}(A(x)) \supseteq \mathrm{Spec}(A)$。根据等式 (4.2)，我们可以在谱点$\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$处引入 A 的费米面（或簇），将其定义为由以下条件确定的 X 子集

$$\mathscr{F}_\lambda^A \;:=\; \{x \in X \,|\, \lambda \in \mathrm{Spec}(A(x))\} \;\subseteq\; X \,. \tag{4.3}$$

费米面的概念最初源于对金属中电传导的研究，是固体物理学中的一个核心概念[AM，Kitt]。事实上，描述电子在 d-维晶体中动力学的哈密顿算子，是带有 $\mathbb{Z}^d$-周期系数的线性椭圆型偏微分算子。Bloch-Floquet变换将这类算子（的预解式）映射为代数 $\mathfrak{A} \;=\; C(\mathbb{T}^d, \mathfrak{K})$

[Kuch1, Kuch2]。该 d维环面 $\mathbb{T}^d$，在此语境中作为对称群 $\mathbb{Z}^d$的庞特里亚金对偶，称为布里渊区。因此，在凝聚态物理学中，费米面是给定周期哈密顿量的布里渊区中包含的等能级集。这类玩具模型在第4.3节中进行了描述。

4.2.费米面对应的本征态。我们的下一项任务是说明，在某些情形下，可以将一个本征态与由自伴算子定义的费米面联系起来。

如前一节一样，我们聚焦于 C*-代数 $\mathfrak{A} = C(X, \mathfrak{K})$，其具有 X 一个紧度量空间。令 $\mathscr{B}_X$ 为Borel σ-代数 X，并假设 X 装备有概率Borel测度 μ。令 $H = H^* \in \mathfrak{A}$ 中的自伴元，$\lambda \in \mathrm{Spec}(H)$为一个谱点，并令 $\mathscr{F}_\lambda^H$为根据（4.3）所定义的相关费米面。由于 $H(x)$ 对于每个 $x \in X$都是紧算子，因此$\mathrm{Spec}(H(x))$ 由递增的实特征值序列构成。

$$\varepsilon_{\min} \leqslant \varepsilon_0(x) \leqslant \varepsilon_1(x) \leqslant \ldots \leqslant \varepsilon_n(x) \leqslant \ldots \leqslant \varepsilon_{\max},$$

根据其重数重复出现的，以及 $\varepsilon_{\min}$ 和 $\varepsilon_{\max}$ 分别是最小值和最大值 $\mathrm{Spec}(H)$。我们将每一个 $\varepsilon_n : X \to \mathbb{R}$ 称为 n-第能量函数。标准微扰理论表明能量函数 ε_n 是连续的 [Kato, Kuch2]。因此 $\varepsilon_n^{-1}(\{\lambda\})$ 是闭的（因此Borel）子集 X对于每一个 $\lambda \in \mathbb{R}$，并且显然$\varepsilon_n^{-1}(\{\lambda\}) = \emptyset$ 每当 $\lambda \notin \mathrm{Spec}(H)$。鉴于等式（4.2）和定义（4.3）可得

$$\mathscr{F}_\lambda^H = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n^{-1}(\{\lambda\}),$$

因此可以得出结论：每个费米面都是博雷尔σ-代数 $\mathscr{B}_X$的一个元素。

假设 4.1（有限能带贡献）。仅存在有限个 M 能量函数 $\{\varepsilon_{n_1}, \ldots, \varepsilon_{n_M}\}$使得 $\varepsilon_{n_j}^{-1}(\{\lambda\}) \neq \emptyset$。

上述假设的结果是，$\mathscr{F}_\lambda^H$是 X的一个闭子集，因此也是紧子集。

现在考虑由下式定义的函数 $f_{H,\,\lambda} : X \to \mathbb{R}$

$$f_{H,\lambda}(x) := \prod_{j=1}^{M} \left(\varepsilon_{n_j}(x) - \lambda\right).$$

这显然是一个连续函数（连续函数的乘积），因此可测，并且 $f_{H}^{-1}{}_{,\lambda}(\{0\}) = \mathscr{F}_\lambda^H$。定理 A.2 保证存在一个由 $\{\mu_t^H\}_{t\in\mathbb{R}}$ 对 μ 进行的、从属于 $f_{H,\lambda} : X \to \mathbb{R}$ 的分解，使得 μ_t^H 支撑在 $f_{H}^{-1}{}_{,\lambda}(\{t - \lambda\})$

（变量的平移仅为记号上的方便）。特别地， μ_λ^H结果是一个支撑在 $\mathscr{F}_\lambda^H$上的概率测度。

定义 4.2（费米测度）。上述定义在 X 上的概率测度 μ_λ^H 称为与费米面 $\mathscr{F}_\lambda^H$ 相关联的费米测度。

为了进一步深入，我们需要假设一个从属于费米面的能隙条件。

假设 4.3（局部能隙条件）。存在一个正的常数 $g > 0$ 使得

$$\inf_{x \in \mathscr{F}_\lambda^H} \left\{ \operatorname{dist}\left(\{\lambda\}, \operatorname{Spec}(H(x)) \setminus \{\lambda\}\right) \right\} = g > 0 .$$

等价地，在费米面上的每一点处，特征值 λ 都与 $H(x)$的其余谱被至少为 $2g$ 的有限间隔分开。

设 $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为一个连续函数使得

$$Q(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \in \left[\lambda - \frac{g}{3}, \lambda + \frac{g}{3}\right] , \\ 0 & \text{if } t \in \left(-\infty, \lambda - \frac{2}{3}g\right] \cup \left[\lambda + \frac{2}{3}g, +\infty\right) . \end{cases}$$

通过函数演算可得 $Q(H) \in \mathfrak{A}$。此外，由于在 x处的赋值是 C^*-代数的同态，且同态与函数演算可交换，因此可得 $Q(H)(x) = Q(H(x))$。考虑到假设4.3 可推知

$$Q(H)(x) = P_\lambda^H(x) , \qquad x \in \mathscr{F}_\lambda^H ,$$

其中， $P_\lambda^H(x)$ 表示 $H(x)$ 对应于特征值 λ的谱投影。特别地，鉴于 $H(x)$ 的紧性，当 $\lambda \neq 0$时，投影 $P_\lambda^H(x)$ 是有限维的，因而属于迹类。

我们来介绍密度矩阵。

$$\rho_\lambda^H(x) := \begin{cases} \dfrac{P_\lambda^H(x)}{\operatorname{Tr}(P_\lambda^H(x))} & \text{if } x \in \mathscr{F}_\lambda^H , \\ 0 & \text{otherwise} . \end{cases} \tag{4.4}$$

引理 4.4。 设假设*4.1* 和 *4.3* 成立。那么，对于每个 $A \in \mathfrak{A}$ 映射

$$X \ni x \longmapsto \operatorname{Tr}\left(\rho_\lambda^H(x) A(x)\right) \in \mathbb{C} \tag{4.5}$$

是一个可测函数。

证明。 由于根据假设 4.1 费米面 $\mathscr{F}_\lambda^H \subset X$ 是紧的，存在一个限制映射 $\iota : C(X, \mathfrak{K}) \to C(\mathscr{F}_\lambda^H, \mathfrak{K})$ 它是一个 C^*-代数同态。换言之， $\iota(Q) = Q|_{\mathscr{F}_\lambda^H}$是一个连续映射，并且 $\iota(Q(H))(x) = P_\lambda^H(x)$ 是迹类。

因此，该映射

$$\mathscr{F}_\lambda^H \ni x \longmapsto \mathrm{Tr}\left(\iota(Q(H)A)(x)\right) = \mathrm{Tr}\left(P_\lambda^H(x)\iota(A)(x)\right) \in \mathbb{C}$$

是连续的，因而在 $\mathscr{F}_\lambda^H$ 上可测。同样对于映射

$$\mathscr{F}_\lambda^H \ni x \longmapsto \mathrm{Tr}\left(\iota(Q(H))(x)\right) = \mathrm{Tr}\left(P_\lambda^H(x)\right) \neq 0\,.$$

因此

$$\mathscr{F}_\lambda^H \ni x \longmapsto \frac{\mathrm{Tr}\left(P_\lambda^H(x)\iota(A)(x)\right)}{\mathrm{Tr}\left(P_\lambda^H(x)\right)} \in \mathbb{C} \tag{4.6}$$

是一个可测函数。注意到映射（4.5）是将映射（4.6）乘以费米面 $\chi_{\mathscr{F}_\lambda^H}$ 的示性函数 $\mathscr{F}_\lambda^H$ 得到的，而后者是定义在 X 上的可测函数。□

现在我们可以证明，费米面与特定本征态的存在性有关。

定理 4.5。假设 X是一个赋有博雷尔概率测度 μ的紧度量空间。令 $H = H^*$ 为 C*-代数 $\mathfrak{A} := C(X, \mathfrak{K})$中的自伴元，$\lambda \in \mathrm{Spec}(H) \setminus \{0\}$ 为一个谱点，$\mathscr{F}_\lambda^H$为由(4.3)定义的相应费米面，且 μ_λ^H为定义 4.2 中所述的费米测度*4.2*。若满足假设 *4.1* 和 *4.3*，则泛函

$$\omega_\lambda(A) := \int_X \mathrm{d}\mu_\lambda^H(x)\,\mathrm{Tr}\left(\rho_\lambda^H(x)A(x)\right)\,, \qquad A \in \mathfrak{A}\,, \tag{4.7}$$

其中 ρ_λ^H定义为 (4.4)，给出了 H 的本征态，特征值为 λ。

证明。首先，映射 $\omega_\lambda : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ 在（4.2）中根据引理4.4以及费米测度恰好支撑于 $\mathscr{F}_\lambda^H$这一事实是良定义的。由于

$$\omega_\lambda(\mathbb{1}) = \int_X \mathrm{d}\mu_\lambda^H(x) = \mu_\lambda^H(X) = 1.$$

在最后一个方程中，我们默认将 ω_λ 与其在 $\mathfrak{A}^+$[BR1，推论 2.3 中的典范延拓等同起来。13]。它也是正的，因为对于每个 $\mathrm{Tr}(\rho_\lambda^H(x)A(x)) \geqslant 0$，只要 $x \in X$ 是A正元素。综上可知，ω_λ 是 $\mathfrak{A}^+$上的一个态。接下来只需证明 ω_λ 是 H的一个本征态。注意，当 $x \in \mathscr{F}_\lambda^H$时，有 $P_\lambda^H(x)$ 是 $H(x)$ 在特征值 λ 处的谱投影，因此

$$\mathrm{Tr}\left(\rho_\lambda^H(x)A(x)H(x)\right) = \mathrm{Tr}\left(H(x)\rho_\lambda^H(x)A(x)\right) = \lambda\mathrm{Tr}\left(\rho_\lambda^H(x)A(x)\right)\,.$$

另一方面，费米测度的支集恰好为 $\mathscr{F}_\lambda^H$。因此，得出的是

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(AH) &= \int_X \mathrm{d}\mu_\lambda^H\,\mathrm{Tr}\left(\rho_\lambda^H(x)A(x)H(x)\right) = \int_{\mathscr{F}_\lambda^H} \mathrm{d}\mu_\lambda^H\,\mathrm{Tr}\left(\rho_\lambda^H(x)A(x)H(x)\right)\\ &= \lambda\int_{\mathscr{F}_\lambda^H} \mathrm{d}\mu_\lambda^H\,\mathrm{Tr}\left(\rho_\lambda^H(x)A(x)\right) = \lambda\int_X \mathrm{d}\mu_\lambda^H\,\mathrm{Tr}\left(\rho_\lambda^H(x)A(x)\right) = \lambda\omega_\lambda(A)\end{aligned}$$

对每个 $A \in \mathbb{R}$。证明到此结束。 □

定义4.6 (费米本征态)。 由 ω_λ （4.2）定义的将被称为费米本征态 在 H 谱值 $\lambda \in \mathrm{Spec}(H) \setminus \{0\}$。

注释 4.7。 定理 4.5 的证明的关键点是证明 ma p

$$\mathscr{F}_\lambda^H \ni x \longmapsto \mathrm{Tr}\left(\rho_\lambda^H(x)A(x)\right) \in \mathbb{C}$$

是可测的。假设4.1 和4.3 足以确保这一事实，但原则上并非必要。◀

4.3.一个物理应用：石墨烯。令 $\mathfrak{s}_1$ 和 $\mathfrak{s}_2$ 为定义在 $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 上的平移算子，它们由 $(\mathfrak{s}_j\psi)(n) := \psi(n - e_j)$ 给出，其中 $j = 1, 2$、 $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$ 以及 $e_1 := (1, 0)$，且 $e_2 := (0, 1)$ 为 $\mathbb{Z}^2$的标准基。我们将由平移算子生成的单位C*-代数记为 $C^*(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$。 $C^*(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ 的元素通常称为周期算子。为了给出石墨烯的数学模型，我们需要扩展周期算子的代数，以允许同位旋自由度。正如 [DL] 中所详细解释的，这是通过考虑代数 $\mathfrak{A}$:=$C^*(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2) \otimes \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$来实现的。受交错势 $\gamma > 0$ 扰动的各向同性最近邻模型由如下自伴算子描述

$$H := \begin{pmatrix} +\gamma\mathbf{1} & \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2 \\ \mathfrak{s}_1^* + \mathfrak{s}_2^* & -\gamma\mathbf{1} \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

哈密顿量（4.8）也可理解为 Su-Schrieffer-Heeger（SSH）模型的二维版本 [SSH]。

考虑（逆）傅里叶变换 $\mathscr{F} : \ell^2(\mathbb{Z}^2) \to L^2(\mathbb{T}^2)$ 其中 $\mathbb{T}^2 \simeq [0, 2\pi)^2$ 是二维环面，以坐标 $k = (k_1, k_2)$参数化，并赋予归一化的 Haar测度 $d\mu(k) := (2\pi)^{-2}dk$。在此变换下，平移算子映射为相位的乘法 e^{-ik_1} 和 e^{-ik_2}，即$\mathscr{F}\mathfrak{s}_j\mathscr{F}^* = e^{-ik_j}$对于 $j = 1, 2$。因此得到同构 $\mathfrak{A} \simeq C(\mathbb{T}^2) \otimes \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ 而算子（4.8）映射为函数 $k \mapsto H(k)$ 其中

$$H(k) := \begin{pmatrix} +\gamma\mathbf{1} & e^{-ik_1} + e^{-ik_2} \\ e^{+ik_1} + e^{+ik_2} & -\gamma\mathbf{1} \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

由于我们处于第 4.2 节的精确情形，因此可以计算算子（4.9）的费米面及其相关测度。首先，容易验证 $H(k)$ 有两条能带 $\varepsilon_-(k) < \varepsilon_+(k)$ 如下

$$\varepsilon_\pm(k) := \pm\sqrt{\gamma^2 + 4\cos^2\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)} \tag{4.10}$$

以及相关的谱投影是

$$P_\pm(k) := \frac{1}{2}\mathbf{1}_2 + \frac{1}{2\varepsilon_\pm(k)}H(k). \tag{4.11}$$

能带 $\varepsilon_\pm$ 取极限值 $\pm\gamma$ 和 $\pm\sqrt{\gamma^2+4}$之间的所有值。因此 H 的谱由

$$\sigma(H) := \left[-\sqrt{\gamma^2+4}, -\gamma\right] \cup \left[\gamma, \sqrt{\gamma^2+4}\right]$$

并显示一个大小为 2γ 的中心间隙。

让我们为上能带 ε_+ 构造费米面。下能带 ε_- 的构造完全类似。对于每一个 $\lambda \in Y := [\gamma, \sqrt{\gamma^2+4}]$，费米面$\mathscr{F}_\lambda^H$是函数 $f_{H,\lambda}(k) := \varepsilon_+(k) - \lambda$ 的零集，即由方程的解所描述

$$\cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{\lambda^2-\gamma^2}}{2}.$$

令 $\theta \equiv \theta(\lambda)$ as

$$\theta := \arccos\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-\gamma^2}}{2}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

并考虑线性子集

$$L_\pm := \{k \in \mathbb{T}^2 \mid k_2 = k_1 \pm 2\theta\},$$
$$G_\pm := \{k \in \mathbb{T}^2 \mid k_2 = k_1 \pm 2(\pi-\theta)\}$$

依赖于 λ 至 θ。于是可得，

$$\mathscr{F}_\lambda^H = L_+ \cup L_- \cup G_+ \cup G_-.$$

两个极端情形分别由 $\lambda_{min} := \gamma$ 给出，它对应于$\theta = \frac{\pi}{2}$；以及由 $\lambda_{max} := \sqrt{\gamma^2+4}$ 给出，它提供了 $\theta = 0$。在第一种情形下，可以得到直线 $L_\pm$ 与直线 $G_\pm$ 重合，因此得到 $\mathscr{F}_{\lambda_{min}}^H = L_+^{min} \cup L_-^{min}$，其中

$$L_\pm^{min} := \{k \in \mathbb{T}^2 \mid k_2 = k_1 \pm \pi\}.$$

在第二种情况下，四条线合并为一条线

$$L^{max} := \{k \in \mathbb{T}^2 \mid k_2 = k_1\}$$

这与 $\mathscr{F}_{\lambda_{max}}^H$ 重合。

下一个任务是计算由上能带诱导的费米测度。为简单起见，我们通过假设排除极端情况 $\lambda \neq \lambda_{min}, \lambda_{max}$。首先，让我们计算由 E 诱导的期望算子 ε_+。注意到 $\varepsilon_+ = f \circ g$，其中$g(k_1,k_2) = \cancel{k_1-k_2}$和 $\cancel{f(y)} = \sqrt{\gamma^2+4\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)}$。因此，通过调用命题A.3，得到 $E = E^f E^g$。期望算子 E^g 和 E^f 分别在例A.6 和 A.5中计算。利用这些结果，得到

$$E_\psi(\lambda) = E^f_{E^g_\psi}(\lambda) = \frac{1}{4}\sum_{y\in P_\lambda} E^g_\psi(y) \tag{4.12}$$

其中 $\psi \in L^1(\mathbb{T}^2, \mu), \lambda \in Y$ 为给定的谱值，并且

$$P_\lambda \;:=\; f^{-1}(\{\lambda\}) \;=\; \big\{ \pm 2\theta, \pm 2(\pi - \theta) \big\} .$$

另一方面，根据例A.6中的计算，并经过一些处理，可得到

$$E^g_\psi(\pm 2\theta) \;=\; \int_0^1 d\tau\, \psi\big(s_{L_\pm}(\tau)\big)$$

其中 $[0,1] \ni \tau \mapsto s_{L_\pm}(\tau) \in \mathbb{T}^2$ 是 $L_\pm$ 的线性参数化 更准确地说，有

$$\begin{aligned} s_{L_+}(\tau) \;&:=\; \big(\tau(2\pi - 2\theta), \tau(2\pi - 2\theta) + 2\theta\big) , \\ s_{L_-}(\tau) \;&:=\; \big(\tau(2\pi - 2\theta) + 2\theta, \tau(2\pi - 2\theta)\big) . \end{aligned}$$

类似地，可以得出

$$E^g_\psi\big(\pm 2(\pi - \theta)\big) \;=\; \int_0^1 d\tau\, \psi\big(s_{G_\pm}(\tau)\big)$$

with

$$\begin{aligned} s_{G_+}(\tau) \;&:=\; \big(\tau 2\theta, \tau 2\theta + (2\pi - 2\theta)\big) , \\ s_{G_-}(\tau) \;&:=\; \big(\tau 2\theta + (2\pi - 2\theta), \tau 2\theta\big) . \end{aligned}$$

将所有要素结合起来，即可得到

$$E_\psi(\lambda) \;=\; \frac{1}{4} \sum_{\sharp = \pm} \int_0^1 d\tau\, \Big[\psi\big(s_{L_\sharp}(\tau)\big) + \psi\big(s_{G_\sharp}(\tau)\big) \Big] \tag{4.13}$$

以及由能带 ε_+ 诱导的 Haar测度的分解 μ^H_λ 具有如下形式

$$\mu^H_\lambda(k_1, k_2) \;=\; \frac{1}{4} \sum_{\sharp = \pm} \int_0^1 d\tau\, \Big[\delta_{s_{L_\sharp}(\tau)}(k_1, k_2) \;+\; \delta_{s_{G_\sharp}(\tau)}(k_1, k_2) \Big]$$

其中 δ_k 表示集中于点 $k \in \mathbb{T}^2$的 Dirac测度。显然， μ^H_λ 集中于费米面 $\mathscr{F}^H_\lambda$ 上。

利用这些要素，相关的费米本征态 ω_λ 为

$$\begin{aligned} \omega_\lambda(A) \;&:=\; \int_{\mathscr{F}^H_\lambda} d\mu^H_\lambda(k_1, k_2)\, \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^2}\big(P_+(k_1, k_2) A(k_1, k_2)\big) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\sharp = \pm} \int_0^1 d\tau\, \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^2}\big(P_+ A\big(s_{L_\sharp}(\tau)\big) + P_+ A\big(s_{G_\sharp}(\tau)\big)\big) \end{aligned}$$

对于任意 $A \in \mathfrak{A}$。

4.4. 费米面的广义概念。现在我们可以给出费米面的广义代数定义。

对于一个 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 我们用 $\hat{\mathfrak{A}}$ 表示 $\mathfrak{A}$的谱，即非零不可约 $*$-表示的酉等价类 $\mathfrak{A}$ [Murp，第 5 节。4]。

存在一种特殊的拓扑，称为壳核拓扑（或 Jacobson 拓扑），使 $\hat{\mathfrak{A}}$成为一个拓扑空间。令 $\mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$ 表示 $\mathfrak{A}$的本原理想集。那么， $\mathcal{I} \in \mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$当且仅当存在 $\mathfrak{A}$ 在希尔伯特空间$\mathcal{H}_\pi$ 上的一个非零不可约表示 π，使得 $\mathcal{I} = \mathrm{Ker}(\pi)$ [Murp，第 5.4 定理。2]。这里将采用后一种刻画作为本原理想的“便捷定义”。注意，本原理自动是闭且真包含的。由于任意两个酉等价表示的核相同，使用记号 $\mathrm{Ker}([\pi])$ 是合理的，其中 $[\pi]$ 是 π的等价类。此事实给出了一个典范满射 $\theta : \hat{\mathfrak{A}} \to \mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$，其定义为$\theta : [\pi] \mapsto \mathrm{Ker}([\pi])$。集合 $\mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$ 可以赋予唯一的拓扑，使其满足以下性质：对于每个子集 $\mathscr{R} \subseteq \mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$， $\mathscr{R}$ 的闭包由 $\mathfrak{A}$ 的本原理想组成，这些本原理想包含 $\mathscr{R}$ [中各理想的交集，Murp，第 5.4 定理。6],也就是说

$$\overline{\mathscr{R}} := \left\{ \mathfrak{P} \in \mathrm{Prim}(\mathfrak{A}) \;\middle|\; \bigcap_{\mathcal{I} \in \mathscr{R}} \mathcal{I} \subseteq \mathfrak{P} \right\} . \tag{4.14}$$

在 $\hat{\mathfrak{A}}$ 上的（诱导）包核拓扑是使典范满射 θ 连续的最弱拓扑。拓扑空间 $\hat{\mathfrak{A}}$ 可能相当怪异。然而，有 $\hat{\mathfrak{A}}$ 是一个 T_0 空间，当且仅当典范满射 θ 是一个同胚，亦即当且仅当 $\hat{\mathfrak{A}} \simeq \mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$ 作为拓扑空间[Murp，定理 5.4。9]。特别地，当 $\hat{\mathfrak{A}}$ 是一个豪斯多夫空间时，情况就是如此。还要提到，当 $\mathfrak{A}$ 是一个幺C*-代数时， $\hat{\mathfrak{A}}$ 结果是紧的（这由 [Murp，定理 5.4。8]）。

对于每个 $A \in \mathfrak{A}$ 和 $[\pi] \in \hat{\mathfrak{A}}$，记 $A([\pi])$为 A 在商$\mathfrak{A}_{[\pi]} := \mathfrak{A}/\mathrm{Ker}([\pi])$中的像。给定 π 的任意代表元（其类为 $[\pi]$），显然可验证， π给出了 C*-代数 $\mathfrak{A}_{[\pi]}$ 与 $\pi(\mathfrak{A})$ 之间的一个同构。因此，对于任意 $A \in \mathfrak{A}$，有

$$\mathrm{Spec}(A([\pi])) = \mathrm{Spec}(\pi(A)) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$$

与代表元的选择无关 π。以下结果推广了（4.2）。

引理4.8。对于每个 $A \in \mathfrak{A}$，均成立

$$\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{[\pi] \in \hat{\mathfrak{A}}} \mathrm{Spec}(A([\pi])) .$$

证明。令 $\mathbb{P}_{\mathfrak{A}}$ 为 $\mathfrak{A}$的纯态集合，并对于给定的 $\omega \in \mathbb{P}_{\mathfrak{A}}$ 考虑相应的不可约GNS表示 $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \psi_\omega)$。如同 [BR1中定理2.1的证明。10] 让我们考虑由 $(\mathcal{H}, \pi)$ 给出的直和表示

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{\omega \in \mathbb{P}_{\mathfrak{A}}} \mathcal{H}_\omega , \qquad \rho := \bigoplus_{\omega \in \mathbb{P}_{\mathfrak{A}}} \pi_\omega .$$

通过逐字重复 [BR1，定理 2.1。10], 并观察到该状态ω_A 在此证明中可选择为纯态，鉴于 [BR1，引理 2.1。23], 可得 ρ 是

一个 $*$-同构。由此可得

$$\mathrm{Spec}(A) \;=\; \mathrm{Spec}(\rho(A)) \;=\; \bigcup_{\omega\in\mathbb{P}_{\mathfrak{A}}} \mathrm{Spec}(\pi_\omega(A))\,.$$

由于表示 $(\mathcal{H}_\omega,\pi_\omega,\psi_\omega)$ 是不可约的，因此得到$\mathrm{Spec}(A)$ 包含在当 π 遍历所有不可约表示时$\mathrm{Spec}(\pi(A))$ 的并集中。由于谱仅依赖于表示的等价类，因此得到

$$\mathrm{Spec}(A) \;\subseteq\; \bigcup_{[\pi]\in\widehat{\mathfrak{A}}} \mathrm{Spec}(A([\pi]))\,.$$

另一个包含关系是平凡的，因为对于每一个（不一定不可约的）表示 π，都有 $\mathrm{Spec}(\pi(A)) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ 。□

上述证明可以使用 [RW，定理 A.38].

现在我们可以推广费米面的概念。

定义 4.9（广义费米面）。设 $A \in \mathfrak{A}$ 和 $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$。由 A 在谱点 λ 定义的费米面 $\mathscr{F}_\lambda^A$是 $\widehat{\mathfrak{A}}$ 的子集，定义为

$$\mathscr{F}_\lambda^A \;:=\; \Big\{ [\pi]\in\widehat{\mathfrak{A}} \;\Big|\; \lambda\in\mathrm{Spec}\big(A([\pi])\big) \Big\} \;\subseteq\; \widehat{\mathfrak{A}}\,. \tag{4.15}$$

例 4.10（与标准情形的关系）。为证明定义 4.9 的合理性，需要证明当 $\mathfrak{A}$ 是形如 (4.1) 的 C^*-代数时，(4.15) 等价于 (4.3)。让我们从更简单的交换 C^* 代数 $C(X)$ with X 一个紧 Hausdorff⌒空间的情形开始。已知 $C(X) = \{\epsilon_x \mid x \in X\}$ 其中 $\epsilon_x : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ 是在x 处的赋值，由 $\epsilon_x(f) := f(x)$ 对每个 $f \in C(X)$ [定义，RW, Example A.16]。因此映射⌒$x \mapsto \epsilon_x$ 提供了 X 和 $C(X)$ 之间的双射，这实际上是拓扑空间的同胚⌒ [RW, p. 213-214]。这允许我们写出 $C(X) \simeq X$ 而这是盖尔范德同构的一种体现[BR1, Theorem 2.1.11A]。更一般的情形，其中 $\mathfrak{A}$ 是形如 $C(X,\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}))$ 或 $C(X,\mathfrak{K})$ 的，在 [RW, Examples A.23 & A.24]中讨论。同样在这种情形下，$\mathfrak{A}$ 的不可约表示是类型 $\epsilon_x(A) = A(x)$ 的赋值，对每个 $x \in X$，直到酉等价。因此，there^是一个同胚 $X \simeq \widehat{\mathfrak{A}}$ 由 $x \mapsto [\epsilon_x]$提供。将所有这些信息放在一起，可以看出 (4.3) 确实可以改写为广义形式 (4.15)。◀

示例 4.11（紧算子）。考虑紧算子 $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$（对于某个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$）及其标准单位化 $\mathfrak{K}^+ = \mathbb{C}\mathbf{1} + \mathfrak{K}$。[RW 的论证，示例 A.15] 表明，恒等表示 id $: \mathfrak{K} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 是不可约的^，并且每个不可约表示都与 id 酉等价。因此 $\mathfrak{K} = \{[, \mathrm{id}]\}$ 和 $\mathrm{Prim}(\mathfrak{K}) = \{\mathfrak{I}_0\}$ 是（同胚的）单点集，其中 $\mathfrak{I}_0 := \{0\}$ 为平凡理想。为计算 $\mathrm{Prim}(\mathfrak{K}^+)$ ，注意到 $\mathfrak{K}$ 是 $\mathfrak{K}^+$中的一个理想。于是根据 [RW,

命题 A.26 (a)] 可得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Prim}(\mathfrak{K}^+) &= \{\mathfrak{P}\in\mathrm{Prim}(\mathfrak{K}^+)\mid \mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{P}\}\cup\{\mathfrak{P}\in\mathrm{Prim}(\mathfrak{K}^+)\mid \mathfrak{K}\not\subset\mathfrak{P}\}\\ &= \{\mathfrak{P}\in\mathrm{Prim}(\mathfrak{K}^+)\mid \mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{P}\}\cup\mathrm{Prim}(\mathfrak{K})\\ &= \{\mathfrak{K},\mathfrak{I}_0\}\,.\end{aligned}$$

具有核 $\mathfrak{K}$ 的一维表示 $\pi_0(K+\alpha\mathbf{1})=\alpha$ 对每个 $K\in\mathfrak{K}$ 以及 $\alpha\in\mathbb{C}$。利用（4.14）可得

$$\overline{\mathfrak{I}_0} = \{\mathfrak{P}\in\mathrm{Prim}(\mathfrak{K}^+)\mid \mathfrak{I}_0\subseteq\mathfrak{P}\} = \mathrm{Prim}(\mathfrak{K}^+)$$

这表明 $\mathfrak{I}_0$ 稠密于 $\mathrm{Prim}(\mathfrak{K}^+)$。因此 $\mathrm{Prim}(\mathfrak{K}^+)$ 不是豪斯多夫的。然-$\widehat{\ }$而，它是 T_0 并且这提供了同胚 $\mathrm{Prim}(\mathfrak{K}^+)\simeq\mathfrak{K}^+=\{[\mathrm{id}],\ [\pi_0]\}$。这是$\widehat{\ }$有趣地注意到 $\mathfrak{K}^+$ 提供了一个非豪斯多夫谱的简单例子。现在设 $A\in\mathfrak{K}^+$ 和 $\lambda\in\mathrm{Spec}(A)$。然后，通过应用定义（4.15）可以得到费米面 $\mathscr{F}_\lambda^A$由 A 在谱点 λ 给出为

$$\mathscr{F}_\lambda^A = \begin{cases}\{[\mathrm{id}]\} & \text{if } \pi_0(A)\neq\lambda\,,\\ \widehat{\mathfrak{K}^+} & \text{if } \pi_0(A)=\lambda\,.\end{cases}$$

稠密点 $[\mathrm{id}]$ 独立于 λ，这一事实源于它对应于保留谱的恒等表示。◀

例 4.12（Toeplitz C*-代数）。设 $\mathfrak{T}$ 为*Toeplitz* C*-代数，即由C*生成的 $\mathfrak{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ 子代数，其中生成元是例 2.12中描述的单边移位算子。存在一个著名的（非分裂）正合列，称为 Toeplitz 扩张，形式如下：

$$0\longrightarrow\mathfrak{K}\xrightarrow{\ \iota\ }\mathfrak{T}\xrightarrow{\ \varphi\ }C(\mathbb{S}^1)\longrightarrow 0 \tag{4.16}$$

其中 $\mathfrak{K}$ 是 $\ell^2(\mathbb{N})$上的紧算子代数，ι 是包含映射（事实上 $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{T}$），而 φ 称为符号映射 [Davi，定理 V.1.5] 和 [RW，命题 A.26]。因此可得 $\mathfrak{T}/\mathfrak{K}\simeq C(\mathbb{S}^1)$。此外，$\mathfrak{T}$ 在 $\ell^2(\mathbb{N})$ 上不可约作用（它是一个原始 C*-代数），这意味着 $\mathfrak{I}_0\in\mathrm{Prim}(\mathfrak{T})$。与上面的例子一样，平凡理想是稠密的，即$\overline{\mathfrak{I}_0}=\mathrm{Prim}(\mathfrak{T})$。由于 $\mathfrak{T}$ 包含 $\mathfrak{K}$ 作为其唯一的极小（非平凡）理想，因此 $\mathfrak{T}$ 的任何其他本原理想都必须包含 $\mathfrak{K}$。这意味着相应的不可约表示在 $\mathfrak{K}$上为零。因此，$\mathfrak{T}$ 的其他不可约表示可通过将 φ 与 $\mathbb{S}^1$各点处的赋值组合得到。更确切地说，对每个 $\theta\in\mathbb{S}^1$，$\pi_\theta:=\epsilon_\theta\circ\varphi:\mathfrak{T}\to\mathbb{C}$ 都是 $\mathfrak{T}$ 的不可约表示。因此可得

$$\mathrm{Prim}(\mathfrak{T}) = \{\mathfrak{I}_0\}\cup\{\mathfrak{I}_\theta\mid\theta\in\mathbb{S}^1\}$$

其中 $\mathfrak{I}_\theta=\mathfrak{K}+\mathfrak{L}_\theta$ 和 $\mathfrak{L}_\theta$ 满足 $\varphi(\mathfrak{L}_\theta)=\{f\in C(\mathbb{S}^1)\mid f(\theta)=0\}$。可以验证，$\mathrm{Prim}(\mathfrak{T})\simeq\{\mathfrak{I}_0\}\cup\mathbb{S}^1$ 具有 $\mathbb{S}^1$ 上的通常拓扑，但其性质是单点集 $\{\mathfrak{I}_0\}$ 稠密。因此，$\mathrm{Prim}(\mathfrak{T})$ 不是豪斯多夫的。不过，它是 T_0，这给出了同胚 $\hat{\mathfrak{T}}\simeq\mathrm{Prim}(\mathfrak{T})$。现在令 $A\in\mathfrak{T}$ 和 $\lambda\in\mathrm{Spec}(A)$。那么

由 A 在谱点 λ 处定义的费米面 $\mathscr{F}_\lambda^A$为

$$\mathscr{F}_\lambda^A \;=\; \{\mathfrak{I}_0\} \cup \left\{\theta \in \mathbb{S}^1 \;\middle|\; \varphi(A)(\theta) = \lambda\right\}$$

鉴于定义（4.15）。 ◀

定义中给出的费米面的概念推广4.15 为将定理中费米本征态的构造4.5 扩展到更一般的 C*-代数提供了可能性。这一问题仍超出本文的研究范围，并为未来的新研究提供了素材。然而，值得预先指出的是，至少存在一类 C*-代数，对于它们而言，定理4.5 的推广似乎可以直接实现，即使这并非完全简单。遵循 [RW，命题5。15] 我们引入以下定义：

定义4.13（连续迹 C*-代数）。称 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 为连续迹，当且仅当满足： (i) 其谱 $\hat{\mathfrak{A}}$ 是豪斯多夫空间；(ii) $\mathfrak{A}$ 在局部 Morita 等价于$C_0(\mathfrak{A})$。

让我们澄清上述定义中条件 (ii) 的含义。首先注意到开集 $\mathscr{U} \subset \mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$ 与理想是一一对应的

$$\mathfrak{A}_{\mathscr{U}} \;:=\; \bigcap\{\mathfrak{P} \in \mathrm{Prim}(\mathfrak{A}) \,|\, \mathfrak{P} \notin \mathscr{U}\}\,.$$

换言之，$\mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$ 上的拓扑总是决定 $\mathfrak{A}$的理想结构。存在自然的同胚 $\mathscr{U} \simeq \mathrm{Prim}(\mathfrak{A}_{\mathscr{U}})$ 以及$\mathrm{Prim}(\mathfrak{A}) \setminus \mathscr{U} \simeq \mathrm{Prim}(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_{\mathscr{U}})$[RW，命题 A.27]。当 $\mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$ 是一个（局部紧的）豪斯多夫空间时（且在此情况下$\mathrm{Prim}(\mathfrak{A}) \simeq \hat{\mathfrak{A}}$），可以在给定点 $\mathfrak{I} \in \mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$ 处进行局部化：考虑 $\mathfrak{I}$ 的一个紧邻域 $\mathscr{F}$，并考虑商 $\mathfrak{A}^{\mathscr{F}} := \mathfrak{A}/\mathfrak{A}_{\mathrm{Prim}(\mathfrak{A})\setminus\mathscr{F}}$。事实上，根据豪斯多夫条件，$\mathrm{Prim}(\mathfrak{A}) \setminus \mathscr{F}$ 在 $\mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$中是开集。定义 4.13 中的条件 (ii) 意味着，对于每个 $\mathfrak{I} \in \mathrm{Prim}(\mathfrak{A})$，都存在 $\mathfrak{I}$的一个紧邻域 $\mathscr{F}$，使得

$$\mathfrak{A}^{\mathscr{F}} \;\simeq\; C(\mathscr{F}) \otimes \mathfrak{K} \;\simeq\; C(\mathscr{F}, \mathfrak{K})\,.$$

我们需要作最后的观察。对于一个可分的 C*-代数，其谱是一个第二可数空间 [Dixm，命题 3.3。4]。那么，对于一个连续迹 C*-代数 $\mathfrak{A}$，其谱$\hat{\mathfrak{A}}$ 是豪斯多夫且第二可数的。如果 $\mathscr{F} \subset \hat{\mathfrak{A}}$ 是一个紧子集，那么 $\mathscr{F}$ 是紧的、豪斯多夫且第二可数的，因而是可度量化的（乌雷松度量化定理）。于是，可分的连续迹 C*-代数至少在局部具有第 C*节中所考虑的 4.1 和 4.2 节中 C*-代数的形式，而类型为（4.1）的 C*-代数 [RW，例5。18]。在这些条件下，定理 4.5 至少在局部适用，并且人们会期望通过某种技术性的粘合过程构造出一个整体版本。

附录 A. 测度的分解

在本附录中，我们简要回顾紧度量空间（或可度量空间）之间测度分解的理论。本节的结果改编自[Conw2，第七节。2]。

设 $(X,\mathscr{B}_X,\mu)$ 是一个博雷尔测度空间，X 是一个赋有其博雷尔 σ-代数 $\mathscr{B}_X$ 和正则正测度的紧度量空间。我们用 $\mathfrak{M}(X)$ 表示 X 上的正则博雷尔测度空间。当 $\mu(X)=1$时，我们称 $(X,\mathscr{B}_X,\mu)$ 为概率空间。设 $(Y,\mathscr{B}_Y)$ 是另一个赋有其博雷尔 σ-代数的紧度量空间，且 $f:X\to Y$ 是一个博雷尔函数。测度 μ 经 f 的推前测度是由 $\nu(\Sigma):=\mu(f^{-1}(\Sigma))$ 定义的测度 $\nu:\mathscr{B}_Y\to[0,+\infty]$，其中 $\Sigma\in\mathscr{B}_Y$ 为任意博雷尔集。下文中，我们将使用简写 $\nu=\mu\circ f^{-1}$。记 $\mathscr{L}^p(X,\mu)$ 为 p-可积函数空间，记 $L^p(X,\mu)$ 为这些函数的等价类所构成的相应勒贝格空间。对于每个 $\psi\in\mathscr{L}^1(X,\mu)$，映射

$$L^\infty(Y,\nu)\ \ni\ \phi\ \longmapsto\ \int_X d\mu(x)\,\psi(x)\,(\phi\circ f)(x)\ \in\ \mathbb{C}$$

在 $L^\infty(Y,\nu)$上定义一个有界线性泛函。令 $\chi_\Sigma\in L^\infty(Y,\nu)$ 为 Σ 的示性函数。则映射

$$\mathscr{B}_Y\ \ni\ \Sigma\ \longmapsto\ \int_X d\mu(x)\,\psi(x)\,(\chi_\Sigma\circ f)(x)\ =\ \int_{f^{-1}(\Sigma)} d\mu(x)\,\psi(x)\ \in\ \mathbb{C}$$

是定义在 Y 上的可数可加（复值）测度，并且相对于 ν 绝对连续。因此，存在唯一的元素 $E_\psi\in L^1(Y,\nu)$，即所谓的拉东–尼科迪姆导数，使得

$$\int_X d\mu(x)\,\psi(x)\,(\phi\circ f)(x)\ =\ \int_Y d\nu(y)\,E_\psi(y)\,\phi(y)\,,\qquad\forall\,\phi\in L^\infty(Y,\nu)\,.\quad(A.1)$$

该构造给出了一个定义良好的映射 $E\colon L^1(X,\mu)\to L^1(Y,\nu)$ 称为 期望算子。正如 [Conw2第 VII.2 节命题 2 中所证明的，8] 这是一个压缩映射，即$\|E_\psi\|_{L^1}\leqslant\|\psi\|_{L^1}$ 对于每个 $\psi\in L^1(X,\mu)$。

定义A.1. 关于 $f:X\to Y$ 的测度 μ 的分解是一个函数$Y\ni y\mapsto\mu_y\in\mathfrak{M}(X)$，满足：(i) 对于每个 $y\in Y$，μ_y 是 X 上的一个正概率测度；(ii) 如果 $\psi\in L^1(X,\mu)$，那么

$$E_\psi(y)\ =\ \int_X d\mu_y(x)\,\psi(x)\qquad(A.2)$$

其中该等式意指在 ν-几乎处处成立。

设 $\{\mu_y\}_{y\in Y}$ 是关于 μ 的分解，$f:X\to Y$ 且 $\Delta\in\mathscr{B}_X$ 其示性函数为 χ_Δ。从（A.1）出发并令 $\phi\equiv1$，直接计算

[1]稍作推广，我们可以要求 X 是一个 Radon空间。

表明的是

$$\mu(\Delta) \;=\; \int_X d\mu(x)\, \chi_\Delta(x) \;=\; \int_Y d\nu(y)\, E_{\chi_\Delta}(y)$$
$$= \int_Y d\nu(y) \left(\int_X d\mu_y(x)\, \chi_\Delta(x) \right) \;=\; \int_Y d\nu(y)\, \mu_y(\Delta)\,.$$

因此，分解 $\{\mu_y\}_{y\in Y}$ 确实将测度 μ 分解为各个部分 μ_y。此外，对于每个 $\psi \in L^1(X,\mu)$，类似的计算给出

$$\int_X d\mu(x)\, \psi(x) \;=\; \int_Y d\nu(y)\, E_\psi(y) \;=\; \int_Y d\nu(y) \left(\int_X d\mu_y(x)\, \psi(x) \right)\,. \qquad \text{(A.3)}$$

从其定义本身也可推出，每个测度 μ_y 的分解都支撑在层集 $f^{-1}(\{y\}) \subseteq X$ 对于 ν 几乎处处$y \in Y$ [Conw2，第 VII.2 节，命题2。8]。更确切地说，有

$$\mu_y \left(X \setminus f^{-1}(\{y\}) \right) \;=\; 0$$

对于 ν-几乎处处 $y \in Y$。这意味着 $\mu_y(\Delta) = \mu_y(\Delta \cap f^{-1}(\{y\}))$ 对于每个$\Delta \in \mathscr{B}_X$。将后一事实与（A.3）结合，得到

$$\int_X d\mu(x)\, \psi(x) \;=\; \int_Y \int_{f^{-1}(y)} d\nu(y)\, d\mu_y(x)\, \psi(x) \qquad \text{(A.4)}$$

对每个 $\psi \in L^1(X,\mu)$，或者更一般地，对每个满足$|\psi| : X \to [0,+\infty]$的 Borel 可测函数。

下一个结果保证测度分解 [Conw2，第 VII.2 节，命题 2。8]。

定理 A.2。（测度分解定理）设 $(X, \mathscr{B}_X, \mu)$ 是一个 Borel 测度空间，由一个紧度量空间 X、赋予其上的 Borel σ-代数 $\mathscr{B}_X$ 以及一个正则正概率测度 $\mu : \mathscr{B}_X \to [0,+\infty]$构成。设 $(Y, \mathscr{B}_Y)$ 是另一个紧度量空间，赋予其上的 Borel σ-代数，并且 $f : X \to Y$ 是一个 Borel 函数。则存在 μ 关于 $f : X \to Y$的一个分解 $\{\mu_y\}_{y\in Y}$。此外，若存在 μ 关于同一个 f 的另一个分解 $\{\mu'_y\}_{y\in Y}$，则对于 ν-几乎处处的$y \in Y$，有 $\mu_y = \mu'_y$。

在应用中，了解可测映射复合时分解的行为很有用。

命题 A.3. 设 (X_i, μ^i) 是关于 $i = 1$、2、3的Borel概率空间。设 $f\colon X_1 \to X_2$和 $g\colon X_2 \to X_3$ 是两个可测映射，使得 μ^2 和 μ^3 分别是由 f 和 g 诱导的推前测度。如果 $h := g \circ f$，则关于 h 的期望算子 E^h满足复合规则 $E^h = E^g E^f$，其中 E^g 和 E^f 分别是与 f 和 g 相关联的期望算子。此外，分解

$\{\mu_z^{1,h}\}_{z\in X_3}$ 的 μ^1 关于 μ^3 与 h 相关，满足等式

$$\mu_z^{1,h}(\Sigma) \;=\; \int_{X_2} d\mu_z^{2,g}(y)\; \mu_y^{1,f}(\Sigma)\,,$$

对于几乎所有的 μ^3，以及任意可测集 $\Sigma \subset X_1$。这里，$\{\mu_z^{2,g}\}_{z\in X_3}$ 和 $\{\mu_y^{1,f}\}_{y\in X_2}$ 分别表示与 g 和 f 相关的 μ^2 和 μ^1 的分解。

证明。首先，注意到 μ^3 与由 $h.$ 诱导的 μ^1 的推前测度重合。因此，有

$$\int_{X_1} d\mu^1(x)\; \phi(h(x))\psi(x) \;=\; \int_{X_3} d\mu^3(z)\; \phi(z)(E^h_\psi)(z) \tag{A.5}$$

对所有 $\phi \in L^\infty(X_3,\mu^3)$ 以及 $\psi \in L^1(X_1,\mu^1)$. 另一方面，我们注意到，A.5 的左侧满足

$$\begin{aligned}
\int_{X_1} d\mu^1(x)\; \phi(h(x))\psi(x) \;&=\; \int_{X_1} d\mu^1(x)\; (\phi\circ g)(f(x))\psi(x)\\
&= \int_{X_2} d\mu^2(y)\; (\phi\circ g)(y)(E^f_\psi)(y)\\
&= \int_{X_2} d\mu^2(y)\; \phi(g(y))(E^f_\psi)(y)\\
&= \int_{X_3} d\mu^3(z)\; \phi(z)(E^g_{E^f_\psi})(z)\,.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

通过等同 $E^g_{E^f_\psi} := (E^gE^f)_\psi$，并且根据 A.5 和 A.6，成立 $E^h = E^gE^f$ 作为相关 $L^1(X^i,\mu^i)$ 空间之间线性映射的复合。此外，

$$\begin{aligned}
\mu_z^{1,h}(\Sigma) \;&=\; (E^h_{\chi_\Sigma})(z) \;=\; \left((E^gE^f)_{\chi_\Sigma}\right)(z) \;=\; \int_{X_2} d\mu_z^{2,g}(y)\; (E^f_{\chi_\Sigma})(y)\\
&= \int_{X_2} d\mu_z^{2,g}(y)\; \mu_y^{1,f}(\Sigma)
\end{aligned}$$

对于每个可测集合 $\Sigma \subseteq X^1$。 □

最后，我们用一些简单但有用的例子结束本节。

例 A.4（沿乘积空间的分解）。设 (X_1,μ_1) 和 (X_2,μ_2) 是赋有正则概率测度的两个紧度量空间。考虑乘积空间 $(X\times Y,\mu)$，其对应的乘积测度为 $\mu := \mu_1\times\mu_2$，以及到第一个分量的投影 $\pi : X_1\times X_2 \to X_1$，定义为：对每个 $x_j \in X_j$ 和 $j = 1, 2$，$\pi(x_1,x_2) = x_1$。令 ν 为测度 μ 经 π 推前所得的测度。根据其定义可知，对每个可测集 $\Sigma \subseteq X_1$，有

$$\nu(\Sigma) \;=\; \mu\left(\pi^{-1}(\Sigma)\right) \;=\; \mu(\Sigma\times X_2) \;=\; \mu_1(\Sigma)\mu_2(X_2) \;=\; \mu_1(\Sigma)\,.$$

因此有 $\nu = \mu_1$。接下来的任务是计算期望算子。为此，考虑一个 $\psi \in L^1(X_1 \times X_2, \mu)$。那么，根据（A.1）且对所有 $\phi \in L^\infty(X_1, \mu_1)$，有

$$\begin{aligned}\int_{X_1} d\mu_1(x_1)\, E_\psi(x_1)\phi(x_1) &= \int_{X_1\times X_2} d\mu(x_1,x_2)\, \psi(x_1,x_2)\phi(\pi(x_1,x_2)) \\ &= \int_{X_1\times X_2} d\mu(x_1,x_2)\, \psi(x_1,x_2)\phi(x_1) \\ &= \int_{X_1} d\mu_1(x_1)\, \phi(x_1) \left(\int_{X_2} d\mu_2(x_2)\psi(x_1,x_2)\right),\end{aligned}$$

其中最后一行是富比尼定理的结果。由于

$$\int_{X_1} d\mu_1(x_1)\, \phi(x_1) \left[E_\psi(x_1) - \int_{X_2} d\mu_2(x_2)\psi(x_1,x_2)\right] = 0$$

对于每个 $\phi \in L^\infty(X_1, \mu_1)$，可得

$$E_\psi(x_1) = \int_{X_2} d\mu_2(x_2)\psi(x_1,x_2)$$

作为 $L^1(X_2, \mu_2)$的元素。为了计算 $\{\mu_{x_1}\}_{x_1\in X_1}$ 的分解 μ，我们使用（A.2）。设 $\Sigma \subseteq X_1$ 和 $\Gamma \subseteq X_2$ 是两个可测集，且 $\chi_{\Sigma\times\Gamma}$ 是乘积的示性函数 $\Sigma \times \Gamma$。于是有

$$\mu_{x_1}(\Sigma\times\Gamma) = E_{\chi_{\Sigma\times\Gamma}}(x_1) = \int_{X_2} d\mu_2(x_2)\, \chi_{\Sigma\times\Gamma}(x_1,x_2) = \mu_2(\Gamma)\chi_\Sigma(x_1), \quad (A.7)$$

其中，在最后一个等式中用到了 $\chi_{\Sigma\times\Gamma} = \chi_\Sigma\chi_\Gamma$。因此，得到 th。 at

$$\mu_{x_1} = \delta_{x_1} \times \mu_2$$

是一个乘积测度，其中 δ_{x_1} 表示定义在 X_1 上、集中于点 x_1的 Dirac测度。◀

例 A.5（实数轴上的分解）。令 $X := [a, b] \subset \mathbb{R}$ 赋予归一化的勒贝格测度 μ，且 $f : X \to \mathbb{R}$ 为一个 C^1-函数。令 $a < x_1 < \ldots < x_N < b$ 为其中 $f'(x_k) = 0$ 的点集（无需假设 f' 在端点 a 和 b 处为零）。区间集合 $I_k := [x_k, x_{k+1}]$，其中 $k = 0$、……、N、$x_0 := a$ 和 $x_{N+1} := b$，提供了 X 的一个划分，使得 f 在每个 I_k 内严格单调。集合 $Y := f(X) = [f_{min}, f_{max}] \subset \mathbb{R}$ 又是一个区间，其端点由 f 在 X 上取得的最大值和最小值确定。特别地，值 f_{min} 和 f_{max} 可通过在 x_k 中的某些点上取 f 的值而达到。同样，对于每个 $y \in Y$，原像 $P_y := f^{-1}(\{y\})$ 是 X 的有限集，因而是离散集。令 ν 为测度 μ 在 f 下的推前测度。根据其定义可知，对于每个可测集 $\Sigma \subseteq Y$，one

gets

$$\nu(\Sigma) \;=\; \mu\left(f^{-1}(\Sigma)\right) \;=\; \frac{1}{b-a}\int_a^b dx\,\chi_{f^{-1}(\Sigma)}(x)$$
$$= \frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{N}\int_{I_k} dx\,\chi_{f^{-1}(\Sigma)}(x)$$

注意到，在每个 I_k 中， f 都是可逆的。因此，通过设定 $f_k := f|_{I_k}$，可以在每个积分中使用变量替换 $y = f(x)$，从而得到

$$\int_{I_k} dx\,\chi_{f^{-1}(\Sigma)}(x) \;=\; \int_{f(x_k)}^{f(x_{k+1})} dy\,\left(f_k^{-1}\right)'(y)\,\chi_{f^{-1}(\Sigma)}\left(f_k^{-1}(y)\right)$$
$$= \int_Y dy\,\frac{\chi_{f(I_k)}(y)}{\left|f'\left(f_k^{-1}(y)\right)\right|}\,\chi_\Sigma(y)\,.$$

因此，可得 ν 关于 Y 上的勒贝格测度绝对连续，并可写成$d\nu(y) = \rho(y)dy$ 的形式，其中

$$\rho(y) \;:=\; \frac{1}{(b-a)}\sum_{k=0}^{N}\frac{\chi_{f(I_k)}(y)}{\left|f'\left(f_k^{-1}(y)\right)\right|}\,.$$

下一步任务是计算期望算子。为此，考虑一个 $\psi \in L^1(X,\mu)$和一个 $\phi \in L^\infty(Y,\nu)$。然后，根据（A.1）可得

$$\int_Y dy\;\rho(y)\;E_\psi(y)\;\phi(y) \;=\; \int_X d\mu(x)\;\psi(x)\;(\phi\circ f)(x)\,.$$

通过将右侧积分在区间 I_k上分解，并再次应用变量替换 $y = f(x)$，可得

$$\int_Y dy\;\rho(y)\;E_\psi(y)\;\phi(y) \;=\; \int_Y dy\;\left(\frac{1}{(b-a)}\sum_{k=0}^{N}\frac{\chi_{f(I_k)}(y)\psi\left(f_k^{-1}(y)\right)}{\left|f'\left(f_k^{-1}(y)\right)\right|}\right)\;\phi(y)\,.$$

由于上述等式必须独立于 ϕ 成立，因此得出

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{\chi_{f(I_k)}(y)\left[E_\psi(y)-\psi\left(f_k^{-1}(y)\right)\right]}{\left|f'\left(f_k^{-1}(y)\right)\right|} \;=\; 0$$

对 Y中几乎每一个 y。因此有

$$E_\psi(y) \;=\; \sum_{x\in P_y} c_x(f)\psi(x)\,,\qquad c_k(f) \;:=\; \left(\sum_{x\in P_y}\frac{1}{|f'(x)|}\right)^{-1}\frac{1}{|f'(x)|}\,.$$

最后，分解 $\{\mu_y\}_{y\in Y}$的 μ 是通过使用（A.2）获得的，这提供了

$$\int_X d\mu_y(x)\;\psi(x) \;=\; \sum_{x\in P_y} c_x\psi(x)$$

表明

$$\mu_y \;=\; \sum_{x\in P_y} c_x \delta_x$$

等同于支撑在 P_y 中各点上的Dirac测度的凸组合。作为这一结果的一个特殊应用，我们来考虑三角函数表达式

$$f(x) \;:=\; \sqrt{\gamma^2 + 4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,, \qquad x \in [-2\pi, 2\pi]$$

其中 $\gamma > 0$。在这种情况下，对于 $n = 0$、1、2、3、4，临界点为 $x_k := (k-2)\pi$，并且可以定义相关划分 I_k。对于每个 $y \in Y := (\gamma, \sqrt{\gamma^2+4})$，点集$P_y := f^{-1}(\{y\})$ 由四个类型为 $\{\pm x_*, \pm 2\pi \mp x_*\}$ 的点给出，其中参考点 $x_* = x_*(y)$ 选为 $x_* := f^{-1}(\{y\}) \cap [0, \pi]$。为了计算系数 $c_x(f)$，我们注意到

$$f'(x) \;:=\; -\frac{\sin(x)}{f(x)}\,.$$

注意到 $|f'(x)| = |\sin(x_*)| f(x_*)^{-1}$ 对每个 $x \in P_y$ 都成立，可得 $c_x(f) = \frac{1}{4}$。因此得到

$$\mu_y \;=\; \frac{1}{4}\sum_{\sharp=\pm} \delta_{\sharp x_*} + \delta_{\sharp(2\pi - x_*)}$$

对于相关的归一化勒贝格测度 μ 在 $[-2\pi, 2\pi]$上的分解。 ◀

例 A.6 (由线性函数的分解). 给定 $\ell > 0$，让我们考虑正方形$X := [0,\ell] \times [0,\ell] \subset \mathbb{R}^2$ 赋予其归一化（乘积）勒贝格测度 $d\mu := \ell^{-2}\, dx_1\, dx_2$。考虑 X 上的线性函数由 $f(x_1, x_2) := x_2 - x_1$给出。不难看出值域 $f(X)$ 与区间 $Y := [-\ell, \ell]$重合。因此，可以将 f 视为映射 $f : X \to Y$。由于 f 是连续的，因此可测，我们可以计算由测度 μ 通过 f在 Y 上诱导的推前测度 ν。设 $\Sigma \subseteq Y$ 为任意可测集且 χ_Σ 为其示性函数。然后，根据定义

$$\begin{aligned}\nu(\Sigma) \;&:=\; \mu\left(f^{-1}(\Sigma)\right) \;=\; \int_X d\mu(x_1, x_2)\chi_{f^{-1}(\Sigma)}(x_1, x_2)\\ &=\; \frac{1}{\ell^2}\int_0^\ell dx_1 \int_0^\ell dx_2\; \chi_\Sigma(x_2 - x_1)\end{aligned}$$

其中最后一个等式是富比尼定理的结果。让我们暂时假设 χ_Σ 是黎曼可积的并考虑变量替换 $(s, y) \mapsto (x_1, x_2)$ 由 $x_1(s, y) := s$ 和 $x_2(s, y) := s + y$给出。该变换的雅可比行列式为1，经过一些处理后得到

$$\begin{aligned}\nu(\Sigma) \;&=\; \frac{1}{\ell^2}\int_0^\ell ds \left(\int_{-s}^{\ell - s} dy\; \chi_\Sigma(y)\right)\\ &=\; \frac{1}{\ell}\int_0^\ell ds\; g_\Sigma(s)\end{aligned} \tag{A.8}$$

其中

$$g_\Sigma(s) := \frac{1}{\ell}\int_{-s}^{\ell-s} dy\ \chi_\Sigma(y) = \frac{\left|[-s,\ell-s]\cap\Sigma\right|}{\ell}$$

以及 $|\cdot|$ 分子中的表示 $\mathbb{R}$。显然，有 $g_\Sigma : [0,\ell] \to [0,1]$。上式和勒贝格可积性判据表明， $g_\Sigma = 0$ 只要 Σ 是任意一个勒贝格测度为零的可测集。因此，由（A.8）可推知， ν 关于勒贝格测度dy 是绝对连续的，其中 Y。因此，根据拉东–尼科迪姆定理，存在一个可测函数 $\rho : Y \to [0,\infty)$ 使得 $d\nu(y) = \rho(y)dy$。注意到，积分（A.8）可以改写为

$$\begin{aligned}\nu(\Sigma) &= \frac{1}{\ell^2}\int_0^\ell ds\left(\int_{-\ell}^{\ell} dy\ \chi_{[-s,\ell-s]}(y)\chi_\Sigma(y)\right)\\ &= \frac{1}{\ell^2}\int_Y dy\ \chi_\Sigma(y)\left(\int_0^\ell ds\ \chi_{[-s,\ell-s]}(y)\right)\end{aligned}$$

其中在第二个等式中交换了积分次序。因此可得

$$\rho(y) := \frac{1}{\ell^2}\int_0^\ell ds\ \chi_{[-s,\ell-s]}(y) = \frac{\ell-|y|}{\ell^2}$$

其给出了Radon–Nikodym 导数的表达式。下一步是计算期望算子。为此，考虑一个 $\psi \in L^1(X,\mu)$。于是，根据（A.1），对于所有 $\phi \in L^\infty(Y,\nu)$ 都有

$$\int_Y dy\ \rho(y)\phi(y)E_\psi(y) = \frac{1}{\ell^2}\int_0^\ell\int_0^\ell dx_1dx_2\ \psi(x_1,x_2)\phi(x_2-x_1)\,.$$

为整理该等式右侧，我们暂且假设函数 ψ 和 ϕ 均黎曼可积，因此可以再次进行变量替换 $(s,y)\mapsto(x_1,x_2)$。于是

$$\begin{aligned}\int_Y dy\ \rho(y)\phi(y)E_\psi(y) &= \frac{1}{\ell^2}\int_0^\ell ds\int_{-s}^{\ell-s} dy\ \psi(s,s+y)\phi(y)\\ &= \frac{1}{\ell^2}\int_0^\ell ds\int_Y dy\ \chi_{[-s,\ell-s]}(y)\psi(s,s+y)\phi(y)\\ &= \int_Y dy\ \phi(y)\left(\frac{1}{\ell^2}\int_0^\ell ds\ \chi_{[-s,\ell-s]}(y)\psi(s,s+y)\right)\,.\end{aligned}$$

对于有界黎曼可测函数 ϕ，第一个式子与最后一个式子相等；根据勒贝格判别准则，对每个 $\phi \in L^\infty(Y,\nu)$ 也成立。这意味着

$$\rho(y)E_\psi(y) = \frac{1}{\ell^2}\int_0^\ell ds\ \chi_{[-s,\ell-s]}(y)\psi(s,s+y)$$

对几乎所有 $y \in Y$ 都成立。经过最后一步变形可得

$$E_\psi(y) = \frac{1}{\ell - |y|} \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\ell - y} ds\, \psi(s, s+y) & 0 \leqslant y \leqslant \ell \\ \displaystyle\int_{|y|}^{\ell} ds\, \psi(s, s+y) & -\ell \leqslant y \leqslant 0\,. \end{cases}$$

让我们将最后一个方程与（A.2）进行比较，这里将其改写为

$$E_\psi(y) = \int_X d\mu_y(x_1, x_2)\, \psi(x_1, x_2)\,,$$

其中，$\{\mu_y\}_{y \in Y}$ 是 μ 关于 $f : X \to Y$的分解。从而得到，μ_y集中在线段上

$$L_y := f^{-1}(\{y\}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - x_1 = y\} \cap [0, \ell]^2$$

并且在 L_y 上它与一维归一化Lebesgue测度一致。令$[0, 1] \ni \tau \mapsto s(\tau) \in L_y$ 为 L_y的线性重新参数化，由 $s(\tau) = (\alpha + \beta\tau、\ \alpha + \beta\tau + y)$ 和 $\alpha\,\beta$ 给出，具体取决于 y。于是，略带无害的记号滥用，并利用Dirac测度 $\mathbb{R}^2$，可以写成

$$\mu_y(x_1, x_2) = \int_0^1 d\tau\, \delta_{s(\tau)}(x_1 x_2)$$

关于沿 f 对测度 μ 的分解。 ◀

参考文献

[AM] Ashcroft, N.; Mermin, N.：《固体物理学》。Saunders College Publishing，1976[BR1] Bratteli, O.; Robinson, D. W.：《算子代数与量子统计力学 1》。Springer-Verlag，柏林-海德堡，1987[BR2] Bratteli, O.; Robinson, D. W.：《算子代数与量子统计力学 2》。Springer-Verlag，柏林-海德堡，1997[Call] Callaway, J.：《能带理论》。学术出版社，纽约，1964[Conw1] Conway, J. B.：《泛函分析教程》。Springer，柏林，1990[Conw2] Conway, J. B.：《次正规算子理论》，美国数学会，1991[Davi] Davidson, K. R.：《以实例介绍 C*-代数》。美国数学会，1996[Dira] Dirac, P. A. M.：《量子力学原理》。Clarendon Press，牛津，1930[Dixm] Dixmier, J.：《 C*-代数》。North-Holland Publishing Co.，1977[DL] De Nittis, G.; Lein, M.：类石墨烯系统中的拓扑极化。《物理学杂志 A：数学与理论》46，385001（2013）[FNW] Fannes, M.; Nachtergaele, B.; Werner, R. F.：量子自旋链上的有限关联态。《数学物理通讯》144，443-490（1992）[Haag] Haag, R.：《局域量子物理：场、粒子、代数》。Springer，1996[Kato] Kato, T.：《线性算子的微扰理论》。Springer-Verlag，柏林，1980[Kitt] Kittel, C.：《固体物理学导论》。John Wiley & Sons，纽约，1976[Kuch1] Kuchment, P.：椭圆算子概述。《美国数学会通报》53，343-41（2016）[Kuch2] Kuchment, P.：《偏微分方程的 Floquet 理论》。算子理论：进展与应用，第60卷，Birkhauser Verlag，巴塞尔，1993

[MP] Mitchel,L.;Paschke, W.: 使用唯一本征态的C*-代数的简单性。算子理论杂志 64, 321-347(2010)[Murp] Murphy,G.:复数域*-代数与算子理论。学术出版社，Inc.，1990[MvN] Murray,F. J.; 冯·诺依曼,J.:关于算子环。数学年刊37, 116-229 (1936)ˇ[Nils] Nilsen,M.:Prim A的Stone-Čech紧化。澳大利亚数学会通报52, 377-383 (1995)[Pash2] Paschke, W.: 自由群生成元之和的纯本征态。太平洋数学杂志 197, 151-171(2001)[Pede] Pedersen, G. K.: C*-代数及其自同构群。学术出版社，伦敦-纽约，1979[Ried1] Riedel,N.: 几乎Mathieu算子与旋转C*-代数。伦敦数学会会刊56, 281-302 (1988)[Ried2] Riedel, N.:关于几乎Mathieu算子的谱性质及其与无理旋转C*代数的联系。落基山数学杂志20, 541-550 (1990)[Rine] Rinehart, L.: C*-代数的本征态。电子预印本 https://arxiv.org/abs/2102.07049, (2021)[RS1] Reed, M.; Simon,B.: 泛函分析（现代数学物理方法 I）。学术出版社，纽约-伦敦，1972[RS2] Reed, M.; Simon,B.: 算子分析（现代数学物理方法IV）。学术出版社，纽约-伦敦，1978[RW] Raeburn,P.; Williams,D.:Morita等价与连续迹 C*-代数。数学综论与专著第60卷。美国数学会，1998[Sega] Segal I. E.:一般量子力学的公设。数学年刊 48, 930-948 (1947)[SSH] Su, W. P.; Schrieffer,J. R.;Heeger,A. J.: 一般量子力学的公设。物理评论快报 42, 1698(1979)[Tesc] Tesch, G.: 量子力学中的数学方法及其在Schrodinger算子中的应用。美国数学会，2009[vNeu] 冯·诺依曼, J.: 量子力学的数学基础。普林斯顿大学出版社，1932

（G. De Nittis）智利天主教大学数学学院与物理研究所，智利圣地亚哥。电子邮箱：gidenittis@mat.uc.cl

（D. Polo）智利天主教大学数学学院，智利圣地-亚哥。电子邮箱：djpolo@mat.uc.cl