arXiv:2304.02694v1 [math.NT] 5 Apr 2023

递归定义的多项式的零点转移

¨BERNHARD HEIM、MARKUS NEUHAUSER 和 ROBERT TROGER

ABSTRACT. D'Arcais 多项式（又称 Nekrasov–Okounkov 多项式）的零点决定 Dedekind 函数幂的傅里叶系数何时消失。这些多项式满足系数非常数的遗传型差分方程。我们将 D'Arcais 多项式与满足卷积型 Volterra 差分方程的多项式联系起来。我们得到了关于零点位置传递的结果。

作为一项应用，我们得到了第二类切比雪夫多项式与 1-关联拉盖尔多项式之间的一个恒等式。我们给出了勒默猜想的一个新版本，并得到了厄米特多项式零点的界。

2020 数学主题分类。主要39A06, 11F20；次要11B83, 26C10。关键词和短语。 Dedekind eta函数，差分方程，分拆数，多项式，零点。

1. Introduction

Dedekind η-函数 $\eta(\omega)^r$ 的幂及其傅里叶系数的性质，尤其是其非消失性，在数论 [Se85、On04、BCO22], 组合数学 [An99、Ha10], 和物理学 [NO06、DDMP05、DD22]理论中发挥着重要作用。设 $q := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega}$，其中 ω 位于复上半平面。设 $r \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)\, q^n = q^{-\frac{r}{24}}\, \eta\left(\omega\right)^r = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-q^n\right)^r.$$

设 r 为偶数。然后Serre [Se85] 证明， $\{a_n(r)\}_n$ 是稀疏的，当且仅当

$$r \in S := \{2, 4, 6, 8, 10, 14, 26\}.$$

Lehmer猜想 [Le47,On08,BCO22] 认为， $a_n(24)$永不为零。数值实验 [HNW18] 表明， $a_n(r) \neq 0$ 对所有 $n, r \in \mathbb{N}$ 其中 r 为偶数且 $r \notin S$，从而推广了 Lehmer 猜想。

众所周知，系数 $a_n(r)$ 是多项式 $P_n(z)$ 在$z = -r$ 处的特殊值，这些多项式的次数为 n，即 D'Arcais 多项式 [DA13, Ne55, HN20a], ，在组合学中也称为 Nekrasov–Okounkov 多项式 [Ha10, Zh22] 。我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\, q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-q^n\right)^{-z} = \exp\left(z \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)\, \frac{q^n}{n}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

其中 $\sigma_d(n) := \sum_{\ell \mid n} \ell^d$。此外， $P_n(z)$ 的取值为整数，且 $n!\, P_n(z)$ 是一个次数为 n 、系数为非负整数的首一多项式，因此其零点是代数整数。这些多项式也可以递归地定义为 [Ne55, HNT20], ，从而使我们能够运用差分方程的方法来研究它们:

$$P_n(z) = \frac{z}{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_1(k)\, P_{n-k}(z), \quad n \geq 1, \tag{1.1}$$

初值为 $P_0(z) = 1$。这推广了众所周知的分拆数递推关系 $p(n)$。自欧拉时代以来，人们就已知

$$n\, p(n) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_1(k)\, p(n-k).$$

Serre的结果 [Se85] 意味着对于每个 $z \in S$，存在无穷多个 n，使得 $P_n(-z) = 0$。设计一个利用(1.1)的组合证明将会很有趣。将 z 视为参数并将(1.1)视为差分方程。我们参考Elaydi关于差分方程的优秀导论 [El05]。方程(1.1)具有非常数系数并且是遗传类型的。

Poincar´e和Perron（[El05], 第 8.2节）提出了一种求解具有非恒定系数的固定阶差分方程的方法，以获得其解的渐近行为。另一方面，对于某些具有恒定系数的遗传型差分方程，即所谓的卷积型 Volterra 差分方程，可以利用离散拉普拉斯变换，也称为 Z 变换（[El05], 第 6.3 节）。

在本文中，我们发展了一种研究(1.1)的解，尤其是其零点分布的新方法。我们将 $\{P_n(z)\}_n$ 与另一族多项式$\{Q_n(z)\}$联系起来。这些多项式满足一个Volterra差分方程。然后，我们将 $Q_n(z)$的性质传递给D'Arcais多项式 $P_n(z)$。在本文中，我们提供了证据表明，相较于 $P_n(z)$， $Q_n(z)$更易于研究。

定义1.1。设 g 是一个取非负值的归一化算术函数，且设 h 是一个取正值的归一化算术函数。那么，

$$P_n^{g,h}(z) := \frac{z}{h(n)} \sum_{k=1}^{n} g(k)\, P_{n-k}^{g,h}(z), \qquad n \geq 1, \tag{1.2}$$

初始值为 $P^{g}{}_{,0}{}^{h}(z) = 1$.

算术函数的例子由 $g(n) = \sigma_d(n)$ $\psi_d(n) = n^d$,$h_s(n) = n^s$ 对于 $s \in [0,1]$ 以及 id$(n) = n$给出。注意， $P_n(z) = P^{\sigma_1}{}_{,n}{}^{h_1}(z)$。为简化记号并突出 $s = 0$ 和 $s = 1$ 的特殊作用，我们记作 $P_n^g(z) := P^{g}{}_{,n}{}^{h_1}(z)$ 和 $Q_n^g(z) := P^{g}{}_{,n}{}^{h_0}(z)$。

尽管本文讨论一般情形，我们先通过以下与正交多项式相关的明确示例来说明我们的结果 [Sz75, Ch11, Do16] related to $g(n) =$id(n)。

1.1. **从切比雪夫多项式到拉盖尔多项式的零点传递**。我们描述切比雪夫多项式的性质（由 $h(n) = h_0(n) = 1$ 给出）如何为相关拉盖尔多项式 $L_m^{(1)}(z)$ 的零点分布提供限制。正交多项式具有实零点，这些零点彼此交错，且已得到充分研究。引用 Rahmann–Schmeisser（[RS02], 导言，第 24 页）的话：“切比雪夫多项式是唯一一类其零点能够以显式形式确定的经典正交多项式。”这使我们的任务更具吸引力，因为我们主张这些显式值可以用于研究拉盖尔多项式的零点。

令 $L_m^{(\alpha)}(z)$ 表示第 m 个 α-相关拉盖尔多项式，并令 $U_m(z)$表示第二类第 m个切比雪夫多项式。那么我们有 ([HLN19], 引理 3.3

以及 [HNT20], 注释 2.8):

$$\begin{aligned} P_n^{\mathrm{id}}(z) &= \frac{z}{n} L_{n-1}^{(1)}(-z), \\ Q_n^{\mathrm{id}}(z) &= z\, U_{n-1}\left(\frac{z}{2}+1\right). \end{aligned}$$

我们有以下结果。

定理 1.2. 设 $n \geq 2$。设 α_n 和 β_n 为$Q_n^{\mathrm{id}}(z)/\,z = U_{n-1}\,(z/2+1)$的最小和最大零点，其中

$$\alpha_n = 2\,\cos\left(\frac{n-1}{n}\,\pi\right) - 2, \qquad \beta_n = 2\,\cos\left(\frac{1}{n}\,\pi\right) - 2.$$

则 $n\,P_n^{\mathrm{id}}(z)/\,z = L_{n-1}^{(1)}(-z)$ 的零点包含在区间

$$[\alpha_n\,(n-1); \beta_n]\,.$$

推论 y 1.3. 设 $m \geq 2$。则 $L_m^{(1)}(z)$ 的零点包含在区间 l

$$\left[2 - 2\,\cos\left(\frac{\pi}{m+1}\right)\,; \left(2 - 2\,\cos\left(\frac{m\,\pi}{m+1}\right)\right)\,m\right].$$

设 $Q_n^g(x)$ 已给定。则我们将 α_n 和 β_n 分别记为最小实零点和最大实零点。设 $P_n^g(x)$ 已给定。则我们将 $\tilde{\alpha}_n$ 和 β_n 分别记为最小实零点和最大实零点。

n	α_n	β_n	$\frac{\tilde{\alpha}_n}{(n-1)\alpha_n}$	$\frac{\tilde{\beta}_n}{(n-1)\beta_n}$
2	−2.0000	−2.0000	1.0000	1.0000
3	−3.0000	−1.0000	0.7887	0.6340
4	−3.4142	−0.5858	0.7575	0.5325
5	−3.6180	−0.3820	0.7569	0.4865
6	−3.7321	−0.2679	0.7642	0.4606
7	−3.8019	−0.1981	0.7736	0.4440
8	−3.8478	−0.1522	0.7831	0.4326
9	−3.8794	−0.1206	0.7922	0.4243
10	−3.9021	−0.0979	0.8007	0.4179
20	−3.9754	−0.0246	0.8559	0.3926
100	−3.9990	−0.0010	0.9422	0.3757
120	−3.9993	−0.0007	0.9483	0.3751
200	−3.9998	−0.0002	0.9622	0.3738

TABLE 1. 最小 α_n 和最大零点的近似值 β_n，与 $Q_n^{\mathrm{id}}(z)/z$的最小 $\tilde{\alpha}_n$ 和最大零点$\tilde{\beta}_n$ 进行比较，$P_n^{\mathrm{id}}(z)/z$。

n	$\tilde{\alpha}_n$	$(n-1)\,\alpha_n$	γ_n
2	−2.000000	−2.000000	−5.007008
3	−4.732051	−6.000000	−8.014282
4	−7.758770	−10.242641	−11.194149
5	−10.953894	−14.472136	−14.488083
6	−14.260103	−18.660254	−17.863804
7	−17.645964	−22.811626	−21.301454
8	−21.092177	−26.934313	−24.787866
9	−24.585955	−31.035082	−28.313824
10	−28.118343	−35.119017	−31.872599
20	−64.649712	−75.532157	−68.531759
30	−102.253573	−115.682270	−106.182727
40	−140.359594	−155.759552	−144.313504
50	−178.767074	−195.806619	−182.736279
60	−217.379108	−235.838285	−221.358695
70	−256.140634	−275.861043	−260.127718
80	−295.017025	−315.878188	−299.009766
90	−333.984925	−355.891567	−337.982076
100	−373.027751	−395.902299	−377.028430

TABLE 2. 最小零点 $\tilde{\alpha}_n$ of $P_n^{\mathrm{id}}(z)\ /z$ 的近似值，与 ([Sz75], (6.32.6)) 比较。

定理 1.4表明，$\frac{\tilde{\alpha}_n}{(n-1)\ \alpha_n} < 1$ 对于 $g(n) = n$，如表1所示。我们预计

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\alpha}_n}{(n-1)\,\alpha_n} = 1.$$

Szeg˝o ([Sz75],(6.32.6)) 针对 $\tilde{\alpha}_n$ 给出了由 γ_n 给出的近似

$$\gamma_n = \left[\sqrt{4n+4} - 6^{-1/2}\,(4n+4)^{-1/6}\,i_1\right]^2,$$

其中 i_1 表示 Airy 函数 $A(x)$ 的最小正零点（我们亦参见表 2）。

此外，定理1.5 意味着 $\frac{\beta_n}{\tilde{\beta}_n} < 1$。然而，表1 表明 that$\beta_n\,(n-1)\,\beta_n$ 收敛于 $\approx 0.37\ldots$。如果确实如此，那么在正交多项式的背景下确定这个常数将会很有趣。因此，我们提出这样一个问题：以下极限是否存在：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\beta}_n}{(n-1)\,\beta_n} = \beta.$$

1.2. **D'Arcais 多项式。** 实零点与序列 $\{P_n^{g,h}(z_0)\}_n$ 对于固定 $z_0 \in \mathbb{R}_{<0}$ 的符号变化有关。

请注意，由于 $P^{g}{}_{,n}{}^{h}(z)$的系数是非负实数，非平凡实零点为负数。实零点决定了在固定 $z_0 \in \mathbb{R}_{<0}$时 $\{P_n^{g,h}(z_0)\}_n$ 的符号变化。我们还请参阅 [HN20b], ，其中分析了 Ramanujanτ 函数的符号变化。

Kostant [Ko04], 基于复李代数表示论，以及 Han[Ha10] 基于 Nekrasov–Okounkov 钩长公式，证明了 $(-1)^n P_n^{\sigma}(z) > 0$对于 $z \le -n^2+1$ 对于 $n \ge 4$。利用 $P^{g}{}_{,n}{}^{h}(z)$ 的递推公式 (1.2)，并假设 $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)\, q^n$ 在 $q=0$ 处正则且 h 单调递增，则存在一个仅依赖于 g的 $\kappa > 0$，使得 $P^{g}{}_{,n}{}^{h}(z) \neq 0$ 对所有满足$|z| > \kappa\, h($ $n-1)$的复数 z均成立。例如，我们已证明 [HN21] D'Arcais 多项式$P_n(z)$ 对所有满足 $|z| > 10.81(n-1)$的复数 z 均非零。

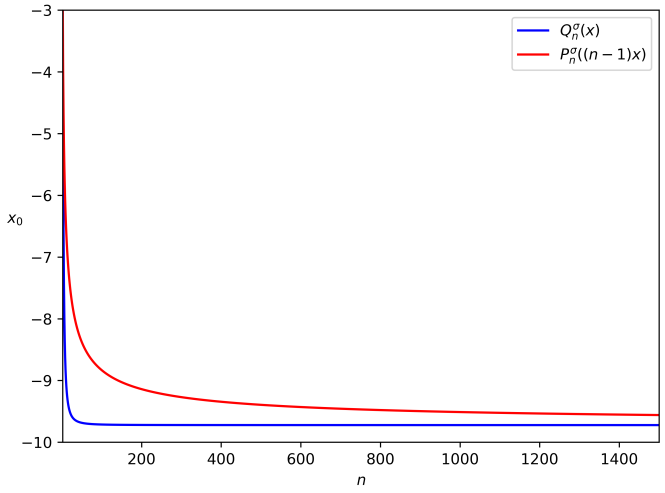
在 [HNT20], 中我们得到了以下数值结果。设 α_n 为 $Q_n^{\sigma}(z)$的最小实零点。则 $P_n^{\sigma}(z)$的最小实零点 $\tilde{\alpha}_n$ 满足$\alpha_n < \tilde{\alpha}_{n-1}$ 对于$n \le 1400$ （我们参考图 1, [HNT20]）。

设 κ_n为 $\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|\}$的最大值， $\tilde{\kappa}_n$为 $\{|\tilde{\alpha}_1|, \dots, |\tilde{\alpha}_n|\}$的最大值，其中 $\tilde{\alpha}_k$ 是 P_k^{σ} (x)的最小零点。然后我们在本文中应用定理 1.4 证明了

$$\frac{\kappa_n}{\kappa_n(n-1)} < 1.$$

令 $n \le 1400$，然后我们已验证 $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ 并且 $\tilde{\alpha}_n > \tilde{\alpha}_{n+1}$。这意味着图 1, [HNT20] 中所显示的结果。

FIGURE 1. $Q_n(x)$和 $P_n^{\sigma}((n-1)x)$的最小实零点。



n	α_n	β_n	$\frac{\tilde{\alpha}_n}{(n-1)\alpha_n}$	$\frac{\tilde{\beta}_n}{(n-1)\beta_n}$
2	-3.000000	-3.000000	1.000000	1.000000
3	-5.236068	-0.763932	0.763932	0.654508
5	-7.418833	-0.194397	0.694579	0.499140
7	-8.352996	-0.087008	0.697784	0.444219
11	-9.087471	-0.031512	0.728503	0.410896
13	-9.251318	-0.021917	0.743585	0.392685
17	-9.434121	-0.012353	0。769357	0。383976
19	-9.488052	-0.009767	0.780202	0.381648
23	-9.558851	-0.006544	0.798626	0.378863
47	-9.681142	-0.001500	0.860549	0.363084
149	-9.718238	-0.000145	0.928608	0.352456
257	-9.721056	-0.000049	0.948860	0.350195

TABLE 3. $Q_n^\sigma(z)/z$的最小 α_n 和最大实零点 β_n 的近似值，与 $P_n^\sigma(z)/z$的最小 $\tilde{\alpha}_n$ 和最大˜实零点 β_n 相比较。

表3 表明，$|\alpha_n(n-1)|$ 是 $|\tilde{\alpha}_n|$ 的上界，并且商 ˜似乎收敛于1。设 β_n 为 $Q_n^\sigma(x)$ 的最大非平凡实零点，β_n 为 $P_n^\sigma(x)$ 的最大非平凡零点，其中 $P_n^\sigma(x)$ 是次数为 n 的达卡莱多项式。设 n为一个素数，则我们观察到对于 $n \le 257$,

$$\frac{\tilde{\beta}_n}{(n-1)\beta_n} < 1.$$

对于一般的 n，情况并非总是如此。例如，对于 $n = 18$ 我们得到$\frac{\beta_n}{\beta_n}\frac{(n-1)}{\approx 1.878282}$。此外，似乎素数 n的商在 n 趋于无穷时收敛于一个正实数。这表明具有素数次数的D’Arcais多项式在所有D’Arcais多项式中具有一些特殊性质。

图 2比较了 $Q_n^\sigma(x)$ 和 $P_n^\sigma(x)$的最大实根的位置，其中n是一个素数。实零点以蓝色表示，非实零点（其实部）以红色绘制。

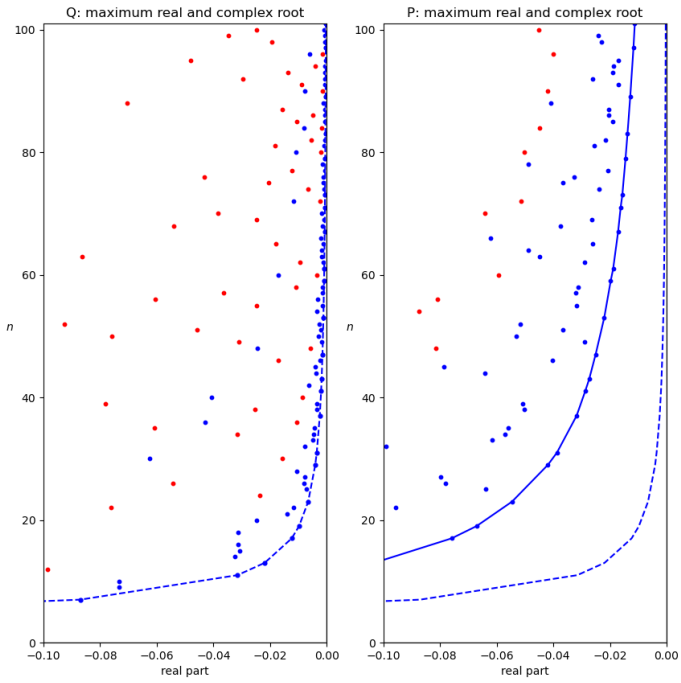


FIGURE 2. 的最小非平凡零点的实部（左图），以及 $P_n^{\sigma}(x)$的最小非平凡零点的实部（右图），其中虚线表示当 $1 \le n \le 100$时 $Q_n^{\sigma}(z)$的最小实零点的凸包，其中 n 为素数。

1.3. 主要结果。我们描述 $\{Q_n^g(z)\}_n$ 的最小实零点和最大实零点对 $\{P_n^{g,h}(z)\}_n$ 的实零点位置的影响。令 $H(n) := \max\{0, h(k) : 1 \le k \le n\}$ 且 $H(0) := 0$。

定理1.4。设 g 和 h 是满足 $g, h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{\ge 0}$的归一化算术函数。固定 $n \ge 1$，并假设存在 $\kappa_n > 0$，使得 $(-1)^m Q_m^g(x) > 0$ 对所有实数 $x < -\kappa_n$ 和 $1 \le m \le n$ 均成立。令

$$y \le x\, H(n-1) \tag{1.3}$$

于是，对于 $1 \le m \le n$ 有不等式

$$(-1)^m P_m^{g,h}(y) \ge (-1)^m \frac{y}{x\, h\,(m)}\, Q_m^g(x) > 0. \tag{1.4}$$

Let 已经 $y < -\kappa_n H(n-1)$ 而非 ***(1.3)***，于是对于 $1 \le m \le n$:

$$(-1)^m P_m^{g,h}(y) > 0. \tag{1.5}$$

此外，我们得到一个关于 $Q_m^g(z)$ 中最大非平凡零点对 $1 \leq m \leq n$ 接近 0的 $P^{g}{}_{,n}{}^{h}(z)$ 的零点的影响的结果。

定理1.5。令 g 和 h为归一化正值算术函数， $h(n) \geq 1$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。令 $n \geq 1$ 为固定的。假设存在一个 $\mu_n < 0$，使得对所有$\mu_n < x < 0$: $Q_m^g(x) < 0$ 对 $1 \leq m \leq n$ 成立。则 $P^{g}{}_{,m}{}^{h}(x) < 0$ 对所有 $1 \leq m \leq n$均成立。

这些结果源于一个恒等式，我们认为该恒等式是研究 $P^{g}{}_{,n}{}^{h}(z)$ 性质的基础。

引理1.6 (基本传递引理)。设 g 和 h 是归一化正值算术函数。设 x、$y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。那么对于 $n \geq 1$，我们有:

$$\frac{h(n)}{y} P_n^{g,h}(y) - \frac{1}{x} Q_n^g(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x} - \frac{h(k)}{y} \right) P_k^{g,h}(y) Q_{n-k}^g(x). \tag{1.6}$$

(1.6) 左边的表达式等于

$$\sum_{k=1}^{n-1} g(k) \left(P_{n-k}^{g,h}(y) - Q_{n-k}^g(x) \right).$$

为了证明定理 1.4 和定理 1.5，我们考察恒等式。

$$\frac{xh(n)}{y} P_n^{g,h}(y) - Q_n^g(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{x\,h(k)}{y} \right) P_k^{g,h}(y) Q_{n-k}^g(x) \tag{1.7}$$

对于 $\frac{x\,h(k)}{y} > 1$ 或对于 $\frac{x\,h(k)}{y} < 1$ 对于 $1 \leq k \leq n-1$。

2. Proof of the Fundamental Transfer Lemma 1.6, Theorem 1.4, and Theorem 1.5

我们验证 $n = 1$ 和 $n = 2$的定理 1.4 和定理 1.5。对于 $n = 1$，基本传递引理显然成立；对于 $n = 2$，它归结为左右两边的项 $y - x$，因为 $h(2)P^{g}{}_{,2}{}^{h}(x) = Q^{g}{}_{,2}{}^{h}(x) = x(x + g(2))$。

令 $n = 1$。令 κ_1，$-\mu_1 > 0$ 和 $\mu_1 < 0$ 为任意正实数。则 $y < x < -\kappa_1$ 推出 (1.4)。令 $y < 0$。则 $-y > 0$ (1.5)。对于 $n = 1$，定理 1.5 的断言显然成立。

设 $n = 2$. 则任何 $\kappa_2 > g(2)$ 都适用. 设 $y < x < -\kappa_2$. 则我们得到 (1.4) 对于$m = 1$ 以及 (1.4) 对于 $m = 2$ 因为 $y \geq x$. 进一步 , 设 $y < -\kappa_2$. 则 (1.5) 对于 $m = 1$ 是显然的并且 (1.5) 对于 $m = 2$成立, 因为 $y < -\kappa_2 < -g(2)$. 充分且必要的是选择 μ_2 为 $-g(2) < \mu_2 < 0$. 则定理 1.5 成立 .

2.1. **基本传递引理的证明**。

引理*1.6*的证明。 为使证明清晰明了，我们首先假设所涉及的所有和在 $q=0$ 处都是正则的。我们有

$$\begin{aligned} x\sum_{k=1}^{\infty} g(k)\,q^k \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{g,h}(y)\,q^m &= \sum_{n=1}^{\infty} x \sum_{\substack{k\geq 1, m\geq 0\\ k+m=n}} g(k)\,P_m^{g,h}(y)\,q^{k+m} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{xh(n)}{y}\frac{y}{h(n)} \sum_{k=1}^{n} g(k)\,P_{n-k}^{g,h}(y)\,q^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{xh(n)}{y} P_n^{g,h}(y)\,q^n. \end{aligned}$$

因此，

$$\left(1-x\sum_{n=1}^{\infty} g(n)\,q^n\right)\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{g,h}(y)\,q^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{xh(n)}{y}\right)P_n^{g,h}(y)\,q^n.$$

在此，我们通过 $h(0)=0$ 扩展了算术函数 h 。由于

$$\left(1-x\sum_{n=1}^{\infty} g(n)\,q^n\right)\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{g}(x)\,q^n = 1,$$

我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{g,h}(y)\,q^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{xh(n)}{y}\right)P_n^{g,h}(y)\,q^n \sum_{m=0}^{\infty} Q_m^{g}(x)\,q^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{xh(k)}{y}\right)P_k^{g,h}(y)\,Q_{n-k}^{g}(x)\,q^n. \end{aligned}$$

比较最后一个幂级数的系数可得

$$P_n^{g,h}(y) = \sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{xh(k)}{y}\right)P_k^{g,h}(y)\,Q_{n-k}^{g}(x).$$

从最后一项求和中减去 $k=0$ 和 $k=n$ 的项得到(1.7)

$$\frac{xh(n)}{y}P_n^{g,h}(y) - Q_n^{g}(x) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{xh(k)}{y}\right)P_k^{g,h}(y)\,Q_{n-k}^{g}(x).$$

设 $n\geq 1$。我们可以截断所有涉及的和，从而得到(1.7)。因此， $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)\,q^n$ 在 $q=0$ 处的正则性并非必需。□

2.2. **定理 1.4 和定理 1.5 的证明**。

定理 *1.4* 的证明。 我们用数学归纳法证明该定理。基本情形 $n = 1$ 已经证明。接下来，令 $n > 1$ ，并假设定理对所有 $1 \leq n_0 < n$ 均成立。设给定 $\kappa_{n_0} > 0$，使得对每个 $1 \leq m_0 \leq n_0$ 和 $x < -\kappa_{n_0}$，都有：$(-1)^{m_0} Q^g_{m_0}(x) > 0$。根据归纳假设，对 $y < -\kappa_{n_0} H(n_0 - 1)$ 和 $1 \leq m_0 \leq n_0$，有：

$$(-1)^{m_0} P^{g,h}_{m_0}(y) > 0.$$

由（1.6）可得

$$\begin{aligned} & (-1)^n \left(\frac{xh(n)}{y} P^{g,h}_n(y) - Q^g_n(x) \right) \\ = & \sum_{n_0=1}^{n-1} \left(1 - \frac{xh(n_0)}{y} \right) (-1)^{n_0} P^{g,h}_{n_0}(y) (-1)^{n-n_0} Q^g_{n-n_0}(x) \geq 0 \end{aligned}$$

对于 $x < -\kappa_n \leq 0$ 和 $y \leq xH(n-1) \leq xH(n_0)$，对所有 $n_0 \leq n-1$ 均成立，因为

$$H(n_0) = \max\{h(n_0), H(n_0 - 1)\}.$$

这意味着

$$(-1)^n \frac{x\, h(n)}{y} P^{g,h}_n(y) \geq (-1)^n Q^g_n(x) > 0,$$

最后，定理得证。 □

定理 *1.5* 的证明。 设 $n \geq 2$ 已给定。设 $\frac{x\, h}{y}_{(k)} \geq 1$，其中 $1 \leq k \leq n-1$。那么对于每个 $1 \leq k \leq n-1$，项 $1 - \frac{x\, h}{y}_{(k)}$ 始终为负。由于 $h(n) \geq 1$，因此由 $|x| > |y|$ 可保证这一点。我们通过数学归纳法证明该定理。定理 1.5 对 $n = 1$ 和 $n = 2$成立。因此，设 $n \geq 3$ 和 $\mu_n < 0$ 已给定，使得对于 $\mu_n < x < 0$：对所有 $1 \leq k \leq n$， $Q^g_k(x) < 0$ 成立。于是，根据归纳假设， $P^{g}_{\cdot,k}{}^{h}(x) < 0$ 对$1 \leq k \leq n-1$ 成立。我们考察（1.7）。设 $\mu_n < y < 0$。设 x 已给定，使得 $\mu_n < x < y < 0$。由（1.7）可得

$$\frac{x\, h(n)}{y} P^{g,h}_n(y) - Q^g_n(x) \leq 0.$$

由于 $Q^g_n(x) < 0$，定理得证。 □

3. Final Remarks

我们先举一个例子，说明关于 $P^{g}_{\cdot,n}{}^{h}(x)$ 的零点区域，此前已知结果得到了改进。然后，我们陈述由基本传递引理推导出的一些恒等式。最后，我们重新表述莱默猜想，并将定理 1.4 应用于厄米特多项式 $H_n(x)$。

n	$\lvert x\rvert$	n	$\lvert x\rvert$
2	1.000000000	20	3.908878746
3	1.732050808	30	3.958353612
4	2.475342535	40	3.976255443
5	2.910743051	50	3.984682343
6	3.189361602	60	3.989307029
7	3.374909553	70	3.992114849
8	3.504161170	80	3.993946290
9	3.597512290	90	3.995206626
10	3.667001052	100	3.996110777

TABLE 4. $Q_n^g(x)$ 的零点的近似最大绝对值。

3.1. 例。 令 $g(n) = n$ （若 n 为奇数），并令 $g(n) = \frac{n}{2}$ （若 n 为偶数）。令 $h(n) = n$。由 [HN21] 可推得，对于 $\kappa = 5.71$，有

$$P_n^{g,h}(z) \neq 0 \text{ for all } |z| > \kappa\,(n-1).$$

数值实验表明， $\kappa = 4$ 似乎是可能的（图 3和表4）。我们注意到， $Q_n^g(z)$ 满足五项递推。从 [HNT20], 我们得到

$$Q_n^g(z) = z\,Q_{n-1}^g(z) + (z+2)\,Q_{n+2}^g(z) + z\,Q_{n-3}^g(z) - Q_{n-4}^g(z), \qquad n \geq 5,$$

初值为 $Q_1^g(z) = z$, $Q_2^g(z) = z^2 + z$, $Q_3^g(z) = z^3 + 2z^2 + 3z$, 以及 $Q_4^g(z) = z^4 + 3z^3 + 7z^2 + 2z$。

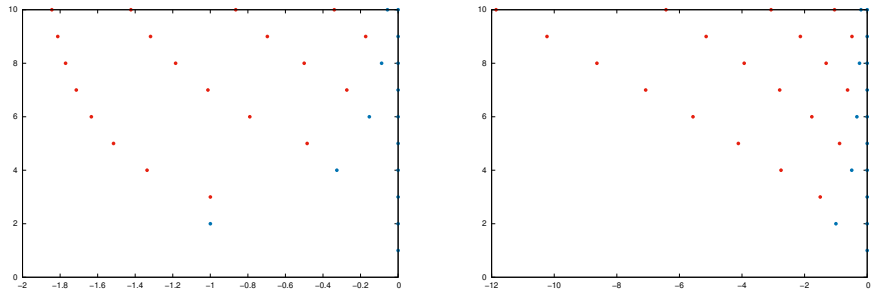


FIGURE 3. $Q_n^g(x)$ 和 $P_n^g(x)$ 的零点的实部，对于 $1 \leq n \leq 10$。这里蓝色表示该零点是实数，红色表示它不是实数。

以下令 $n \leq 100$。那么 -1 是最小实零点。定理 1.4 意味着， $P^{g,h}_n(z)$的所有实零点都大于或等于 $-(n-1)$。我们还看到， $\{Q_n^g(z)\}$ 的最大实零点单调递增并趋于收敛

趋于0。因此，定理1.5意味着，对于 β_n 最大的非平凡实零点$\{Q_m^g(z)\}_{m\le n}$，最大的非平凡实根 β_n 为 $\{P_n^g(z)\}_{m\le n}$ 满足

$$\tilde{\beta_n} \le \beta_n.$$

注意，由于 $Q_n^g(z)/z$ 且 n 奇数没有实零点，一般可以推断这蕴含着 $P_n^g(z)/z$ 也没有实零点。但一般情况并非如此。

反例： 令 $g(n) = \binom{\alpha n-1}{n-1}$ 对于 $\alpha \ge 1$。则

$$P_n^g(z) = \frac{z}{n!}\prod_{k=1}^{n-1}\left(z+(\alpha-1)\,n+k\right).$$

令 $\alpha = \frac{3}{2}$。则 $Q_3^g(z)/z$ 的零点不是实的，但 $P_3^g(z)/z$ 显然有两个实零点。

3.2. 恒等式。 令 F_n 为斐波那契数，其中 $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$,$F_3 = 2$, $F_4 = 3$。已知 $Q_n^{\mathrm{id}}(1) = F_{2n}$ 对于 $n \ge 1$ [BHN22]。我们从基本传递引理以及 $P_n^{\mathrm{id}}(z)$ 和 $Q_n^{\mathrm{id}}(z)$ 的特殊性质得到：

$$L_{n-1}^{(1)}(y) - F_{2n} = -\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{y}{k}+1\right)L_{k-1}^{(1)}(y)\,F_{2(n-k)}.$$

3.3.莱默猜想。 设 $\Delta(\omega) := q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$。那么，拉马努金$\tau$-函数由 $\Delta(\omega)$ 的傅里叶系数给出：

$$\Delta(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\,q^n.$$

Lehmer 猜想 $\tau(n)$ 永不消失。设 n 为最小的自然数，使得 $\tau(n) = 0$。则 n 是一个素数 [Le47]。此外，已知 Lehmer 的猜想对于 $n \le 10^{23}$ [DHZ14] 成立。

已知有几种莱默猜想的变体，尤其是在某些多项式 [On08] 的特殊值语境中。基于这一思想，我们提出：

莱默尔猜想（多项式版本）
对于所有 $n \ge 1$ 以及每个 $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{z}+\frac{k}{24}\right)\tau(k+1)\,Q_{n-k}^{\sigma}(z) \ne 0. \tag{3.1}$$

我们在表5中记录了 $Q_n^{\sigma}(-1)$的初始值，这使得验证 $z = -1$的(3.1)式变得十分容易。如果能用 $Q_n^{\sigma}(z)$的特殊值来表述勒默尔猜想，就会很有意思，正如 $z = -24$ 在D'Arcais多项式的情形中那样。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Q_n^\sigma(-1)$	-1	-2	1	2	4	-6	-5	4	1	18
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$Q_n^\sigma(-1)$	-13	-26	4	22	66	-76	-78	66	37	122

TABLE 5. $Q_n^\sigma(-1)$ 在 $1 \le n \le 20$ 时的值。

3.4. 厄米特多项式的零点界。我们用 $H_n(x)$ 表示由 ([Sz75], (5.5.4)) 定义的第n个厄米特多项式：

$$H_n(x) := n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!}.$$

我们有 $H_0(x) = 1$、$H_1(x) = 2x$、$H_2(x) = 4x^2 - 2$，以及 $H_3(x) = 8x^3 - 12x$。厄米特多项式是正交的。零点为实数、单根，并且彼此交错。定理1.4导出以下结果。我们还引用（[Sz75], (6.326)）。

推论3.1. 设 $n \ge 2$。则对于 $H_n(x)$ 的零点成立

$$|x| \le \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\sqrt{2n-2}.$$

证明. 设 $g(1) = g(2) = 1$ 且 $g(n) = 0$ 对 $n \ge 3$。则

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^g\left(-x^2\right) q^n = \left(1 - 2\left(x/2\right)\left(-xq\right) + \left(-xq\right)^2\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n\left(x/2\right)\left(-x\right)^n q^n.$$

因此，$Q_n^g(-x^2) = (-x)^n U_n(x/2)$。注意，$U_m(x/2) = 0$ 蕴含 $|x| \le 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$对所有 $m \le n$。这导致 $x^2 \le 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^2$。—
我们得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^g\left(-2x^2\right) q^n = \exp\left(2x\left(-xq\right) - \left(-xq\right)^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n\left(x\right)\left(-x\right)^n}{n!} q^n.$$

T因此，$P_n^g(-2x^2) = (-x)^n H_n(x) / (n!)$。定理 1.4 现在保证

$$2x^2 \le 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)^2 (n-1).$$

最后，$|x| \le \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\sqrt{2n-2}$。 □

注记。由（[Sz75], (6.326)）可知，$H_n(x)$ 的最大零点满足如下界$\sqrt{2n+1} - 6^{-1/2}(2n+1)^{-1/6} i_1$，其中 i_1 是艾里函数的最小正零点。

在我们的情形中，我们有

$$\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\sqrt{2n-2} = \sqrt{2n} - (2n)^{-1/2} + O\left(n^{-3/2}\right)$$

使用 Landau的 O 记号。我们从传递引理中得到的估计略弱一些，因为二阶项的指数为 $-1/2$ 而不是 $-1/6$。

确认 **致谢**。 我们感谢Schmeisser教授富有洞察力的评论 s.

References

[An99] G. E. Andrews：《分拆理论》。剑桥大学出版社，剑桥（1998）。[BCO22] J. Balakrishnan、W. Craig、K. Ono：Ramanujan τ 函数的 Lehmer 猜想变体。《数论杂志》237（2022），3–14。[BHN22] M. Benoumhani、B. Heim、M. Neuhauser：Morgan-Voyce 多项式系数的渐近正态性。arXiv:2204.11237 [math.NT].[Ch11] T. Chihara：《正交多项式导论》，Dover Publications，米尼奥拉（2011）。[Co74] L. Comtet：《高级组合学》。增订版，D. Reidel Publishing Co.，多德雷赫特（1974）。[DA13] F. D'Arcais：级数展开。《数学中间刊》20（1913），233–234。[DDMP05] A. Dabholkar、F. Denef、G. Moore、B. Pioline：小型黑洞的精确计数。《高能物理杂志》2005，文章编号：096（2005）。[DHZ14] M. Derickx、M. Hoeij、J. Zeng：模曲线的伽罗瓦表示与方程的计算 $X_H(\ell)$。arXiv:1312.6819v2 [math.NT].[DD22] A. Dogaru、R. Delgado：小耦合下的圆柱量子场论。《高能物理杂志》2022，文章编号：110（2022）。[Do16] B. Doman：《经典正交多项式》。World Scientific，哈肯萨克（2016）。[El05] S. Elaydi：《差分方程导论》。数学本科教材，Springer-Verlag，纽约（2005）。[Ga87] W. Gawronski：Hermite、Laguerre 和 Jonquière 多项式零点的渐近分布。《逼近理论杂志》50（1987），214–231。[Ha10] G. Han：Nekrasov–Okounkov 钩长公式：推广、初等证明及应用。《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》60第1期（2010），1–29。[HLN19] B. Heim、F. Luca、M. Neuhauser：由算术函数得到的多项式的递推关系。《国际数论杂志》15第6期（2019），1291–1303。[HN20a] B. Heim、M. Neuhauser：Dedekind η 函数与 D'Arcais 型多项式。《数学科学研究》7，文章编号：3（2020）。[HN20b] B. Heim、M. Neuhauser：Ramanujan τ 函数的符号变化。载于 Ramakrishnan, B.（编）等：《模形式与数论相关主题》。2018年12月10–14日在印度科泽科德举行的国际数论会议（ICNT 2018）论文集。Springer 数学与统计学论文集340，Springer，新加坡（2020），89–100。[HN21] B. Heim、M. Neuhauser：与算术函数相关联的多项式零点的增长。《汉堡大学数学研讨会论文集》91（2021），305–321。[HNT20] B. Heim、M. Neuhauser、R. Tr¨oger：递归定义多项式的零点。《差分方程与应用杂志》26第4期（2020），510–531。

[HNW18] B. Heim、M. Neuhauser、A.Weisse：关于 Dedekindeta 函数幂的傅里叶系数消失的记录。《数论研究》4，文章编号：32（2018）。[Ko04] B.Kostant：欧拉乘积的幂与复单李代数的交换子代数。《数学发明》158（2004），181–226。[Le47] D.Lehmer：Ramanujan的 $\tau(n)$ 的消失。《杜克数学杂志》14（1947），429–433。[NO06] N. Nekrasov、A.Okounkov：Seiberg–Witten 理论与随机分拆。载于 Etingof, Pavel（编）等，《数学的统一性》。为纪念I. M.Gelfand九十寿辰而作。2003年 8 月 31 日至9 月4 日在美国马萨诸塞州剑桥举行的会议论文集。《数学进展》244，Birkhäuser，波士顿（2006），525–596。[Ne55] M. Newman：某些模形式系数的一个恒等式。《伦敦数学学会杂志》30（1955），488–493。[On04] K. Ono：《模性之网：模形式系数与 q级数的算术》。《CBMS 数学区域会议丛书》102，美国数学学会，普罗维登斯（2004）。[On08] K. Ono：关于 Ramanujantau 函数的 Lehmer猜想。《印度数学学会杂志》百年特刊（2008），149–163。[RS02] Q. I. Rahman、G. Schmeisser：《多项式解析理论》。Clarendon 出版社，牛津（2002）。[Se85] J.Serre：关于 η 的幂的稀疏性。《格拉斯哥数学杂志》27（1985），203–221。[Sz75] G. Szegő：《正交多项式》，美国数学学会《专题出版物》23，美国数学学会，普罗维登斯（1975）。[Zh22] S.Zhang：接近$(1-z)^{-1}$ 的无穷级数幂的对数凹性。《数论研究》8，第1 期，文章编号66（2022）。[ZB22] Y. Zouareg、M. Benoumhani：关于Heim和Neuhauser 提出的一个猜想：由模形式导出并与斐波那契多项式相关的某些多项式。《Ramanujan 杂志》58，第1 期（2022），183–201。

Faculty of Mathematical and Natural Sciences, Mathematical Institute, University of Cologne, Weyertal 86–90, 50931 Cologne, Germany电子邮箱：bheim@uni-koeln.deLehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen University, 52056 Aachen, Germany电子邮箱：bernhard.heim@rwth-aachen.de
Kutaisi International University, 5/7, Youth Avenue, Kutaisi, 4600 Georgia Lehrstuhl A für Mathematik, RWTH Aachen University, 52056 Aachen, Germany电子邮箱：markus.neuhauser@kiu.edu.ge 电子邮箱：robert@silva-troeger.de