arXiv:2304.02686v1 [math.NA] 5 Apr 2023

指数数据的切比雪夫逼近

马里亚诺·罗德´里格斯-阿里亚斯·费尔南´德斯，哈维尔·卡韦略´桑切斯，
胡安·安东尼奥·费尔南´德斯·托尔维斯科

Abstract. 本文提出了一种算法，用于在误差采用最大范数度量时通过指数函数拟合数据。我们证明了必要的结果，从而说明无论数据集如何，该算法都会收敛到最佳逼近。

1. 引言

给定一些数据 $\mathfrak{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathbb{R}^n$，本文将说明如何确定系数 $a, b, k \in \mathbb{R}$，使指数函数 $f(t) = a\exp(kt) + b$ 的误差最小

$$\mathcal{E}_\infty = \|(T_1 - f(t_1), \dots, T_n - f(t_n))\|_\infty = \max\{|T_1 - f(t_1)|, \dots, |T_n - f(t_n)|\}. \tag{1}$$

由于过程简单，通常采用最小二乘法寻求最佳拟合：因为 $\mathbb{R}^n$ 中的通常范数是可微的，寻找某个距离的极小值等价于找到所有偏导数均为 0 的点。尽管如此，最小化一个包含所有点的带状区域的宽度似乎更为自然——而这正是切比雪夫逼近（采用最大范数度量误差的逼近）所实现的（例如，参见[**2**, **4**]）。

这种逼近的主要优点之一是，最终问题简化为对情形 $n = 4$ 的研究；主要问题在于确定如何简化该问题。一旦完成，我们只需找到唯一满足 (12) 的 (a, b, k)。

为简化全文记号，对任意映射 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(v)$ 表示 $(f(v_1) \dots, f(v_n)) \in \mathbb{R}^n$ 且，对每个 $i < j < l$, $v_{i,j,l}$ 表示 (v_i, v_j, v_l)。设 $\overline{\mathcal{F}}$ 表示 $\{ae^{kt} + b \text{ 其中 } a, b, k \in \mathbb{R}\}$ 且 $\overline{\mathcal{F}_k}$ 表示 $\{ae^{kt} + b \text{ 其中 } a, b \in \mathbb{R}\}$ 对某些 $k \in \mathbb{R}$，则 $\mathcal{F}^v$ 表示 $\{f(v) : f \in \overline{\mathcal{F}}\}$ 且 $\mathcal{F}_k^v$ 表示 $\{f(v) : f \in \overline{\mathcal{F}_k}\}$。

在下文中，T 和 $\mathfrak{t}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的向量，即 $\mathfrak{t} = (t_1, \dots, t_n)$，满足 $t_i < t_{i+1}, \forall\, i = 1, \dots, n-1$。向量 T 和 $\mathfrak{t}$ 在全文中均为任意但固定的向量。为进一步简化记号，我们将 $\mathcal{F}^{\mathfrak{t}}$ 记作 $\mathcal{F}$，将 $\mathcal{F}_k^{\mathfrak{t}}$ 记作 $\mathcal{F}_k$。

因此，我们要解决的问题如下：

Problem 1. 给定 T 和 $\mathfrak{t}$，以 $\mathcal{F}$ 作为逼近函数族来逼近 T，并以最大范数作为逼近准则。

Key words and phrases. 切比雪夫逼近；指数衰减；最大范数；算法。
2020 *Mathematics Subject Classification.* 41A50; 65D15; 41A52.

在这个问题中， T 表示数据， $\mathfrak{t}$ 表示记录数据的时刻， $\mathcal{F}$ 表示我们打算在其中找到与 T最接近元素的族，而最大范数是逼近准则：即我们衡量 $\mathcal{F}$ 的每个元素与 T 有多接近的方式。基于此，如果在 $g(\mathfrak{t}) \in \mathcal{F}$时， $\|T - f(\mathfrak{t})\|_\infty \leq \|T - g(\mathfrak{t})\|_\infty$，我们称 $f(\mathfrak{t}) \in \mathcal{F}$是 T在 $\mathcal{F}$中的最佳逼近。若对于每个 $g(\mathfrak{t}) \neq f(\mathfrak{t})$，该不等式都是严格的，我们也称 $f(\mathfrak{t})$是最佳逼近。

当我们说求解问题 1 时，我们的意思是能够确定最佳逼近的表达式。其他问题也同样如此。

我们还无法直接解决问题 1。不过，我们可以直接解决以下相关问题：

PROBLEM 2. 给定 T 和 $\mathfrak{t}$，并给定 $k \in \mathbb{R}$，使用 $\mathcal{F}_k$ 作为逼近函数族，以最大范数作为逼近准则来逼近 T。

问题 2 的最佳逼近的存在性和唯一性已在[**3**], 中证明，而问题 1 的最佳逼近存在性和唯一性的条件则在 [**1**] 中确立。然而，这两个问题都没有给出求取最佳逼近的方法。本文针对最佳逼近存在的情形，给出求解问题 1 和问题 2 的若干方法。

在第2 节中，通过计算函数 $f_k \in \overline{\mathcal{F}_k}$ 使得 $f_k(\mathfrak{t})$成为问题 2 的最佳逼近，求解了问题 2。我们介绍了两种解决此类问题的不同方法。

在第 3节中，通过考虑到 $\mathcal{F} = \cup_{k\in\mathbb{R}}\mathcal{F}_k$，问题 1得以解决。请注意，对于某些 $k \in \mathbb{R}$，问题 1 的解也是问题 2的解。能够对任意 k 求解问题2，使我们能够近似求解问题1 的 k，因为误差函数 $\mathcal{E}_\infty$，定义为 $\mathcal{E}_\infty(k) := \|T - f_k(\mathfrak{t})\|_\infty$，是拟凸的，正如 [**3**, 定理 2.17]中所证明的那样。

在上一节中，我们介绍了一种在某些情况下改进算法的方法。由于这种方法不如算法本身稳健，因此我们决定在单独的一节中对其进行讨论。

2. 问题 2 的最佳逼近

本节旨在介绍两种求解问题 2的方法。我们将第一种方法称为穷举法；从计算角度来看，它的效率较低——尽管对于小型数据集而言，它很适用。第二种方法是递归法。穷举法展示了求解问题 2的直接方式，并暗示了从不同视角处理该问题的必要性；第二种方法正是如此。

2.1. 穷举法（通过求解若干次要问题来求解问题 2）。该方法确定 $\mathcal{F}_k$ 中包含问题 2 解的一个有限族。比较该有限族中每个元素的误差并选择提供极小值误差的元素，从而得到解。在进一步讨论之前，让我们定义（并求解）一个新问题：

PROBLEM 3. 给定 $T_{i,j,l}$ 和 $\mathfrak{t}_{i,j,l}$，以逼近 $T_{i,j,l}$ ，使用 $\mathcal{F}^{\mathfrak{t}_{i,\ j\ l\ ,}}_{k}$作为逼近函数族，并以最大范数作为逼近标准。

让我们用穷举法求解问题 2。若 $k = 0$，解显然成立。注意，任意一对满足 $a + b = \frac{\max(T)+\min(T)}{2}$ 的实数 (a, b) 都能求解问题 2。

事实上：函数 h 定义为 $h(t) = a + b \in \overline{\mathcal{F}_0}$，使得 $h(\mathrm{t}) \in \mathcal{F}_0$ 成为 T 的最佳逼近，因为 h 与极大值和极小值的距离相等——为了类比，我们写作$h(t) = a + b$，例如 $h(t) = b + a\exp(0t)$。从现在起，我们将 $h(\mathrm{t})$ 记作 T 在 $\mathcal{F}_0$中的最佳逼近；等价地，$h(\mathrm{t})$ 表示 $k = 0$对应的问题 2 的解。

让我们求解问题 2 对于 $k \neq 0$。根据 [**1**, 命题 5], 对于任意 k，确定问题 2 解的系数a 和 b 与问题 3 对于某些 $i < j < l$ 在 $\{1, \ldots, n\}$ 中的解的系数一致。问题 3 解的系数 a 和 b 使用 [**1**, 引理 1]计算；这些系数是：$a = \frac{T_i - T_l}{e^{kt_i} - e^{kt_l}}$ 和 $b = \frac{1}{2}(T_i - ae^{kt_i} + T_j - ae^{kt_j})$。

–

为了解决问题 2，我们将对每个 $i < j < l \in \{1, \ldots, n\}$求解问题3。让我们定义包含问题 2 解的（有限）子集 $A \subset \mathcal{F}_k$：$A = \left\{a_{il}e^{\mathrm{kt}} + b_{ij} : \ i < j < l\right\}$，其中

$$a_{il} = \frac{T_i - T_l}{e^{kt_i} - e^{kt_l}}, \ b_{ij} = \frac{1}{2}(T_i - ae^{kt_i} + T_j - ae^{kt_j}).$$

通过比较用 A 的每个元素拟合得到的误差，并选择具有极小值误差的元素，我们解决了问题 2。

Algorithm 1 （最佳逼近的穷举搜索）。
过程穷举搜索（T、 t 和 $k \neq 0$。）

(1) **For every** $i < j < l$, $a_{il} := \frac{T_i - T_l}{e^{kt_i} - e^{kt_l}}$,
$b_{ij} := \frac{1}{2}(T_i - a_{il}e^{kt_i} + T_j - a_{il}e^{kt_j})$.
(2) **If** $\|T - (a_{\hat{i}\hat{l}}e^{\mathrm{kt}} + b_{\hat{i}\hat{j}})\|_\infty = \min\{\|T - (a_{il}e^{\mathrm{kt}} + b_{ij})\|_\infty : i < j < l\}$
then $a := a_{\hat{i}\hat{l}}$, $b := b_{\hat{i}\hat{j}}$.

这个算法非常简单（概念上），并给出精确的最佳逼近，但以这种方式进行计算可能有一个严重的缺点：其处理时间。对于系数 a，需要计算的可能性数量是 $\sum_{i=1}^{n-2} i = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$，而对于 b，可能性数量是 $\sum_{i=1}^{n-2} {}_{i}{}_{(i+1)}{}_{2} = \frac{1}{4}(n-1)(n-2)\frac{2(n-2)+4}{3}$。这些数字暗示了所需的计算量。

算法1可以通过考虑 [**1**, 引理 6], 来简化，该引理允许在计算出系数 a 后直接确定 b 。

2.2. 连续余项法（无需次要问题）。为解决这一问题，我们提出一种不同的方法来求解问题 2。

由于情况 $k = 0$ 已完全解决，$h(\mathrm{t})$ 即为解，我们将重点关注情况 $k \neq 0$。请注意，极大值或极小值指的是全局极大值或极小值。

Definition 2.1. 我们称 T 是交替的，即它具有交替的极大值和极小值，也就是说，在两个极大值之间达到一个极小值，反之亦然。更详细地说，以下情况之一会发生：

- $T_{M_1} = T_{M_2} =$最大值 T，$T_{m_1} =$最小值 T以及 $M_1 < m_1 < M_2$
- $T_{M_1} =$最大值 T，$T_{m_1} = T_{m_2} =$最小值 T和 $m_1 < M_1 < m_2$。

Proposition 2.2.考虑一个交替的 T。那么 $h(\mathrm{t})$ 是问题 2 的解。

PROOF. 假设 T 中的交错是在两个极大值之间的一个极小值（另一种交错的证明类似），令 T_{M_1} 和 T_{M_2} 表示这两个极大值，T_{m_1} 表示该极小值，其中 $M_1 < m_1 < M_2$。令 f 为一个非恒定指数函数，并假设 $f(\mathfrak{t})$对 T_{M_1}和 T_{M_2}的拟合优于 $h(\mathfrak{t})$。这意味着 $|T_{M_1} - f(t_{M_1})| \leq T_{M_1} - h(t_{M_1})$ 且 $|T_{M_2} - f(t_{M_2})| \leq T_{M_2} - h(t_{M_2})$，因此 $f(t_{M_1}) \geq h(t_{M_1}) = h(t_{M_2})$。由于 f 严格单调，$f \geq h$在 $[t_{M_1}, t_{M_2}]$中。由于 $t_{m_1} \in (t_{M_1}, t_{M_2})$，$f(t_{m_1}) > h(t_{m_1}) > T_{m_1}$（最后一个不等式由 h的定义成立），并且 $f(t_{m_1}) - T_{m_1} > h(t_{m_1}) - T_{m_1}$。由于这里使用的是最大范数，最后一个不等式意味着 $\|T - h(\mathfrak{t})\|_\infty < \|T - f(\mathfrak{t})\|_\infty$，因此 $f(\mathfrak{t})$对 T 的逼近比 h更差。□

命题2.2 表明，交替的 T不值得进一步探究，因为其解是平凡的。因此，我们将重点关注与非交错 T相关的情形。请注意，如果 T 是非交错的，我们可能会面临 4 种可能的情况，即：

情形 1。$k < 0$，且 T 的极大值在其极小值之前取得，因此 $a_k > 0$。情形 2。$k < 0$，且 T 的极小值在其极大值之前取得，因此 $a_k < 0$。情形 3。$k > 0$，且 T 的极大值在其极小值之前取得，因此 $a_k > 0$。情形 4。$k > 0$，且 T 的极小值在其极大值之前取得，因此 $a_k < 0$。

REMARK 2.3.我们不妨设问题 2 属于情形 1；否则可以将其归约到该特定情形。

事实上，情形2、情形 3 和情形4都可以通过某些对称性化归为情形1：情形 2 通过关于 X 轴的对称性化归为情形1，情形3 通过关于 X 轴和 Y轴的对称性化归为情形 1，而情形 4 通过关于 Y轴的对称性化归为情形 1。这些对称性会改变我们所求解中 k （Y轴对称性）的符号，或改变 a 和 b （X轴对称性）的符号。一旦找到对称情形的解，只需将这些变化还原即可。尽管如此，我们仍需确定所处理的情形。为此，我们可以使用经典的Remez算法（参见，例如 [**5, 7, 6**]）来寻找直线 $f(t) = d + ct$，使其最佳逼近 T。确定最佳线性逼近 $f(t) = d + ct$ 后，我们得到：

LEMMA 2.4. T 当且仅当 $d < 0$ 且存在 $i < j < l$ 使得其属于情形 1

$$T_i - f(t_i) = -(T_j - f(t_j)) = T_l - f(t_l) = \|T - f(\mathfrak{t})\|_\infty, \tag{2}$$

参见 [**1**, 定义 2]。

由于问题 2 属于情形 1，T 的极大值出现在其极小值之前，因此 T 必定在某种程度上具有衰减特征。显然，具有 $k < 0$的指数函数 $I_h \equiv ae^{kt} + b$应当具有 $a > 0$，以再现 T的这种衰减特征。这样，某个$I_h(\mathfrak{t}) \in \mathcal{F}_k$ 可能会比 $h(\mathfrak{t}) \in \mathcal{F}_k$提供更好的逼近。让我们构造 I_h。

令 t_m 为 T 取得其极小值的第一个坐标，令 t_M 为 T取得其极大值的最后一个坐标（注意 $m > M$）。这意味着 $T_m < T_i$、$\forall\, i < m$ 以及$T_i < T_M$、$\forall\, i > M$。

考虑任意的 T_i 和 T_j。对于这个 k，存在唯一的指数函数 $a_{ij}e^{kt} + b_{ij}$，它经过点 (t_i, T_i) 和 (t_j, T_j)。显然，值 a_{ij} 可由下式给出

$$a_{ij} = \frac{T_i - T_j}{e^{kt_i} - e^{kt_j}}. \tag{3}$$

考虑对于每个 $i \neq m$，经过点 (t_m, T_m) 和 (t_i, T_i) 的指数函数的 a_{im} 系数。请注意，由 (3) 可知，$a_{im} \leq 0$、 $\forall i > m$ 和 $a_{im} > 0$、 $\forall i < m$。请记住，我们希望 a 在 I_h中为正，因此只考虑 $a_{im}\, \forall i < m$。

类似地，让我们考虑在 $j \neq M$ 的条件下，对 (t_M, T_M) 和 (t_j, T_j) 进行插值的指数函数的 a_{jM} 系数。这一次， $a_{jM} \leq 0, \forall j < M$ 和 $a_{jM} > 0, \forall j > M$，因此，出于同样的原因，我们只考虑 $a_{jM}, \forall j > M$。

为了确定 I_h 我们将考虑系数

$$\begin{aligned} a &:= \min\{a_{im}, a_{jM}, \text{ with } i < m \text{ and } j > M\}, \\ b_m &:= T_m - ae^{kt_m} \quad \text{and} \quad b_M := T_M - ae^{kt_M}. \end{aligned} \tag{4}$$

注意， $a > 0$。此外，注意到（t_m, T_m）和（t_M, T_M）分别位于$I_h^m \equiv ae^{kt} + b_m$ 和 $I_h^M \equiv ae^{kt} + b_M$ 的图像上。

以下定理可以视为本节的基石。请注意，我们并未声称这样的元素是 T 的最佳逼近，也就是说，它并非问题 2 的解。

THEOREM 2.5(构造方法)。令问题2 属于情形1。然后，由 $I_h(t) = ae^{kt} + (b_m + b_M)/2$ 给出的函数，且其系数在 (4) 中定义，改进了 $h(t)$的逼近。

PROOF. 注意到，如果 $a = a_{mM}$，那么 $I_h^m = I_h^M$，并定义 $I_h := I_h^m$，我们有 $I_h(t)$插值 T，从而解决了问题 2 和问题 1。因此我们假设$a \neq a_{mM}$。

每当 $a \neq a_{mM}$， T 将保持在由 I_h^m和 I_h^M构成的带状区域之间，即 $I_h^m(t_i) \leq T_i \leq I_h^M(t_i)\ \forall i = 1,$ ....., n。让我们证明第一个不等式：给定 $l \geq m$，不等式 $I_h^m(t_l) \leq T_l$ 是显然的。给定 $l < m$，不等式 $I_h^m(t_l) \leq T_l$ 也必须成立，否则 $T_l < I_h^m(t_l)$意味着 $a_{lm} < a$，见（3），这与 a的定义矛盾。

不等式的第二部分具有对称性：给定 $l \leq M$，不等式 $T_l \leq I_h^M(t_l)$ 显然成立。给定 $l > M$，不等式 $T_l \leq I_h^M(t_l)$也必须成立，否则 $I_h^M(t_l) < T_l$ 推出$a_{lM} < a$，见（3），这再次与 a 的选择相矛盾。

显然， $I_h := \frac{1}{2}(I_h^m + I_h^M) \in \overline{\mathcal{F}_k}$ 到 I_h^m 和 I_h^M的距离相等。注意到 (t_m, T_m) 和 (t_M, T_M) 分别位于 I_h^m 和 I_h^M 的图像上，有以下等式成立：

$$\|T - I_h(t)\|_\infty = T_M - I_h(t_M) = -(T_m - I_h(t_m)). \tag{5}$$

注意， $I_h \equiv ae^{kt} + b$ 是$b = \frac{1}{2}(b_m + b_M)$。一旦构造出 I_h，剩下要证明的就是， $I_h(t)$比 $h(t)$ 更符合 T，也就是说， $\|T - I_h(t)\|_\infty < \|T - h(t)\|_\infty$。该不等式显然成立，因为 $\|T - I_h(t)\|_\infty = T_M - I_h(t_M)$、 $\|T - h(t)\|_\infty = T_M - h(t_M)$，并且 $T_M - I_h(t_M) < T_M - h(t_M)$，正如可以检验的那样

$$\begin{aligned} I_h(t_M) &= ae^{kt_M} + b = ae^{kt_M} + \frac{1}{2}(b_m + b_M) \\ &= ae^{kt_M} + \frac{1}{2}\big((T_m - ae^{kt_m}) + (T_M - ae^{kt_M})\big) \\ &= \frac{T_M + T_m}{2} + \frac{a}{2}(e^{kt_M} - e^{kt_m}) = h(t_M) + \frac{a}{2}(e^{kt_M} - e^{kt_m}) \\ &> h(t_M). \end{aligned}$$

□

正如最后的证明所示，见（5），最大范数在 t_m 和 t_M处取得。现在我们将证明，最大范数还将在至少另一个观测点（$\tilde{t}$，$\tilde{T}$）处取得。更具体地说，

COROLLARY 2.6. 在定理 2.5 的假设下，或者

$$\|T - I_h(\mathfrak{t})\|_\infty = T_M - I_h(t_M) = -(T_m - I_h(t_m)) = -(\tilde{T} - I_h(\tilde{t})), \tag{6}$$

˜与 $t < t_m$ 或

$$\|T - I_h(\mathfrak{t})\|_\infty = T_M - I_h(t_M) = -(T_m - I_h(t_m)) = \tilde{T} - I_h(\tilde{t}), \tag{7}$$

其中 $\tilde{t} > t_M$。此外，任何满足 $\|T - I_h(\mathfrak{t})\|_\infty = -(\tilde{T} - I_h(\tilde{t}))$ 的观测值 $(\tilde{t}, \tilde{T})$ 都满足 $\tilde{t} \le t_m$，任何满足 $\|T - I_h(\mathfrak{t})\|_\infty = \tilde{T} - I_h(\tilde{t})$ 的观测值 $(\tilde{t}, \tilde{T})$ 都满足 $\tilde{t} \ge t_M$。

PROOF. 如果 $a = a_{im}$，那么 $I_h^m(t_m) = T_m$，$I_h^m(t_i) = T_i$，并且取 $\tilde{t} = t_i$，(6)成立。如果 $a = a_{jM}$，那么 $I_h^M(t_M) = T_M$，$I_h^M(t_j) = T_j$，并且取 $\tilde{t} = t_j$，(7)成立。

至于此外部分，由于 T_m 是第一个极小值且 I_h 是严格递减函数，$-(T_m - I_h(t_m)) > -(\tilde{T} - I_h(\tilde{t}))$ 对于 $\tilde{t} > t_m$成立。类似的推理给出$T_M - I_h(t_M) > -(\tilde{T} - I_h(\tilde{t}))$ 对于 $\tilde{t} < t_M$成立，因此我们完成了证明。□

PROPOSITION 2.7.考虑 T 在情形1 中，则 $T - I_h(\mathfrak{t})$ 要么处于情形 1，要么是交替的。

PROOF. 如(5)中所述，$\|T - I_h(\mathfrak{t})\|_\infty = T_M - I_h(t_M) = -(T_m - I_h(t_m))$。因此，$T - I_h(\mathfrak{t})$ 在 t_M 上有极大值，在 t_m上有极小值。

根据推论 2.6，当存在某一时刻 t，使范数在$\|T - I_h(\mathfrak{t})\|_\infty = -(\tilde{T} - I_h(\tilde{t}))$处取得时，˜ $\tilde{t}$ 位于 t_m 之前（这意味着对于某个 $r < m$，$(\tilde{t}, \tilde{T}) = (t_r, T_r)$）。同样地，对于范数在 $\|T - I_h(\mathfrak{t})\|_\infty = \tilde{T} - I_h(\tilde{t})$ 处取得的任意时刻 $\tilde{t}$，$\tilde{t}$ 位于 t_M 之后。请注意，推论 2.6 保证这样的时刻 $\tilde{t}$ 存在。

考虑到

- t_m 和 t_M 分别是 $T - I_h(\mathfrak{t})$ 的极小值和极大值所在的时刻，
- $t_M < t_m$，
- 如果 $T - I_h(\mathfrak{t})$ 在 $\tilde{t}$ 处取得极小值，那么 $\tilde{t} \le t_m$，
- 如果 $T - I_h(\mathfrak{t})$ 在 $\tilde{t}$ 处取得极大值，那么 $\tilde{t} \ge t_M$，

我们可以得出结论：除非存在交错（极小值和极大值混杂），否则 $T - I_h(\mathfrak{t})$ 的任何极大值都位于所有极小值之前。此外，很明显，对于某一对指标，最佳逼近的参数 a_k 为 a_{ij}，因此 a_k 大于表达式 (4)，这意味着 $T - I_h(\mathfrak{t})$ 属于情形 1。□

在定理 2.5 中，我们利用指数 $I_h(\mathfrak{t})$ 改进了对 $h(\mathfrak{t})$ 的逼近。现在是迭代这一改进的时候了。请记住，$k < 0$ 是固定的。

假设 T 属于情形 1，且 I_h 不是其最佳逼近。那么 $(\mathfrak{t}, T - I_h(\mathfrak{t}))$ 也属于情形 1，因此定理 2.5 所规定的函数（取相同的 k），记为 I_{h_1}，比 $h(\mathfrak{t}) = 0$给出的逼近更好——注意，0 是使 $(\mathfrak{t}, T - I_h(\mathfrak{t}))$ 得到最佳逼近的常数。因此，

$$\|T - (I_h(\mathfrak{t}) + I_{h_1}(\mathfrak{t}))\|_\infty = \|(T - I_h(\mathfrak{t})) + I_{h_1}(\mathfrak{t})\|_\infty < \|T - I_h(\mathfrak{t})\|_\infty \tag{8}$$

由此我们得到， $I_h + I_{h_1}$ 是对 T 的逼近，且严格优于 I_h。

这个连续逼近余项的过程很直接：我们持续获得如定理 2.5 所示的连续余项的指数逼近，直到我们达到一个交替的余项。然后，这个连续的指数和就是 T 的最佳逼近，我们将在下一个结果中证明。对于这个下一个最终结果，我们将考虑 T in 情形 1 并且使得问题 2 的解存在。

THEOREM 2.8. 连续逼近余项的过程在有限步内定位问题 2 的解。

PROOF. 命题 2.7 确保，直到我们找到具有交替的极大值和极小值的余项（即过程结束），余项在每次迭代后都将处于情形 1。由于我们构造每个新的指数逼近的方式，在每一步中，我们至少会找到要么一个位于先前那些之前的新极小值（情形 $a = a_{im}$ 对于某个 $i < m$），要么一个位于先前那些之后的新极大值（情形 $a = a_{jM}$ 对于某个 $j > M$）。无论如何，在每一步中，第一个极小值和最后一个极大值被达到的时刻变得更近，并且在有限步内，显然低于 $m - M + 1$，余项变得交替的，这意味着过程结束并且结果是最优的。□

ALGORITHM 2 (逐次逼近)。逐次余项过程（$T = (T_1, \ldots, T_n)$为观测向量， $\mathfrak{t} = (t_1, \ldots, t_n)$为时间点， $k < 0$ 固定值。）

(1) $a := 0$.
(2) $b := (\max(T) + \min(T))/2$.
(3) $m := \min\{i \in \{1, \ldots, n\} : T_i = \min T\}$.
(4) $M := \max\{i \in \{1, \ldots, n\} : T_i = \max T\}$.
(5) **While** $M < m$:
  5.1 $f := ae^{kt} + b$.
  5.2 $x := T - f$.
  5.3 $m_2 = \min\{j \in \{1, \ldots, m-1\} : a_{jm} = \min_{i=1,\ldots,m-1}\{a_{im} = \frac{x_i - x_m}{e^{kt_i} - e^{kt_m}}\}\}$.
  5.4 $M_2 = \max\{i \in \{M+1, \ldots, n\} : a_{im} = \min_{j=M+1,\ldots,n}\{a_{jM} = \frac{x_j - x_M}{e^{kt_j} - e^{kt_M}}\}\}$.
  5.5 $\bar{a} := \min\{a_{m_2 m}, a_{M_2 M}\}$.
  5.6 $a := a + \bar{a}$.
  5.7 $b := b + \frac{1}{2}(x_M - \bar{a}e^{kt_M} + x_m - \bar{a}e^{kt_m})$.
  5.8 **If** $a_{m_2 m} < a_{M_2 M}$ **then** $m := m_2$, **else** $M := M_2$.
(6) $\mathrm{Print}(a, b)$.

请注意，该算法取决于能否判定 T 是否属于情形 1——前提是所有极大值都位于极小值之前。回想一下，Remez 算法足以完成这一点；此外，也可以使用算法 2 的另一个版本，将表达式 5.1 替换为 $f := at + b$，并考虑到 $a < 0$。

3. 问题 1 的最佳逼近

一旦我们知道如何求解问题2（第2节对此进行了说明），我们就会求解问题1。由于对于某些 k，问题1的解同时也是问题 2的解，因此我们只需找到最优的 k。误差函数 $\mathcal{E}_\infty(k) = \|T - f_k(\mathfrak{t})\|_\infty$，其中 $f_k(\mathfrak{t})$ 是

问题2对每个 k的解都具有一个性质：拟凸性，正如在[**3**, 定理2.17]中所证明的那样。这一性质使我们能够应用各种算法来近似其极小值。我们提出的算法是一种网格搜索算法。我们需要提供一个最优 k 所在的区间，并且在每次迭代中，算法都会缩小该区间，直到估计出使误差函数最小的值。具体而言，该算法在给定区间内的 d 个不同点对误差函数进行采样，并寻找其中能够提供最小误差的点。然后，它缩小区间，将其中心设在产生最小误差的值处，并重复这一过程，直到区间小于停止条件。

ALGORITHM 3 (寻找最佳 k)。最佳逼近过程（T 观测向量，_t 时间瞬间， $[a_0, b_0]$ 寻求 k 值的区间， d 样本数量， f_k T 对 k的最佳逼近—用2获得—， ε停止条件。）

(1) 对于每个 $i \in \{1, \ldots, d\}$: $k_i := a_0 + (i-1)\frac{b_0 - a_0}{d-1}$, $E_i := \|T - f_{k_i}(\mathfrak{t})\|_\infty$. (2) $m := \min\{i \in \{1, \ldots, d\} : E_i = \min\{E_1, \ldots, E_d\}\}$.(3) $l := \frac{b_0 - a_0}{d-1}$(4)当 $l > \varepsilon$: 4.1 $a := \max\{k_m - l, a_0\}$. 4.2 $b := \min\{k_m + l, b_0\}$. 4.3 对于每个 $i \in \{1, \ldots, d\}$; $k_i := a + (i-1)\frac{b-a}{d-1}$, $E_i := \|T - f_{k_i}(\mathfrak{t})\|_\infty$.4.4 $m := \min\{i \in \{1, \ldots, d\} : E_i = \min\{E_1, \ldots, E_d\}\}$. 4.5 $l := \frac{b-a}{d-1}$ (5) $k := k_m$(6) Print(a, b, k).

4. 结束语

如所述，算法 3 将始终收敛到解。即，对于每个 k ，我们得到 a 和 b 的精确值，并且误差函数的拟凸性保证任何合理的算法都将收敛到正确的 k。

但还有另一种方式来解释我们所证明的内容。假设最佳逼近 $f(t) = ae^{k_0 t} + b$ 满足恰好有四个指标使得等式

$$|f(t_i) - T_i| = \|f(\mathfrak{t}) - T\|_\infty \tag{9}$$

成立，设 $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ 是临界指标的集合。必须至少存在四个指标，但可能有更多——尽管这种情况不容易找到，因为通常的数据集只包含有理数，而函数可能取任何实数。如 [**1**, 推论 1], 所示，将每个 k 映射到向量 $f_k(\mathfrak{t})$ 的映射是连续的。特别地，显然对于某些 $\varepsilon > 0$ 和每个 $k \in (k_0 - \varepsilon, k_0 + \varepsilon)$，三个临界指标属于集合 $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$。

正如读者在 [**1**, 引理 3], 中所看到的，临界指标集合的变化发生在 k 取某些值时，此时有四个临界指标。因此，取某个 $\overline{k} \in \mathbb{R}$ 和 $\varepsilon > 0$。稍加思考便可明白，如果 $T - f_k(\mathfrak{t})$的交错

$$f_k(t_{p_1}) - T_{p_1} = -(f_k(t_{j_1}) - T_{j_1}) = f_k(t_{l_1}) - T_{l_1} = \|f_k(\mathfrak{t}) - T\|_\infty \tag{10}$$

对每个 $k \in (\overline{k}, \overline{k}+\varepsilon)$都成立，那么任何指标都不可能满足

$$-(f_{\overline{k}}(t_{p_2}) - T_{p_2}) = f_{\overline{k}}(t_{j_2}) - T_{j_2} = -(f_{\overline{k}}(t_{l_2}) - T_{l_2}) = \|f_{\overline{k}}(\mathfrak{t}) - T\|_\infty \tag{11}$$

除非在$\overline{k}$ 中，我们有四个交替的临界指标，确保 $\overline{k}$ 是最优的。因此，当 $k \to \overline{k}^+$ 时，我们恰有三种选择：

(1) 交错保持为最大值-最小值-最大值。(2) 交错保持为最小值-最大值-最小值。(3) 值 $\overline{k}$ 是最优的。

因此，某些 k_1 和 k_2 中的交错不同，当且仅当最优的 k 位于二者之间。这使我们能够确定算法 3 开始时选取的区间是否包含最优的 k_0。此外，如果 T 属于情形 1，且对于某个 $k<0$，$T - f_k$（t）的交错与 $T - r$（t）的交错相同（即最大值-最小值-最大值），那么最优的 k_0属于$(-\infty, k)$。

归根结底，如果我们知道需要考察哪些指标，这个逼近算法的目标就很容易实现。也就是说，如果临界指标为 $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$，那么解就是证明 [1, 引理 2]末尾给出的那个：f（t）$= b + a\exp(kt)$，其中

$$\begin{aligned} a &= \frac{T_{i_1} - T_{i_3}}{\exp(kt_{i_1}) - \exp(kt_{i_3})} \overset{*}{=} \frac{T_{i_2} - T_{i_4}}{\exp(kt_{i_2}) - \exp(kt_{i_4})}, \\ b &= \frac{1}{2}(T_{i_1} - a\exp(kt_{i_1}) + T_{i_2} - a\exp(kt_{i_2})), \end{aligned} \tag{12}$$

注意到带星号的等式 $\overset{*}{=}$确定了 k。

因此，在几乎所有情况下，我们都可以解析地求出问题1的解。然而，我们避免在前面的章节中包含这一点，因为没有先验方法来确保 k_1 和 k_2 足够接近。尽管如此，如果由 [1, 引理 2] 对某个 $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$（例如 f(t)）给出的逼近，使得每一个其他 (t_i, T_i) 都更接近 f (t_i)，那么它当然就是最佳逼近。

避免将此补充到算法中的另一个原因是，我们实际上已经能够用算法3以更高精度逼近某些数据集，这可能是由于舍入误差。不过，在对精度有巨大需求的情况下，将其添加到原始算法中可能会更好。

5. 致谢

第二作者部分得到 Project MINCIN PID2019-103961GB-C21（西班牙）和 Juntade Extremadura 的 Project IB20038 的支持。

参考文献

[1] Javier CabelloS´anchez、Juan Antonio Fern´andez Torvisco 和 Mariano Rodr´ıguez-Arias Fern´andez。用于拟合指数自回归模型及其他模型的Tac方法：经济与金融中的应用。*Mathematics*，9(8)，2021。[2] JeanDescloux。L^p *Journal of the Society for Industrial* 中的逼近 *and Applied Mathematics* 11 4 1017 1026, 1963 和切比雪夫逼近。，（）：–。[3] J. A.Fern´andez Torvisco、M. Rodr´ıguez-Arias Fern´andez和 J. CabelloS´anchez。无需初始猜测即可拟合指数衰减的新算法。 *Filomat*，32:4233–4248，01 2018。[4] Jos´eM Quesada、JFern´andez-Ochoa、Juan Mart´ınez-Moreno和 Jorge Bustamante。序列空间中的波利亚算法。 *Journal of Approximation Theory*，135(2):245–257，2005。

[5] Rembert Reemtsen。第一种 Remez 算法的改进。 *SIAM Journal on Numerical Analysis*，27 2 507 518，1990（）：–。[6] E.Y. Remez。切比雪夫逼近的一般计算方法。 *Atomic Energy Commission* *Translations* 4491 1 85, 1957 ，：–。[7]

Tapio Saram¨aki 和 Yong Ching Lim。使用 Remez 算法设计基于频率响应掩模的有限冲激响应滤波器。*Circuits, Systems and Signal Processing*，22:77–97，2003。

Departamento de Matemáticas and Instituto de Matemáticas Universidad de Extremadura. ,,, Avda. de Elvas s/n 06006 Badajoz; Spain. arias@unex.es; coco@unex.es; jfernandck@alumnos.unex.es