arXiv:2304.02722v2 [math.DG] 5 Mar 2025

同痕类上规定平均曲率泛函极小化子的最优正则性

LORENZO SARNATARO 和 DOUGLAS STRYKER

Abstract. 我们证明了同痕类上规定平均曲率泛函极小化子的最优 $C^{1,\,1}$ 正则性。作为应用，对于范数至多为 0.547 的开稠密集中的指定函数，我们找到标准三维球面上的一个具有指定平均曲率的嵌入球面。

1. Introduction

给定一个黎曼流形（$M^n,\ g$）和一个函数 $h\colon M \to \mathbb{R}$，若一个双侧浸入$\Sigma^{n-1} \to M$的平均曲率满足 $H_\Sigma = h|_\Sigma \cdot \nu_\Sigma$，则称其具有指定平均曲率 h，其中 ν_Σ 是沿着 Σ的连续单位法向量场。规定平均曲率超曲面的存在性问题一直是几何分析研究的重要动力来源。

一个重要的观察是，h预设平均曲率超曲面是 h规定平均曲率泛函的临界点。

$$\mathcal{A}^h(\Omega) := \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) - \int_\Omega h\, d\mathcal{H}^n, \tag{1.1}$$

其中$\Omega \subset M$是具有光滑边界的开集。正如在对极小超曲面和面积泛函的研究中一样，这一观察使得可以利用变分技术来生成 h-预设平均曲率超曲面。

The simplest variational technique to produce critical points of a functional is to minimize the functional over some nontrivial class. In ambient dimensions 3 through 7, classical work of [FF60], [Fle62], [DG65], [Alm66], [Sim68], and [HS79] guarantees that any minimizer of area in a Riemannian manifold over integral currents with a fixed boundary is a smooth embedded minimal hypersurface. In the same dimensions, these results have been adapted by [Mor03] (see [ZZ20, Theorem 2.2]) to the prescribed mean curvature setting, where the minimization of $\mathcal{A}^h$ occurs over Caccioppoli sets that are allowed to differ from a fixed initial Caccioppoli set in a sufficiently small region $U \subset M$. In this setting, the boundary of any minimizer in U is a smooth embedded h-prescribed mean curvature hypersurface.

尽管这一正则性理论非常强大，但务必记住，进行极小化时所考虑的类非常庞大。特别是，同一类中的元素可能具有任意复杂的拓扑。因此，我们无法对极小化子的拓扑得出任何一般性结论，而对于任何几何问题而言，这原本都是一种自然的期待。

In the case of the area functional (i.e. $h = 0$) in 3-manifolds, there has been significant work studying the regularity of minimizers of area over smaller classes with controlled topology. A major breakthrough was the work of [AS79], where minimizers of the area functional in $\mathbb{R}^3$ over embedded disks with certain fixed boundaries are shown to be smooth embedded minimal surfaces. By an ingenious procedure to simplify the topology of elements in a minimizing sequence, [MSY82] used the regularity of [AS79] to show that minimizers of the

area functional in a closed 3-manifold over an isotopy class[1] are smooth embedded minimal surfaces.

尽管 [AS79] 和 [MSY82] 的正则性理论已成功应用于在三维流形中构造具有受控拓扑的极小曲面（例如参见 [Smi83], [CDL03], [DLP10], [HK19], [Ket22]），但这些技术尚未推广到泛函 $\mathcal{A}^h$。

在本文中，我们将 [AS79] 和 [MSY82] 的思想推广到 $\mathcal{A}^h$ 泛函。对于一个开集 $U \subset M$，令 $\mathcal{I}(U)$ 表示满足以下条件的同痕集合 $\phi\colon [0,1] \times M \to M$。

- $\phi(t,\cdot)\colon M \to M$ 是一个光滑微分同胚，
- $\phi(0,\cdot) = \mathrm{id}$，
- 和 $\phi(t,x) = x$ 对于 $x \notin U$.

我们的目标是推导该问题的极小化子的正则性

$$\inf_{\phi \in \mathcal{I}(U)} \mathcal{A}^h(\phi(1,\Omega_0)).$$

我们推导出以下正则性结论。

Theorem 1.1. *Let $h : M \to \mathbb{R}$ be a smooth function, and let $c := \sup_M |h|$. Let $U \subset M$ be a sufficiently small (see §14 for a precise definition) open set with C^1 boundary, and let $\Omega_0 \subset M$ be an open subset with smooth boundary having tranverse intersection with ∂U. Let $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{I}(U)$, $\Omega_k := \phi_k(1,\Omega_0)$, and $\Sigma_k := \partial\Omega_k \cap U$ be a sequence satisfying*

$$\mathcal{A}^h(\Omega_k) \leq \inf_{\phi\in\mathcal{I}(U)} \mathcal{A}^h(\phi(1,\Omega_0)) + \varepsilon_k \tag{1.2}$$

对于 $\varepsilon_k \to 0$。则存在一个变分流形 V、一个开集 $\Omega \subset U$，以及一个子序列（未重新标记），使得

$$\mathbf{1}_{\Omega_k \cap U} \xrightarrow{L^1} \mathbf{1}_\Omega, \quad D\mathbf{1}_{\Omega_k\cap U} \overset{*}{\rightharpoonup} D\mathbf{1}_\Omega, \quad \mathbf{v}(\Sigma_k) \rightharpoonup V.$$

V is an integer rectifiable varifold with c-bounded first variation. For every $x \in \mathrm{spt}\|V\|$, we have $\Theta^2(\|V\|,x) = n_x \in \mathbb{N}$. If $h(x) \neq 0$, then $n_x \in \{1\} \cup 2\mathbb{N}$. For every $x \in \mathrm{spt}\|V\|$, there is a neighborhood W_x of x so that the following hold.

- $V \llcorner G(W_x, 2) = \sum_{l=1}^{n_x} \mathbf{v}(N_l, 1)$，其中 $N_l \subset W_x$ 是一个 $C^{1,1}$ 曲面，具有 c-有界的一阶变分。此外，对于任意 l、$l' \in \{1,\dots,n_x\}$，每个 N_l 都位于 $N_{l'}$ 的一侧，并在 x 处与其相切相交。
- 如果 $n_x = 1$，那么 $-\|V\| \llcorner W_x = |D\mathbf{1}_\Omega| \llcorner W_x$，$-V \llcorner G(W_x, 2) = \mathbf{v}(N, 1)$，其中 $N \subset W_x$ 是关于集合 $\Omega \cap W_x$ 具有 h 指定平均曲率的光滑稳定曲面。
- *If $h(x) \neq 0$ and $n_y = 2n$ for all $y \in \mathrm{spt}\|V\| \cap W'_x$ for an open set $W'_x \subset W_x$ containing x, then $V \llcorner G(W'_x, 2) = \mathbf{v}(N, 2n)$, where $N \subset W'_x$ is a smooth stable minimal surface. Moreover, $\Omega \cap W'_x = W'_x \setminus N$ if $h(x) > 0$, and $\Omega \cap W'_x = \varnothing$ if $h(x) < 0$.*
- *If $h(x) \neq 0$, $n_x = 2n$, and there is a sequence $x_j \to x$ with $x_j \in \mathrm{spt}\|V\|$ and $n_{x_j} \neq 2n$, then $n = 1$ and the surfaces N_1, $N_2 \subset W_x$ additionally satisfy that the generalized mean curvature of N_1 points towards N_2 and vice versa. Moreover, the set $\Gamma = \partial(N_1 \cap N_2) \cap W_x$ is locally contained in a $C^{1,\alpha}$ curve and satisfies $\mathcal{H}^1(\Gamma) < +\infty$.*

[1]我们强调，同痕保持任意子流形的拓扑。[2]Yau [声称有一项类似的结果；关于这篇论文的讨论，见引言后文01]。

Suppose additionally that U is a sufficiently small geodesic ball. Then there is a neighborhood Y of ∂U with $V \llcorner G(Y,2) = \mathbf{v}(N,1)$, where $N \subset Y$ is a smooth stable surface of prescribed mean curvature h with respect to Ω satisfying $\partial N = \partial\Sigma$.

在第3节中，我们详细给出说明这一正则性结论是最优的例子。值得注意的是，[MSY82] 曾声称，将其结果推广到常平均曲率情形后，可得到比定理1.1更强的正则性结论，见 [Yau01, 定理 2.1], ，但未提供详细证明。看来，第3.2节中的例子为这一说法提供了一个反例。无论如何，这个例子揭示了沿着 [AS79] 和 [MSY82]的思路进行证明时遇到的一个根本障碍。

注1.2. 在开创性工作中，[WZ23a] 证明了在 S^3 上的一个一般度量中存在 4 个嵌入极小球面，从而解决了极小曲面理论中的一个重要且由来已久的猜想。[WZ23a] 的证明大量运用了定理1.1，以及我们在本文中发展的证明新要素。

1.1. **Application to existence in the 3-sphere.** Before unpacking the ideas of our proof of Theorem 1.1, we present a modest application of the theory to the existence of embedded h-prescribed mean curvature 2-spheres in some metrics on S^3. Since any embedded 2-sphere in S^3 can be moved by isotopies to a constant map, minimization techniques fail to produce nontrivial examples. Hence, we require a min-max variational approach.

为了阐明我们的结果，我们回顾 Yau 提出的以下问题。

问题 1.3 ([Yau82，问题 59])。对于哪些光滑函数 $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$，存在一个相对于平坦度量具有指定平均曲率的嵌入球面 h？

对于依靠更多偏微分方程技术来推进问题 1.3（及相关问题）的研究，我们请参阅 [BK74], [TW83], [Ger98], [Ye91], [PX09], 以及 [EFPS24]。在极小极大框架之外，[Yau97]也取得了一些进展。关于不具备拓扑控制的情况下对问题 1.3 的研究进展，请参阅 [Maz22]。

由于非紧环境空间会给极小极大理论带来独特的困难，我们考虑 S^3 中的类似问题。

问题 1.4。对于哪些光滑函数 h: $S^3 \to \mathbb{R}$ 存在具有指定平均曲率 h的嵌入球面（相对于圆度量）？

For the area functional, a min-max variational framework was developed by [Alm65], [Pit81], and [SS81] to produce a closed embedded minimal hypersurface in any closed Riemannian manifold of dimension between 3 and 7. These techniques have been refined to produce an abundance of closed minimal hypersurfaces (see [MN17], [LMN18], [IMN18], [MNS19], and [Son23]). This approach was successfully adapted to the functional $\mathcal{A}^h$ in [ZZ19] and [ZZ20]. In these works, min-max is carried out over similarly large classes of hypersurfaces without controlled topology, and the regularity theory relies on the classical regularity theory for minimizers discussed earlier in the introduction. Hence, we cannot draw any general conclusions about the topology of the resulting minimal hypersurfaces.

An alternative min-max approach in the minimal hypersurfaces case was developed by Guaraco ([Gua18]) and Gaspar-Guaraco ([GG16], [GG19]) using phase transitions for the Allen-Cahn equation, building on the regularity theory of Hutchinson-Tonegawa [HT00], Tonegawa [Ton05] and Tonegawa-Wickramasekera [TW12]. (We refer the reader to [Dey22] for a comparison between the Almgren-Pitts theory and the Allen-Cahn theory.) Similarly,

[BW20] developed an analogue of the Allen-Cahn min-max approach for prescribed mean curvature hypersurfaces, building on the regularity theory developed in [BW18] and [BW19]. We emphasize that [BW20] only applies to nonnegative prescribing functions. As above, the topology of the produced hypersurfaces from these techniques is uncontrolled.

A min-max approach for the area functional in closed 3-manifolds that controls the genus of the produced minimal surface, called Simon-Smith min-max, was developed by [Smi83] (see [CDL03] and [DLP10]), building on the regularity theory of [AS79] and [MSY82]. In particular, it follows from these works that every metric on S^3 admits an embedded minimal sphere. For progress towards the existence of more embedded minimal spheres using this approach, we refer the reader to [HK19].

作为我们正则性理论的一个应用，我们沿着Simon-Smith 的思路，为 $\mathcal{A}^h$泛函发展了一种极小极大方法。特别地，我们对问题 1.4 给出了如下部分答案。

Theorem 1.5. *There is an open dense set $\mathfrak{P} \subset \{h \in C^\infty(S^3) \mid |h| \leq 0.547\}$ so that there is an embedded sphere with prescribed mean curvature h with respect to the round metric for any $h \in \mathfrak{P}$. In particular, $\{h \in C^\infty(S^3) \mid 0 < h \leq 0.547\} \subset \mathfrak{P}$.*

对开稠密集的限制与 [ZZ20]中的相同限制一致。我们回顾一下，唯一延拓是极小极大曲面正则性理论中的一个重要组成部分。由 [ZZ20、命题3.8和推论3.18] 可知，对于包含所有正函数的指定函数开稠密集，唯一延拓成立。

将函数的 L^∞ 范数限制为不超过0.547，是更为重要的假设。这一限制源于，相较于面积泛函而言，泛函 (1.1) 在同痕上的极小化者所对应的更为精细的正则性理论，而面积泛函则具有更简洁的正则性结论。我们强调，我们的正则性理论是尖锐的，因此，使用本文所发展的技术，尚不清楚如何将存在性理论推广到这类指定函数之外。此外，对于这一设定下较大的指定函数，我们尚未发现任何反例，因此该问题仍然悬而未决。

在 S^3 上的圆度量这一设定之外，自然会考虑以下相关问题。

问题 1.6. 对于 S^3 上的哪些度量 g，以及哪些常数 $c \in \mathbb{R}_{>0}$，存在一个关于度量 g 具有常平均曲率 c 的嵌入球面？[3]

在极小极大方法的框架之外，关于齐性三维流形中常平均曲率浸入球面的存在性，已有相当大的进展（参见 [DM13],[Mee13], [MMPR21], 和 [MMPR22]）。

[SU81] 提出了一种基于狄利克雷能量的极小极大方法，用以构造分支浸入极小球面。[CZ23]，将这一方法推广到常平均曲率的情形，并证明 S^3 上的每个度量都允许存在一个分支浸入球面，使其对几乎每个 $c \in \mathbb{R}$ 都具有常平均曲率 c。然而，这些方法所构造的分支浸入是否是真正的浸入尚不清楚，更不用说嵌入了。

Using our regularity theory, we provide the following partial answer to (1.6).

[3] 作为参考， [RS20] 的引言中猜想，对于任意 c 以及任何具有正截面曲率的度量 g，1.6 都有肯定的答案。

Theorem 1.7. *There are explicit constants $\varepsilon_0 > 0$ and $c_0 > 0$ so that if (S^3, g) is the induced metric of a graph over the round 3-sphere $\mathbf{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \subset \mathbb{R}^N$ with C^2 norm bounded by ${\varepsilon_0}^4$ and $0 \leq c \leq c_0$, then (S^3, g) admits an embedded sphere with constant mean curvature c.*

我们指出，定理 1.5 和 1.7 的一个关键特点是，它们对指定函数和度量的限制是明确的。事实上，我们预期，借助隐函数定理论证，并仅利用成熟的极小球面存在性理论，可以得到这些定理的某些版本，只是其中的常数不显式。与此类结果不同，我们的工作给出了可实际检验的存在性判据。

1.2.正则性证明的思路。1.1的证明遵循与 [AS79]和 [MSY82]相同的策略。为清晰起见，我们概述 [AS79] 和 [MSY82], 的方法，然后重点说明其中的关键差异。

(1) *Reduce the problem of minimizing area in an isotopy class to the problem of minimizing area over disks.* In [MSY82], a procedure called γ-reduction is introduced. In essence, γ-reduction is used to delete small necks that either generate nontrivial topology or separate large components. By applying the γ-reduction procedure a maximal number of times to a minimizing sequence for area over isotopies (and checking that the limit surface does not change), [MSY82] use the γ-irreducibility property to show that the new sequence is a minimizing sequence for area over disks in any small ball.

(2) 将圆盘上的面积极小化问题转化为圆柱内“堆叠圆盘”上的面积极小化问题。通过在圆盘上面积的极小化序列中、极限具有切平面的点处进行放大， [AS79] 利用面积比较估计，舍弃小球内不接近切平面的连通分支，而不改变极限。因此，只需研究固定圆柱内具有同伦非平凡边界的圆盘不交并的面积极小化序列。我们将这种排列中的圆盘称为“堆叠圆盘”。

(3) 将圆柱中多个堆叠圆盘的面积最小化问题，化归为圆柱中单个堆叠圆盘的面积最小化问题。 为了从堆叠圆盘排列中的多个圆盘中分离出一个圆盘， [AS79]提出了一种简单的方法，可以在不增加面积的情况下将相交的圆盘分离开来。这样，只需研究仅含一个圆盘的堆叠圆盘面积极小化序列。

(4)由 *Allard*正则性定理得出结论。 对于具有一个圆盘的堆叠圆盘上的面积极小化序列，很容易得到面积的良好上下界。这些估计使 [AS79] 能够利用 [All72]的正则性定理推导出极限的光滑正则性。

步骤（1）和（2）经过一些技术性修改后同样适用于 $\mathcal{A}^h$ 。例如，我们经常采用以下基本思想。在 $\mathcal{A}^h$ 情形下，与面积泛函情形相比，不等式中会多出一个体积项。我们利用等周不等式将体积项吸收到面积项中。所得不等式与面积泛函情形中的相应不等式相似，只是系数略差一些。

The essential difficulty is adapting steps (3) and (4). To highlight the key difference from the area functional, consider the case illustrated in Figure 1. In this case, we have a stack of two disks in a cylinder which is the boundary of the disjoint union of the set above the top

[4]这意味着（S^3, g）是 $\{x + f\ (x)$ 的诱导度量 $\mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,\ x_5, \ldots, x_N = 0\}$其中 $N \geq 4$ 和 $f : S^3 \to \mathbb{R}^N$ 满足 $\|f\|_{C^2} \leq \varepsilon_0$。

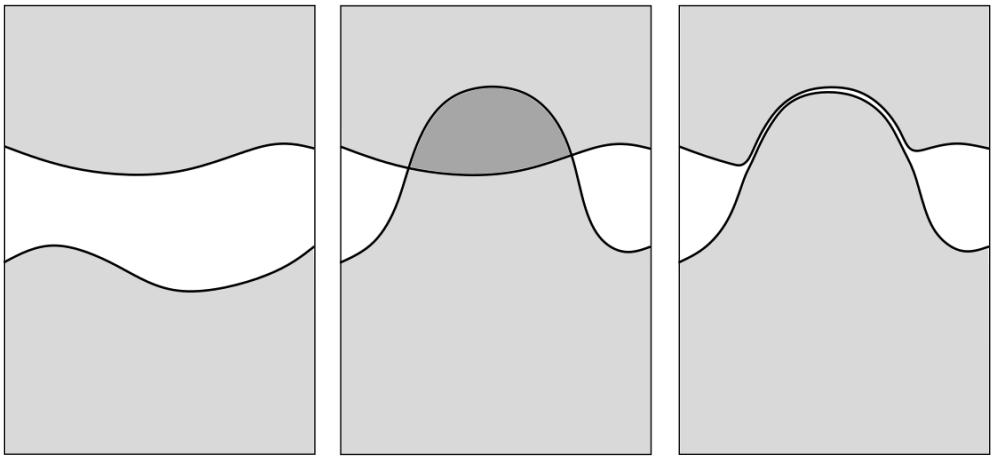

FIGURE 1. 左图描绘了两个圆盘的初始堆叠。中图描绘了与顶部圆盘相交的底部圆盘的替换。右图描绘了圆盘可能的一种解缠方式。

disk and the set below the bottom disk. If we replace the bottom disk with a disk that passes through the top disk, the volume between the two disks is now covered twice. So, no matter how we disentangle these intersecting disks, the volume that was covered twice can now only be covered once. Hence, any disentangling procedure will affect $\mathcal{A}^h$ in a complicated way, unlike the area functional.

在我们的证明过程中，我们发展了步骤(3)和(4)的两个较弱版本。这些步骤的弱版本结合起来，可以推导出具有次优 $C^{1,\alpha}$正则性的定理1.1。

第一个弱版本。在步骤 (3) 和 (4) 的这个版本中，我们推导出堆叠圆盘构型中每个圆盘极限的 $C^{1,\alpha}$ 正则性。

(3') *Each disk in a stacked disk arrangement minimizing $\mathcal{A}^h$ is itself minimizing for $\mathcal{A}^{\tilde{h}}$.* Using a delicate disentanglement procedure, we find that the limit of each disk is minimizing for $\mathcal{A}^{\tilde{h}}$, where $\tilde{h}$ is a measurable function bounded by $\sup |h|$ that depends on the limit. We emphasize that $\tilde{h}$ cannot be chosen to be continuous in general.

(4') *Conclude by Allard's regularity.* Using the same area estimates as step (4), we can apply the theorem of [All72]. However, the first variation of the limit is only known to be L^∞ by step (3'), so the limit of each disk is $C^{1,\alpha}$.

第二个弱版本。在步骤 (3)和 (4) 的这个版本中，在 h 为正的情况下，我们确定极限在哪些地方是光滑的重数一 h-指定平均曲率曲面，以及在哪些地方是光滑的偶数重数极小曲面。

(3") *Reduce the problem of minimizing $\mathcal{A}^h$ over many stacked disks in a cylinder to the problem of minimizing $\mathcal{A}^h$ over stacked disks with only one or two disks.* When h has a sign, it is easier to keep track of volumes under disentanglement. Similar in spirit to step (3) from [AS79], we use this observation in combination with our disentanglement procedure to decompose large stacks of disks into units consisting of only one or two disks (depending on orientations).

(4") *Conclude by Allard's regularity.* The case of only one stacked disk now follows exactly as in step (4) from [AS79], where we find that the limit is a smooth embedded h-prescribed mean curvature surface. In the two stack case, if the limits of the two disks agree on some open set, we see that the limit is stationary. We then follow step (4) from [AS79] to find that the limit is a smooth embedded minimal surface with multiplicity two.

After deducing the $C^{1,\alpha}$ version of Theorem 1.1, we use some tools from the theory of free boundary problems to upgrade the regularity of our minimizers to $C^{1,1}$. Indeed, we can show that minimizers locally solve an n-membrane problem for a quasilinear elliptic operator (see [VC74], [Sil05] and [SY19] for more background), to which the recent results of [WZ23b] apply.

1.3. 3-球面中存在性证明的思路。将 [CDL03] 和 [DLP10] 的极小极大方案推广到我们的情形中，存在一些关键困难，尽管大部分内容仍保持不变。唯一延拓和强紧性是两大障碍。

在经典的极小极大情形中，针对零平均曲率或指定平均曲率曲面的唯一延拓发挥着关键作用，可将迭代替换拼接起来以证明正则性。然而，对于正则性达到定理1.1所述水平的曲面，唯一延拓并不成立（例如，一个重数为二的极小曲面可能突然分裂成两个指定平均曲率曲面）。

Ignoring the full power of our regularity theory, we overcome the unique continuation issue by finding situations in which min-max solutions and replacement varifolds have density one everywhere. In this case, the regularity of Theorem 1.1 is the same as in the Almgren-Pitts prescribed mean curvature setting (e.g. smooth stable surfaces with prescribed mean curvature). Unique continuation then applies (assuming the prescribing function is sufficiently nice).

To achieve density one, we make two observations about varifolds in the round 3-sphere. First, a varifold limit of a min-max sequence for the $\mathcal{A}^h$ functional has a mass upper bound (in terms of a bound on the prescribing functional) by comparing with the optimal sweepout for the area functional. Second, a monotonicity formula for the Willmore energy in Euclidean space due to [Sim93] and [Top98] (suitably modified for the varifold setting) gives a lower bound for the mass of a varifold in $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ with a point of density at least two (in terms of a bound on the first variation). These two bounds contradict when the prescribing function is bounded in absolute value by 0.547.

Another essential ingredient in both the regularity theory and genus bounds is a strong compactness theory for minimizers. In the more classical settings, this strong compactness follows from curvature estimates for stable minimal surfaces. Since we only expect $C^{1,1}$ regularity in general, this approach requires special attention. In fact, there is an important and subtle step in the standard point picking contradiction argument for the curvature estimates of stable minimal surfaces that uses the Schauder estimates to upgrade from $C^{1,\alpha}$ convergence to C^2 convergence. This approach manifestly fails in our setting, because minimizers are not even C^2. Instead, we use a $C^{1,1}$ estimate of [WZ23b] for the n-membrane problem that allows us to close the usual point picking argument. This approach supplies a sufficiently strong compactness theorem for the rest of the regularity theory and genus bounds.

1.4. **Outline of the paper.** In §2, we establish notations and conventions for the rest of the paper. In §3, we carry out the details of two illustrative examples. In Part 1, we modify the arguments of [AS79] (e.g. minimizing area over disks) to the the prescribed mean curvature setting. In Part 2, we modify the arguments of [MSY82] (e.g. minimizing over isotopy classes) to the prescribed mean curvature setting, and prove Theorem 1.1. In Part 3, we develop a strong compactness theory for minimizers with only $C^{1,1}$ regularity. In Part 4, we apply the above regularity theory in the Simon-Smith min-max program to prove Theorems 1.5 and 1.7.

1.5. **致谢**。作者谨向导师 Fernando Cod´a Marques 致谢，感谢他提出这一课题，并定期与作者讨论相关问题。作者还要感谢 Camillo De Lellis 在本研究完成期间解答了若干关键问题，并感谢 Ovidiu Savin 和 Hui Yu 对膜问题提出了有益见解。作者感谢 Xin Zhou、Daniel Ketover 和 Costante Bellettini 围绕本研究所进行的启发性讨论。作者感谢 Paul Minter、Zhihan Wang 和 Thomas Massoni 帮助解决了各种技术问题。最后，作者感谢 Zhichao Wang 和 Xin Zhou 指出了 §11 原始版本中的一个疏漏，并分享了他们的工作 [WZ23b], ，同时感谢匿名审稿人提出的若干意见，使本文的阐述更加清晰。

D.S. 获得了 NDSEG 奖学金资助。

2. Notation and Conventions

- $\mathbb{B}$ 表示 $B_1^{\mathbb{R}^3}(0)$。
- $\mathbb{D}$ 表示 $B_1^{\mathbb{R}^2}(0)$。
- $G(U, 2)$ 表示集合 $U \subset M$ 上切二维平面的格拉斯曼流形。
- $\mathcal{I}(U)$ 是同痕 ϕ 的集合： $[0,1] \times M \to M$ 满足
$$\phi(0,\cdot) = \mathrm{id} \quad \text{and} \quad \phi(t,\cdot)|_{M\setminus U} = \mathrm{id}.$$
- $\mathcal{H}^n$ 表示（M, g）上的 n维豪斯多夫测度。
- $\mathcal{A}^h$ 表示 h-指定平均曲率泛函；即，对于 h： $M \to \mathbb{R}$ 以及有限周长集 $\Omega \subset M$，我们定义
$$\mathcal{A}^h(\Omega) := \mathcal{H}^2(\partial\Omega) - \int_\Omega h \, d\mathcal{H}^3.$$
- $\mathbf{v}(N, m)$表示与一个 C^1 曲面 $N \subset M$ （带有重数）$m \in \mathbb{N}$相关联的变分流形。
- $\delta V(X)$ 是关于向量场 X的变分流形 V 的一阶变分。在 V 具有有界一阶变分的情况下，我们采用以下约定
$$\delta V(X) = \int_{G(M,2)} \mathrm{div}_\pi X \, dV(x,\pi) = \int_M X \cdot H_V \, d\|V\|,$$
其中， H_V 是 V 的广义平均曲率向量。我们注意到，按照这一约定，单位圆球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 的平均曲率指向单位球外部，长度为 2。
- $V_k \rightharpoonup V$ 表示按变分流意义的收敛。
- $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ 表示按 [Mag12, §4.3] 意义下的弱星收敛。
- $[\Sigma]$ denotes the integer 2-current associated to an oriented surface Σ.

- [Ω] denotes the integer 3-current associated to a set of finite perimeter Ω, oriented so that ∂[Ω] is the integer 2-current associated to ∂Ω with orientation given by the outward pointing unit normal.
- $\mathbb{M}(T)$ 表示一个整流的质量。
- d_U 表示在 M 中到 U 的距离函数。
- $U(\theta)$ 表示集合 $\{x \in M \mid d_U(x) < \theta\}$。
- U_ξ 表示集合 $\{x \in U \mid d(x, \partial U) > \xi\}$。

3. Examples

3.1. 预设平均曲率的失效。这里我们提供一类一般性的例子，其中任意极小化序列的极限都不具有指定平均曲率。

令 $M^3 = S^1 \times \Sigma$，其中 Σ 是一个闭曲面。令 g 为 M 上的任意度量，并令 $h\colon M \to \mathbb{R}$ 任意正函数。令 $\Omega_0 := I \times \Sigma \subset M$，其中 I 是 S^1 因子中的一个开区间。令 Σ_1 和 Σ_2 为 $\partial \Omega_0$, 的连通分支，它们是与 $\{0\} \times \Sigma \subset M$ 属于同一同痕类的嵌入曲面。我们定义

$$m_0 := \inf_{\phi \in \mathcal{I}(M)} \mathcal{H}^2(\phi(1, \Sigma_1)) = \inf_{\phi \in \mathcal{I}(M)} \mathcal{H}^2(\phi(1, \Sigma_2)).$$

通过分别处理面积项和体积项，我们看到

$$\inf_{\phi \in \mathcal{I}(M)} \mathcal{A}^h(\Omega_0) \geq 2m_0 - \int_M h.$$

此外，通过取一个满足条件的序列，可以达到这个下界。

$$\mathbf{1}_{\phi_k(1,\Omega_0)} \xrightarrow{L^1} \mathbf{1}_M$$

and

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{H}^2(\phi_k(1, \Sigma_1)) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}^2(\phi_k(1, \Sigma_2)) = m_0.$$

根据 [MSY82], ，边界的变分流形极限是一个重数为 2 的稳定极小曲面，因此不具有指定平均曲率 $h > 0$。

3.2. 光滑性的失效。我们给出一个例子，其中任意极小化序列的极限都不是 C^2。这个例子是用于证明正则性的“堆叠圆盘”极小化问题的原型，该问题已在引言中概述。因此，这个例子中的光滑性失效揭示了一般情形下光滑性失效的根本原因。

设 $U := B_1^{\mathbb{R}^2}(0) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^3$。令

$$\Omega_1 := B_1^{\mathbb{R}^2}(0) \times (-1, -\varepsilon) \text{ and } \Omega_2 := B_1^{\mathbb{R}^2}(0) \times (\varepsilon, 1).$$

命题 3.1. 问题

$$\inf_{\phi \in \mathcal{I}(U)} \mathcal{A}^c(\phi(1, \Omega_1))$$

具有唯一的极小化者，其在 U 中的边界是半径为 $2/c$ 、边界为 $\partial U \cap \{x_3 = -\varepsilon\}$ 的向上弯曲球冠。

证明。我们采用校准技术，参见 [CM11，引理1.1。1]

Let Σ^* denote the surface of the upward curved spherical cap of radius $2/c$ with boundary $\partial U \cap \{x_3 = -\varepsilon\}$. Let $\Omega_1^* \subset U$ be the set below Σ^* in U. It is clear that $\Omega_1^* = \phi^*(1, \Omega_1)$ for some $\phi^* \in \mathcal{I}(U)$.

Note that Σ^* is the graph of a function u over $B_1^{\mathbb{R}^2}(0)$. Moreover, u satisfies the mean curvature equation

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = -c.$$

令 ω 为给定的 2-形式

$$\omega(X,Y) = \det(X,Y,\nu),$$

其中

$$\nu := \frac{(-u_x,-u_y,1)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}.$$

根据 [CM11 中的计算，引理1.1.1], 我们有

$$\omega = \frac{dx\wedge dy - u_x dy\wedge dz - u_y dz\wedge dx}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$$

and

$$d\omega = \left[\left(\frac{-u_x}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)_x + \left(\frac{-u_y}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)_y\right] dx\wedge dy\wedge dz = c\; dx\wedge dy\wedge dz.$$

注意，$|\omega(X,Y)| \le 1$ 对于任意一对正交单位向量，当且仅当$X, Y \in T\Sigma^*$时等号成立。

现在令$\Omega_1' = \phi(1, \Omega_1)$为任意满足 $\phi \in \mathcal{I}(U)$ 的竞争者。令 $\Sigma' = \partial\Omega_1' \cap U$。设$\Sigma' \neq \Sigma^*$。由 Stokes 定理，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^c(\Omega^*) &= \mathcal{H}^2(\Sigma^*) - c\mathcal{H}^3(\Omega^*)\\ &= \int_{\Sigma^*}\omega - \int_{\Omega^*} d\omega\\ &= \int_{\Sigma'}\omega - \int_{\Omega'} d\omega\\ &< \mathcal{H}^2(\Sigma') - c\mathcal{H}^3(\Omega') = \mathcal{A}^c(\Omega').\end{aligned}$$

结论由此得出。 □

由竖直反射可知，对 Ω_2 也有相应的结论。固定 $c \le 1$。接下来我们将看到，当 ε 足够小时，问题的任一极小化子

$$\inf_{\phi\in\mathcal{I}(U)} \mathcal{A}^c(\phi(1,\Omega_1\cup\Omega_2))$$

都必须具有极小界面，因此不可能是 C^2。

我们对极小化子作更精确的描述。

命题 3.2. 问题的任一极小化子

$$\inf_{\phi\in\mathcal{I}(U)} \mathcal{A}^c(\phi(1,\Omega_1\cup\Omega_2)) \tag{3.1}$$

is 图形的、关于竖直反射对称且旋转对称 .

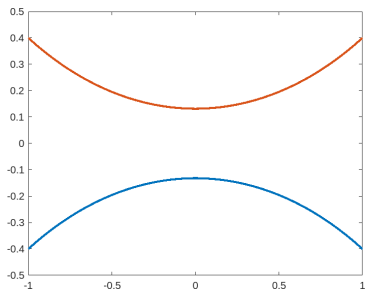

FIGURE 2.
$\varepsilon = 0.4$

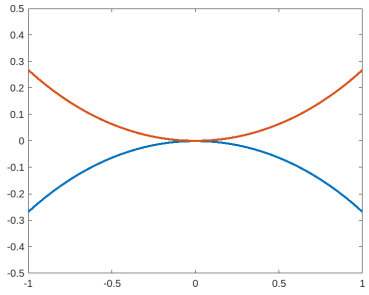

FIGURE 3.
$\varepsilon = 2 - \sqrt{3}$

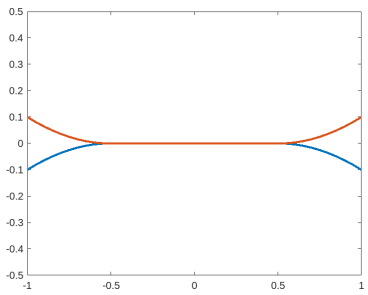

FIGURE 4.
$\varepsilon = 0.1$

Proof. We first show that minimizers must be graphical. Let m denote the infimum for the above problem (3.1). Let $\Omega^* \subset U$ and V^* be the Caccioppoli limit and varifold limit respectively of a minimizing sequence. Let Ω_1^* and Ω_2^* respectively be the limits of Ω_1 and Ω_2 under the isotopies of the minimizing sequence. Then $\Omega^* = \Omega_1^* \cup \Omega_2^*$, and

$$m = \|V^*\|(U) - c\mathcal{H}^3(\Omega^*) \geq P(\Omega_1^*; U) + P(\Omega_2^*; U) - c\mathcal{H}^3(\Omega_1^*) - c\mathcal{H}^3(\Omega_2^*).$$

假设反证至少有一个 $\partial\Omega_1^* \cap U$ 或 $\partial\Omega_2^* \cap U$ 在$B_1^{\mathbb{R}^2}(0)$上不是图形的。对于 $\mathbf{x} \in B_1^{\mathbb{R}^2}(0)$，令 $l_{\mathbf{x}}$ 表示垂直直线 $\{(\mathbf{x}\ z) \mid z \in \mathbb{R}\}$。考虑新集合

$$\Omega_1' := \{(\mathbf{x}, z) \mid -1 < z < \mathcal{H}^1(\overline{\Omega^*} \cap l_{\mathbf{x}})/2 - 1\},$$
$$\Omega_2' := \{(\mathbf{x}, z) \mid 1 - \mathcal{H}^1(\overline{\Omega^*} \cap l_{\mathbf{x}})/2 < z < 1\}.$$

根据Steiner 对称化（见 [Mag12，第 14.4] 定理），我们有

$$\mathcal{H}^3(\Omega_1' \cup \Omega_2') = \mathcal{H}^3(\Omega^*) \quad \text{and} \quad P(\Omega_1'; U) + P(\Omega_2'; U) \leq P(\Omega_1^*; U) + P(\Omega_2^*; U),$$

当且仅当对所有$\mathbf{x}$，$\Omega_i^* \cap l_{\mathbf{x}}$ 连通时，周长相等。因此，我们有

$$P(\Omega_1'; U) + P(\Omega_2'; U) - c\mathcal{H}^3(\Omega_1') - c\mathcal{H}^3(\Omega_2') < m.$$

Since $\partial\Omega_i' \cap U$ is graphical over $B_1^{\mathbb{R}^2}(0)$ and $\partial\Omega_i' \setminus U = \partial\Omega_i^* \setminus U$ by construction, $\Omega' := \Omega_1' \cup \Omega_2'$ is in the closure of the isotopy class of Ω (e.g. use a smooth kernel to approximate the boundary of Ω_i' by smooth disks with the same boundary), which yields a contradiction.

利用自然的对称化过程，可以类似地证明反射和旋转下的对称性。事实上，这些步骤更为简单，因为可以利用极小化子是图形的这一事实，并利用函数 $\sqrt{1 + |x|^2}$ 的凸性。 □

在 MATLAB中，我们针对具有旋转对称性和垂直对称性的图编写了 $\mathcal{A}^1$ 泛函的离散版本。使用MATLAB 的 fmincon，我们计算了 ε的不同取值下的极小值，并观察到，对于fmincon，极小化子在随机初始条件下具有鲁棒性。在图2、3和4中，我们给出了 ε 取值下的解图形：当两张曲面彼此不相交时（$\varepsilon = 0.4$）、当两张曲面在一点处接触时（ $\varepsilon = 2 - \sqrt{3}$），以及当形成极小界面时（$\varepsilon = 0.1$）。

第1. 部分：在圆盘上进行最小化

我们沿用 [AS79]，的论证，并按照 [MSY82] 对流形情形作适当修改。

4. Preliminaries

设 (M^3, g) 为连通闭[5]黎曼 3-流形。设 $h\colon M \to \mathbb{R}$ 为一个光滑函数，满足 $c := \sup_M |h|$。在表述极小化问题之前，我们需要先了解一些关于规定平均曲率泛函及流形中圆盘的预备事实。

4.1.局部控制。由于 M 是紧集，存在常数 $\rho_0 > 0$、$\mu > 0$ 和 $\beta_0 \geq 1$，使得以下条件成立：

- 对于每个 $x \in M$，限制 $\exp_x$ 的定义域和值域可得到一个微分同胚

$$\phi_x : \overline{B}^{T_xM}_{\rho_0}(0) \to \overline{B}^{M}_{\rho_0}(x).$$

- 对于每个 $\xi \in \overline{B}^{T_xM}_{\rho_0}(0)$ 和 $y \in \overline{B}^{M}_{\rho_0}(x)$，我们有

$$\|d_\xi \phi_x\|,\ \|d_y \phi_x^{-1}\| \leq 2. \tag{4.1}$$

- 在测地法坐标 x^1，x^2，x^3 对于 $B^M_{\rho_0}(x)$，我们有

$$\sup_{\overline{B}^{T_xM}_{\rho_0}(0)} \left|\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right| \leq \mu/\rho_0, \quad \sup_{\overline{B}^{T_xM}_{\rho_0}(0)} \left|\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}\right| \leq \mu/\rho_0^2. \tag{4.2}$$

- 对于任意的 $\rho \in (0, \rho_0)$ 和 $x \in M$，我们有

$$d_{B_\rho(x)} := \operatorname{dist}(B_\rho(x), \cdot) \text{ is convex} \tag{4.3}$$

在 $B_{\rho_0}(x) \setminus \overline{B_\rho(x)}$.

- 对于任意 $\rho \in (0, \rho_0)$ 和 $x \in M$，我们有

$$\Delta d_{B_\rho(x)} \geq c \tag{4.4}$$

on $B_{\rho_0}(x) \setminus \overline{B_\rho(x)}$.

- 对于任意 $\rho \in (0, \rho_0)$ 和 $x \in M$，我们有

$$\min\{\mathcal{H}^2(E),\ \mathcal{H}^2(\partial B_\rho(x) \setminus E)\} \leq \beta_0 (\mathcal{H}^1(\partial E))^2 \tag{4.5}$$

对于任意有限周长集 $E \subset \partial B_\rho(x)$。

- 对于任意 $0 < \rho_1 < \rho_2 \leq \rho_0$ 和 $x \in M$，我们有

$$\mathcal{H}^2(\partial B_{\rho_1}(x)) \leq \mathcal{H}^2(\partial B_{\rho_2}(x)). \tag{4.6}$$

注 4.1。通过对度量和规定函数进行重标度，我们可以假设 $\rho_0 = 1$。为简化记号，下文均作此假设。

4.2. 细管等周不等式。我们经常使用以下来自 [MSY82] 的引理。

引理4.2 ([MSY82，引理 1])。存在一个常数 $\delta \in (0,1)$，与 M 和 g无关，使得如果 Σ是 M 中的光滑嵌入曲面，并且满足

$$\mathcal{H}^2(\Sigma \cap B_1(x)) < \delta^2 \tag{4.7}$$

对于所有 $x \in M$，则存在唯一的紧致 $K_\Sigma \subset M$，具有 $\partial K_\Sigma = \Sigma$ 和

$$\mathcal{H}^3(K_\Sigma \cap B_1(x)) \leq \delta^3 \tag{4.8}$$

[5]如同 [MSY82], 中一样，我们只需假设 M 是齐次正则的。在这种情况下，我们还应假设 h 属于 L^∞。

对于所有 $x \in M$，以及

$$\mathcal{H}^3(K_\Sigma) \le c_1 \mathcal{H}^2(\Sigma)^{3/2}, \tag{4.9}$$

其中 $c_1 = c_1(\quad \mu)$。此外，若 Σ 与 S^2微分同胚，则 K_Σ 与 $\mathbb{B}$微分同胚。[6]

4.3. 面积比较。以下引理是对我们的情形下 [MSY82 引理 3] 的适当修正。本质上，我们利用散度定理证明，在 c-平均凸区域内移动集合的部分会减小 $\mathcal{A}^c$ 泛函。

引理 4.3。设 $U \subset B_{1/2}(x_0)$ 和 $\theta \in (0, 1/2)$ 满足

- $x_0 \in U$,
- $\overline{U}$ 与 $\mathbb{B}$微分同胚,
- d_U 在 $U(\theta) \setminus U$上是凸的,
- $\Delta d_U \ge c$ 在 $U(\theta) \setminus U$上。

令 $\beta \ge 1$ 为一个常数，使得对于每个 $s \in (\theta/2, \theta)$ </style>,

$$\min\{\mathcal{H}^2(E),\ \mathcal{H}^2(\partial U(s) \setminus E)\} \le \beta(\mathcal{H}^1(\partial E))^2 \tag{4.10}$$

每当 E 是 $\partial U(s)$ </style>中的一个曲面时。令

$$\delta_1 = \min\left\{\delta,\ \frac{\theta}{(1+128c_1)\beta^{1/2}},\ \frac{\theta}{9\beta^{1/2}(1/32+cc_1)^{1/2}},\ \frac{\mathcal{H}^3(M)^{1/3}}{(4c_1)^{1/3}},\ 1\right\}, \tag{4.11}$$

（其中，c_1 和 δ 如引理4.2中所述）。设 Σ是一个光滑嵌入圆盘，与 ∂U横截相交，并且 $\partial\Sigma \subset M \setminus U$。假设

$$\mathcal{H}^2(\partial U) + \mathcal{H}^2(\Sigma \setminus U) \le \delta_1^2/32. \tag{4.12}$$

如果 Λ 是具有 $\partial\Sigma \cap \Lambda = \varnothing$ 的 $\Sigma \setminus U$ 的任一连通分支，那么存在唯一的紧致 $K_\Lambda \subset M \setminus U$，使得

$$\mathcal{H}^3(K_\Lambda) \le c_1\delta_1^3, \quad \partial K_\Lambda = \Lambda \cup F, \tag{4.13}$$

其中 $F \subset \partial U$ 是一个满足 $\partial F = \partial\Lambda$ 的曲面

$$\mathcal{H}^2(F) < \mathcal{H}^2(\Lambda \cap U(\theta)) - c\mathcal{H}^3(K_\Lambda). \tag{4.14}$$

证明。令 $F_0 \subset \partial U$ 满足 $\partial F_0 = \partial\Lambda$，其存在是因为 ∂U 微分同胚于一个二维球面。于是根据 (4.11) 和 (4.12)，我们有

$$\mathcal{H}^2(F_0) + \mathcal{H}^2(\Lambda) < \delta^2.$$

根据引理4.2，存在一个紧集 $W \subset M$，其带有

$$\mathcal{H}^3(W) \le c_1\delta_1^3, \quad \partial W = F_0 \cup \Lambda.$$

设 $K_\Lambda = W \setminus U$，此时 F 要么是 F_0（如果 $W \cap U = \varnothing$），要么是 $\partial U \setminus F_0$（如果 $U \subset W$）。由于根据 δ_1 的定义，K_Λ 必须满足 $\mathcal{H}^3(K_\Lambda) \le \mathcal{H}^3(M)/4$，因此 K_Λ 是唯一的。

[6] δ 在 (4.8) 中的指数在 [MSY82，引理 1], 的陈述中写作 2，但稍作检查其证明便会发现，它应为 3。

定义 $F_t = K_\Lambda \cap \partial U(t)$、 $E_t = \Lambda \cap U(t)$ 和 $K_t = K_\Lambda \cap U(t)$。我们计算 e

$$
\begin{aligned}
c\mathcal{H}^3(K_{t_2} \setminus \overline{K}_{t_1}) &\le \int_{K_{t_2}\setminus\overline{K}_{t_1}} \Delta d_U \\
&= \mathcal{H}^2(F_{t_2}) - \mathcal{H}^2(F_{t_1}) + \int_{\overline{E}_{t_2}\setminus E_{t_1}} \langle \nu, \nabla d_U\rangle \qquad (4.15)\\
&\le \mathcal{H}^2(F_{t_2}) - \mathcal{H}^2(F_{t_1}) + \mathcal{H}^2(\overline{E}_{t_2}) - \mathcal{H}^2(E_{t_1}).
\end{aligned}
$$

等式 (4.15)要求 $E_{t_1} = E_{t_2}$，因为恒等式 $\nu(y) = \nabla d_U(y)$对几乎每个$y \in E_{t_2} \setminus E_{t_1}$ 都成立，这意味着对于某个 s，有 $E_{t_2} \setminus \overline{E_{t_1}} \subset \partial U(s)$。

在 (4.15) 中令 $t_1 = 0$ 和 $t_2 = t > 0$ ，得到

$$\mathcal{H}^2(F) < \mathcal{H}^2(F_t) + \mathcal{H}^2(\overline{E}_t) - c\mathcal{H}^3(K_t). \qquad (4.16)$$

如果 $K_\theta = K_\Lambda$，那么通过令 $t = \theta$，我们得到 (4.14)。下文中，我们假设 $K_\theta \neq K_\Lambda$。由余面积公式可得

$$\int_0^\theta \mathcal{H}^2(F_s)\, ds \le \mathcal{H}^3(K_\theta) \le c_1\delta_1^3.$$

因此，

$$\mathcal{H}^2(F_t) \le 4c_1\theta^{-1}\delta_1^3$$

对于一个测度至少为 $\frac{3}{4}\theta$ 的 $t \in [0,\theta]$ 集合。由于 $\delta_1 < (128c_1)^{-1}\theta$，我们有

$$\mathcal{H}^2(F_t) \le \delta_1^2/32 \qquad (4.17)$$

在测度至少为 $\frac{3}{4}\theta$ 的集合上。因此，存在一个 $t^* \in [\frac{3}{4}\theta, \theta]$，使得 (4.17) 在 t^* 处成立。于是，由 (4.15) 和 (4.12) 可得

$$\mathcal{H}^2(F_t) \le \delta_1^2/32 + \delta_1^2/32 = \delta_1^2/16 \qquad (4.18)$$

对所有 $t \le \frac{3}{4}\theta$ 均成立。

由于 $B_{\theta/2}(x_0) \subset U(\theta/2)$ 且 $U(\theta) \subset B_1(x_0)$，由 (4.1) 以及 $\mathbb{R}^3$ 中的等周不等式（因为 $\mathbb{R}^3$ 等周常数为 $\sim 4.8 \ge 4$）可得

$$\mathcal{H}^2(\partial U(t)) \ge \frac{1}{4}\mathcal{H}^2(\partial(\phi_{x_0}^{-1}(U(t)))) \ge (\mathcal{H}^3(\phi_{x_0}^{-1}(B_{\theta/2}(x_0))))^{2/3} \ge \theta^2/8$$

对 $t \in [\theta/2, \theta]$ 成立。由于 $\delta_1 \le \theta$，由 (4.18) 可得

$$\mathcal{H}^2(F_t) \le \frac{1}{2}\mathcal{H}^2(\partial U(t))$$

对所有 $t \in [\theta/2, 3\theta/4]$ 均成立。于是，由 (4.10) 和余面积公式可知，对几乎处处的 $t \in [\theta/2, 3\theta/4]$

$$\mathcal{H}^2(F_t) \le \beta(\mathcal{H}^1(\partial F_t))^2 \le \beta\left(\frac{d}{dt}\mathcal{H}^2(E_t)\right)^2.$$

因此，(4.16) 意味着

$$\mathcal{H}^2(F) - \mathcal{H}^2(E_t) + c\mathcal{H}^3(K_\Lambda) \le \beta\left(\frac{d}{dt}(\mathcal{H}^2(F) - \mathcal{H}^2(E_t) + c\mathcal{H}^3(K_\Lambda))\right)^2$$

对于几乎所有的 $t \in [\theta/2, 3\theta/4]$。通过积分，我们有

$$\sqrt{\mathcal{H}^2(F) - \mathcal{H}^2(E_{\theta/2}) + c\mathcal{H}^3(K_\Lambda)} - \sqrt{\mathcal{H}^2(F) - \mathcal{H}^2(E_{3\theta/4}) + c\mathcal{H}^3(K_\Lambda)} \ge \beta^{-1/2}\theta/8$$

给定 $\mathcal{H}^2(F) - \mathcal{H}^2(E_{3\theta/4}) + c\mathcal{H}^3(K_\Lambda) > 0$。由 (4.12)、(4.13) 和 (4.11)，我们有

$$\begin{aligned}\sqrt{\mathcal{H}^2(F) + c\mathcal{H}^3(K_\Lambda)} &\le \sqrt{\delta_1^2/32 + cc_1\delta_1^3}\\ &\le \delta_1\sqrt{1/32 + cc_1}\\ &\le \beta^{-1/2}\theta/9,\end{aligned}$$

因此我们得出矛盾。于是，我们有

$$\mathcal{H}^2(F) \le \mathcal{H}^2(E_{3\theta/4}) - c\mathcal{H}^3(K_\Lambda) < \mathcal{H}^2(E_\theta) - c\mathcal{H}^3(K_\Lambda),$$

如所期望的。 □

5. Minimization Problem

本节将严谨地表述在流形中的圆盘上极小化规定平均曲率泛函的问题。

5.1.**设置**。Let c_1 和 δ 如引理4.2所述。与引理4.3的表述一样，我们定义

$$\delta_2 := \min\left\{\delta,\ \frac{\rho_0/2}{(1+128c_1)\beta_0^{1/2}},\ \frac{\rho_0/2}{9\beta_0^{1/2}(1/32+cc_1)^{1/2}},\ \frac{\mathcal{H}^3(M)^{1/3}}{(4c_1)^{1/3}},\ 1\right\}, \tag{5.1}$$

其中 ρ_0 和 β_0 定义于§4.1中。

令 $U \subset B_{1/2}(x_0)$和 $\theta \in (0, 1/2)$满足

- $x_0 \in U$,
- $\overline{U}$ 与 $\mathbb{B}$ 微分同胚（记作 $\overline{U} \approx \mathbb{B}$），
- d_U 在 $U(\theta) \setminus U$上是凸的,
- $\Delta d_U \ge c$ 在 $U(\theta) \setminus \overline{U}$,
- $\mathcal{H}^2(\partial U) < \delta_2^2/32$.

令 β 和 δ_1 按引理 4.3根据 U 和 θ 定义。注意，由 (4.3)、(4.4)、(4.5) 可作出有效选择 U 和 θ，使得 $\delta_2 \le \delta_1$（例如，对于 $\rho \ll \rho_0/2$ 和 $\theta = \rho_0/2$，我们可以取 $U = B_\rho(x_0)$）。

我们定义如下记号。

- $\mathcal{D}$ 是具有光滑边界的定向光滑嵌入二维圆盘的集合 $\Sigma \subset M$。
- $[\Sigma]$ 是与 $\Sigma \in \mathcal{D}$相对应的整数 2-流。
- $\mathcal{D}[\Sigma]$ 是圆盘 $\Sigma' \in \mathcal{D}$ 且满足 $\partial[\Sigma'] = \partial[\Sigma]$ 的集合。
- $\mathcal{D}(U)$ 是圆盘 $\Sigma \in \mathcal{D}$ 的集合，满足– $\partial\Sigma \cap U = \varnothing$，– Σ 与 ∂U 横截相交（或交集为空），– 存在开集 $\Omega \subset U$ 使得 $\partial[\Omega]\llcorner U = [\Sigma]\llcorner U$。
- $\mathcal{D}^*(U)$ 是满足以下条件的圆盘集合 $\Sigma \in \mathcal{D}(U)$: – $\mathcal{H}^2(\partial U) + \mathcal{H}^2(\Sigma \setminus U) \le \delta_1^2/32$, – $\partial\Sigma \setminus \partial U$不包含于 K_Λ 中，其中 Λ 是具有 $\partial\Sigma \cap \Lambda = \varnothing$ 的 $\Sigma \setminus U$ 的连通分支，且 K_Λ 如引理 4.3 所述。
- $\mathcal{D}(U)[\Sigma]$是满足– $\Sigma' \setminus U \subset \Sigma \setminus U$的 $\Sigma' \in \mathcal{D}(U) \cap \mathcal{D}[\Sigma]$的集合，– 若 $x \in \Sigma' \setminus U$，则 Σ 和 Σ' 在 x 处具有相同的定向。

我们注意到，如果 $\Sigma \in \mathcal{D}^*(U)$，那么 $\mathcal{D}(U)[\Sigma] \subset \mathcal{D}^*(U)$。

5.2. **补充内容**。 规定平均曲率泛函需要对某个区域进行积分。我们在此表述这些区域。

命题 5.1。 令 $\Sigma \in \mathcal{D}^*(U)$ 以及 $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{D}(U)[\Sigma]$。存在唯一的整系数 *3*-流 $T(\Sigma_1, \Sigma_2)$ 满足

$$\partial T(\Sigma_1, \Sigma_2) = [\Sigma_1] - [\Sigma_2] \quad and \quad \operatorname{spt}(T(\Sigma_1, \Sigma_2)) \subset \overline{U} \cup \bigcup_{\Lambda} K_\Lambda, \tag{5.2}$$

其中， Λ 是 $\Sigma \setminus U$ 的连通分支，且满足 $\Lambda \cap \partial\Sigma = \varnothing$； K_Λ 是引理 *4.3* 中对应的集合。

证明。 令 $K := \overline{U} \cup \bigcup_\Lambda K_\Lambda$。注意，存在一个 3-流 S，其支撑集 $S \subset K$，它是通过对每个 $\Lambda \subset \Sigma_i$ 加上 $\pm[K_\Lambda]$ 得到的，其中 i 取适当的符号，使得

$$\operatorname{spt}([\Sigma_1] - [\Sigma_2] - \partial S) \subset \overline{U}.$$

由于 $\overline{U}$ 与 $\mathbb{B}$ 微分同胚，且 $\overline{H_2(\mathbb{B}, \mathbb{Z})} = 0$，因此存在一个流 T，其支集位于 $\mathbb{B}$，使得

$$[\Sigma_1] - [\Sigma_2] = \partial(S + T).$$

我们取 $T(\Sigma_1, \Sigma_2) := S + T$。唯一性源于 M 中不存在支集位于 K 的非零闭 3-流。□

定义 5.2。 我们将命题 5.1 中的 $T(\Sigma_1, \Sigma_2)$ 称为 Σ_1 和 Σ_2的填充体 。我们令$F\colon I_3(M, \mathbb{Z}) \to L^1(M, \mathbb{Z})$ 表示赋范线性空间的典范同构，并将填充积分 定义为

$$T_h(\Sigma_1, \Sigma_2) := \int_M h \; F(T(\Sigma_1, \Sigma_2)) \; d\mathcal{H}^3. \tag{5.3}$$

命题 5.3。 令 $\Sigma \in \mathcal{D}^*(U)$。对于 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \in \mathcal{D}(U)[\Sigma]$，我们有

$$\begin{aligned} T(\Sigma_1, \Sigma_2) &= -T(\Sigma_2, \Sigma_1), \\ T_h(\Sigma_1, \Sigma_2) &= -T_h(\Sigma_2, \Sigma_1), \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} T(\Sigma_1, \Sigma_2) + T(\Sigma_2, \Sigma_3) &= T(\Sigma_1, \Sigma_3), \\ T_h(\Sigma_1, \Sigma_2) + T_h(\Sigma_2, \Sigma_3) &= T_h(\Sigma_1, \Sigma_3). \end{aligned} \tag{5.5}$$

证明。 我们计算

$$\partial(-T(\Sigma_2, \Sigma_1)) = -[\Sigma_2] + [\Sigma_1].$$

由 $T(\Sigma_1, \Sigma_2)$的唯一性，(5.4)成立。

我们计算了

$$\partial(T(\Sigma_1, \Sigma_2) + T(\Sigma_2, \Sigma_3)) = [\Sigma_1] - [\Sigma_2] + [\Sigma_2] - [\Sigma_3] = [\Sigma_1] - [\Sigma_3].$$

根据 $T(\Sigma_1, \Sigma_3)$ 的唯一性，(5.5) 得出。 □

5.3. **问题 fo　　表述**。 在本文的这一部分，我们考虑以下问题 .

问题 5.4. 如果 $\{\Sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}^*(U)$ 满足

$$\mathcal{H}^2(\Sigma_k) \le \mathcal{H}^2(\Sigma_k') + T_h(\Sigma_k, \Sigma_k') + \varepsilon_k \tag{5.6}$$

对于所有 $\Sigma_k' \in \mathcal{D}(U)[\Sigma_k]$，满足 $\varepsilon_k \to 0$ 时， Σ_k（的一个子序列）是否收敛到具有指定平均曲率 h 的正则极限?

6. 最小化序列的极限

我们应用有限周长集的标准理论，推导出关于问题 5.4 中极限的一些基本初步结论。在后续章节中，我们将把这些基本观察提升为更强的正则性结果。

定理6.1. 假设 $\{\Sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}^*(U)$ 满足

$$\mathcal{H}^2(\Sigma_k) \le \mathcal{H}^2(\Sigma_k') + T_h(\Sigma_k, \Sigma_k') + \varepsilon_k \tag{6.1}$$

对所有 $\Sigma_k' \in \mathcal{D}(U)[\Sigma_k]$，其中 $\varepsilon_k \to 0$。令 $\Omega_k \subset U$ 为满足条件的开集。

$$\partial[\Omega_k] \llcorner U = [\Sigma_k] \llcorner U.$$

若 上确界$_k$ $\mathcal{H}^2(\Sigma_k \cap U) < \infty$，则存在一个子序列（不重新标记）、一个有限周长集合$\Omega \subset U$，以及一个变分流形 V *in* U，使得

$$\mathbf{1}_{\Omega_k} \xrightarrow{L^1} \mathbf{1}_\Omega, \quad D\mathbf{1}_{\Omega_k} \overset{*}{\rightharpoonup} D\mathbf{1}_\Omega, \quad \mathbf{v}(\Sigma_k \cap U) \rightharpoonup V.$$

此外，

- Ω和 V 满足

$$\|V\|(U) - \int_\Omega h \, d\mathcal{H}^3 \le \|\phi_\# V\|(U) - \int_{\phi(\Omega)} h \, d\mathcal{H}^3 \tag{6.2}$$

  对于任意 微分同胚 ϕ，它在 U 的某个紧子集之外等于恒等映射 U.

- 的一阶变分 V 满足

$$\delta V(X) = \int_{\partial^*\Omega} X \cdot h\nu_{\partial^*\Omega} \, d|D\mathbf{1}_\Omega| \tag{6.3}$$

  对于任意 C^1 向量场 X，满足 $\mathrm{spt}(X) \subset\subset U$。

- V 具有 c-有界的一阶变分，即

$$\|\delta V\|(B_r(x)) \le c\|V\|(B_r(x)) \tag{6.4}$$

  对所有 $B_r(x) \subset U$。

- 函数

$$r \mapsto f(r)\frac{\|V\|(B_r(x))}{\pi r^2} \tag{6.5}$$

  关于 r单调递增，其中 f 是一个连续函数，仅依赖于 c和 (M, g)，满足 $f(r) \to 1$，当 $r \to 0$时。

证明。子列收敛性由标准的紧性定理推出（参见[Mag12，定理 12.26] 以及 [Sim83，第 1 章，定理 4.4]）。

设 ϕ 是 U 的一个微分同胚，在某个紧子集之外等于恒等映射。横截相交的假设意味着

(1) $\lim_k \mathcal{H}^2(\Sigma_k \cap U) = \|V\|(U)$, (2) li
m$^k \int_{\Omega_k} h \, d\mathcal{H}^3 = \int_\Omega h \, d\mathcal{H}^3$, (3) $\lim_k \mathcal{H}^2(\phi$
$(\Sigma_k) \cap U) = \|\phi_\# V\|(U)$, (4) lim$^k \int_{\phi(\Omega_k)}$
$h \, d\mathcal{H}^3 = \int_{\phi(\Omega)} h \, d\mathcal{H}^3$.

设 $\delta > 0$。那么存在 k 足够大，使得

$$\begin{aligned} \|V\|(U) - \int_\Omega h \, d\mathcal{H}^3 &\le \mathcal{H}^2(\Sigma_k \cap U) - \int_{\Omega_k} h \, d\mathcal{H}^3 + 2\delta && (1)+(2) \\ &\le \mathcal{H}^2(\phi(\Sigma_k) \cap U) - \int_{\phi(\Omega_k)} h \, d\mathcal{H}^3 + 3\delta && (6.1) \\ &\le \|\phi_\# V\|(U) - \int_{\phi(\Omega)} h \, d\mathcal{H}^3 + 5\delta && (3)+(4). \end{aligned}$$

由于 δ 是任意的，(6.2) 得证。

对于满足 spt(X) $\subset\subset U$ 的 C^1 向量场 X，(6.2) 和 [Mag12，命题 17.8] 推出

$$\begin{aligned} \delta V(X) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \|(\phi_t)_\# V\|(U) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{\phi_t(\Omega)} h \, d\mathcal{H}^3 \\ &= \int_{\partial^*\Omega} X \cdot h\nu_{\partial^*\Omega} \, d|D\mathbf{1}_\Omega|, \end{aligned}$$

其中 ϕ_t 是 X 的流。因此，(6.3) 成立。

(6.4) 由 (6.3) 和 [Mag12，命题 4.30] 得出。

最后，(6.5) 的单调性由 (6.4) 根据 [Sim83，第 8 章第 40][7] 节得出。 □

7. Resolution of Overlaps

我们证明了在我们的情形下对 [AS79 引理 2 和推论 1] 的适当修正，以解开相互重叠的圆盘。关键区别在于，除了面积之外，我们还必须追踪体积。

7.1. Lipschitz圆盘。

如 [AS79], ，我们定义一类特定的 Lipschitz 圆盘。固定一个开集 $U \subset M$。

定义 7.1. 考虑 n 个互不相交的 $\mathbb{D}$ 副本 $\{F_i\}_{i=1}^n$，并定义 $\mathcal{Y}$ 为满足以下条件的 Lipschitz 映射 $\chi : \bigsqcup_{i=1}^n F_i \to U$ 集合：

(1) 存在有限个（或零个）两两不相交的 C^2 若尔当曲线 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m \subset U$，使得对于每个 $k = 1, \dots, m$,

$$\chi^{-1}(\Gamma_k) = \gamma_k^1 \cup \gamma_k^2,$$

其中 $\{\gamma_k^l : k = 1, \dots, m;\ l = 1, 2\}$ 是 $2m$ 个两两不相交的 C^2 若尔当曲线在 $\bigsqcup_{i=1}^n($ $F_i \setminus \partial F_i$) 中的集合，并且 $\chi|_{\gamma_k^l}$ 是 Γ_k的 C^2 参数化。

(2) the restriction of χ to $(\bigsqcup_{i=1}^n F_i) \setminus \bigcup_{k=1}^m (\gamma_k^1 \cup \gamma_k^2)$ is a C^2 embedding into U.

(3) for each $k = 1, \dots, m$, there exist disjoint tubular neighborhoods W_k^1, W_k^2 of γ_k^1, γ_k^2 respectively, such that $\chi(W_k^1) \cap \chi(W_k^2) = \Gamma_k$ and exactly one of the following holds:
   (3a) $\chi(W_k^1)$ lies on one side of $\chi(W_k^2)$,
   (3b) $\chi(W_k^1)$ intersects $\chi(W_k^2)$ transversely along Γ_k.

[7]我们注意到， [Sim83] 仅能在 $\mathbb{R}^N$中找到适用于变分流形的单调性公式。我们可以将（M， g）等距嵌入到某个 $\mathbb{R}^N$ 中，并使用这一单调性公式；在这种情况下，函数 f 将取决于该嵌入的第二基本形式的范数。

For future convenience, let us introduce the following notation. For each $k = 1, \dots, m$ and $l = 1, 2$, let $W_k^{l,+} = (W_k^l \cap \operatorname{int}(\gamma_k^l)) \setminus \gamma_k^l$ and $W_k^{l,-} = W_k^l \setminus (W_k^{l,+} \cup \gamma_k^l)$, so that $W_k^l = W_k^{l,+} \cup \gamma_k^l \cup W_k^{l,-}$.

最后，将 $\mathcal{Y}_0$ 定义为这样一类 Lipschitz映射 $\chi \in \mathcal{Y}$：对于所有 $k = 1, \dots, m$，只发生(3a)。这些就是“解缠结的”圆盘，因此我们的目标是将 $\mathcal{Y}$ 中的一个映射变为 $\mathcal{Y}_0$ 中的一个映射。

Remark 7.2. As in [AS79], notice that $\chi\left(\bigsqcup_{i=1}^n F_i \setminus \partial F_i\right) \setminus \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i$ is a 2-dimensional open submanifold of M, each component of which has closure of the form $\chi(\overline{R})$, where R is a component of $\left(\bigsqcup_{i=1}^n F_i\right) \setminus \bigcup_{k=1}^m (\gamma_k^1 \cup \gamma_k^2)$.

我们称有限个 Lipschitz 圆盘的集合 $\mathcal{S}$ 属于 $\mathcal{Y}$（或 $\mathcal{Y}_0$），记作 $\mathcal{S} \in \mathcal{Y}$（或 $\mathcal{S} \in \mathcal{Y}_0$），如果它是某个映射 $\chi \in \mathcal{Y}$（或分别为 $\mathcal{Y}_0$）的像。

7.2. **消解过程**。我们通过交换相交圆盘的片段来制定一种使其彼此分离的过程，同时不改变这些圆盘并集的像。

引理7.3 (重叠的解消)。设 $U \subset M$ 是一个具有C^1 边界的有界连通开集。设 $\mathcal{S} = \{D_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{Y}$。于是存在 *Lipschitz* 圆盘 $\tilde{\mathcal{S}} = \{\tilde{D}_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{Y}_0$，具有~ ~$D_i \subset U$ 以及 $\partial D_i = \partial D_i$，满足

$$\bigcup_{i=1}^n D_i = \bigcup_{i=1}^n \tilde{D}_i.$$

证明。我们使用定义 7.1 中的记号。

对于每个整数。交线 Γ_k，定义 7.1 中 (3a) 和 (3b) 恰有一个成立。Le t

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \{1 \le k \le m \mid (3b) \text{ occurs}\}.$$

若 $\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \varnothing$，则 $\mathcal{S} \in \mathcal{Y}_0$，问题得证。因此，根据归纳法，只需给出一个~过程，将圆盘集合 $\mathcal{S}$ 替换为另一个集合 $\mathcal{S} \in \mathcal{Y}$，使得:

- $\bigcup_i D_i = \bigcup_i D_{i,}$~
- $\partial D_i = \partial D_{i,}$~
- $|\mathcal{B}(\mathcal{S})| < |\mathcal{B}(\mathcal{S})|$.

设 $q \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$。不失一般性，有两种情况需要考虑。 .

案例*1*：$\operatorname{int}\gamma_q^1 \cap \operatorname{int}\gamma_q^2 = \varnothing$。固定一个微分同胚

$$\psi_q : \overline{\operatorname{int}\gamma_q^1} \to \overline{\operatorname{int}\gamma_q^2}$$

使得 $(\chi \circ \psi_q)|_{\gamma_q^1} = \chi|_{\gamma_q^2}$。然后我们定义一个双射 Ψ_q：$\bigsqcup_i F_i \to \bigsqcup_i F_i$ by

$$\Psi_q(\xi) \coloneqq \begin{cases} \psi_q(\xi) & \xi \in \overline{\operatorname{int}\gamma_q^1} \\ \psi_q^{-1}(\xi) & \xi \in \overline{\operatorname{int}\gamma_q^2} \\ \xi & \text{otherwise.} \end{cases}$$

情况*2*：$\gamma_q^2 \subset \operatorname{int}(\gamma_q^1)$。固定一个 C^2微分同胚

$$\psi_q : \overline{\operatorname{int}\gamma_q^1} \setminus \operatorname{int}\gamma_q^2 \to \overline{\operatorname{int}\gamma_q^1} \setminus \operatorname{int}\gamma_q^2$$

使得 $(\chi \circ \psi_q)|_{\gamma_q^l} = \chi|_{\gamma_q^{l+1}}$(其中为方便起见，上标按模 2 计算)。然后我们定义一个双射 Ψ_q: $\bigsqcup_i F_i \to \bigsqcup_i F_i$ 为

$$\Psi_q(\xi) \coloneqq \begin{cases} \psi_q(\xi) & \xi \in \overline{\mathrm{int}\gamma_q^1} \setminus \mathrm{int}\gamma_q^2 \\ \xi & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们定义 $\tilde{\chi} \coloneqq \chi \circ \Psi_q$: $\bigsqcup_i F_i \to M$。根据边界假设，在两种情况下， $\tilde{\chi}$ 都是 Lipschitz 映射。由于 Ψ_q 是双射， $\tilde{\chi}$ 与 χ具有相同的像。此外， $\tilde{\chi}$ 在 F_i的边界邻域内与χ 一致。注意，限制

$$\Psi_q : \left(\bigsqcup_i F_i\right) \setminus (\gamma_q^1 \cup \gamma_q^2) \to \left(\bigsqcup_i F_i\right) \setminus (\gamma_q^1 \cup \gamma_q^2)$$

是一个 C^2 微分同胚。我们检查定义 7.1 的每个连通分支:

(1) Since Ψ_q is a bijection, we have $\tilde{\chi}^{-1}(\Gamma_k) = \tilde{\gamma}_k^1 \cup \tilde{\gamma}_k^2$, where $\tilde{\gamma}_k^l \coloneqq \Psi_q^{-1}(\gamma_k^l)$ are disjoint sets. Since Ψ_q is a C^2 diffeomorphism away from $\gamma_q^1 \cup \gamma_q^2$, $\tilde{\gamma}_k^l$ is a C^2 Jordan curve for all $k \neq q$ and $\tilde{\chi}|_{\tilde{\gamma}_k^l}$ is a C^2 parametrization. Finally, it follows from the construction that $\tilde{\gamma}_q^l = \gamma_q^{l+1}$ and $\tilde{\chi}|_{\tilde{\gamma}_q^l}$ is a C^2 parametrization.

由于 Ψ_q 在 $\tilde{\gamma}_q^1 \cup \tilde{\gamma}_q^2$之外是一个 C^2 微分同胚， $\tilde{\chi}$ 在（$\bigsqcup_i F_i$） \ （$\bigsqcup_k \tilde{\gamma}_k^1 \cup \tilde{\gamma}_k^2$）的任一连通分支上的限制是一个 C^2 嵌入。

(3) 对于 $k \neq q$，所需的管状邻域为 $\tilde{W}_k^l = \Psi_q^{-1}(W_k^l)$。由于 $\tilde{\chi}(\tilde{W}_k^l) = \chi(W_k^l)$，(3a)（分别地，(3b)）在 $k \neq q$ 处对 $\tilde{\chi}$ 成立，当且仅当 (3a)（分别地，(3b)）在k 处对 χ成立。现在我们定义 $\tilde{W}_q^l$，它们在上述情形中有所不同。

- 在情形 1 中，我们有

$$\tilde{W}_q^l = \Psi_q^{-1}(W_q^{l,-} \cup \gamma_q^{l+1} \cup W_q^{l+1,+}).$$

Then

$$\tilde{\chi}(\tilde{W}_q^l) = \chi(W_q^{l,-}) \cup \Gamma_q \cup \chi(W_q^{l+1,+})$$

- 在情况 2 中，我们有

$$\tilde{W}_q^1 = \Psi_q^{-1}(W_q^{1,-} \cup \gamma_q^2 \cup W_q^{2,-})$$
$$\tilde{W}_q^2 = \Psi_q^{-1}(W_q^{2,+} \cup \gamma_q^1 \cup W_q^{1,+}).$$

Then

$$\tilde{\chi}(\tilde{W}_q^1) = \chi(W_q^{1,-}) \cup \Gamma_q \cup \chi(W_q^{2,-})$$
$$\tilde{\chi}(\tilde{W}_q^2) = \chi(W_q^{2,+}) \cup \Gamma_q \cup \chi(W_q^{1,+}).$$

由于 (3b) 在 q 对 χ 成立，我们可知 (3a) 在 q 对 $\tilde{\chi}$ 成立。

˜因此， $\tilde{\chi} \in \mathcal{Y}$。此外，由上面的（3）可得 $|\mathcal{B}(\mathcal{S})| < |\mathcal{B}(\mathcal{S})$ |. □

备注 7.4. 引理 7.3 的证明中所述的过程并非由初始集合 $\mathcal{S}$ 唯一确定。不过，我们将看到，这在我们的应用中并不构成问题。

应用消解过程后，我们将进行小幅扰动，以得到真正嵌入的曲面。所需结论汇总于以下引理中。

引理 7.5。设 $U \subset M$ 为一个开集，且 $U \approx \mathbb{B}$。设 $\Sigma \in \mathcal{D}(U)$。设 $\{D_i\}_{i=1}^n$ 为一组光滑嵌入圆盘，满足 $D_i \subset U$、$\partial D_i \subset \partial U$，并

$$\Sigma \cap U = \bigcup_{i=1}^{n} D_i.$$

令 $\{D_i\} \in \mathcal{Y}_0$ 满足 $D_i \subset U$ 和 $\partial[D_i] = \partial[D_i]$。则存在一个开集 $\Omega \subset U$ 满足

$$\partial[\tilde{\Omega}] \llcorner U = \sum_{i=1}^{n} [\tilde{D}_i]. \tag{7.1}$$

此外，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\Sigma' \in \mathcal{D}(U)[\Sigma]$ 满足

$$\Sigma \triangle \Sigma' \subset U, \tag{7.2}$$

$$\mathcal{H}^2(\Sigma' \cap U) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}^2(\tilde{D}_i) + \varepsilon, \tag{7.3}$$

and

$$\mathbb{M}(T(\Sigma, \Sigma') - ([\Omega] - [\tilde{\Omega}])) \leq \varepsilon. \tag{7.4}$$

证明。Ω 的存在性源于 Ω 的存在以及圆盘的边界定向一致这一事实。

其余结论可通过沿圆盘 $\{D_i\}$ 的交曲线作小扰动得到。□

7.3. 应用 1：塌缩至边界。作为解决过程的第一个应用，我们希望通过将球内某些连通分支塌缩到球的边界，忽略极小化序列中的这些连通分支。

引理 7.6。令 $U \subset M$ 为一个具有 $U \approx \mathbb{B}$ 的开集。令 $\Sigma \in \mathcal{D}(U)$。令 $\mathcal{S}$ 为一组光滑嵌入圆盘 D，其具有 $D \subset U$、$\partial D \subset \partial U$，并且

$$\Sigma \cap U = \bigcup_{D \in \mathcal{S}} D.$$

令 $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$。对于 $D \in \mathcal{S}_0$，令 $F_D \subset \partial U$ 为 ∂D的等周区域，并令 Λ_D 为 U 中由 $D \cup F_D$围成的区域。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\Sigma' \in \mathcal{D}(U)[\Sigma]$ 满足

$$\Sigma \triangle \Sigma' \subset U, \tag{7.5}$$

$$\mathcal{H}^2(\Sigma' \cap U) \leq \sum_{D \in \mathcal{S}_0} \mathcal{H}^2(F_D) + \sum_{D \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0} \mathcal{H}^2(D) + \varepsilon, \tag{7.6}$$

and

$$\mathbb{M}(T(\Sigma, \Sigma')) \leq \sum_{D \in \mathcal{S}_0} \mathcal{H}^3(\Lambda_D) + \varepsilon. \tag{7.7}$$

证明。为了应用引理 7.3，我们必须先扰动圆盘 F_D。令 $\eta > 0$ 使得$\mathcal{H}^3(B_\eta(\partial U)) < \varepsilon/2$。我们定义圆盘 F'_D，其中 $D \in \mathcal{S}_0$，使得满足以下条件：

- $F'_{D_1} \cap F'_{D_2} = \varnothing$ 对于 $D_1 \neq D_2 \in \mathcal{S}_0$,
- F_{D_1} 与任意 $D_1 \in \mathcal{S}_0$ 和 $D_2 \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0$都横截相交（或不相交），而 D_2
- $F'_D \subset U$和 $\partial F'_D = \partial D$,

- $|\mathcal{H}^2(F_D) - \mathcal{H}^2(F'_D)| < \varepsilon/(2|\mathcal{S}_0|)$,
- $F'_D \subset B_\eta(\partial U) \cap \Lambda_D$.

然后我们可以将引理 7.3 应用于这些圆盘

$$\mathcal{S}' := (\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0) \cup \{F'_D\}_{D\in\mathcal{S}_0},$$

˜生成一个集合 $\mathcal{S}$。

由引理 7.5 和 η 的选取可知，接下来只需证明（除去一个 $\mathcal{H}^3$ 测度为零的集合）

$$(\Omega\triangle\tilde{\Omega}) \setminus B_\eta(\partial U) \subset \bigcup_{D\in\mathcal{S}_0} \Lambda_D.$$

设 $x \in (\Omega\triangle\Omega) \setminus B_\eta(\partial U)$。取一点

$$x_0 \in \partial U \setminus \left(\bigcup_{D\in\mathcal{S}_0} F_D \cup \bigcup_{D\in\mathcal{S}} \partial D \right).$$

We also assume x is not in any $D \in \mathcal{S}$ or $\tilde{D} \in \tilde{\mathcal{S}}$, which is a set of $\mathcal{H}^3$ measure zero. Let $\gamma : (0, 1] \to U$ be a smooth path having transverse intersection with any $D \in \mathcal{S}$ or $\tilde{D} \in \tilde{\mathcal{S}}$, satisfying $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = x_0$ and $\gamma(1) = x$. Since x_0 and x are in the complement of $B_\eta(\partial U) \cap (\bigcup_{D\in\mathcal{S}_0} \overline{\Lambda}_D)$, which contains the disks F'_D, we conclude that γ intersects each F'_D for $D \in \mathcal{S}_0$ an even number of times. Since $x \in \Omega\triangle\tilde{\Omega}$ and $x_0 \notin \overline{\Omega\triangle\tilde{\Omega}}$, we conclude that γ intersects some $D \in \mathcal{S}_0$ an odd number of times. Since $x_0 \notin \overline{\Lambda}_D$, we have $x \in \Lambda_D$ for some $D \in \mathcal{S}_0$. □

7.4. 应用2：分离一个叠置圆盘。本应用的目标是在一个叠置圆盘极小化问题中分离出各个圆盘，从而为极限变分流形的每一层推导出一些（尽管较弱的）正则性。

我们首先介绍一些记号。

设 $U \approx \mathbb{B}$ 满足 $\partial U = \overline{C} \cup \overline{D^+} \cup \overline{D^-}$，其中 C 是一个光滑嵌入的圆环，D^+ 和 D^- 是光滑嵌入的圆盘。令 $\Sigma \in \mathcal{D}(U)$，其意义是 $\Sigma \cap \partial C = \varnothing$。此外，假设 $\Sigma\cap U$ 是光滑嵌入的定向圆盘 $\{D_1, \ldots, D_n\}$ 的不交并，其中每个圆盘在 C 中具有同伦非平凡边界。

对于 $i \in \{1, \ldots, n\}$，令 $B_i \subset U$ 为满足

$$D^- \subset \partial B_i \setminus D_i \subset \partial U.$$

若 $B_i \subset B_j$ 对于 $i \neq j$ 满足 $D_i < D_j$，我们称之为此情形。不失一般性，我们假设

$$D_1 > D_2 > \ldots > D_n.$$

令 $\Omega_i \subset U$ 为满足以下条件的开子集

$$\partial[\Omega_i]\llcorner U = [D_i]\llcorner U.$$

若 $B_i = \Omega_i$，则称 D_i 为向上定向。否则，称 D_i 为向下定向。根据 D_i 的排序以及 $\Sigma \in \mathcal{D}(U)$ 这一事实，D_i 为向上定向，当且仅当 D_{i-1} 和 D_{i+1} 为向下定向（即定向相对于排序交替变化）。

引理 7.7。固定某个 $1 \leq j \leq n$。令 $D'_j \in \mathcal{D}(U)[D_j]$，使得 D'_j 与每个 D_i 在 $i \neq j$处横截相交。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\Sigma' \in \mathcal{D}(U)[\Sigma]$ 满足

$$\Sigma\triangle\Sigma' \subset U, \tag{7.8}$$

$$\mathcal{H}^2(\Sigma' \cap U) \le \mathcal{H}^2(D'_j) + \sum_{i \neq j} \mathcal{H}^2(D_i) + \varepsilon, \tag{7.9}$$

and

$$\mathbb{M}(T(\Sigma, \Sigma') - [\Omega^+] + [\Omega^-]) \le \varepsilon, \tag{7.10}$$

其中 Ω^+ 和 Ω^- 是包含于 $\Omega_j \triangle \Omega'_j$ 中的互不相交集合。

此外，我们可以构造满足以下条件的 Σ'，以代替 *(7.10)*

$$\mathbb{M}(T(\Sigma, \Sigma') - ([\Omega_j] - [\Omega'_j]) - [(\Omega'_j \setminus \Omega_j) \cap \Omega] + G) \le \varepsilon. \tag{7.11}$$

其中 G 是一个非负整流，也就是说，对于所有非负的 f，$\int F(G) f \, d\mathcal{H}^3 \ge 0$ 。

证明。步骤 *1*：我们对圆盘 $\mathcal{S}' := \{D'_j\} \cup \{D_i\}_{i \neq j}$ 应用引理 7.3，得到新圆盘~ ~ $\mathcal{S} = \{D_i\}_{i=1}^n$。

我们声称

$$[\Omega] - [\tilde{\Omega}] = [\Omega_j] - [\Omega'_j] + 2[(\Omega'_j \setminus \Omega_j) \cap \Omega] - 2[(\Omega_j \setminus \Omega'_j) \setminus \Omega], \tag{7.12}$$

由引理 7.5 并取.....可推出 (7.10)

$$\Omega^+ := (\Omega_j \triangle \Omega'_j) \cap \Omega, \quad \Omega^- := (\Omega_j \triangle \Omega'_j) \setminus \Omega.$$

我们首先观察到

$$[\Omega] - [\tilde{\Omega}] = \sum_{i=1}^n [\Omega_i] - \sum_{i=1}^n [\tilde{\Omega}_i] = ([\Omega_j] - [\Omega'_j]) + \left([\Omega'_j] + \sum_{i \neq j} [\Omega_i] - \sum_{i=1}^n [\tilde{\Omega}_i] \right).$$

Let

$$\tilde{N} := \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\tilde{\Omega}_i}, \quad N' := \mathbf{1}_{\Omega'_j} + \sum_{i \neq j} \mathbf{1}_{\Omega_i}.$$

为证明 (7.12)，只需证明对于 $\mathcal{H}^3$-几乎处处的 $x \in U$，有

$$N'(x) - \tilde{N}(x) = \begin{cases} 2 & x \in (\Omega'_j \setminus \Omega_j) \cap \Omega \\ -2 & x \in (\Omega_j \setminus \Omega'_j) \setminus \Omega \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{7.13}$$

令 R 为包含 x 的 $U \setminus \bigcup_i D_i$ 的连通分支。令 $x_0 \in C \cap R$。令 $\gamma : (0, 1] \to U$ 为 R 中的一条路径，使得

- γ 避开交曲线 $\{\Gamma_k\}$,
- γ 与 D'_j 横截相交,
- $\lim_{t \to 0} \gamma(t) = x_0$ 和 $\gamma(1) = x$.

~我们有 $N'(x_0) = N(x_0)$。在 γ与 D'_j的后续交点处，N'和 N将交替地分别增加和减少 1。

~如果 γ与 D'_j有偶数个交点，那么我们看到 $N'(x) = N(x)$。因此，我们只需考虑交点个数为奇数的情形，这等价于$x \in \Omega_j \triangle \Omega'_j$。在这种情况下，当且仅当 $x \in \Omega'_j$时，N' 在第一个交点处增加。注意，当且仅当 $R \subset \Omega$时，N 在第一个交点处减少。因此，(7.13)得证。

~ ~第 2 步：我们进一步修改圆盘 D_i，使其变为 D_i'，从而（至多相差一个质量任意小的流）

$$[\tilde{\Omega}] - [\tilde{\Omega}'] = -[(\Omega_j' \setminus \Omega_j) \cap \Omega] - G, \tag{7.14}$$

其中，G 是一个非负整流，由此根据 (7.12) 和引理 7.5 可得 (7.11)。设 R 是 $(\Omega_j' \setminus \Omega_j) \cap \Omega$ 的一个连通分支。我们总结以下事实。

(1) $R \cap \tilde{\Omega} = \varnothing$: a direct consequence of (7.12).
(2) $\partial R \cap \partial U = \varnothing$: follows from $\partial\Omega_j \cap \partial U = \partial\Omega_j' \cap \partial U$.
(3) R is a component of $U \setminus \bigcup_i \tilde{D}_i$: Let $x,\ y \in R$. By definition, there is a path α from x to y contained in both Ω and in Ω_j', so α does not intersect any of the disks $\{D_i\}$ nor D_j'. Moreover, since $D_j \cap \overline{\Omega \setminus \Omega_j} = \varnothing$, we have $\partial R \subset \bigcup_i \tilde{D}_i$.

~令 $\tilde{\chi} : \bigcup_{i=1}^n F_i \to M$ 为与消解圆盘 $\mathcal{S}$对应的Lipschitz映射。令$\{\sigma_l\}_l \subset \{\Gamma_k\}_k$ 为 $\partial(\tilde{\chi}^{-1}(\partial R))$ 的连通分支。选择某个 $\sigma \in \{\sigma_l\}$，使得对于任意 l，$\sigma \not\subset \text{int}(\sigma_l)$。根据定义 7.1，存在唯一的不同曲线 $\sigma' \in \{\Gamma_k\}_k$，使得 $\tilde{\chi}(\sigma) = \tilde{\chi}(\sigma')$。有两种情况。

情况 *1*：$\text{int}\sigma \cap \text{int}\sigma' = \varnothing$。由于 $d_1 := \overline{\tilde{\chi}(\text{int}\sigma)}$ 和 $d_2 := \overline{\tilde{\chi}(\text{int}\sigma')}$ 是具有共同边界且彼此不相交的 Lipschitz 圆盘，因此存在唯一的开集$R' \subset U$，使得 $\partial R' = d_1 \cup d_2$。

我们声称这些圆盘 $\{D_i\}$ 则对某个 i，存在一个 $x \in F_i \setminus (\text{int}\sigma \cup \text{int}\sigma')$满足 $\tilde{\chi}(x) \in R'$。令 α 为 $F_i \setminus (\text{int}\sigma \cup \text{int}\sigma')$中从 x 到 ∂F_i的一条路径。于是我们有 $\tilde{\chi}(\alpha(0)) \in R'$，且 $\tilde{\chi}(\alpha(1)) \notin R'$。由于$\partial R' = d_1 \cup d_2$，我们得出 D_i穿过 d_1或 d_2中的一个，这与 $\tilde{\chi} \in \mathcal{Y}_0$矛盾。

我们断言，$R \subset R'$。我们考虑沿着 $\tilde{\chi}(\sigma)$的局部图景，其中4个部分$\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma))$、$\tilde{\chi}(\text{ext}(\sigma))$、$\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma'))$和 $\tilde{\chi}(\text{ext}(\sigma'))$与一个X形截面相交。我们有

- $\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma))$ 和 $\tilde{\chi}(\text{ext}(\sigma))$ 相邻：由 $\tilde{\chi} \in \mathcal{Y}_0$ 可得。
- $\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma))$ 和 $\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma'))$ 相邻：由 R' 的定义以及 $\{D_i\}$ 不与 R' 相交这一事实~可知。

R' contains the component of $U \setminus \bigcup_i \tilde{D}_i$ contained between $\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma))$ and $\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma'))$ along this intersection. Since R touches $\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma))$ and does not touch $\tilde{\chi}(\text{ext}(\sigma))$, fact (3) above implies that R is the component of $U \setminus \bigcup_i \tilde{D}_i$ contained between $\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma))$ and $\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma'))$ along this intersection. Hence, $R \subset R'$.

我们声称，$R' \cap \tilde{\Omega} = \varnothing$. Since $\tilde{\chi} \in \mathcal{Y}_0$, each component of R' touches the same side of each of d_1 and d_2. By the definition of $\tilde{\Omega}$, we have either $R' \subset \tilde{\Omega}$ or $R' \cap \tilde{\Omega} = \varnothing$. By fact (1) above, we have $R \cap \tilde{\Omega} = \varnothing$, so $R' \cap \tilde{\Omega}^c \neq \varnothing$. Hence, $R' \cap \tilde{\Omega} = \varnothing$.

折叠过程：将 σ 和 σ' 重新标记为 σ_1 和 σ_2，使得

$$\mathcal{H}^2(\tilde{\chi}(\text{int}\sigma_1)) \geq \mathcal{H}^2(\tilde{\chi}(\text{int}\sigma_2)).$$

固定一个 C^2 微分同胚

$$\psi : \overline{\text{int}\sigma_1} \to \overline{\text{int}\sigma_2}$$

使得 $(\tilde{\chi} \circ \psi)|_{\sigma_1} = \tilde{\chi}|_{\sigma_2}$。然后我们定义映射

$$\tilde{\chi}'(\xi) := \begin{cases} \tilde{\chi}(\psi(\xi)) & \xi \in \overline{\text{int}\sigma_1} \\ \tilde{\chi}(\xi) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们可对映射 $\tilde{\chi}'$ 在 $\text{int}\sigma_1$ 上作任意小的扰动，使得 $\tilde{\chi}' \in \mathcal{Y}_0$.

情形 2：　$\sigma' \subset \text{int}\sigma$。由于　$A := \overline{\tilde{\chi}(\text{int}\sigma \setminus \overline{\text{int}}\sigma')}$ 是一个具有公共边界且不自相交的 Lipschitz 圆环，因此存在唯一的开集　$R' \subset U$ ，满足 $\partial R' = A$。

We claim that the disks $\{\tilde{D}_i\}$ do not intersection R'. Suppose otherwise for contradiction. By the argument from Case 1, we need only suppose that $\tilde{\chi}(\text{int}\sigma') \cap R' \neq \varnothing$. Since $\tilde{\chi} \in \mathcal{Y}_0$, we must have $\tilde{\chi}(\text{int}\sigma') \subset R'$ in this case. Yet we observe that $\tilde{\chi}(\sigma')$ is a nontrivial element in $H_1(\overline{R'})$, a contradiction.

我们声称　$R \subset R'$。我们考察沿着　$\tilde{\chi}(\sigma)$ 的局部图景，其中 4 个部分$\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma))$、 $\tilde{\chi}(\text{ext}(\sigma))$、 $\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma'))$ 和 $\tilde{\chi}(\text{ext}(\sigma'))$ 与一个 X 形截面相交。我们有

- $\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma))$ 和 $\tilde{\chi}(\text{ext}(\sigma))$ 相邻：由 $\tilde{\chi} \in \mathcal{Y}_0$ 可得。
- $\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma))$ 和 $\tilde{\chi}(\text{ext}(\sigma'))$相邻：这由 R' 的定义以及˜这一事实可知，即 $\{D_i\}$ 不与 R'相交。

R' contains the component of $U \setminus \bigcup_i \tilde{D}_i$ contained between $\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma))$ and $\tilde{\chi}(\text{ext}(\sigma'))$ along this intersection. Since R touches $\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma))$ and does not touch $\tilde{\chi}(\text{ext}(\sigma))$, fact (3) above implies that R is the component of $U \setminus \bigcup_i \tilde{D}_i$ contained between $\tilde{\chi}(\text{int}(\sigma))$ and $\tilde{\chi}(\text{ext}(\sigma'))$ along this intersection. Hence, $R \subset R'$.

我们声称，　$R' \cap \quad \tilde{\Omega} = \varnothing$. Since $\tilde{\chi} \in \mathcal{Y}_0$, each component of R' touches the same side of A. By the definition of $\tilde{\Omega}$, we have either $R' \subset \tilde{\Omega}$ or $R' \cap \tilde{\Omega} = \varnothing$. By fact (1) above, we have $R \cap \tilde{\Omega} = \varnothing$, so $R' \cap \tilde{\Omega}^c \neq \varnothing$. Hence, $R' \cap \tilde{\Omega} = \varnothing$.

塌缩过程：固定一个 C^2 微分同胚

$$\psi : \overline{\text{int}\sigma} \to \overline{\text{int}\sigma'}$$

使得 $(\tilde{\chi} \circ \psi)|_\sigma = \tilde{\chi}|_{\sigma'}$。然后我们定义映射

$$\tilde{\chi}'(\xi) := \begin{cases} \tilde{\chi}(\psi(\xi)) & \xi \in \overline{\text{int}\sigma} \\ \tilde{\chi}(\xi) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们对映射 $\tilde{\chi}'$ 在 σ 的邻域内作任意小的扰动，使得 $\tilde{\chi}' \in \mathcal{Y}_0$。

结论。在任一种情况下，我们都有

$$\mathcal{H}^2(\text{im}\tilde{\chi}') \leq \mathcal{H}^2(\text{im}\tilde{\chi}) + \varepsilon$$

and

$$\mathcal{H}^3((\tilde{\Omega} \cup R') \setminus \tilde{\Omega}') \leq \varepsilon.$$

Let $\tilde{R}$ be a different component of $(\Omega'_j \setminus \Omega_j) \cap \Omega$. Then we claim $\partial\tilde{R} \cap \overline{R}' = \varnothing$. Indeed, if not $\tilde{R}$ would be on the opposite side of a disk in $\tilde{\mathcal{S}}$ from R'. Since $R' \cap \tilde{\Omega} = \varnothing$ and (by fact (1) above) $\tilde{R} \cap \tilde{\Omega} = \varnothing$, we reach a contradiction. Hence, we can iterate the above procedure and conclude by induction. □

7.5.应用3：分解堆叠。在规定函数为正的情况下，我们将把叠置圆盘极小化问题分解为若干个小型叠置圆盘极小化问题，每个问题包含 1 个或 2 个圆盘。

我们首先将由 1 个圆盘组成的堆叠分离开来。

引理 7.8. 假设　D_1 向上定向。令 $D'_1 \in \mathcal{D}(U)[D_1]$ ，使得 D'_1 与每个　D_i都横截相交。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\Sigma' \in \mathcal{D}(U)[\Sigma]$ 满足

$$\Sigma \triangle \Sigma' \subset U, \tag{7.15}$$

$$\mathcal{H}^2(\Sigma' \cap U) \leq \mathcal{H}^2(D'_1) + \sum_{i=2}^{n} \mathcal{H}^2(D_i) + \varepsilon, \tag{7.16}$$

and

$$\mathbb{M}(T(\Sigma, \Sigma') - ([\Omega_1] - [\Omega'_1]) + 2[\Omega_1 \setminus (\Omega \cup \Omega'_1)]) \leq \varepsilon. \tag{7.17}$$

证明。 我们将引理 7.3 应用于 $\{D'_1\} \cup \{D_i\}_{i=2}^n$。所得圆盘满足 (7.12)，与引理 7.7 证明的第一步相同。然而，由于 D_1 向上定向，我们有 $[(\Omega'_1 \setminus \Omega_1) \cap \Omega] = 0$。因此，结论由引理 7.5 得出。□

现在我们分离由 2 个圆盘组成的堆叠。

引理7.9。 假设 D_j 向下定向且 D_{j+1} 向上定向。令 $D'_j \in \mathcal{D}(U)[D_j]$和 $D'_{j+1} \in \mathcal{D}(U)[D_{j+1}]$ 互不相交，并且与每个 D_i横截相交。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\Sigma' \in \mathcal{D}(U)[\Sigma]$ 满足

$$\Sigma \triangle \Sigma' \subset U, \tag{7.18}$$

$$\mathcal{H}^2(\Sigma' \cap U) \leq \mathcal{H}^2(D'_j) + \mathcal{H}^2(D'_{j+1}) + \sum_{i \notin \{j, j+1\}} \mathcal{H}^2(D_i) + \varepsilon, \tag{7.19}$$

and

$$\mathbb{M}(T(\Sigma, \Sigma') - (([\Omega_j] + [\Omega_{j+1}]) - ([\Omega'_j] + [\Omega'_{j+1}])) + 2[\Omega_j \cup \Omega_{j+1} \setminus (\Omega \cup \Omega'_j \cup \Omega'_{j+1})]) \leq \varepsilon. \tag{7.20}$$

证明。 我们将引理 7.3 应用于圆盘 $\{D'_j, D'_{j+1}\} \cup \{D_i\}_{i \neq j,\ j+1}$，得到新圆盘$\{D_i\}_{i=1}^n$。

我们计算。

$$\begin{aligned}
[\Omega] - [\tilde{\Omega}] &= \sum_{i=1}^{n} [\Omega_i] - \sum_{i=1}^{n} [\tilde{\Omega}_i] \\
&= ([\Omega_j] + [\Omega_{j+1}]) - ([\Omega'_j] - [\Omega'_{j+1}]) \\
&\quad + \left([\Omega'_j] + [\Omega'_{j+1}] + \sum_{i \neq j, j+1} [\Omega_i] - \sum_{i=1}^{n} [\tilde{\Omega}_i] \right).
\end{aligned}$$

Let

$$\tilde{N} \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\tilde{\Omega}_i}, \quad N' \coloneqq \mathbf{1}_{\Omega'_j} + \mathbf{1}_{\Omega'_{j+1}} + \sum_{i \neq j, j+1} \mathbf{1}_{\Omega_i}.$$

˜要证明 (7.20)，只需证明对于 $x \in U \setminus \bigcup_{i=1}^n D_i$，

$$N'(x) - \tilde{N}(x) = \begin{cases} -2 & x \in (\Omega_j \cup \Omega_{j+1}) \setminus (\Omega \cup \Omega'_j \cup \Omega'_{j+1}) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{7.21}$$

令 R 为包含 x 的 $U \setminus \bigcup_i D_i$ 的连通分支。令 $x_0 \in C \cap R$。令 $\gamma \colon (0, 1] \to U$ 为 R 中的一条路径，使得

- γ 避开 Γ_k,
- γ 与 D'_j 和 D'_{j+1} 横截相交,
- 极限$_{t \to 0} \gamma(t) = x_0$ 以及 $\gamma(1) = x$。

我们有 $N'(x_0) = N(x_0)$。在随后与 $D'_j \cup D'_{j+1}$的 γ交点处， N'和 N 中的每一个都将以交替顺序增加和减少 1。

如果 x 与 $D_j \cup D_{j+1}$ 的交点数为偶数，那么我们看到 $N(x) = x \in (\Omega_j \cup \Omega_{j+1}) \triangle (\Omega'_j \cup \Omega'_{j+1})$。在这种情况下，当且仅当 $x \in \Omega'_j \cup \Omega'_{j+1}$ 时， N' 在第一个交点处增加。注意，当且仅当 $R \subset \Omega$ 时， N 在第一个交点处减少。我们还注意到，如果 $x \notin \Omega_j \cup \Omega_{j+1}$，那么 $x \notin \Omega$ （根据 D_j 和 D_{j+1} 的定向规定）。因此，(7.21) 得证。

结论现由引理 7.5 得出。 □

8. Replacement

我们将替换定理 [AS79, 定理 1] 推广到指定平均曲率的情形。该引理使我们能够将极小化曲面中位于小球外的连通分支移入球内。

为了证明替换定理，我们首先需要一个等周不等式。

设 δ 和 c_1 为引理4.2中的常数，并令

$$\eta := \min\left\{\frac{\mathcal{H}^3(M)}{2},\ \frac{1}{8c^3c_1^2},\ c_1\delta^3\right\}. \tag{8.1}$$

命题 8.1. 若$\Omega \subset M$ 是一个有限周长集，且 $\mathcal{H}^3(\Omega) \le \eta$，则

$$\mathcal{H}^3(\Omega) \le c_1\mathcal{H}^2(\partial\Omega)^{3/2}, \tag{8.2}$$

and

$$\mathcal{A}^h(\Omega) \ge \mathcal{A}^c(\Omega) \ge \frac{1}{2}\mathcal{H}^2(\partial\Omega). \tag{8.3}$$

证明. 若 $\mathcal{H}^2(\partial\Omega) \ge \delta^2$，则根据 η的定义，(8.2)显然成立。另一方面，若 $\mathcal{H}^2(\partial\Omega) < \delta^2$，引理4.2直接推出(8.2)。于是(8.3)成立，因为我们有

$$\mathcal{A}^c(\Omega) = \mathcal{H}^2(\partial\Omega) - c\mathcal{H}^3(\Omega) \ge \mathcal{H}^2(\partial\Omega)(1 - cc_1^{2/3}\mathcal{H}^3(\Omega)^{1/3}) \ge \frac{1}{2}\mathcal{H}^2(\partial\Omega).$$

界 $\mathcal{A}^h(\Omega) \ge \mathcal{A}^c(\Omega)$ 成立，这是因为 $h \le c$。 □

现在我们已经具备证明替换定理的条件。

引理 8.2 (替换)。 设 $\xi > 0$。假设 $\mathcal{H}^3(U) \le \eta$。令 $\Sigma \in \mathcal{D}^*(U)$。那么存在 $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{D}(U)[\Sigma]$ 以及一个开子集 $B \subset U$，满足 $B \cap \Sigma = \varnothing$，使得

$$(\tilde{\Sigma} \cup \partial B) \cap U_\xi = \Sigma \cap U_\xi, \tag{8.4}$$

$$\mathcal{H}^2(\tilde{\Sigma}) + T_h(\Sigma, \tilde{\Sigma}) \le \mathcal{H}^2(\tilde{\Sigma}) + T_h(\Sigma, \tilde{\Sigma}) + \mathcal{H}^2(\partial B) - c\mathcal{H}^3(B) \le \mathcal{H}^2(\Sigma), \tag{8.5}$$

并且存在一组互不相交的定向圆盘 $\mathcal{S}$，满足

$$[\tilde{\Sigma}] \llcorner U = \sum_{D \in \mathcal{S}} [D]. \tag{8.6}$$

此外，假设

$$\mathcal{H}^2(\Sigma) \le \mathcal{H}^2(\Sigma') + T_h(\Sigma, \Sigma') + \varepsilon \tag{8.7}$$

对所有 $\Sigma' \in \mathcal{D}(U)[\Sigma]$ 均成立。那么

$$\mathcal{H}^2(\tilde{\Sigma}) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma') + T_h(\tilde{\Sigma}, \Sigma') + \varepsilon \tag{8.8}$$

~对所有 $\Sigma' \in \mathcal{D}(U)[\Sigma]$，以及

$$\mathcal{H}^2((\Sigma \triangle \tilde{\Sigma}) \cap U_\xi) \leq 2\varepsilon. \tag{8.9}$$

设 $P \subset \Sigma \cap U$ 是 $\Sigma \cap U$ 的若干连通分支的并。设 $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$ 为满足 $D \cap U_\xi \subset P$ 的圆盘$D \in \mathcal{S}$ 的集合，并令 $P := \bigcup_{D \in \mathcal{S}_P} D$。则

$$\mathcal{H}^1\left(\overline{\tilde{P}} \cap \partial U\right) \leq \mathcal{H}^1(\overline{P} \cap \partial U) \tag{8.10}$$

and

$$\mathcal{H}^2(P) \leq \mathcal{H}^2(\tilde{P}) + 2\varepsilon. \tag{8.11}$$

证明。我们采用与 [AS79定理 1]证明中相同的替换程序。不过，我们必须跟踪相对体积，因此在平滑、扰动和归纳步骤之前，先详细说明该程序。

Let Λ be any component of $\Sigma \setminus U$ such that $\Lambda \cap \partial\Sigma = \varnothing$. By Lemma 4.3, there is a unique compact set $K_\Lambda \subset M \setminus U$ satisfying (4.13) and (4.14. Given any component Λ' of $\Sigma \setminus U$ with $\Lambda' \subset K_\Lambda$, we have $\Lambda' \cap \partial\Sigma = \varnothing$ and $K_{\Lambda'} \subset K_\Lambda$ (by the assumption on U and Σ). Hence, we can select a component Λ of $\Sigma \setminus U$ such that $\Lambda \cap \partial\Sigma = \varnothing$ and $\mathrm{int}(K_\Lambda) \cap \Sigma = \varnothing$.

设 χ 是从 $\mathbb{D}$ 到 Σ 的微分同胚，并考虑集合 $H := \chi^{-1}(\Lambda)$。H 是 $\mathbb{D}$ 的紧致连通子集，其边界由有限条两两不相交的光滑若尔当曲线 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 组成。不失一般性，假设 γ_1 是这些曲线中最外侧的一条。由 H 的连通性可知，我们可以写出

$$H = \overline{\mathrm{int}\gamma_1} \setminus \bigcup_{j=2}^{n} \mathrm{int}\gamma_j.$$

Recall that $F = \partial K_\Lambda \cap \partial U$. Define $F_1 \subset F$ to be the component of F which contains the Jordan curve $\chi(\gamma_1)$, and $F_2 := F \setminus F_1$. Define $I := \cup \mathrm{int}\gamma_j$, where the union is over those j such that $\chi(\gamma_j) \subset F_2$. Let $\Lambda_2 := \chi(I)$. Then $\Lambda_1 := \Lambda \cup \Lambda_2$ is diffeomorphic to the connected subset $H \cup I$ of $\mathbb{D}$, and $\partial\Lambda_1 = \partial F_1$. By [AS79, Lemma 1], we can construct a diffeomorphism α of Λ_1 onto F_1 such that α coincides with the identity on $\partial\Lambda_1 = \partial F_1$. We define a Lipschitz map $\hat{\chi} : \mathbb{D} \to M$ by

$$\hat{\chi}(x) := \begin{cases} (\alpha \circ \chi)(x) & x \in H \cup I \\ \chi(x) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们考虑以下两种情况：

情况 *1*：$\partial\Sigma \cap (F_1 \setminus \partial F_1) = \varnothing$。由于 $\mathrm{int}(K_\Lambda) \cap \Sigma = \varnothing$，$\hat{\chi}$ 是单射的，并且我们定义 e

$$\tilde{\Sigma} := \hat{\chi}(\mathbb{D}) = (\Sigma \setminus \Lambda_1) \cup F_1.$$

设 $V_\Lambda \subset U \cup \bigcup_{\Lambda'} K_{\Lambda'}$ 是由 $\Lambda_1 \cup F_1$ 界定的唯一开集。注意，$\mathrm{int}(K_\Lambda) \subset V_\Lambda$，因此 V_Λ 位于 F_1 的外部。令 $B := V_\Lambda \cap U$、$V_\Lambda^o := V_\Lambda \setminus U$、$\Lambda_1^i := \Lambda_1 \cap U$、$\Lambda_1^o = \Lambda_1 \setminus U$，以及 $G := \partial V_\Lambda \cap \partial U$。由于 V_Λ 位于 F_1 的外部，我们有 $\partial B = \Lambda_1^i \cup G$。我们的目标是证明

$$\mathcal{H}^2(\tilde{\Sigma}) + c\mathcal{H}^3(V_\Lambda) + \mathcal{H}^2(\partial B) - c\mathcal{H}^3(B) < \mathcal{H}^2(\Sigma). \tag{8.12}$$

我们有 $\partial V_\Lambda^o = \Lambda_1^o \cup F_1 \cup G$，因此由 **(4.14)** 可得

$$\mathcal{H}^2(F_1) + \mathcal{H}^2(G) < \mathcal{H}^2(\Lambda_1^o) - c\mathcal{H}^3(V_\Lambda^o).$$

˜根据 Σ 的定义，我们有

$$\mathcal{H}^2(\tilde{\Sigma}) = \mathcal{H}^2(\Sigma) - \mathcal{H}^2(\Lambda_1) + \mathcal{H}^2(F_1).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^2(\tilde{\Sigma}) + c\mathcal{H}^3(V_\Lambda) + \mathcal{H}^2(\partial B) - c\mathcal{H}^3(B) &= \mathcal{H}^2(\Sigma) - \mathcal{H}^2(\Lambda_1^o) + \mathcal{H}^2(F_1) + c\mathcal{H}^3(V_\Lambda^o) + \mathcal{H}^2(G)\\ &< \mathcal{H}^2(\Sigma).\end{aligned}$$

Case 2: $\partial\Sigma \cap (F_1 \setminus \partial F_1) \neq \varnothing$. Since $\mathrm{int}(K_\Lambda) \cap \Sigma = \varnothing$, we have $\partial\Sigma \subset F_1 \setminus \partial F_1$ in this case. Hence, $\hat{\chi}^{-1}(\partial\Sigma) = \partial\mathbb{D} \cup \gamma$, where γ is a smooth Jordan curve in $\mathbb{D} \setminus \partial\mathbb{D}$. We define

$$\tilde{\Sigma} \coloneqq \hat{\chi}(\mathrm{int}\gamma) \subset F_1.$$

Let $V_\Lambda \subset U \cup \bigcup_{\Lambda'} K_{\Lambda'}$ be the unique open set bounded by Σ and $\tilde{\Sigma}$. Note that $\mathrm{int}(K_\Lambda) \subset V_\Lambda$, so V_Λ is on the outside of $\tilde{\Sigma}$. Let $B \coloneqq V_\Lambda \cap U$, $V_\Lambda^o \coloneqq V_\Lambda \setminus \overline{U}$, $\Sigma^i \coloneqq \Sigma \cap U$, $\Sigma^o \coloneqq \Sigma \setminus \overline{U}$, and $G \coloneqq V_\Lambda \cap \partial U$. Since V_Λ is on the outside of $\tilde{\Sigma}$, we have $\partial B = \Sigma^i \cup G$. Our goal is to show

$$\mathcal{H}^2(\tilde{\Sigma}) + c\mathcal{H}^3(V_\Lambda) + \mathcal{H}^2(\partial B) - c\mathcal{H}^3(B) < \mathcal{H}^2(\Sigma). \tag{8.13}$$

˜我们有 $\partial V_\Lambda^o = \Sigma^o \cup \Sigma \cup G$，因此 (4.14) 意味着

$$\mathcal{H}^2(\tilde{\Sigma}) + \mathcal{H}^2(G) < \mathcal{H}^2(\Sigma^o) - c\mathcal{H}^3(V_\Lambda^o).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^2(\tilde{\Sigma}) + c\mathcal{H}^3(V_\Lambda) + \mathcal{H}^2(\partial B) - c\mathcal{H}^3(B) &= \mathcal{H}^2(\tilde{\Sigma}) + c\mathcal{H}^3(V_\Lambda^o) + \mathcal{H}^2(\Sigma^i) + \mathcal{H}^2(G)\\ &< \mathcal{H}^2(\Sigma).\end{aligned}$$

平滑化、微小扰动和归纳步骤现在完全遵循 [AS79,定理 1] 的证明（并额外注意到，微小扰动会使相对体积发生微小变化）。令 B 为每次迭代中对集合 B˜的扰动，并将这些扰动应用于前一步中经过扰动的 Σ所得集合的并集，我们立即得到（8.4）和（8.6）。此外，由（8.12）和（8.13），我们有

$$\mathcal{H}^2(\tilde{\Sigma}) + c|T(\Sigma, \tilde{\Sigma})| + \mathcal{H}^2(\partial B) - c\mathcal{H}^3(B) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma).$$

由于

$$T_h(\Sigma, \tilde{\Sigma}) \leq c|T(\Sigma, \tilde{\Sigma})|,$$

（8.5）中的第二个不等式成立。（8.5）中的第一个不等式由（8.3）以及 $B \subset U$ 这一事实推出。

˜(8.8)由(8.5)、(8.7)、命题5.3以及 $\mathcal{D}(U)[\Sigma] \subset \mathcal{D}(U)[\Sigma]$这一事实推出。

为证明 (8.9)，我们注意到

$$\Sigma \triangle \tilde{\Sigma} \cap U_\xi = \partial B \cap U_\xi.$$

˜根据 (8.5) 和 (8.7)，取 $\Sigma' = \Sigma$，我们有

$$\mathcal{H}^2(\partial B) - c\mathcal{H}^3(B) \leq \varepsilon.$$

由 (8.3)，我们有

$$\mathcal{H}^2(\partial B) \leq 2\varepsilon,$$

这意味着 (8.9)。

˜(8.10) 源于 Σ 的构造；也就是说，对于 $\Sigma \cap U$ 的每个连通分支，要么（1）在 ∂B 中被舍弃，要么（2）其与 ∂U 的交集中的每个连通分支或者（a）保持不变，或者（b）在扰动步骤中被推离 ∂U。

˜(8.11) 源于 Σ 的构造和（8.9）；也就是说，$\Sigma \cap U$ 的每个连通分支要么（1）在 ∂B 中被舍弃，而根据（8.9），其面积至多为 2ε，要么（2）被保留，并且其面积可能因添加 ∂U 的片段而增大。□

9. Filigree

我们将细丝引理 [AS79,引理 3]调整到指定平均曲率情形。该引理使我们能够在小球中忽略极小化序列的面积较小的连通分支。令 U 和 θ 如 §5.1中那样选取（并由此定义 β 和 δ_1），并令 η 如 (8.1) 中那样定义。

引理9.1（纤细结构）。设 $\mathcal{H}^3(U(\theta)) \leq \eta$。令 $\Sigma \in \mathcal{D}^*(U(\theta))$ 满足

$$\mathcal{H}^2(\partial U(\theta)) + \mathcal{H}^2(\Sigma \setminus U) \leq \delta_1^2/32 \tag{9.1}$$

and

$$\mathcal{H}^2(\Sigma) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma') + T_h(\Sigma, \Sigma') + \varepsilon \tag{9.2}$$

对于所有 $\Sigma' \in \mathcal{D}(U)[\Sigma]$。设 P 是 $\Sigma \cap U(\theta)$ 的若干连通分支的并。如果

$$\mathcal{H}^2(P) \leq \frac{\theta^2}{48\beta}$$

then

$$\mathcal{H}^2(P \cap U) \leq 6\varepsilon.$$

证明。对于几乎处处的 $\sigma \in [0, \theta]$，我们有 $\Sigma \in \mathcal{D}^*(U(\sigma))$。任选一个满足上述条件的 $\sigma = t\theta$ for $t \in [0, 1]$。我们对 $U(\sigma)$ 中的 Σ 应用引理 8.2，取某个较小的常数 ξ，从而得到 Σ。

令 $\mathcal{S}$ 为组成 $\Sigma \cap U(\sigma)$ 中的圆盘集合。令 $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$ 为满足 $D \cap U(\sigma)_\xi \subset P$的圆盘 $D \in \mathcal{S}$ 集合。令 $P := \bigcup_{D \in \mathcal{S}_P} D$。取一个圆盘 $D \in \mathcal{S}_P$。令 F_D 表示 $\partial U(\sigma)$ 中对应于 ∂D的等周区域。令 Λ_D 表示 $U(\sigma)$ 中由 $D \cup F_D$围成的区域。

˜考虑由下述方式构造的 Σ 的竞争者 Σ'：将每个圆盘 $D \in \mathcal{S}_P$ 替换为 F_D，随后消除重叠，并使用引理 7.6 作扰动。于是

$$T_h(\tilde{\Sigma}, \Sigma') \leq c \sum_{D \in \mathcal{S}_P} \mathcal{H}^3(\Lambda_D) + \varepsilon/2.$$

由 (8.2)，可得

$$\mathcal{H}^3(\Lambda_D)^{2/3} \leq c_1^{2/3}(\mathcal{H}^2(D) + \mathcal{H}^3(F_D)).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} T_h(\tilde{\Sigma}, \Sigma') &\leq c c_1^{2/3} (\mathcal{H}^3(U(\sigma)))^{1/3} \sum_{D \in \mathcal{S}_P} (\mathcal{H}^2(D) + \mathcal{H}^2(F_D)) + \varepsilon/2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{S}_P} (\mathcal{H}^2(D) + \mathcal{H}^2(F_D)) + \varepsilon/2. \end{aligned}$$

由引理 8.2(8.8)，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{D\in\mathcal{S}}\mathcal{H}^2(D) &= \mathcal{H}^2(\tilde{\Sigma}\cap U(\sigma))\\ &\le \mathcal{H}^2(\Sigma'\cap U(\sigma)) + T_h(\tilde{\Sigma},\Sigma') + \varepsilon\\ &\le \sum_{D\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_P}\mathcal{H}^2(D) + \sum_{D\in\mathcal{S}_P}\mathcal{H}^2(F_D) + \frac{1}{2}\sum_{D\in\mathcal{S}_P}(\mathcal{H}^2(D)+\mathcal{H}^2(F_D)) + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

so

$$\mathcal{H}^2(\tilde{P}) = \sum_{D\in\mathcal{S}_P}\mathcal{H}^2(D) \le 3\sum_{D\in\mathcal{S}_P}\mathcal{H}^2(F_D) + 4\varepsilon.$$

根据 $\partial U(\sigma)$上的等周不等式，我们有

$$\mathcal{H}^2(\tilde{P}) \le 3\beta(\mathcal{H}^1(\partial\tilde{P}))^2 + 4\varepsilon.$$

由引理 8.2(8.10)，我们有

$$\mathcal{H}^1(\partial\tilde{P}) \le \mathcal{H}^1(P\cap\partial U(\sigma)).$$

由引理 8.2(8.11)，我们得到

$$\mathcal{H}^2(P\cap U(\sigma)) \le \mathcal{H}^2(\tilde{P}) + 2\varepsilon.$$

因此，我们有

$$\mathcal{H}^2(P\cap U(t\theta)) \le 3\beta(\mathcal{H}^1(P\cap\partial U(t\theta)))^2 + 6\varepsilon.$$

令 $f(t) := \mathcal{H}^2(P\cap U(t\theta)) - 6\varepsilon$。那么由余面积公式可得

$$f \le 3\beta\theta^{-2}(f')^2. \tag{9.3}$$

不妨设 $f(1) > 0$。令

$$t_0 := \inf\{t\in[0,1] \mid f(t) > 0\}.$$

对（9.3）积分，得到

$$(1-t_0)\frac{\theta}{2\sqrt{3\beta}} \le \sqrt{f(1)} - \sqrt{f(t_0)} \le \sqrt{\mathcal{H}^2(P)}.$$

那么，根据我们的面积假设可得

$$t_0 \ge 1 - \frac{2\sqrt{3\beta}}{\theta}\sqrt{\mathcal{H}^2(P)} \ge \frac{1}{2}.$$

因此，$\mathcal{H}^2(P\cap U) \le \mathcal{H}^2(P\cap U(\theta/2)) \le 6\varepsilon$。 □

10. 内部正则性

本节中，我们沿用 [AS79] 的策略，证明 $\mathcal{A}^h$ 圆盘极小化序列的内部正则性。

我们首先应用引理 9.1，推导出极限变分流形的可整性。

Lemm命题 10.1（可求长性）。设 $\{\Sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{D}^*(U)$ 满足 $\mathcal{H}^2(\Sigma_k) \le \delta_2^2/64$ 并且

$$\mathcal{H}^2(\Sigma_k) \le \mathcal{H}^2(\Sigma_k') + T_h(\Sigma_k,\Sigma_k') + \varepsilon_k \tag{10.1}$$

对所有 $\Sigma_k' \in \mathcal{D}(U)[\Sigma_k]$，其中 $\varepsilon_k \to 0$。设 V 是定理 *6.1* 给出的 Σ_k 在 U中的子列变分流形极限。于是

$$\Theta^2(\|V\|, x) \geq \frac{1}{1000\beta} > 0$$

对所有 $x \in$ 支集$\|V\|$。此外，V是可求长的。

证明。可整流性由正密度下界以及 [All72,定理5.5] 得出。令 $x \in \text{spt}\|V\|$。选取 $r_0 \leq 1/2$ 足够小，使得 $\mathcal{H}^3(B_{r_0}(x)) \leq \eta$ 且 $\mathcal{H}^2(\partial B_r(x)) \leq \delta_2^2/64$ 对所有 $r \leq r_0$成立。令 $r_i \to 0$ 满足 $r_i \leq r_0$, $B_{r_i}(x) \subset U$, 并且对所有 k 和i有 $\Sigma_k \in \mathcal{D}^*(B_{r_i}(x))$，这由 Sard 定理保证。根据引理 9.1，取 $\theta = r_i/2$，若

$$\liminf_k \mathcal{H}^2(\Sigma_k \cap B_{r_i}(x)) \leq \frac{r_i^2}{192\beta},$$

then

$$\|V\|(B_{r_i/2}(x)) \leq \liminf_k \mathcal{H}^2(\Sigma_k \cap B_{r_i/2}(x)) \leq \liminf_k 6\varepsilon_k = 0,$$

这与 $x \in \text{spt}\|V\|$矛盾。因此，根据横截性假设，我们有

$$\|V\|(B_{r_i}(x)) = \lim_k \mathcal{H}^2(\Sigma_k \cap B_{r_i}(x)) \geq \frac{r_i^2}{192\beta}.$$

由 (6.5) 对 V 的单调性可知，我们有

$$\Theta^2(\|V\|, x) \geq \frac{1}{1000\beta},$$

如所愿。 □

现在我们已经具备所有工具，可以运用 [AS79] 的策略来推导内部正则性。

定理10.2。令 $\{\Sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}^*(U)$ 满足 $\sup_k \mathcal{H}^2(\Sigma_k \cap U) \leq \delta_2^2/64$ 并且

$$\mathcal{H}^2(\Sigma_k) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma_k') + T_h(\Sigma_k, \Sigma_k') + \varepsilon_k \tag{10.2}$$

对于所有 $\Sigma_k' \in \mathcal{D}(U)[\Sigma_k]$，满足 $\varepsilon_k \to 0$。令 V 和Ω分别为由定理 *6.1* 给出的 $\Sigma_k \cap U$ 的子序列变分流形极限和Ω_k 的子序列 *Caccioppoli* 集极限。令 $\alpha \in (0,1)$。

V is an integer rectifiable varifold with c-bounded first variation. For every $x \in \text{spt}\|V\|$, we have $\Theta^2(\|V\|, x) = n_x \in \mathbb{N}$. If $h(x) \neq 0$, then $n_x \in \{1\} \cup 2\mathbb{N}$. For every $x \in \text{spt}\|V\|$, there is a neighborhood W_x of x so that the following hold.

- $V \llcorner G(W_x, 2) = \sum_{l=1}^{n_x} \mathbf{v}(N_l, 1)$，其中 $N_l \subset W_x$是一个 $C^{1,\alpha}$曲面，其一阶变分有 c界。此外，对于任意 l、$l' \in \{1, \ldots, n_x\}$，每个 N_l 都位于 $N_{l'}$ 的一侧，并在 x 处相切相交。

- 如果 $n_x = 1$，那么$-\|V\| \llcorner W_x = |D\mathbf{1}_\Omega| \llcorner W_x$, $- V \llcorner G(W_x, 2) = \mathbf{v}(N, 1)$，其中 $N \subset W_x$ 是相对于集合$\Omega \cap W_x$具有指定平均曲率 h 的光滑稳定曲面。

- 如果 $h(x) \neq 0$且 $n_y = 2n$对于所有 $y \in \text{spt}\|V\| \cap W_x'$对于包含$x$的开集 $W_x' \subset W_x$，则 $V \llcorner G(W_x', 2) = \mathbf{v}(N, 2n)$，其中 $N \subset W_x'$是一个光滑稳定极小曲面。此外，$\Omega \cap W_x' = W_x' \setminus N$如果 $h(x) > 0$, 并且 $\Omega \cap W_x' = \varnothing$ 如果 $h(x) < 0$。

• 如果 $h(x) \neq 0$, $n_x = 2n$，并且存在一个序列 $x_j \to x$，满足 $x_j \in \mathrm{spt}\|V\|$ 和 $n_{x_j} \neq 2n$, 那么 $n = 1$，且曲面 N_1, $N_2 \subset W_x$ 还满足： N_1 的广义平均曲率指向 N_2，反之亦然。

证明。根据引理10.1， V 是可整流的，并且在其支集上具有一致的正密度下界。根据定理 6.1(6.4)， V 具有 c-有界的一阶变分。

Integer Density. We show that the density of V is an integer at every $x \in \mathrm{spt}\|V\|$. Since this result concerns the infinitesimal behavior of V near x, we push objects to T_xM using the exponential map ϕ_x. In T_xM, we use the standard Euclidean metric in the geodesic normal coordinates, which is the C^∞ limit of the pullback metric under a blow up rescaling.

首先，令 $x \in \mathrm{spt}\|V\|$ 满足存在一个切锥 $C \in \mathrm{VarTan}(V, x)$，且 $\mathrm{spt}\|C\| \subset P_C$，其中 P_C 是 T_xM 中的一个二维平面（由可整性可知，这在 $\|V\|$-几乎处处成立）。

固定任意 $\xi > 0$。

不妨假设 $P_C \supset \mathrm{spt}\|C\|$ 是 x_1x_2-平面，在 T_xM 中。

令 μ_t 表示由 $\mu_t(y) = ty$给出的 T_xM 的变换。根据 C的定义，存在一个序列 $\{r_j\} \to \infty$，使得

$$(\mu_{r_j} \circ \phi_x^{-1})_\# V \rightharpoonup C \tag{10.3}$$

如 $j \to \infty$。我们始终假设 $r_j \geq 1$。

根据引理10.1给出的下密度界以及 (6.5) 的单调性，存在一个序列 $\{\sigma_j\} \to 0$，使得

$$(B_1^{\mathbb{R}^2}(0) \times (-2, 2)) \cap \mathrm{spt}\|(\mu_{r_j} \circ \phi_x^{-1})_\# V\| \subset B_1^{\mathbb{R}^2}(0) \times (-\sigma_j/2, \sigma_j/2). \tag{10.4}$$

我们先建立一些记号。为区分 T_xM 中的对象与 M 中的对象，我们在此使用小写字母。设

- $v^j \coloneqq (\mu_{r_j} \circ \phi_x^{-1})_\# V$,
- $s_{k,j} \coloneqq (\mu_{r_j} \circ \phi_x^{-1})(\Sigma_k)$,
- $b_\rho \coloneqq B_\rho^{T_xM}(0)$,
- $c_{\rho,\sigma} \coloneqq \partial b_\rho \cap \{x_3 \in [-\sigma, \sigma]\}$,
- $d^+_{\rho,\sigma} \coloneqq \partial b_\rho \cap \{x_3 > \sigma\}$,
- $d^-_{\rho,\sigma} \coloneqq \partial b_\rho \cap \{x_3 < -\sigma\}$.

由 (10.4)，我们有

$$\limsup_k \mathcal{H}^2(s_{k,j} \cap (B_1^{\mathbb{R}^2}(0) \times ([-1, 1] \setminus (-\sigma_j/2, \sigma_j/2)))) = 0. \tag{10.5}$$

由 (10.5) 和余面积公式，对于几乎所有的 $\rho < 1$，我们有

$$\limsup_k \mathcal{H}^1(s_{k,j} \cap (d^+_{\rho,\sigma_j/2} \cup d^-_{\rho,\sigma_j/2})) = 0 \tag{10.6}$$

对每个 j 均成立。固定某个满足 (10.6) 的 $\rho_1 \in (3/4, 1)$，使得对每个 k 和 j，$s_{k,j}$ 与 ∂b_{ρ_1} 横截相交；这由 Sard 定理保证。

固定某个 $\zeta > 0$。对于 $k \geq k_1(j, \zeta, \rho_1)$，我们有

$$\mathcal{H}^1(s_{k,j} \cap (d^+_{\rho_1,\sigma_j/2} \cup d^-_{\rho_1,\sigma_j/2})) < \zeta. \tag{10.7}$$

对于 $\zeta \leq \zeta_1(M)$，余面积公式给出

$$s_{k,j} \cap (\partial d^+_{\rho_1,\sigma_{k,j}} \cup \partial d^-_{\rho_1,\sigma_{k,j}}) = \varnothing, \tag{10.8}$$

对于序列 $\sigma_{k,j} \in (\sigma_j/2, \sigma_j)$。

我们对 $s_{k,j} \in \mathcal{D}^*(b_{\rho_1})$ 应用引理 8.2，取常数 ξ。我们得到替换$\tilde{s}_{k,j} \in \mathcal{D}(b_{\rho_1})[s_{k,j}]$，以及由 b_{ρ_1} 中的 $\tilde{s}_{k,j}$ 构成的一组圆盘 $\mathfrak{S}_{k,j}$。

设 $\xi' \in [\xi, 2\xi]$ 使得

$$\|v^j\|(\partial b_{\rho_1-\xi'}) = 0 \tag{10.9}$$

对于所有 j。

由引理 8.2 的 (8.4) 和 (8.9) 得（同时利用 (10.9)），我们有

$$v^j \llcorner G(b_{\rho_1-\xi'}, 2) = \lim_k \sum_{d\in\mathfrak{S}_{k,j}} \mathbf{v}(d \cap b_{\rho_1-\xi'}). \tag{10.10}$$

步骤 1：我们证明可以舍弃在帽形区域 $d^{\pm}_{\rho_1,\sigma_{k,j}}$ 内具有边界的圆盘 $d \in \mathfrak{S}_{k,j}$。令 $\mathfrak{C}_{k,j}$ 为 $\mathfrak{S}_{k,j}$ 中所有此类圆盘的集合。对每个 $d \in \mathfrak{C}_{k,j}$，令 f_d 为 $d^+_{\rho_1,\sigma_{k,j}} \cup d^-_{\rho_1,\sigma_{k,j}}$ 中 ∂d 的等周区域。由 (10.7) 和引理 8.2(8.10)，我们有

$$\sum_{d\in\mathfrak{C}_{k,j}} \mathcal{H}^1(\partial d) \le \zeta$$

对于 $k \ge k_1(j, \zeta, \rho_1)$。由圆球面上的等周不等式可知，我们有

$$\mathcal{H}^2(f_d) \le \beta_1 \mathcal{H}^1(\partial d)^2$$

对所有 $d \in \mathfrak{C}_{k,j}$。因此，我们有

$$\sum_{d\in\mathfrak{C}_{k,j}} \mathcal{H}^2(f_d) \le \beta_1 \sum_{d\in\mathfrak{C}_{k,j}} \mathcal{H}^1(\partial d)^2 \le \beta_1 \left(\sum_{d\in\mathfrak{C}_{k,j}} \mathcal{H}^1(\partial d) \right)^2 \le \beta_1 \zeta^2$$

对于 $k \ge k_1(j, \zeta, \rho_1)$。考虑如下竞争对象：将每个 $d \in \mathfrak{C}_{k,j}$ 替换为 f_d（然后消除重叠，使面积的增加不超过 ε_k，其中 [见 AS79，推论 1]）。由 (10.2)、引理 8.2 (8.8) 以及 $|d\phi_x|\big|_{B^M}$ $_{\rho/r_j}(x) \le 1 + o_j(1)$，我们有这一事实

$$r_j^{-2} \sum_{d\in\mathfrak{S}_{k,j}} \mathcal{H}^2(d) \le r_j^{-2} \sum_{d\in\mathfrak{S}_{k,j}\setminus\mathfrak{C}_{k,j}} \mathcal{H}^2(d) + r_j^{-2} \sum_{d\in\mathfrak{C}_{k,j}} \mathcal{H}^2(f_d) + 2cr_j^{-3}\mathcal{H}^3(b_{\rho_1}) + 2\varepsilon_k + o(r_j^{-2}).$$

改写后，我们有

$$\sum_{d\in\mathfrak{C}_{k,j}} \mathcal{H}^2(d) \le \beta_1\zeta^2 + \frac{2c\mathcal{H}^3(b_1)}{r_j} + 2r_j^2\varepsilon_k + o_j(1) \tag{10.11}$$

对于 $k \ge k_1(j, \zeta, \rho_1)$。取 $j \ge j_2(M, \xi)$ 和 $\zeta \le \zeta_2(M, \xi)$，再取 $k \ge k_2(j, \zeta, \rho_1, \xi)$，即可应用引理 9.1 得出

$$\lim_k \sum_{d\in\mathfrak{C}_{k,j}} \mathbf{v}(d \cap b_{\rho_1-\xi}) = 0$$

对所有 $j \ge j_2(M, \xi)$。

步骤 2：我们证明可以舍弃 $c_{\rho_1,\sigma_{k,j}}$ 中边界为零伦的圆盘。令$\mathfrak{N}_{k,j}$ 为 $\mathfrak{S}_{k,j}$ 中所有此类圆盘的集合。由 (6.5) 的单调性可知，对于所有依赖于 V 和 c 的 j，b_1 中 v^j 的质量都有一个统一上界。

令 $\mathfrak{N}_{k,j}^{-} \subset \mathfrak{N}_{k,j}$ 为满足 $\mathcal{H}^2(d) \le \frac{\xi^2}{48\beta_1}$ 的圆盘 $d \in \mathfrak{N}_{k,j}$ 的集合。由质量的统一上界，存在一个 $m = m(V, c, \xi) \in \mathbb{N}$，使得

$$\sum_{d\in\mathfrak{N}_{k,j}^{-}} \mathcal{H}^2(d) \le m\frac{\xi^2}{48\beta_1}$$

对所有 j。通过标准的计数论证，我们可以将 $\mathfrak{N}_{k,j}^{-}$ 划分为 $2m$ 个互不相交的集合 $\{\mathfrak{N}_{k,j,i}^{-}\}_{i=1}^{2m}$（其中一些可能为空），使得

$$\sum_{d\in\mathfrak{N}_{k,j,i}^{-}} \mathcal{H}^2(d) \le \frac{\xi^2}{48\beta_1}.$$

根据引理 9.1，我们有

$$\lim_k \sum_{d\in\mathfrak{N}_{k,j}^{-}} \mathbf{v}(d\cap b_{\rho_1-\xi}) = \sum_{i=1}^{2m} \lim_k \sum_{d\in\mathfrak{N}_{k,j,i}^{-}} \mathbf{v}(d\cap b_{\rho_1-\xi}) = 0.$$

令 $\mathfrak{N}_{k,j}^{+}$ 表示满足 $\mathcal{H}^2(d) > \frac{\xi^2}{48\beta_1}$ 的圆盘 $d \in \mathfrak{N}_{k,j}$ 的集合。由质量的一致上界，我们有 $\#\mathfrak{N}_{k,j}^{+} \le m$。令 f_d 表示 $c_{\rho_1,\sigma_{k,j}}$ 中的等周区域，其中 ∂d。考虑如下竞争者：对所有 $d \in \mathfrak{N}_{k,j}^{+}$，将 d 替换为 f_d（然后按照 AS79 的推论 1]消除重叠，面积增加不超过 ε_k，即由 [给出）。如步骤 1 中一样，(10.2) 和引理 8.2(8.8) 蕴含

$$r_j^{-2}\sum_{d\in\mathfrak{S}_{k,j}} \mathcal{H}^2(d) \le r_j^{-2}\sum_{d\in\mathfrak{S}_{k,j}\setminus\mathfrak{N}_{k,j}^{+}} \mathcal{H}^2(d) + r_j^{-2}\sum_{d\in\mathfrak{N}_{k,j}^{+}} \mathcal{H}^2(f_d) + 2cr_j^{-3}\mathcal{H}^3(b_{\rho_1}) + 2\varepsilon_k + o(r_j^{-2}).$$

改写后，我们得到

$$\sum_{d\in\mathfrak{N}_{k,j}^{+}} \mathcal{H}^2(d) \le m\mathcal{H}^2(c_{\rho_1,\sigma_j}) + \frac{2c\mathcal{H}^3(b_1)}{r_j} + 2r_j^2\varepsilon_k + o_j(1). \tag{10.12}$$

假设 $j \ge j_3(c, \rho_1, M, V, \xi)$，然后取 $k \ge k_3(j, \rho_1, M, V, \xi)$，得到 $\#\mathfrak{N}_{k,j}^{+} = 0$。

步骤 3：我们得到边界在 $c_{\rho_1,\sigma_{k,j}}$ 中同伦非平凡的圆盘面积的上下界。令 $\mathfrak{L}_{k,j}$ 表示 $\mathfrak{S}_{k,j}$ 中这类圆盘的集合。

令 $d \in \mathfrak{L}_{k,j}$。由于 ∂d 在 $c_{\rho_1,\sigma_{k,j}}$ 中同伦非平凡，(10.5) 推出

$$\mathcal{H}^2(d\cap b_\rho) \ge \pi(\rho-\xi)^2 \tag{10.13}$$

对于 $\rho \in [\rho_1 - 2\xi, \rho_1]$, $j \ge j_4(\rho_1, M, V, \xi)$，以及 $k \ge k_4(j, \rho_1, M, \xi)$。

根据极限的一致质量界，存在一个 $m = m(c, V)$，使得 $\#\mathfrak{L}_{k,j} \le m$ 对所有 $j \ge j_4(c, \rho_1, M, V, \xi)$ 和 $k \ge k_4'(j, c, \rho_1, M, V, \xi)$ 成立。

对于每个 $d \in \mathfrak{L}_{k,j}$，令 m_d 为具有 $\partial m_d = \partial d$ 的圆盘，使得 $m_d \setminus b_{\rho_1} \subset c_{\rho_1,\sigma_{k,j}}$ 且 $m_d \cap b_{\rho_1}$ 为平坦圆盘 $d_{k,j}^{*} \subset b_{\rho_1}$，其边界为 $\partial d_{\rho_1,\sigma_{k,j}}^{+}$。注意，

$$\mathcal{H}^2(m_d) \le \mathcal{H}^2(c_{\rho_1,\sigma_{k,j}}) + \mathcal{H}^2(d_{k,j}^{*}).$$

考虑将每个 $d \in \mathfrak{L}_{k,j}$ 替换为 m_d （然后使用 [AS79,推论 1]解决重叠部分）所得到的竞争者。与步骤 1 和 2 一样，(10.2) 意味着

$$r_j^{-2} \sum_{d \in \mathfrak{G}_{k,j}} \mathcal{H}^2(d) \leq r_j^{-2} \sum_{d \in \mathfrak{G}_{k,j} \setminus \mathfrak{L}_{k,j}} \mathcal{H}^2(d) + r_j^{-2} \sum_{d \in \mathfrak{L}_{k,j}} \mathcal{H}^2(m_d) + 2cr_j^{-3}\mathcal{H}^3(b_{\rho_1}) + 2\varepsilon_k + o(r_j^{-2}).$$

改写后，我们有

$$\sum_{d \in \mathfrak{L}_{k,j}} \mathcal{H}^2(d) \leq (\#\mathfrak{L}_{k,j})(\mathcal{H}^2(d^*_{k,j}) + \mathcal{H}^2(c_{\rho_1,\sigma_j})) + \frac{2c\mathcal{H}^3(b_1)}{r_j} + 2r_j^2\varepsilon_k + o_j(1).$$

假设 $j \geq j_5(c, \rho_1, M, V, \xi)$，然后取 $k \geq k_5(j, c, \rho_1, M, V, \xi)$，则对每个$d \in \mathfrak{L}_{k,j}$（由（10.13））

$$\mathcal{H}^2(d) \leq \pi(\rho_1 + \xi)^2. \tag{10.14}$$

第4步：我们计算 V 在 x 处的密度。根据 (10.9) 和上述工作，我们有

$$\|v^j\|(b_{\rho_1-\xi'}) = \lim_k \sum_{d \in \mathfrak{L}_{k,j}} \mathcal{H}^2(d \cap b_{\rho_1-\xi'}).$$

根据 (10.13) 和 (10.14)，有

$$(\limsup_k \#\mathfrak{L}_{k,j})\pi(\rho_1 - \xi)^2 \leq \|v^j\|(b_{\rho_1-\xi',j}) \leq (\liminf_k \#\mathfrak{L}_{k,j})\pi(\rho_1 + \xi)^2.$$

Assuming ξ is sufficiently small (depending on universal quantities), we have $\lim_k \#\mathfrak{L}_{k,j}$ exists, so we have $\#\mathfrak{L}_{k,j} = n_j \in \mathbb{N}$ for all $j \geq j_5(c, \rho_1, M, V, \xi)$ and $k \geq k_6(j, c, \rho_1, M, V, \xi)$. By the monotonicity of (6.5), n_j is decreasing for $j \geq j_6(c, \rho_1, M, V, \xi)$. By Lemma 10.1, we have $n_j \geq 1$. Hence, we have $n_j \equiv n \geq 1$ for all $j \geq j_6'(c, \rho_1, M, V, \xi)$. Therefore, we have

$$n - o_\xi(1) \leq \Theta^2(\|V\|, x) \leq n + o_\xi(1).$$

由于 ξ 是任意的，我们得出 $\Theta^2(\|V\|, x) = n \in \mathbb{N}$，即 V 在其支集中的所有点 x 处都具有整数密度，只要存在某个切锥 $C \in \mathrm{VarTan}(V, x)$ 支集于一个二维平面 $P_C \subset T_xM$。

切锥的平坦性。现在我们证明，对于所有 $x \in \mathrm{spt}\|V\|$，每个切锥$C \in \mathrm{VarTan}(V, x)$ 都支集于某个二维平面 $P_C \subset T_xM$。

引理10.3 （平坦性）。设 U、Σ_k、V如定理 *10.2* 的陈述所述。若 $x \in \mathrm{spt}\|V\|$且 $C \in \mathrm{VarTan}(V, x)$，则 $\mathrm{spt}\|C\| \subset P_C$对于某个二维平面 P_C。

Proof. Let $x \in \mathrm{spt}\|V\|$, and let $C \in \mathrm{VarTan}(V, x)$. There is a subsequence (not relabeled) and radii $r_k \to \infty$ so that $v^k := (\mu_{r_k} \circ \phi_x^{-1})_\# V \rightharpoonup C$. By selecting a further subsequence (not relabeled), the surfaces $s_k := (\mu_{r_k} \circ \phi_x^{-1})(\Sigma_k)$ satisfy

$$\mathbf{v}(s_k) \rightharpoonup C.$$

我们可以选择子序列，使得 $r_k^2\varepsilon_k \to 0$。

根据 Sard定理，我们可以找到一个半径 $r > 0$ 使得 $b_r := b_r^{T_xM}(0)$ 对所有 k 都满足 $s_k \in \mathcal{D}^*(b_r)$。注意，根据 (10.2)（以及上述步骤 1 中的相同论证），我们有

$$\mathcal{H}^2(s_k) \leq \mathcal{H}^2(s_k') + r_k^{-1}T_h(s_k, s_k') + r_k^2\varepsilon_k + o_k(1)$$

对所有 $s_k' \in \mathcal{D}(b_r)[s_k]$。

我们应用引理 ma 8.2 将 s_k 放入具有常数 $\theta < r/2$ 的 b_r 中，从而得到新圆盘 $\tilde{s}_k$，使得 at

$$\mathcal{H}^2(\tilde{s}_k) \leq \mathcal{H}^2(s_k') + r_k^{-1}T_h(\tilde{s}_k, s_k') + r_k^2\varepsilon_k + o_k(1)$$

对所有 $s'_k \in \mathcal{D}(b_r)[\tilde{s}_k]$ 均成立。由 (8.9)，可得

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{v}(\tilde{s}_k \cap b_{r/2}) = C_{\llcorner} G(b_{r/2}, 2).$$

由于根据引理 8.2，对所有 $s'_k \in \mathcal{D}(b_r)[\tilde{s}_k]$ 都有 $\tilde{s}_k \triangle s'_k \subset b_r$，我们有 $T_h(\tilde{s}_k,\ s'_k) \le c\mathcal{H}^3(b_r) < \infty$。因此，

$$\varepsilon'_k := r_k^{-1} T_h(s_k, s'_k) + r_k^2 \varepsilon_k + o_k(1)$$

满足 $\varepsilon'_k \to 0$，并且

$$\mathcal{H}^2(\tilde{s}_k) \le \mathcal{H}^2(s'_k) + \varepsilon'_k \tag{10.15}$$

对所有 $s'_k \in \mathcal{D}(b_r)[\tilde{s}_k]$ 都成立。

由于我们已经证明，圆盘 $\tilde{s}_k$ 关于属于类 $\mathcal{D}(b_r)[\tilde{s}_k]$ 的竞争者 s'_k 构成面积的极小化序列，因此现在可以遵循 [AS79] 的证明策略得出结论。

Indeed, we observe that [AS79, Theorem 3 and Corollary 2] hold for the area minimization problem restricted to $\mathcal{D}(b_r)[\tilde{s}_k]$. Case I and Case II in the proof of [AS79, Theorem 3] follow directly from the argument in [AS79]. As for Case III, note that the relevant step in the proof only uses disks obtained from the replacement procedure (which lie in our restricted set of competitors) and comparison to isoperimetric regions (also in the restricted set of competitors). The rest of the proofs are unchanged. □

引理 10.3 连同证明的上一步表明，V 在其支集的每一点处都具有正的整数密度。

分解 V。为了研究 V 的局部正则性，我们回到 M中进行研究。我们调整整数密度证明中的设置。令 $x \in \mathrm{spt}\|V\|$, $\xi > 0$, $r_j \to \infty$, $\sigma_j \to 0$,$\zeta > 0$, $\sigma_{k,j} \in (\sigma_j/2, \sigma_j)$ 如上所述。我们定义

- $B_{\rho,\ j} := B^M_{\rho/r_j}(x)$,
- $C_{\rho,\sigma,j} := (\mu_{r_j} \circ \phi_x^{-1})^{-1}(c_{\rho,\sigma}) \subset B_{\rho,j}$,
- $D^{\pm}_{\rho\,\sigma\,j} = \mu_{r_j} \circ \phi_x^{-1\ -1}\ d^{\pm}_{\rho\,\sigma} \subset B_{\rho\,j}$,: ( ) ( ) ,.

我们将引理 8.2 应用于 $\Sigma_k \in \mathcal{D}^*(B_{\rho_1,j})$，常数为 ξ，从而得到新圆盘 $S_{k,j}$。由 (8.5)，我们有

$$\mathcal{H}^2(S_{k,j}) \le \mathcal{H}^2(S'_{k,j}) + T_h(S_{k,j}, S'_{k,j}) + \varepsilon_k \tag{10.16}$$

对于所有 $S'_{k,j} \in \mathcal{D}(B_{\rho_1,j})[S_{k,j}]$。令 $\mathcal{S}_{k,j}$ 为构成 $S_{k,j}$ 的圆盘集合，其中在 $B_{\rho_1,j}$ 中。令 $\mathcal{L}_{k,j} \subset \mathcal{S}_{k,j}$ 为 $C_{\rho_1,\sigma_{k,j},j}$ 中具有同伦非平凡边界的圆盘。我们将整数密度证明中的估计转用于 M。

此后，我们假设 $j \ge j'_6(c, \rho_1, M, V, \xi)$ 和 $k \ge k_6(j, c, \rho_1, M, V, \xi)$ 如上所述。也就是说，对于所有这样的 j 和 k，我们都有 $\#\mathcal{L}_{k,j} = n$ 。

将圆盘标记为 $D \in \mathcal{L}_{k,\ j}$，记作 $\{D_{k,j,1}, \ldots, D_{k,j,n}\}$。存在一个子序列（重新排列 1 到 n 的标签后，不再重新标记），使得 $\mathbf{v}(D_{k,\ j,\ i})$ 在变分流形意义下收敛到极限 $V_{j,\ i}$，其中 $i = 1,$ ....., n，当 $k \to \infty$ 时，满足

$$\|V_{j,i}\|(B_{\rho_1-2\xi,j}) \ge \pi(\rho_1 - 4\xi)^2 r_j^{-2} \ \text{ and } \ \|V_{j,i}\|(B_{\rho_1,j}) \le \pi(\rho_1 + 2\xi)^2 r_j^{-2}, \tag{10.17}$$

$$\mathrm{spt}\|V_{j,i}\| \subset (\mu_{r_j} \circ \phi_x^{-1})^{-1}(B^{T_x M}_{\rho_1}(0) \cap \{-\sigma_j \le x_3 \le \sigma_j\}), \tag{10.18}$$

and

$$V \llcorner G(B_{\rho_1-2\xi,j},2) = \sum_{i=1}^{n} V_{j,i} \llcorner G(B_{\rho_1-2\xi,j},2). \tag{10.19}$$

化归为叠置圆盘极小化。现在我们将问题化归为叠置圆盘极小化问题。

令 $\mathcal{E}_{k,j} := \mathcal{S}_{k,j} \setminus \mathcal{L}_{k,j}$。对于 $D \in \mathcal{E}_{k,j}$ 令 $F_D \subset \partial B_{\rho_1,j}$ 为 ∂D的等周区域。令 $\Lambda_D \subset B_{\rho_1,j}$ 为由 $D \cup F_D$围成的开集。

上述整数密度证明中的步骤 1 和 2 表明

$$\limsup_k \sum_{D\in\mathcal{E}_{k,j}} \mathcal{H}^2(D \cap B_{1/2,j}) = 0. \tag{10.20}$$

特别地，(10.11) 和 (10.12) 推出

$$\mathcal{H}^2(D) + \mathcal{H}^2(F_D) \le A(\xi,\zeta,j,k) \tag{10.21}$$

其中 $A(\xi,\zeta,j,k) \to 0$ 为$(\xi,\zeta) \to 0$ 且 $j,k \to \infty$。由 (8.2)，我们有

$$\mathcal{H}^3(\Lambda_D) \le c_1 A(\xi,\zeta,j,k)^{3/2}.$$

令 ξ 和 ζ 足够小，令 j 和 k 足够大，余面积公式意味着

$$\limsup_k \mathcal{H}^2(\Lambda_D \cap \partial B_{\rho,j}) \le \frac{1}{4}\mathcal{H}^2(\partial B_{1/4,j}) \le \frac{1}{4}\mathcal{H}^2(\partial B_{\rho,j}) \tag{10.22}$$

对于某个 p 集合中的 ρ 在 $(1/4,1/2)$ 中具有正测度。由余面积公式和 (10.20)，我们有

$$\limsup_k \sum_{D\in\mathcal{E}_{k,j}} \mathcal{H}^1(D \cap \partial B_{\rho,j}) = 0 \tag{10.23}$$

对于几乎所有的 $\rho \in (1/4,1/2)$。取满足 (10.22) 和 (10.23) 的 $\rho \in (1/4,1/2)$。根据余面积公式和 (10.23)，我们有

$$\limsup_k \sum_{D\in\mathcal{E}_{k,j}} \mathcal{H}^0(D \cap \partial C_{\rho,\sigma,j}) = 0 \tag{10.24}$$

对于在 $(\sigma_0/4,\sigma_0/2)$ 中一个正测度集合内的 σ。

For $D \in \mathcal{E}_{k,j}$, let B_D be the unique component of $D \setminus B_{\rho,j}$ containing ∂D. Note that B_D is a punctured disk with boundary $\partial D \cup \bigcup_l \alpha_l$, where α_l are smooth Jordan curves in $\partial B_{\rho,j}$. Let N_D be a smooth disk in $\overline{B}_{\rho_1,j} \setminus \overline{B}_{\rho,j}$ obtained by gluing F_{α_l} (the isoperimetric region in $\partial B_{\rho,j}$ for α_l) to B_D and then smoothing. This procedure is well-defined as long as F_{α_l} is glued and perturbed before $F_{\alpha_{l'}}$ if $F_{\alpha_l} \subset F_{\alpha_{l'}}$. Moreover, the resulting surface is a disk by construction.

我们构造一个竞争曲面 $\mathbf{S}_{k,j} \in \mathcal{D}(B_{\rho_1,j})[S_{k,j}]$，方法是将每个 $D \in \mathcal{E}_{k,j}$ 替换为 N_D。由于曲面 B_D 彼此不相交，我们可以选择一种平滑方式，使曲面 N_D 也彼此不相交，因此 $\mathbf{S}_{k,j}$ 是定义良好的。

我们声称，在 (10.16) 中将 $S_{k,j}$ 替换为 $\mathbf{S}_{k,j}$ 是可行的，但需先将 ε_k 替换为某个满足 $\lim_k \varepsilon_{k,j} = 0$ 的 $\varepsilon_{k,j}$。注意，N_D 由 D 经以下步骤得到：(a) 对 $D\setminus B_{\rho,j}$ 的每个连通分支应用引理 4.3，但不包括 B_D；(b) 删除 $B_{\rho,j}$中的所有内容；(c) 按照上文所述，将 B_D 变为 $\overline{N_D}$。由引理 4.3 和 (10.21) 可知，经过步骤 (a) 后，$\mathcal{A}^h$ 泛函不会增加。由于我们

在步骤 (b) 中只删除曲面的一部分，因此面积不会因此增加。由 (8.2)、(4.5) 和 (10.22)，我们有（当 k 足够大时）

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^3(\Lambda_D \cap B_{\rho,j}) &\le c_1(\mathcal{H}^2(D \cap B_{\rho,j}) + \mathcal{H}^2(\Lambda_D \cap \partial B_{\rho,j}))^{3/2} \\ &\le c_1(\mathcal{H}^2(D \cap B_{\rho,j}) + \beta_0 \mathcal{H}^1(D \cap \partial B_{\rho,j})^2)^{3/2}\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{D\in\mathcal{E}_{k,j}} \mathcal{H}^3(\Lambda_D \cap B_{\rho,j}) &\le c_1 \sum_{D\in\mathcal{E}_{k,j}} (\mathcal{H}^2(D \cap B_{\rho,j}) + \beta_0 \mathcal{H}^1(D \cap \partial B_{\rho,j})^2)^{3/2} \\ &\le c_1 \left(\sum_{D\in\mathcal{E}_{k,j}} (\mathcal{H}^2(D \cap B_{\rho,j}) + \beta_0 \mathcal{H}^1(D \cap \partial B_{\rho,j})^2) \right)^{3/2} \qquad (10.25) \\ &\le c_1 \left(\sum_{D\in\mathcal{E}_{k,j}} \mathcal{H}^2(D \cap B_{\rho,j}) + \beta_0 \left(\sum_{D\in\mathcal{E}_{k,j}} \mathcal{H}^1(D \cap \partial B_{\rho,j}) \right)^2 \right)^{3/2}\end{aligned}$$

并且由 (10.20)和 (10.23) 可知，右端趋于零。因此，由 (b) 引起的体积变化随 $k \to \infty$消失。最后，由 (10.23) 和(4.5)，我们有$\lim_k \sum_{\mathcal{E}_{k,j}} \mathcal{H}^2(N_D \triangle B_D) = 0$，因此在 (c) 中增加的面积随 $k \to \infty$ 消失。因此，我们有

$$\mathcal{H}^2(\mathbf{S}_{k,j}) \le \mathcal{H}^2(S'_{k,j}) + T_h(\mathbf{S}_{k,j}, S'_{k,j}) + \varepsilon_{k,j} \qquad (10.26)$$

对于所有 $S'_{k,j} \in \mathcal{D}(B_{\rho_1,j})[\mathbf{S}_{k,j}]$，其中 $\lim_k \varepsilon_{k,j} = 0$。

令 $D'_{k,j,i} \in \mathcal{D}(B_{\rho,j})[D_{k,j,i}]$ 对于 $i = 1, \dots, n$ 互不相交。令$\Omega_{k,j,i}$ 为 $B_{\rho_1,j}$ 中的开集，使得

$$\partial[\Omega_{k,j,i}] \llcorner B_{\rho_1,j} = [D_{k,j,i}] \llcorner B_{\rho_1,j}.$$

令 $\Omega'_{k,j,i}$ 为 $D'_{k,j,i}$ 的相应开集。我们断言

$$\sum_i \left(\mathcal{H}^2(D_{k,j,i}) - \int_{\Omega_{k,j,i}} h \, d\mathcal{H}^3 \right) \le \sum_i \left(\mathcal{H}^2(D'_{k,j,i}) - \int_{\Omega'_{k,j,i}} h \, d\mathcal{H}^3 \right) + \varepsilon''_{k,j} \qquad (10.27)$$

对于某个 $\lim_k \varepsilon''_{k,j} \to 0$。

Consider the competitor $S'_{k,j} \in \mathcal{D}(B_{\rho_1,j})[\mathbf{S}_{k,j}]$ given by replacing each $D_{k,j,i}$ by $D'_{k,j,i}$. This competitor is well-defined (i.e. there are no self-intersections) because $(\mathbf{S}_{k,j} \setminus \bigcup_i D_{k,j,i}) \cap B_{\rho,j} = \varnothing$ by definition, and $D'_{k,j,i} \setminus \overline{B}_{\rho,j}$ is a subset of $D_{k,j,i}$. Hence, (10.27) follows directly from (10.26).

我们以一些记号作结。令$B_{k,j,i}$ 为$B_{\rho_1,j}$ 中的开集，使得 t

$$\partial B_{k,j,i} \setminus D_{k,j,i} \subset \partial B_{\rho_1,j} \quad \text{and} \quad D^-_{\rho_1,\sigma_{k,j},j} \subset \partial B_{k,j,i}.$$

若对于某个 $i \neq i'$，$B_{k,\,j,\,i} \subset B_{k,\,j,\,i'}$，则称$D_{k,\,j,\,i} < D_{k,\,j,\,i'}$。若 $B_{k,\,j,\,i} = \Omega_{k,\,j,\,i}$（如上所定义），则称 $D_{k,\,j,\,i}$ 向上定向；否则，称其向下定向。通过选取一个子序列并重新编号，我们可以假设

$$D_{k,j,1} > D_{k,j,2} > \ldots > D_{k,j,n},$$

并且，对于所有 $k' \neq k$，$D_{k,\,j,\,i}$ 向上定向，当且仅当$D_{k',\,j,\,i}$ 向上定向。根据假设，存在一个满足 $\partial\Lambda_k \cap U = \Sigma_k \cap U$ 的开集 Λ_k，我们得出，$D_{k,\,j,\,i}$向上定向，当且仅当 $D_{k,\,j,\,i-1}$ 和 $D_{k,\,j,\,i+1}$向下定向（即定向相对于圆盘的顺序交替变化）。

堆叠圆盘的奇偶性。设 Ω_k 和 Ω 如定理 6.1 中那样相对于集合 U 定义。设 $x \in \mathrm{spt}\|V\|$。我们声称

$$\Theta^2(\|V\|, x) \equiv 0 \mod 2 \implies x \notin \partial^*\Omega, \tag{10.28}$$

and

$$\Theta^2(\|V\|, x) \equiv 1 \mod 2 \implies x \in \overline{\partial^*\Omega}. \tag{10.29}$$

设 W 是 x 的任意邻域。取 j 足够大，我们有 $B_{\rho_1,\,j} \subset W$。令 $\Omega_{k,\,j,\,i}$ 如上针对堆叠圆盘 $D_{k,\,j,\,i}$ 定义。令 $\Omega_{k,\,j}$ 为 $B_{\rho_1,\,j}$ 的满足以下条件的开子集人人操

$$\partial[\Omega_{k,j}] \llcorner B_{\rho_1,j} = \sum_{i=1}^{n} [D_{k,j,i}] \llcorner B_{\rho_1,j}.$$

设 $\Omega^{j,i}$ 和 Ω^j 分别是 $\Omega_{k,j,i}$ 和 $\Omega_{k,j}$ 在 k 中的极限，意义如定理 6.1 所述。我们首先证明 $\mathcal{H}^3((\Omega^j \triangle \Omega)) \cap B_{\rho,j}) = 0$。事实上，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^3((\Omega^j \triangle \Omega) \cap B_{\rho,j}) &= \lim_k \mathcal{H}^3((\Omega_{k,j} \triangle \Omega_k) \cap B_{\rho,j}) \\ &\le \lim_k \mathcal{H}^3(\beta_k) + \sum_{D \in \mathcal{E}_{k,j}} \mathcal{H}^3(\Lambda_D \cap B_{\rho,j}) = 0,\end{aligned}$$

根据引理8.2(8.9)和(10.25)（其中 β_k 是引理 8.2中称为“B”的气泡）。因此，我们有

$$\partial^*\Omega \cap B_{\rho,j} = \partial^*\Omega^j \cap B_{\rho,j},$$

因此，只需处理 Ω^j。

令 $\omega^j := (\mu_{r_j} \circ \phi_x^{-1})(\Omega^j)$。令 $v_{j,i} := (\mu_{r_j} \circ \phi_x^{-1})_\# V_{j,i}$。由 (10.18)，我们有

$$\mathrm{spt}\left\|\sum_i v_{j,i}\right\| \cap b_\rho \subset b_\rho \cap \{-\sigma_j \le x_3 \le \sigma_j\}.$$

Let

$$b^+_{\rho,j} := b_\rho \cap \{x_3 > \sigma_j\} \quad \text{and} \quad b^-_{\rho,j} := b_\rho \cap \{x_3 \le -\sigma_j\}.$$

由于 $\partial^*\omega^j \cap b_\rho \subset \mathrm{spt}\|\sum_i v_{j,\,i}\| \cap b_\rho$，我们有 $b^+_{\rho\,,\,j} \subset \omega^j$ 或 $b^+_{\rho\,,\,j} \cap \omega^j = \varnothing$（对于 $b^-_{\rho\,j,}$ 也类似）。我们看到，$D_{k,\,j,\,1}$ 向下定向，当且仅当 $b^+_{\rho\,,\,j} \subset \omega^j$。类似地，$D_{k,\,j,\,n}$ 向上定向，当且仅当 $b^-_{\rho\,,\,j} \subset \omega^j$。注意，$b^\pm_{\rho\,,\,j}$ 包含 $b^\pm_2$ 的一个确定部分（T_xM 中半径为 2 的上半球和下半球）。

若 $n \equiv 1$ 模2，则 ω^j 在 L^1 中随着 $j \to \infty$（不妨设）收敛到上半空间 $H^+ \subset T_xM$。因此，每个充分小的邻域 W 关于 x 都满足

$$0 < \mathcal{H}^3(\Omega \cap W) < \mathcal{H}^3(W),$$

因此我们有 $x \in \overline{\partial^*\Omega}$。

若 $n \equiv 0$ 模 2，则 ω^j 在 L^1 中当 $j \to \infty$ 时收敛到 T_xM 或 $\varnothing$，因此 $x \notin \partial^*\Omega$（也就是说，我们证明了 x 不属于 Ω 的本质边界，而约化边界包含于其中（参见[Mag12，第 16.2] 定理）。

$C^{1,\,\alpha}$ 正则性。由引理 7.7(7.10) 和 (10.27)，我们有

$$\mathcal{H}^2(D_{k,j,i}) \le \mathcal{H}^2(D'_{k,j,i}) + c|T(D_{k,j,i}, D_{k,j,i'})| + \varepsilon_{k,j} \tag{10.30}$$

对于任意 $D'_{k,\,j,\,i} \in \mathcal{D}(B_{\rho,\,j})[D_{k,j,i}]$。

我们注意到，到目前为止所证明的一切只要求函数 h 可测且满足 $|h| \le c$。我们注意到，(10.30) 意味着 $D_{k,\ j,\ i}$ 是规定函数为 $-c+2c\mathbf{1}_{\Omega_{j,\ i}}$的问题的极小化序列。因此，上述所有工作都适用于 $V_{j,\ i}$。特别地，$V_{j,\ i}$ 具有 c-有界的一阶变分，且其支集中有正的整数密度。由 (10.17)，存在 W 的一个邻域，使得对于所有$y \in W \cap \mathrm{spt}\|V_{j,\ i}\|$，都有 $\Theta^2(V_{j,\ i},\ y) = 1$ 。

根据 [All72，§8], 我们有 $V_{j,i} \llcorner G(W,2) = \mathbf{v}(N_{j,i},1)$，对于一个 $C^{1,\alpha}$ 曲面 $N_{j,i} \subset W$。根据 (10.29)，我们有 $N_{j,\ i} \cap W = \partial^* \Omega^{j\ i} \cap W$。因此，$N_{j,i}$ 位于 $N_{j,i'}$ 的一侧，对于任意 $i,\ i'$，这些曲面中的每一个都在 x处相切相交。由 (10.19) 得出结论。

*分解为 1-层和2-叠。*取 x 使得 $h(x) \neq 0$。不妨设（通过交换定向并取 j 充分大）$h|_{B_{\rho_{1,\ j}}} > 0$。现在我们将叠置圆盘极小化问题(10.27) 分解为更小的单元，我们称之为 1-层和 2-叠。

我们首先分离 1-层。若$D_{k,j,1}$ 向上定向，则我们证明

$$\mathcal{H}^2(D_{k,j,1}) - \int_{\Omega_{k,j,1}} h\ d\mathcal{H}^3 \le \mathcal{H}^2(D'_{k,j,1}) - \int_{\Omega'_{k,j,1}} h\ d\mathcal{H}^3 + \varepsilon_{k,j} \tag{10.31}$$

对于所有 $D'_{k,j,1} \in \mathcal{D}(B_{\rho,j})[D_{k,j,1}]$，其中$\Omega'_{k,j,1}$ 如上所定义。如果 $D_{k,j,n}$ 通过竖直反射而向下定向，类似的结论也成立。该结果由引理 7.8 立即得到。

现在我们将 2-叠分开。如果对某个 $1 \le i' < n$，$D_{k,j,i'}$ 是向下定向的，那么我们证明

$$\sum_{i=i'}^{i'+1} \left(\mathcal{H}^2(D_{k,j,i}) - \int_{\Omega_{k,j,i}} h\ d\mathcal{H}^3 \right) \le \sum_{i=i'}^{i'+1} \left(\mathcal{H}^2(D'_{k,j,i}) - \int_{\Omega'_{k,j,i}} h\ d\mathcal{H}^3 \right) + \varepsilon'_k \tag{10.32}$$

对于所有互不相交的 $D'_{k,j,i} \in \mathcal{D}(B_{\rho,j})[D_{k,j,i}]$ 对于 $i = i',\ i'+1$，其中 $\Omega'_{k,j,i}$ 如上所定义。由引理 7.9 立即可得该结果。

*1-层的正则性。*假设 (10.31) 成立[8]。回想一下，我们证明了 $\Theta^2(V_{j,\ 1},\ y) = 1$ 对所有 $y \in W \cap \mathrm{spt}\|V_{j,\ 1}\|$ 以及

$$\mathrm{spt}\|V_{j,1}\| \cap W = \partial^* \Omega^{j,1} \cap W.$$

因此，我们有

$$\|V_{j,1}\| \llcorner W = |D\mathbf{1}_{\Omega^{j,1}}| \llcorner W.$$

将此等式代入定理 6.1(6.3)，我们得出

$$H_{V_{j,1}}|_W = h\nu_{\partial^* \Omega^{j,1}}|_W,$$

这是一个 $C^{1,\alpha}$ 向量场。迭代应用 Allard的正则性定理 [All72, §8]，我们得出 $N_{j,1}$ </style}是一个关于 in，相对于集合 Ω,1 具有指定平均曲率的光滑曲面。由光滑嵌入性和（6.2）可知稳定性成立。

*2-叠的正则性。*假设 $D_{k,\ j,\ i'}$ 在 $1 \le i' < n$ 上向下定向，因此 (10.32) 成立。为简化记号，令 $i' = 1$。

我们证明 V_j的1平均凸性。设 X 为在 B_ρ中$_j$具有紧支集的光滑向量场，并设 Φ_t 为 X的流。不失一般性，我们假设

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \|(\Phi_t)_\# V_1\|(B_{\rho,j}) < 0,$$

[8]我们注意到　(10.31) 在 V 密度为 1 的任意点处成立，$D_{k,\ j,\ 1}$ 向上定向时也成立　　.

（即导数为零，或者我们可以交换 $X \mapsto -X$）。由引理 7.7(7.11) 和 (10.32)，我们有（使用 $h \geq 0$）

$$\mathcal{H}^2(D_{k,j,1} \cap B_{\rho,j}) \leq \mathcal{H}^2(\Phi_t(D_{k,j,1}) \cap B_{\rho,j}) + c\mathcal{H}^3(\Omega_{k,j,1} \setminus \Phi_t(\Omega_{k,j,1})) + \varepsilon_k''.$$

根据定理 6.1 的证明，我们有

$$\|V_{j,1}\|(B_{\rho,j}) \leq \|(\Phi_t)_\# V_{j,1}\|(B_{\rho,j}) + c\mathcal{H}^3(\Omega^{j,1} \setminus \Phi_t(\Omega^{j,1})). \tag{10.33}$$

因此，我们有

$$0 > \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \|(\Phi_t)_\# V_{j,1}\|(B_{\rho,j}) \geq -c\frac{d}{dt}\Big|_{t=0^+} \mathcal{H}^3(\Omega^{j,1} \setminus \Phi_t(\Omega^{j,1})). \tag{10.34}$$

根据 [Mag12，命题 17，8], 我们有

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0^+} \mathcal{H}^3(\Omega^{j,1} \setminus \Phi_t(\Omega^{j,1})) \leq \int_{\partial^*\Omega_1} (X \cdot \nu_{\partial^*\Omega^{j,1}})_- \, d\mathcal{H}^2.$$

因此，我们观察到，如果 $X \cdot \nu_{\partial^*\Omega^{j,1}} \geq 0$，则一阶变分不可能为负，这就证明了所需的弱平均凸性。由竖直反射可知，对 $V_{j,2}$ 也同样成立。

Suppose $\mathrm{spt}\|V_{j,1}\| \cap W' = \mathrm{spt}\|V_{j,2}\| \cap W'$ for some open set $W' \subset W$. As shown above, $\Theta^2(V_{j,1}+V_{j,2}, x) = 2$ for all $x \in \mathrm{spt}\|V_{j,1}+V_{j,2}\| \cap W'$. By (10.28), we have $\partial^*(\Omega^{j,1} \cup \Omega^{j,2}) \cap W' = \varnothing$, so in fact $\overline{\partial^*(\Omega^{j,1} \cup \Omega^{j,2})} \cap W' = \varnothing$. Since we already showed $\mathrm{spt}\|V_{j,i}\| \cap W' = \partial^*\Omega^{j,i} \cap W'$, we conclude that $\mathcal{H}^3((\Omega^{j,1} \cup \Omega^{j,2}) \cap W') = \mathcal{H}^3(W')$. By Theorem 6.1(6.2), $V_{j,1} + V_{j,2}$ is stationary in W'. Then by Allard's regularity theorem [All72, §8],

$$(V_{j,1} + V_{j,2}) \llcorner G(W', 2) \cap \mathbf{v}(N, 2),$$

其中 $N \subset W'$是一个光滑极小曲面。因此，$N_{j,1} \cap W' = N_{j,2} \cap W' = N$。稳定性源于光滑嵌入性和定理 6.1(6.2)。

Maximum Principle. First, suppose $\Theta^2(\|V\|, x) = 2n+1$. Then (without loss of generality) $D_{k,j,1}$ is oriented up. By the regularity of 1-stacks, $V_{j,1}$ is the varifold associated to a smooth surface $N_{j,1}$ with mean curvature $h > 0$ pointing up. Suppose for contradiction that $n \geq 1$. Then $V_{j,2}$ is the varifold associated to a $C^{1,\alpha}$ surface $N_{j,2}$ with generalized mean curvature pointing down. Moreover, $N_{j,2}$ is below $N_{j,1}$ and intersects $N_{j,1}$ tangentially at x, which contradicts the strong maximum principle (see Lemma A.2). Hence, if $D_{k,j,1}$ is oriented up, then $n = 1$ and V is the varifold of a smooth surface of prescribed mean curvature h pointing up in a neighborhood of x.

Second, suppose $\Theta^2(\|V\|, x) = 2n$ with $n \geq 2$. By the above paragraph, V consists of n 2-stacks intersecting tangentially and on one side at x. Then $N_{j,2}$ and $N_{j,2n-1}$ are $C^{1,\alpha}$ surfaces on one side of each other, intersecting tangentially at x, and with generalized mean curvature pointing away from each other. By the strong maximum principle (see Lemma A.2) and the regularity of 2-stacks, there is a neighborhood W'' of x and a minimal surface $N \subset W''$ satisfying $N_{j,i} \cap W'' = N$ for all i. Hence, $\Theta^2(\|V\|, y) = 2n$ for all $y \in W'' \cap \mathrm{spt}\|V\|$. □

11. Improvement from Free Boundary Problems

在本节中，我们运用一些自由边界问题理论的结果——尤其是 [WZ23b] 的最新结果——来获得定理 10.2 中极限曲面的最优正则性。

在本节的其余部分，令 V 如定理10.2 中所述，并且 $x \in \mathrm{spt}\|V\|$。此外，令W_x 为定理 10.2 所提供的 x 的开邻域，并令 $N_1, N_2, \ldots, N_{n_x}$ 为相应的 $C^{1,\alpha}$ 在 x处相切相交的曲面。

本节的主要结果如下。

Pr命题 11.1. 曲面 $N_1, \dots, N_{n_x}$ 在 W_x 的内部是 $C^{1,1}$.

证明。我们将沿用 [WZ23b, §1.2]中的设定。

By Theorem 10.2, $V \llcorner G(W_x, 2) = \sum_{l=1}^{n_x} \mathbf{v}(N_l, 1)$, where N_i are distinct $C^{1,\alpha}$ hypersurfaces with $\|h\|_{L^\infty(W_x)}$-bounded generalized mean curvature, such that each N_l is on one side of $N_{l'}$ intersecting tangentially at x. Let then $n \coloneqq n_x$, and let $P \subset T_x M$ be the common tangent plane of $N_1, N_2, \dots, N_n$ at x.

如有必要缩小 W_x，我们可以假设曲面 N_i 可以表示为球 $B_r^P(0) \subset P$ 上弱序的图，其中 $r > 0$ 足够小。根据 Allard 正则性定理（参见定理 10.2 的证明），这些图满足一致的 $C^{1,\alpha}$ 界。

By [WZ23b, Remark 1.5], after shrinking W_x again if necessary, there is an embedded minimal surface $\Gamma \subset W_x$ through x with boundary in ∂W_x, so that we can rewrite $N_1, N_2, \dots, N_n$ as weakly ordered normal graphs over $\mathcal{B}_{r'}(x) \subset \Gamma$ with uniformly bounded $C^{1,\alpha}$ norm, where $\mathcal{B}_{r'}(x)$ denotes the geodesic ball in Γ with center x and radius r'. In particular, after choosing a unit normal field on Γ, which trivializes the normal bundle $N\Gamma$, there are $C^{1,\alpha}$ functions $u_i : \mathcal{B}_{r'}(x) \to \mathbb{R}$ such that

$$u_1 \le u_2 \le \cdots \le u_n,$$

and

$$N_i = \operatorname{graph} u_i$$

对于 $i = 1, \dots, n$。

Notice that, when restricted to W_x, the varifold V is induced by the union of graphs of the functions u_i, and the Caccioppoli set Ω has boundary given by $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} [\operatorname{graph} u_i]$ in the sense of currents. By the proof of Theorem 10.2, the pair (V, Ω) is $\mathcal{A}^h$-stationary in W_x in the sense of [WZ23b].

因此， [WZ23b 中定理 1.4]的第一个结论适用，命题得证。□

如引言中所述，对于 §17 中的曲率估计，我们将需要关于 $C^{1,1}$ 函数 $u_1, \dots, u_n$的估计。这也可由 [WZ23b, 定理 1.4],在进行一次简单的重标度后得到。事实上，将 W_x 中的度量乘以一个常数因子进行重标度后，我们˜可以假设重标度后的图函数 $\tilde{u}_i$ 定义在半径为2 的球 $\mathcal{B}_2(x)$上；在本节其余部分中，我们将使用波浪号表示相对于重标度后度量的量和球。同样，规定函数也必须进行适当的重标度，使得相应的对$(\tilde{V}, \tilde{\Omega})$ 是 $\mathcal{A}^{\tilde{h}}$-平稳的。经过这些重标度，我们可以假设

$$\|\tilde{u}_i\|_{C^{1,\alpha}(\tilde{\mathcal{B}}_2(x))} < 1$$

对于所有 $i = 1$、.....、 n，以及

$$\|\tilde{h}\|_{C^1(\tilde{\mathcal{B}}_1(x) \times (-1,1))} < 1,$$

˜ ˜其中， $\mathcal{B}_1(x) \times (-1, 1)$) 表示在相对于 Γ 的缩放度量下，使用 Fermi 坐标时， $\mathcal{B}_1(x)$ 的宽度为 1 的管状邻域。再次根据定理 10.2，每个图˜都具有 $\|h\|_{L^\infty(\tilde{\mathcal{B}}_1(x) \times (-1,\ 1))}$有界的一阶变分。因此，WZ23b，定理 1.4] 的第二个结论适用，我们得到以下 $C^{1,\ 1}$ 局部 估计：

推论 11.2.

$$\sum_{i=1}^{n} \|\tilde{u}_i\|_{C^{1,1}(\tilde{\mathcal{B}}_{1/2}(x))} \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \|\tilde{u}_i\|_{C^{1,\alpha}(\tilde{\mathcal{B}}_1(x)} + \|\tilde{h}\|_{C^1(\tilde{\mathcal{B}}_1(x)\times(-1,1))} \right) \tag{11.1}$$

对于某个常数 $C \geq 1$，其仅取决于 n、α 以及度量 g（位于 W_x 中）。
自然地，这意味着原函数 u_i 满足 $C^{1,1}$ 局部估计。

如果 $h(x) \neq 0$，我们可以证明一个更精确的正则性结果。根据定理10.2，如果 $h(x) \neq 0$，那么 $n_x \in \{1\} \cup 2\mathbb{N}$ 并且

- 若 $n_x = 1$，则 $V \llcorner G(W_x, 2) = \mathbf{v}(N, 1)$，其中 $N \subset W_x$ 是具有指定平均曲率 h 的光滑稳定曲面；
- 如果 $n_y = 2n$ 对所有 $y \in \operatorname{spt}\|V\| \cap W'_x$ 对于包含 x 的一个开集 $W'_x \subset W_x$，那么 $V \llcorner G(W'_x, 2) = \mathbf{v}(N, 2n)$，其中 $N \subset W'_x$ 是一个光滑稳定极小曲面。

因此，在这两种情况下，V 在 x 邻域内的支集都与一个光滑曲面重合。

We now deal with the case where $n_x = 2n$, and there is a sequence $x_j \to x$ with $x_j \in \operatorname{spt}\|V\|$ and $n_{x_j} \neq 2n$. By Theorem 10.2, then $n = 1$ and the surfaces $N_1, N_2 \subset W_x$ intersect tangentially at x. Let T denote the touching set $T = N_1 \cap N_2 \subset W_x$ and let Γ be its boundary $\partial T \cap W_x$ in W_x.

命题 11.3。接触集 T 的边界 Γ 局部包含于一条 $C^{1,\alpha}$ 曲线中，并满足 $\mathcal{H}^1(\Gamma) < +\infty$

证明。这直接由 [Sil05]第4节中的结果得出。事实上，差值 $\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2$ 是障碍问题的一个解，Caffarelli（[Caf77], [Caf80]和 [Caf98]）的结果适用于该问题。□

第2. 部分：在同痕类上取极小值

本部分我们沿用 [MSY82], [CDL03], 和 [DLP10], 的论证，从圆盘极小化子的正则性提升到同痕类上极小化子的正则性。

12. 最小化问题

设 (M, g) 是一个光滑的三维黎曼流形。设 $h : M \to \mathbb{R}$ 是一个光滑实值函数，且 $c := \sup_M |h|$。A

如前所述，b 通过重标度 M，我们可以假设 §4.1 的条件对 $\rho_0 = 1$ 成立 .

设 $U \subset M$ 为具有 C 边界的开集。[1]

设 $\mathcal{O}(U)$ 为由具有光滑边界的开集 $\Omega \subset M$ 组成的集合，使得 $\partial\Omega$ 与 U 相交且交点处横截（或不相交）。

本部分考虑以下问题。

问题 12.1. 考虑一个序列 $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(U)$ 和 $\Sigma_k := \partial\Omega_k \cap U$ 满足 $\sup_k \mathcal{H}^2(\Sigma_k) < \infty$、$\sup_k$ 亏格 $(\Sigma_k) < \infty$，并且

$$\mathcal{A}^h(\Omega_k) \leq \mathcal{A}^h(\phi(1, \Omega_k)) + \varepsilon_k \tag{12.1}$$

对所有满足 $\varepsilon_k \to 0$ 的 $\phi \in \mathcal{I}(U)$。$\Sigma_k := \partial\Omega_j \cap U$（的一个子序列）是否收敛到一个具有指定平均曲率的正则极限 h?

我们首先指出，沿用相同的证明方法，定理 6.1 的所有结论均成立，其中 $\mathbf{v}(\Sigma_k) \rightharpoonup V$ and $\Omega_k \cap U \to \Omega$。

13. 伽马约化

[MSY82] 的关键见解是引入了一种称为 γ-约化的步骤，用以切除那些会产生亏格或分隔出较大连通分支的小颈部。借助这一步骤，便可将整体同伦变形极小化问题化归为圆盘极小化问题，该问题已在上文第一部分中解决。

13.1. 伽马约化的定义。 设 $\delta > 0$ 为引理4.2中的常数，并设 $0 < \gamma < \delta^2/9$。设 $U \subset M$ 为一个开集，且 $\Sigma \subset U$ 为一光滑嵌入定向曲面，满足 $\partial\Sigma \subset \partial U$。设 $\mathcal{C}(\Sigma,\ U)$为满足 $\partial[\Sigma'] = \partial[\Sigma]$的光滑嵌入定向曲面 $\Sigma' \subset U$的集合。

定义13.1. 对于 $\Sigma_1,\ \ \Sigma_2 \in \mathcal{C}$（$\Sigma,\ U$），记

$$\Sigma_2 \overset{(\gamma,U)}{\ll} \Sigma_1$$

并称 Σ_2 是 Σ_1 的一个 γ-约化，若满足以下条件：

(1) Σ_2 通过在 U中进行手术由 Σ_1 得到；也就是说，

- $\overline{\Sigma_1 \setminus \Sigma_2} =:\ \ A$ 与标准闭环带微分同胚，
- $\overline{\Sigma_2 \setminus \Sigma_1} =:\ \ D_1 \cup D_2$ 与两个标准闭圆盘的不交并微分同胚，
- 存在一个开集 $Y \subset U$，它与标准三维球同胚，且 $\partial Y = A \cup D_1 \cup D_2$ 和 $Y \cap (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = \varnothing$。

(2) $\mathcal{H}^2(A) + \mathcal{H}^2(D_1) + \mathcal{H}^2(D_2) < 2\gamma$。(3) 若 Γ是包含 A的 Σ_1的连通分支，则对于 $\Gamma \setminus A$ 的每个连通分支，我们都有以下两种情况之一：

- 它是一个面积至少为 $\delta^2/2$的圆盘，
- 它不是单连通的。

定义 13.2。 对于 $\Sigma_1,\ \ \Sigma_2 \in \mathcal{C}$（$\Sigma,\ U$），我们记作

$$\Sigma_2 \overset{(\gamma,U)}{<} \Sigma_1$$

并且说 Σ_2 是 Σ_1 的强 γ-约化，如果存在一个满足以下条件的合痕 $\psi \in \mathcal{I}(U)$　g

(1) $\Sigma_2 \overset{(\gamma,U)}{\ll} \psi(1, \Sigma_1)$,

(2) $\mathcal{H}^2(\psi(1, \Sigma_1) \triangle \Sigma_1) < \gamma$.

我们称一个曲面是（$\gamma,\ U$）-不可约的（分别地，强（$\gamma,\ U$）-不可约的），如果它不允许进行（$\gamma,\ U$）约化（分别地，强（$\gamma,\ U$）-约化）。

13.2. 伽马不可约曲面的结构。 我们将 [MSY82，第 2]定理 γ调整到我们的情形，从而可以将小球中的伽马不可约曲面分解为圆盘的不交并。

定理 13.3。 假设 $\mathcal{H}^3(U) \leq \eta/8$。设 $U' \subset\subset U$为一个开集，使得U'与 $\mathbb{B}$微分同胚。假设 $\Omega \subset M$ 满足

- $$\mathcal{A}^h(\Omega) - \inf_{\phi \in \mathcal{I}(U)} \mathcal{A}^h(\phi(1, \Omega)) =: E(\Omega) \leq 3\gamma/16.$$
- $\Sigma :\ = \partial\Omega \cap U$是强（$\gamma$、$U$）-不可约的，
- Σ 与 $\partial U'$有横截相交。

设 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$ 是 $\Sigma \cap \partial U'$ 的连通分支，并设 F_j 表示 $\partial U'$ 中边界为 Γ_j 的等周区域。进一步假设。

$$\sum_{j=1}^{q} \mathcal{H}^2(F_j) \leq \gamma/8.$$

令 Σ_0 表示 Σ 的所有闭连通分支 Λ 的并，这些连通分支包含在一个微分同胚于 $\mathbb{B}$ 的开集 $K_\Lambda \subset U$ 中，使得 $\partial K_\Lambda \cap \Sigma = \varnothing$。

然后 $\mathcal{H}^2(\Sigma_0) \leq 2E(\Omega)$，并且存在互不相交的闭圆盘 $D_1, \ldots, D_p$ 满足

(1) $D_j \subset \Sigma \setminus \Sigma_0$,

(2) $\partial D_j \subset \partial U'$,

(3)

$$\left(\bigcup_{j=1}^{p} D_j \right) \cap U' = (\Sigma \setminus \Sigma_0) \cap U',$$

(4) 存在一个合痕 $\phi \in \mathcal{I}(U)$ 使得 $\phi(t, x) = x$ 对所有 $(t, x) \in [0, 1] \times W$，其中 W 是 $(\Sigma \setminus \Sigma_0) \setminus \bigcup_{j=1}^{p} (D_j \setminus \partial D_j)$ 的邻域，从而

$$\bigcup_{j=1}^{p} (\phi(1, D_j) \setminus \partial D_j) \subset U'$$

(5)

$$\sum_{j=1}^{p} (\mathcal{H}^2(D_j) - c\mathcal{H}^3(\Omega^j)) \leq \sum_{j=1}^{q} \mathcal{H}^2(F_j) + E(\Omega),$$

其中 $\Omega^j \subset U$ 是由 $D_j \cup F_{\partial D_j}$ 围成的区域，该区域的存在性由 *(4)* 中合痕的存在性保证。

注13.4。设 K_1，.....， $K_s \subset U$ 为开三维球，满足 $\Sigma_0 \subset \bigcup_{j=1}^{s} K_j$ 且 $\partial K_j \cap \Sigma = \varnothing$。对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个开集 $\bigcup_{j=1}^{s} K_j \subset W \subset U$ 和一个合痕 $\phi \in \mathcal{I}(U)$，满足

- $W \cap （\Sigma \setminus \Sigma_0） = \varnothing$,
- $\phi(t, x) = x$ 对于所有 $(x, t) \in (M \setminus W) \times [0, 1]$,
- $\phi（t, W） \subset W$,
- $\mathcal{H}^2(\phi(1, \Sigma_0)) < \varepsilon$,
- $\phi(1, \Sigma_0)$的每个连通分支所界定区域的并集（由引理4.2给出）的体积被 ε 所界,
- 且 $\phi(1, \Sigma_0)$ 的每个连通分支直径均小于 ε。

˜令Ω为从 Σ中删除 Σ_0 后得到的区域。我们压缩的每个连通分支都根据命题 8.1 使 $\mathcal{A}^h$ 减少，并且有

$$\mathcal{H}^2(\Sigma_0) \leq 2E(\Omega)$$

and

$$\mathcal{A}^h(\tilde{\Omega}) - \inf_{\phi \in \mathcal{I}(U)} \mathcal{A}^h(\phi(1, \tilde{\Omega})) \leq E(\Omega).$$

因此，定理 13.3的一般情形由 $\Sigma_0 = \varnothing$ 的特殊情形推出，以下证明中我们始终作此假设。

注记13.5。由于 $\Omega^j \subset U$ 和 $\mathcal{H}^3(U) \leq \eta$，根据命题 8.1，我们有

$$\mathcal{H}^3(\Omega^j) \leq c_1^{2/3}\eta^{1/3}(\mathcal{H}^2(D_j) + \mathcal{H}^2(F_{\partial D_j})).$$

根据我们对 η 的选择，我们有

$$c\mathcal{H}^3(\Omega^j) \leq \frac{1}{2}(\mathcal{H}^2(D_j) + \mathcal{H}^2(F_{\partial D_j})).$$

那么，定理 13.3 的结论 (5) 表明

$$\sum_{j=1}^{p} \mathcal{H}^2(D_j) \leq 3\sum_{j=1}^{q} \mathcal{H}^2(F_j) + 2E(\Omega). \tag{13.1}$$

定理 *13.3* 的证明。证明过程与 [MSY82, 定理 2]，完全相同，只需额外增加一步来跟踪体积。

我们对 q 进行归纳，其中 $q = 0$ 情形显然成立。
假设 Ω 满足

- $\Sigma_0 = \varnothing$,
- $\sum_{j=1}^{q} \mathcal{H}^2(F_j) \leq \gamma/8$,
- $E(\Omega) \leq 3\gamma/8 - \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{q} \mathcal{H}^2(F_j)$,
- Σ is strongly $\tilde{\gamma}$ irreducible for $\tilde{\gamma} = \gamma/4 + 4\sum_{j=1}^{q} \mathcal{H}^2(F_j) + \frac{4}{3}E(\Omega)$.

ˆ 假设归纳假设：若 Ω =ϕ(1, Ω) 对某个 $\phi \in \mathcal{I}(U)$ 满足上述假设，其中空间中的 $q-1$ 为 q，且以 ˆΩ 替代 Ω，则定理的结论成立。

Without loss of generality (by relabeling), we have $F_q \cap \Gamma_j = \varnothing$ for all $j \neq q$. Since Σ is strongly $\tilde{\gamma}$-irreducible and $\mathcal{H}^2(F_q) < \tilde{\gamma}$, there is a disk $D \subset \Sigma$ so that $\partial D = \Gamma_q$ and $\mathcal{H}^2(D) < \delta^2/2$. Then $D \cup F_q$ is homeomorphic to S^2 and $\mathcal{H}^2(D \cup F_q) < \delta^2/2 + \delta^2/2 = \delta^2$, so Lemma 4.2 implies that $D \cup F_q = \partial K$ for $K \subset U$ an open 3-ball. Let Λ be the component of Σ containing D. Since $\Sigma_0 = \varnothing$ by assumption, we have $\Lambda \setminus D \not\subset K$. Hence, we have $(\Sigma \setminus D) \cap K = \varnothing$ (because $\Sigma \setminus D$ does not intersect F_q).

设 $\Sigma_* = (\Sigma \setminus D) \cup F_q$，并设Ω$_*$ 为相应区域。如 [MSY82 中的定理 2], 所述，对于ˆˆ 每个 $\varepsilon > 0$，存在一个连续合痕 α，将 Σ_* 变为光滑曲面 Σ_*，并将 Ω$_*$ 变为 Ω$_*$，满足

对于某个 $\phi \in \mathcal{I}(U)$, • Ω$_*$ = ϕ(1, Ω)
- ˆΣ$_*$ ∩ $\partial U' = \bigcup_{j=1}^{q-1} \Gamma_j$,
- $\mathcal{H}^2$(ˆΣ$_*$△Σ) < $\mathcal{H}^2$(D) + $\mathcal{H}^2$(F_q) + ε,
- $\mathcal{H}^3$(ˆΩ$_*$△Ω) < $\mathcal{H}^3$(K) + ε/(2c),
- $\mathcal{H}^2$(ˆΣ$_*$) < $\mathcal{H}^2$(Σ) + $\mathcal{H}^2$(F_q) − $\mathcal{H}^2$(D) + ε/2,
- $\mathcal{H}^2$(ˆΣ$_*$) ≥ $\mathcal{H}^2$(Σ$_*$).

利用 $\mathcal{H}^3(U) \leq \eta/8$，命题 8.1 推出 $c\mathcal{H}^3(K) \leq \frac{1}{4}(\mathcal{H}^2(F_q) + \mathcal{H}^2(D))$。我们假设$\varepsilon \leq \mathcal{H}^2(F_q)$ /4。注意，由于 Ω 和 ˆΩ$_*$ 属于同一个同痕类，我们有

$$\begin{aligned} E(\hat{\Omega}_*) &< E(\Omega) + c\mathcal{H}^3(K) + \mathcal{H}^2(F_q) - \mathcal{H}^2(D) + \varepsilon \\ &\leq E(\Omega) + \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(F_q) - \frac{3}{4}\mathcal{H}^2(D). \end{aligned}$$

ˆ 根据 [MSY82，第 3.11]，条注释，我们有 Σ_* 是强 γ^*-不可约的，其中

$$\begin{aligned}\gamma^* &= \gamma/4 + 4\sum_{j=1}^{q}\mathcal{H}^2(F_j) + \frac{4}{3}E(\Omega) - \mathcal{H}^2(D) - 2\mathcal{H}^2(F_q)\\ &= \gamma/4 + 4\sum_{j=1}^{q-1}\mathcal{H}^2(F_j) + \frac{4}{3}E(\Omega) + 2\mathcal{H}^2(F_q) - \mathcal{H}^2(D)\\ &\geq \gamma/4 + 4\sum_{j=1}^{q-1}\mathcal{H}^2(F_j) + \frac{4}{3}E(\hat{\Omega}_*).\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}E(\hat{\Omega}_*) &\leq E(\Omega) + \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(F_q)\\ &\leq 3\gamma/8 - \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{q}\mathcal{H}^2(F_j) + \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(F_q)\\ &= 3\gamma/8 - \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{q-1}\mathcal{H}^2(F_j).\end{aligned}$$

ˆ ˜ ˜因此，Ω_* 满足归纳假设。于是存在两两不相交的圆盘 $\Delta_1, \dots, \Delta_p$满足

- $\tilde{\Delta}_j \subset \hat{\Sigma}_*$,˜
- $\partial\Delta_j \subset \partial U'$,
- $$\left(\bigcup_{j=1}^{p}\tilde{\Delta}_j\right) \cap U' = \hat{\Sigma}_* \cap U',$$
- 存在一个合痕 $\psi \in \mathcal{I}(\tilde{U})$，使得 $\psi(t,x) = x$ 对于所有$(t,x) \in [0,1] \times W$，其中$\tilde{W}$是 ˜ ˆ $\Sigma_* \setminus \bigcup_{j=1}^{p}(\tilde{\Delta}_j \setminus \partial\tilde{\Delta}_j)$ 的邻域，从而
$$\bigcup_{j=1}^{p}(\tilde{\psi}(1,\tilde{\Delta}_j) \setminus \partial\tilde{\Delta}_j) \subset U',$$
- $$\sum_{j=1}^{p}(\mathcal{H}^2(\tilde{\Delta}_j) - c\mathcal{H}^3(\tilde{\Omega}^j)) \leq \sum_{j=1}^{q-1}\mathcal{H}^2(F_j) + E(\hat{\Omega}_*).$$

令 $\Delta_j := (\alpha^{-1})(1,\tilde{\Delta}_j)$（即平滑合痕 α 关于 Σ_* 的时间反演），并令 ˜取 $\psi := \psi * \alpha$ （即合痕的串接），则有

- $\Delta_j \subset \Sigma_*$,
- $\partial\Delta_j \subset \partial U'$,
- $$\left(\bigcup_{j=1}^{p}\Delta_j\right) \cap U' = \Sigma_* \cap U',$$

存在一个合痕 $\psi \in \mathcal{I}(U)$，使得 $\psi(t,x) = x$ 对于所有$(t,x) \in [0,1] \times W'$，其中$W'$ 是 $\Sigma_* \setminus \bigcup_{j=1}^{p}(\Delta_j \setminus \partial\Delta_j)$ 的一个邻域，从而

$$\bigcup_{j=1}^{p}(\psi(1,\Delta_j) \setminus \partial\Delta_j) \subset U',$$

•

$$\sum_{j=1}^{p}(\mathcal{H}^2(\Delta_j) - c\mathcal{H}^3(\tilde{\Omega}^j)) \leq \sum_{j=1}^{q-1}\mathcal{H}^2(F_j) + E(\hat{\Omega}_*).$$

设 β 为连续合痕，使得 $\beta(t,K) \subset K$, $\beta|_{\{t\}\times\Sigma\setminus D} = \mathbf{1}_{\Sigma\setminus D}$，且 $\beta(1,D) = F_q$。考虑以下两种情况:

情况 *1*: $F_q \subset \bigcup_{j=1}^{p}\Delta_j$。选取圆盘 $D_1,\ldots,D_p$，令 $D_{j_0} = (\Delta_{j_0} \setminus F_q) \cup D$，其中˜唯一的 j_0 满足 $F_q \subset \Delta_{j_0}$；并令 $D_j = \Delta_j$ 对应于 $j \neq j_0$。定义合痕为 $\phi = \psi * \beta$。通过对 ϕ 进行˜光滑化，我们得到所需的合痕 ϕ。计算得

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p}(\mathcal{H}^2(D_j) - c\mathcal{H}^3(\Omega^j)) &\leq \sum_{j=1}^{p}(\mathcal{H}^2(\Delta_j) - c\mathcal{H}^3(\tilde{\Omega}^j)) + \mathcal{H}^2(D) - \mathcal{H}^2(F_q) - c\mathcal{H}^3(K) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{j=1}^{q-1}\mathcal{H}^2(F_j) + E(\hat{\Omega}_*) + \mathcal{H}^2(D) - \mathcal{H}^2(F_q) - c\mathcal{H}^3(K) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{j=1}^{q-1}\mathcal{H}^2(F_j) + E(\Omega) + 2\varepsilon \\
&\leq \sum_{j=1}^{q}\mathcal{H}^2(F_j) + E(\Omega) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，所需的不等式成立。

Case 2: $F_q \not\subset \bigcup_{j=1}^{p}\Delta_j$. Define the disks $D_1,\ldots,D_{p+1}$ by $D_j = \Delta_j$ for $j < p+1$ and $D_{p+1} = D$. Define an isotopy $\tilde{\phi} = \hat{\beta} * \psi * \beta$, where $\hat{\beta} \in \mathcal{I}(U)$ satisfies $\hat{\beta}(t,x) = x$ for all $(x,t) \in (\Sigma \setminus D) \times [0,1]$ and $\hat{\beta}(1,F_q)$ is a disk $\tilde{D} \subset U'$ with $\partial\tilde{D} = \partial D$, $\tilde{D} \cap \partial U' = \partial\tilde{D}$, and $\tilde{D} \cap \psi(t,\Sigma_*) = \Gamma_q$ for all $t \in [0,1]$. We claim that in this case there is a neighborhood W of $\partial D = \Gamma_q$ so that $W \cap D \subset U'$. Otherwise we would have W with $W \supset \partial D$ and $W \cap (\Sigma \setminus D) \subset U'$, which would imply $F_q \subset \bigcup_{j=1}^{p}\Delta_j$, a contradiction. By smoothing $\tilde{\phi}$, we

获得所需的合痕。我们计算

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p+1}(\mathcal{H}^2(D_j)-c\mathcal{H}^3(\Omega^j)) &\le \sum_{j=1}^{p}(\mathcal{H}^2(\Delta_j)-c\mathcal{H}^3(\tilde{\Omega}^j))+\mathcal{H}^2(D)-c\mathcal{H}^3(K)+\varepsilon\\ &\le \sum_{j=1}^{q-1}\mathcal{H}^2(F_j)+E(\hat{\Omega}_*)+\mathcal{H}^2(D)-c\mathcal{H}^3(K)+\varepsilon\\ &\le \sum_{j=1}^{q-1}\mathcal{H}^2(F_j)+E(\Omega)+\mathcal{H}^2(F_q)+2\varepsilon\\ &= \sum_{j=1}^{q}\mathcal{H}^2(F_j)+E(\Omega)+2\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，所需的不等式成立。 □

13.3. 极小化序列的伽马约化。我们现在将初始极小化-序列 $\{\Sigma_k\}$ 修改为一个新序列 $\{\Sigma_k\}$，使得 $\lim \mathbf{v}(\Sigma_k)=\lim \mathbf{v}(\Sigma_k)=V$，从而每个 Σ_k对于某个 γ都是强（γ，U）-不可约的。

对于 $q\in\mathbb{N}$ 和 $\gamma\in(0,\ \delta^2/9)$，令 $k_q(\gamma)$ 为满足以下条件的最大整数：存在 $\Sigma_q^{(j)}\in\mathcal{C}(\Sigma_q,U)$，对于 $j=1$，……，$k_q(\gamma)$，且

$$\Sigma_q^{(k_q(\gamma))}\overset{(\gamma,U)}{<}\dots\overset{(\gamma,U)}{<}\Sigma_q^{(2)}\overset{(\gamma,U)}{<}\Sigma_q^{(1)}=\Sigma_q.$$

我们声称，$k_q(\gamma)$有界，且与 q 和 γ 无关。事实上，根据假设，Σ_q 的拓扑和 $\mathcal{H}^2(\Sigma_q)$ 存在与 q 和 W 无关的上界。于是，由 [MSY82,(3.9)] 可得 $k_q(\gamma)$ 的一致有界性。

我们还注意到，对于 $\gamma<\gamma'$，有 $k_q(\gamma)\le k_q(\gamma')$，这可由定义得出。

令 $l(\gamma)$ 为由……定义的非负整数

$$l(\gamma):=\limsup_{q\to\infty}k_q(\gamma).$$

l 是一个 γ 的非递减整数值函数，因此存在 $\gamma_0\in(0,\delta^2/9)$，使得 t

$$l(\gamma)=l(\gamma_0)\text{ for all }\gamma\in(0,\gamma_0].$$

对于每个 $n\ge\gamma_0^{-1}$，都存在一个 $q_n\ge n$，使得 $k_{q_n}(1/n)=l(1/n)=l(\gamma_0)$。我们设定

$$\tilde{\Sigma}_n:=\Sigma_{q_n}^{(k_{q_n}(1/n))}.$$

因此，Σ_n 对所有充分大的 n 都是强 (γ_0,U)-不可约的。

根据 [MSY82，(3.10)], 可得

$$\mathcal{H}^2(\tilde{\Sigma}_n\triangle\Sigma_{q_n})\le C/n$$

对某个与 n无关的 C成立。因此，$\lim \mathbf{v}(\Sigma_n)=\lim\mathbf{v}(\Sigma_k)$。

Let $\tilde{\Omega}_n$（在每次（γ，U）-约化中，以显然的方式从 Ω_{q_n} 得到）。此外，由于Σ_{q_n}可以通过删除圆盘并添加细管从 Σ_n 得到，因此我们有

$$\mathcal{A}^h(\tilde{\Omega}_n)\le\inf_{\phi\in\mathcal{I}(U)}\mathcal{A}^h(\phi(1,\tilde{\Omega}_n))+\varepsilon_n'$$

其中 $\varepsilon_n'\to0$ 作为 $n\to\infty$。

14. Interior Regularity

我们证明定理1.1的内部正则性部分。为明确起见，关于 U “充分小”的假设是 $\mathcal{H}^3$（U）$\leq \eta/8$，其中 η 在（8.1）中定义。

定理*1.1* 内部正则性的证明。根据§13.3，只需考虑一个极小化序列 $\{\Sigma_k\}$，使得 Σ_k 是强（γ, U）-不可约的。根据注13.4，我们可以假设， Σ_k 在 U 中不存在包含于某个开三维球内的闭连通分支，该开三维球的边界与 Σ_k 不相交。

令 $x_0 \in \mathrm{spt}\|V\|$。令 $\rho_0(x_0) := d(x_0, \partial U)$。由(6.5)的单调性，存在常数 c_2 使得

$$\sigma^{-2}\|V\|(B_\sigma(x_0)) \leq c_2\rho^{-2}\|V\|(B_\rho(x_0)) \tag{14.1}$$

对于任意 $\sigma < \rho \leq \rho_0(x_0)$。

由余面积公式，

$$\int_{\rho-\sigma}^{\rho} \mathcal{H}^1(\Sigma_k \cap \partial B_s(x_0))\, ds \leq \mathcal{H}^2(\Sigma_k \cap (\overline{B}_\rho(x_0) \setminus B_{\rho-\sigma}(x_0)))$$

对于几乎所有的 $\rho \in (0, \rho_0(x_0))$, $\sigma \in (0, \rho)$。取 $\sigma = \rho/2$，(14.1) 蕴含

$$\rho^{-1}\int_{\rho/2}^{\rho} \mathcal{H}^1(\Sigma_k \cap \partial B_s(x_0))\, ds \leq C\rho$$

对所有充分大的 k，其中 C 取决于 μ、 $\rho_0(x_0)$ 和 $\|V\|(U)$。那么存在一个序列 $\rho_k \in (3\rho/4, \rho)$，使得 Σ_k 与 $\partial B_{\rho_k}(x_0)$ 横截相交，并且

$$\mathcal{H}^1(\Sigma_k \cap \partial B_{\rho_k}(x_0)) \leq C\rho \leq C\eta_1\rho_0(x_0)$$

对于所有充分大的 k，只要对某个待确定的 $\eta_1 \in (0,1)$，满足 $\rho \leq \eta_1\rho_0(x_0)$。对于充分小的 η_1 和充分大的 k，我们可以将定理 13.3 应用于 Σ_k，其中$U' = B_{\rho_k}(x_0)$。因此，存在圆盘 $D_k^{(1)}, \ldots, D^{(q_k)}{}_k \subset \Sigma_k$以及同痕 $\phi^{(k)} \in \mathcal{I}(U)$，使得对于充分大的 k，有

- $\partial D_{(l)\,k} \subset \partial B_{\rho_k}(x_0)$,
- $\Sigma_k \cap B_{\rho_k}(x_0) = (\bigcup_{l=1}^{q_k} D_{(l)\,k}) \cap B_{\rho_k}(x_0)$,
- $\phi_{(k)}(1, D_{(l)\,k}) \setminus \partial D_{(l)\,k} \subset B_{\rho_k}(x_0)$,
- $\sum_{l=1}^{q_k} \mathcal{H}^2(D_{(l)\,k}) \leq \tilde{C}\eta_1^2\rho_0(x_0)^2$ (见（13.1）)。

当 η_1 足够小时且 k 足够大时，我们可以应用引理 8.2 来生成圆盘$\tilde{D}_k^{(l)}$，满足 $\partial\tilde{D}_k^{(l)} = \partial D_k^{(l)}$、 $\tilde{D}_k^{(l)} \setminus \partial D_k^{(l)} \subset B_{\rho_k}(x_0)$，以及

$$\mathcal{H}^2(\tilde{D}_k^{(l)}) \leq \mathcal{H}^2(D_k^{(l)}) + T_h(\tilde{D}_k^{(l)}, D_k^{(l)}).$$

取一个子序列后，我们可以假设 $\rho_k \to \rho_\infty$。任取一个 $\alpha > 0$ 小的。~我们可以构造定向光滑圆盘 $\Sigma_k \in \mathcal{D}^*(B_{\rho_\infty-\alpha}(x_0))$，使得（对所有 k 充分大的）

- $\tilde{\Sigma}_k \cap B_{\rho_\infty-\alpha}(x_0) = \bigcup_l \tilde{D}_{(l)\,k} \cap B_{\rho_\infty-\alpha}(x_0)$,~
- $\partial\Sigma_k \cap \overline{B}_{\rho_\infty-\alpha}(x_0) = \varnothing$,~
- $\Sigma_k \setminus B_{\rho_\infty-\alpha}(x_0)$ 是连通的。

事实上，我们可以在 $B_{\rho_\infty-\alpha}(x_0)$ 外部归纳地添加连接圆盘 $\tilde{D}_k^{(l)}$ 的桥。于是Σ_k 满足定理 10.2 关于集合 $B_{\rho_\infty-\alpha}(x_0)$ 的假设。因此，定理1.1的内部正则性结论随之成立。□

15. Boundary Regularity

我们证明定理1.1的边界正则性部分。我们遵循 [DLP10]的证明。

15.1. **楔形性质**。

定义 15.1。令 $U = B_\rho(x) \subset M$ 对 $\rho \ll 1$ 成立，并令 $\sigma \subset \partial U$ 为有限条光滑若尔当曲线的不交并。若存在一个正角 θ_0 使得，一个开集 $A \subset U$ 横截相交于 $\partial U \quad \sigma$ </style}，则称其横截相交。

- $\partial A \cap \partial U \subset \sigma$,

对于每个 $p \in \partial A \cap \partial U$，如果我们选择坐标使得 $T_p\partial U = \{z = 0\}$ 和 $T_p\sigma = \{y = z = 0\}$，那么每个点 $q = (q_1, q_2, q_3) \in A$ 满足 $\frac{q_3}{q_2} \geq \tan(1/2 - \theta_0)$。

引理1 15.2 (楔形性质)。存在一个 $r_0 < 1$，使得以下结论对 $\rho < r_0$成立。设 V和 $\Sigma := \partial\Omega_0 \cap U$ 如定理*1.1*中所述。那么存在一个开集 $A \subset U$，它与 ∂U 横截相交于 $\partial\Sigma$，并且满足 $\mathrm{spt}\|V\| \subset A$。

我们使用以下结果，参见 [DLP10，引理 5.3]。

命题 15.3。如果 $\beta \subset \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ 是有限条互不相交的 C^2 若尔当曲线的不交并，则 β 的凸包与 $\partial B_1(0)$在 β 处横截相交。

引理*15.2*的证明。考虑由坐标图$f_{x,\rho}$ 诱导的重标度指数坐标：$B_\rho(x) \to B_1(0)$，由$f_{x,\rho}(z) = (\exp_x^{-1}(z))/\rho$给出。我们应用命题15.3，并令 B为 $\beta = f(\partial\Sigma)$的凸包。

固定 $\xi \in \beta$，令 π_1 和 π_2 为界定 B楔形区域的半平面。不失一般性，我们假设 $\pi_1 = \{x_3 \leq a\}$ 对某个 $a \in (0,1)$ 成立。

Let $C_t = (0, 0, -t)$, and let $S_t = B_2(C_t)$. Assuming ρ is sufficiently small, (6.4) implies $\|\delta(f_\# V)\| \leq \|f_\# V\|$. By [Whi10, Theorem 7], $\mathrm{spt}\|V\|$ is contained is $\overline{S}_{t_0}$, where t_0 is such that $\partial S_{t_0} \cap \partial B_1(0) \subset \pi_1$. The same argument applies to π_2 and ξ is arbitrary, so the conclusion follows. □

15.2. **边界处的切锥**。令 $x \in \partial U$。与上一节一样，考虑坐标图 $f_{x,\rho}$：$B_\rho(x) \to B_1(0)$，由 $f_{x,\rho}(z) = (\exp_x^{-1}(z))/\rho$ 给出。在 $\mathbb{R}^3$ 中固定坐标，使得 $f_{x,\rho}(U \cap B_\rho(x))$ 收敛到半球 $B_1^+(0) = B_1(0) \cap \{x_1 > 0\}$，当 $\rho \to 0$ 时。

我们首先遵循 [DLR18，引理 6.4]中的思路。

引理 15.4。$\|V\|(\partial\Sigma) = 0.$

证明。设 $V^r = V \llcorner G_2(\overline{U} \setminus \partial\Sigma)$ 且 $V^s = V - V^r$。

设 X 是U 上在 $\partial\Sigma$ 处为零的紧支撑向量场。令 $\phi_\delta \in C_c^\infty(U \setminus \partial\Sigma)$ 满足

- $\phi_\delta = 1$ 在 $B_{2\delta}(\partial\Sigma)$ 外部,
- $|\nabla\phi_\delta| \leq C\delta^{-1}$。

由于 X 在 $\partial\Sigma$ 上消失，因此 $|X| \le C\delta$ 属于 $B_{2\delta}(\partial\Sigma)$。于是， $|\nabla(\phi_\delta X)| \le C$。然后，根据控制收敛定理以及 V 在 $U \setminus \partial\Sigma$ 中具有有界的一阶变分这一事实，我们有

$$\begin{aligned}\delta V^r(X) &= \int_{\overline{U}} \operatorname{div}_\pi X(p)\ dV^r(p,\pi)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\int_{\overline{U}} \operatorname{div}_\pi(\phi_\delta X)(p)\ dV^r(p,\pi)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\int_{\overline{U}} \operatorname{div}_\pi(\phi_\delta X)(p)\ dV(p,\pi)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\int_{\overline{U}} H_V\cdot(\phi_\delta X)(p)\ dV(p,\pi)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\int_{\overline{U}} H_V\cdot X(p)\ dV(p,\pi) = \delta V(X).\end{aligned}$$

因此， $\delta V^s = 0$。

令 W 为 $\partial\Sigma$的一个小管状邻域。对于每个 $p \in W \setminus \partial\Sigma$，令 q 为 $\partial\Sigma$中的唯一最近点。令 $X(p)$ 为 p 处的切向量，该向量对应于连接 p 与 q 、以 $[0,1]$ 为参数的极小测地线。对 $p \in \partial\Sigma$，设 $X(p) = 0$。若 e_1， e_2， e_3 是 $\partial\Sigma$ 上的光滑标准正交标架，且 e_1 与 $\partial\Sigma$相切，则沿着 $\partial\Sigma$有 $\nabla_{e_1}X = 0$、 $\nabla_{e_2}X = -e_2$和 $\nabla_{e_3}X = -e_3$。对于任意二维平面 π，有

$$\operatorname{div}_\pi X(p) = \sum_{i=1}^{2} g(\nabla_{f_i}X, f_i)$$

其中 $\{f_i\}$ 是 π的一组标准正交基。因此， $\operatorname{div}_\pi X(p) \le -1$。于是

$$0 = \delta V^s(X) = \int_{\overline{U}} \operatorname{div}_\pi X(p)\ dV^s(p,\pi) \le -\|V^s\|(\overline{U}) = -\|V\|(\partial\Sigma),$$

因此 $\|V\|(\partial\Sigma) = 0$。 □

由引理15.4，我们可以应用Allard 的边界单调性公式 [All75, 3.4(2)]。那么，变分流 $V_{x,\rho} := (f_{x,\rho})_{\#}V$ 关于 ρ具有一致有界的质量。因此，如果我们取一个序列 $\rho_j \to \infty$，则存在一个子序列（不重新标记），使得 $V_{x,\rho_j} \to W$。根据 [Sim83,Theorem 42.7]，我们注意到 W 在 $B_1^+(0)$ 中是平稳的。

根据引理15.2，存在一个正角 θ_0，使得（在变换坐标后） $\|W\|$ 的支集位于 $\{|x_2| \le x_1 \tan(\theta_0)\}$中。于是 $\operatorname{spt}\|W\| \cap \{x_1 = 0\} = \{x_1 = x_2 = 0\} =: l$。

通过与引理 15.4 相同的论证，我们有 $\|W\|(l) = 0$。因此，根据 Allard 的边界单调性公式 [All75, 3.4(2)], ，我们有

$$\|W\|(B_\rho(0)) = \pi\theta(\|V\|, x)\rho^2 \tag{15.1}$$

根据 Allard 的反射原理 [All75, 3.2], ，我们有 $W' := W + r_{\#}W$ 是静止的。由 (15.1) 和 [All72, §5.1, 推论 2] 是一个锥，这意味着 W 是一个锥。

由 Allard 的边界正则性定理（见 [All75, §4]），只需证明任何这样的W 都是如下形式的半圆盘。

$$P_\theta := \{y_2 = y_1\tan(\theta)\} \cap B_1^+(0)$$

对于某个 $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$。

根据分类 来自 [AA76], 的一维平稳积分变分流的ation we hav e

$$W = \sum_{i=1}^{N} k_i P_{\theta_i}$$

对于 $\theta_i \in [-\theta_0, \theta_0]$ 和 $k_i \in \mathbb{N}$。因此，尚需证明 $N = 1$ 和 $k_1 = 1$。

15.3. **化归到面积极小化情形**。考虑一个子序列，使得

$$S_n := f_{x_0,\rho_n}(\Sigma_{k_n} \cap B_{\rho_n}(x_0))$$

收敛到 W。我们进一步假设 $\rho_n^{-2}\varepsilon_{k_n} \to 0$。对于任意支集包含于$B_1^+$(0)中的合痕 ϕ，令 $\tilde{\phi}$ 为通过坐标图 f_{x_0,ρ_n}共轭得到的 $B_{\rho_n}(x_0) \cap U$ 的合痕。我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^2(\Sigma_{k_n} \cap B_{\rho_n}(x_0)) - &\int_{\Omega_{k_n} \cap B_{\rho_n}(x_0) \cap U} h \, d\mathcal{H}^3 \\ &\leq \mathcal{H}^2(\tilde{\phi}(1, \Sigma_{k_n} \cap B_{\rho_n}(x_0))) - \int_{\tilde{\phi}(1,\Omega_{k_n} \cap B_{\rho_n}(x_0) \cap U)} h \, d\mathcal{H}^3 + \varepsilon_{k_n}.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}^2(\Sigma_{k_n} \cap B_{\rho_n}(x_0)) = \rho_n^2 \mathcal{H}^2(S_n) + o(\rho_n^2), \\ &\mathcal{H}^2(\tilde{\phi}(1, \Sigma_{k_n} \cap B_{\rho_n}(x_0))) = \rho_n^2 \mathcal{H}^2(\phi(1, S_n)) + o(\rho_n^2), \\ &\mathcal{H}^3(B_{\rho_n}(x_0) \cap U) = \rho_n^3 \mathcal{H}^3(B_1^+(0)) + o(\rho_n^3) = o(\rho_n^2),\end{aligned}$$

我们有

$$\mathcal{H}^2(S_n) \leq \mathcal{H}^2(\phi(1, S_n)) + \varepsilon_n',$$

其中 $\varepsilon_n' \to 0$。因此， S_n 是其同痕类中的 ε_n'-面积极小者，故证明的其余部分完全仿照 [DLP10, §8]。因此，定理1.1的边界正则性得证。

第3. 部分 极小化子的估计与紧性

我们建立了一套紧性理论，以证明适用于我们较低正则性情形的稳定曲面的曲率估计的类似结果。

16. $C^{1,1}$ Compactness

设 $U \subset M$ 是一个具有 C^1 边界的相对紧开集。回顾 §4.1，映射ϕ_x: $B_{\rho_0}^{T_xM}$(0) $\to \overline{B}_{\rho_0}^{M}(x)$ 是由 $\overline{x} \in M$ 的指数映射定义的微分同胚。

Let Σ^2 be a compact orientable surface (possibly with boundary) and let $f : \Sigma \to M^3$ be 2-sided $C^{1,1}$ immersion such that $f(\Sigma) \subset U$ and $f(\partial\Sigma) \subset \partial U$. Let $\nu : \Sigma \to TM$ denote a (Lipschitz) choice of unit normal vector field for the immersion. We endow Σ with the pullback metric f^*g and for $p \in \Sigma$, we denote by $\mathcal{B}_r^\Sigma(p)$ the image $f(B_r^\Sigma(p)) \subset M$ of the ball of radius r centered at p in Σ.

注意，由于 f 是一个 $C^{1,1}$ 浸入，对于任意 $p \in \Sigma$，存在 $0 < \rho(p) \leq \rho_0$，使得如果Σ_p 是 $f^{-1}(B_{\rho(p)}^M(f(p)))$ 中包含 p的连通分支，那么

- $\Sigma_p \cap \partial\Sigma = \varnothing$,
- f 在Σ_p上是单射的,
- 和 $\phi_{f\ p\ ()}^{-1}(f(\Sigma_p))$ 可以表示为某个 $C^{1,1}$ 函数 u_p 在包含 0 的开集 $B_p \subset df_p(T_{f(p)}\Sigma)$ $\subset T_{f(p)}M$ 上的图。

然后，对于任意 $p \in \Sigma$，我们可以将 ν 的逐点 *Lipschitz* 常数 $\mathrm{Lip}_p \nu$ 定义为以下量

$$\mathrm{Lip}_p \nu := \limsup_{B_p \ni \xi \to 0} \frac{|\nu_p(0) - \nu_p(\xi)|}{|\xi|} \tag{16.1}$$

其中

- $\nu_p : B_p \to T_{f(p)}M$ 是 u_p 在 $(T_{f(p)}M, \phi^*_{f(p)} g)$ 中的图的单位法向量，
- 梯度和距离均相对于 $\mathbb{R}^3$ 上的拉回度量 .

注 16.1. 容易看出，对每个 $p \in \Sigma$，都存在 $0 < r(p) \le \rho(p)$，使得对任意 $\xi, \eta \in \phi_x^{-1}(\mathcal{B}^\Sigma_{r(p)}(p))$，我们有

$$|\nu_p(\xi) - \nu_p(\eta)| \le 2 \,\mathrm{Lip}_p \nu \, |\xi - \eta|.$$

为简化记号，我们重新定义 $\rho(p)$，使其与 $r(p)$相同。

我们首先证明一个简单的技术事实，它在紧性证明中起着与 [CM11,引理2.4] 相同的作用。

引理*16.2.* 设 Σ^2 是一个紧致可定向曲面（可能带边界），并设 $f : \Sigma \to M^3$ 是*2*-侧 C^1*,1* 浸入，使得 $f(\Sigma) \subset U$ 且 $f(\partial\Sigma) \subset \partial U$。设 $\nu: \Sigma \to TM$ 是该浸入的单位法向向量场的一个（*Lipschitz*）选取，满足 $\sup_{p\in\Sigma} \mathrm{Lip}_p \nu \le C_0$。那么，对于任意 $K \subset\subset U$，存在 $r_K = r_K(\rho_0, \mathrm{dist}_M(K, \partial U), C_0) > 0$，使得如果 $x = f(p) \in f(\Sigma) \cap K$ 且 $r \le r_K$，则

(1) $\mathcal{B}^\Sigma_{2r}(p)$ 可写成 $C^{1,1}$ 函数 u 在 $df_p(T_p\Sigma) \subset T_xM$ 中 $df_p(T_p\Sigma) \subset T_xM$ 内的某个开邻域上所表示的图，且 $|\nabla u| \le 1$ 以及 $\mathrm{Lip}\,\nabla u \le 2\sqrt{2}C_0$，*(2)* 包含 p 的 $f^{-1}(B^M_r(\bar{x}))$ 的连通分支包含于 $B^\Sigma_{2r}(p)$ 中。

Proof. Since $K \subset\subset U$, then $\delta_K := \mathrm{dist}_M(K, \partial U) > 0$. Hence $\mathrm{dist}_{f(\Sigma)}(f(\Sigma) \cap K, f(\partial\Sigma)) \ge \delta_K > 0$. Let $r \le \min\{\rho_0/2, \delta_K/2\} > 0$ and let $p \in \Sigma$ be such that $x = f(p) \in f(\Sigma) \cap K$. Then $\mathcal{B}^\Sigma_r(p) \subset B^M_r(x) \subset\subset U$ stays a fixed positive distance away from ∂U.

现在，令 $y = f(q) \in \mathcal{B}^\Sigma_r(p)$，并令 $\tilde{\gamma}: [0,1] \to \Sigma$ 是一条从 p 到 q、位于 Σ 中的曲线，使得 $\gamma = f \circ \tilde{\gamma}$ 是从 x 到 y、位于 $f(\Sigma)$ 中的最短常速测地线。

由紧致性可知，我们可以选取 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N < t_{N+1} = 1$，使得线段 $x_j x_{j+1} = \gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset \mathcal{B}^\Sigma_r(p)$（它是从 $x_j = f(p_j)$ 到 $x_{j+1} = f(p_{j+1})$ 的最短测地线）对于 $j = 0, \ldots, N$ 均包含在 $f(\Sigma_{p_j})$ 中。因此，由 (4.1) 和注 16.1,

$$\begin{aligned} |d\phi_x^{-1}\nu(p_j) - d\phi_x^{-1}\nu(p_{j+1})| &\le 4|d\phi_{x_j}^{-1}\nu(p_j) - d\phi_{x_j}^{-1}\nu(p_{j+1})| \\ &\le 8\,(\mathrm{Lip}_{p_j}\nu)\, d_\Sigma(x,y)|t_j - t_{j+1}|, \end{aligned}$$

并且，利用一致的逐点 Lipschitz 界,

$$\begin{aligned} |d\phi_x^{-1}\nu(p) - d\phi_x^{-1}\nu(q)| &\le \sum_{j=0}^{N} |d\phi_x^{-1}\nu(p_j) - d\phi_x^{-1}\nu(p_{j+1})| \\ &\le 8C_0\, d_{f(\Sigma)}(x,y) \sum_{j=0}^{N} |t_j - t_{j+1}| \\ &= 8C_0\, d_{f(\Sigma)}(x,y) \\ &\le 8C_0 r. \end{aligned}$$

特别地，这证明对于任意 $y = f(q) \in \mathcal{B}_r^\Sigma(p)$，我们有 $|d\phi_x^{-1}\nu(p) - d\phi_x^{-1}\nu(q)| \leq 8C_0 r$。取 $r \leq 2r_K := \min\{\rho_0/2, \delta_K/2, \frac{1}{16C_0}\}$，我们得到，

$$|d\phi_x^{-1}\nu(p) - d\phi_x^{-1}\nu(q)| \leq \frac{1}{2}$$

对于所有 $y = f(q) \in \mathcal{B}_r^\Sigma(p)$，这意味着整个 $\mathcal{B}_r^\Sigma(p)$都可以写成定义在 $df_p(T_p\Sigma) \subset T_xM$ 的开子集上的 $C^{1,1}$ 函数 u 的图。

那么立即可见（如 [CM11，引理 2.4] 中），u 满足 $|\nabla u| \leq 1$ 和 $\mathrm{Lip}\nabla u \leq 2\sqrt{2}C_0$。

第二个结论可仿照 [CM11 引理 2.4] 从第一个结论推出。 □

下一个引理本质上是一个几何版的阿尔泽拉–阿斯科利定理，事实上它直接由通常的阿尔泽拉–阿斯科利紧性定理推出。该论证广为人知，其变-体出现在若干不同的来源和背景中（例如见 [ACGL22，第 11.8] 定理）。为完整起见，我们现在概述这一论证。

Lemma 16.3. *Let $\{\Sigma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ be a sequence of compact orientable surfaces and let $f_i : \Sigma_i \to U$ be a sequence of 2-sided $C^{1,1}$ immersions with unit normal vector field ν_i in a precompact open set $U \subset M$ with $f(\partial\Sigma_i) \subset \partial U$. If the immersions have locally bounded area, i.e. for every $K \subset\subset U$ there is a finite c_K such that $\sup_i \mathcal{H}^2(f_i(\Sigma_i) \cap K) \leq c_K$, and*

$$C_0 := \sup_i \sup_{p\in\Sigma_i} \mathrm{Lip}_p\, \nu_i < \infty,$$

于是存在一个子序列（不重新标记），使得 f_i 在 $C^{1,\alpha}_{loc}$ 收敛于一个 $C^{1,1}$ 浸入$f : \Sigma \to U$，且具有 上确界$_{p\in\Sigma}\mathrm{Lipschitz}_p\nu \leq C_0$。

Sketch of proof. Let $K \subset\subset U$. We can cover the compact set $\overline{K}$ with finitely many balls $\{B_k = B^M_{r_K/2}(z_k)\}_{k=1}^N$. Suppose $p_i \in \Sigma_i$ satisfies $f_i(p_i) = x_i \in B_k$. By Lemma 16.2, the component of $f_i^{-1}(B^M_{r_K/2}(x_i))$ is contained in $B^{\Sigma_i}_{r_K}(p_i)$ and its image under f_i is the graph of a $C^{1,1}$ function satisfying explicit $C^{1,1}$-bounds depending only on C_0 (not on i). This image is the graph of a function u_i such that $|\nabla u_i| \leq 1$—in particular, it has area bounded from below by some uniform constant κr_K^2. By the uniform upper bounds on the area of $f_i(\Sigma_i)$ in compact sets, we conclude that $f_i^{-1}(B_k)$ is contained in at most N_0 balls of radius r_K in Σ_i, where N_0 is a constant depending only on K, the area bounds, and C_0 (not on i or k).

For any $k \in \{1, \dots, N\}$, we can select a set of at most N_0 points $\{p_l^{i,k}\}_l \subset \Sigma_i$ so that $f_i^{-1}(B_k)$ is covered by $\{B^{\Sigma_i}_{r_K}(p_l^{i,k})\}_l$. Up to a subsequence we may assume as $i \to \infty$ that $f(p_l^{i,k}) \to x_l^k$ and $df_{p_l^{i,k}}(T_{p_l^{i,k}}\Sigma_i) \to P_l^k$, a 2-dimensional subspace of $T_{x_l}M$. Note that the corresponding graphical functions satisfy uniform $C^{1,1}$ bounds, so by Arzelà-Ascoli, up to a subsequence, they converge (in $C^{1,\alpha}$ for any $0 < \alpha < 1$) to some $C^{1,1}$ function u_l^k defined on $B^{T_{x_l^k}M}_{r_K}(0) \cap P_l^k$ with the same $C^{1,1}$ bound.

然后我们对所有 $k = 1, \dots, N$ 重复这一论证，并取一个对角子序列。显然，我们得到的图在球之间的重叠区域上相互吻合（因为曲面 $f_i(\Sigma_i)$ 确实如此），因此我们得到了限制在 $K \subset\subset U$ 上的浸入极限曲面。

最后，我们用紧集穷尽 U，归纳地重复这一过程，并检查极限曲面在重叠处一致。□

17. Curvature Estimates

现在我们利用这些紧性思想来证明曲率估计。

为方便起见，我们用 $\mathcal{P}$ 表示由满足以下条件的有序对 (V, Ω) 构成的集合，其中 V 是一个变分流形，且 $\Omega \subset M$ 是一个有限周长集合，并且存在一列边界光滑的 $\Omega_j \subset M$，满足

$$\mathbf{1}_{\Omega_j} \xrightarrow{L^1} \mathbf{1}_\Omega, \quad D\mathbf{1}_{\Omega_j} \xrightarrow{*} D\mathbf{1}_\Omega, \quad \mathbf{v}(\partial\Omega_j) \rightharpoonup V.$$

We l令 $\mathcal{P}_c$ 表示满足以下条件的有序对 (V, Ω)：$\in \mathcal{P}$ 使得 V 具有 c-有界一阶变分。

对于 $(V, \Omega) \in \mathcal{P}$，我们定义

$$\mathcal{A}^h(V, \Omega) := \|V\|(M) - \int_\Omega h \, d\mathcal{H}^3.$$

定义 17.1。一对 $(V,\Omega) \in \mathcal{P}$ 是一个 弱稳定的 h-曲面，位于 U i　　f

- (V, Ω)具有 U中定理1.1所述的正则性，

对于任意 $\phi \in \mathcal{I}(U)$，我们有

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{A}^h(\phi(t,\cdot)_\# V, \phi(t,\Omega)) = 0,$$
$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathcal{A}^h(\phi(t,\cdot)_\# V, \phi(t,\Omega)) \geq 0.$$

我们验证弱稳定的 h-曲面满足通常的稳定性不等式。

命题 17.2. 若(V,Ω) 是 U 中的弱稳定 h-曲面，其对应的浸入为 $f\colon \Sigma \to U$，则对于任意 $\psi \in C_c^\infty(\Sigma)$，若它是 f 对 U 上某个光滑函数的拉回，则有

$$\int_\Sigma |\nabla^\Sigma \psi|^2 - (|A^\Sigma|^2 + \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu))\psi^2 \, d\mathcal{H}^2 \geq \int_{\partial^*\Omega} (H^\Sigma h + \partial_\nu h - |H^\Sigma|^2)\psi^2 \, d\mathcal{H}^2. \tag{17.1}$$

证明。该公式源于对面积和势能进行二阶变分的标准计算（参见 [BdCE88, 命题2.5]），并结合以下观察：所有被积函数都是定义良好、可测且可积的函数，因为浸入是 $C^{1,\,1}$。□

下面的结果是稳定极小曲面（或指定平均曲率曲面）通常曲率估计的 $C^{1,\,1}$ 对应版本（例如参见 [ZZ20, Theorem3.6]）。

定理 17.3. 设 $U \subset M$ 是一个开集，且 $c > 0$。设 $(V,\Omega) \in \mathcal{P}_c$ 是 U 中的一个弱稳定h-曲面，其对应函数满足 $\|h\|_{C^1} \leq c$ 和 $\|V\|(U) \leq m_0$。设 $f\colon \Sigma \to U$ 是诱导出变分流形 V 的 $C^{1,\,1}$浸入，且该变分流形位于 U中。则存在常数 $C = C(U, c, m_0) > 0$，使得

$$\sup_{p\in\Sigma} \min\{1, d_\Sigma(p, f^{-1}(\partial U))\} \, \mathrm{Lip}_p \nu \leq C.$$

证明。我们采用反证法，并使用标准的选点论证（参见 [Whi16, Lecture 3]）。

假设存在这样一列浸入 $f_i\colon \Sigma_i \to M$，使得

$$\sup_{p\in\Sigma_i} \min\{1, d_{\Sigma_i}(p, f_i^{-1}(\partial U))\} \, \mathrm{Lip}_p \nu_i = R_i \to \infty.$$

我们将局部 Lipschitz 常数 $\mathrm{Lip}_p \nu_i$ 记为 $l_i(p)$。

现在选取 $p_i \in \Sigma_i$ 使得

$$\min\{1, d_{\Sigma_i}(p_i, f_i^{-1}(\partial U))\}\ l_i(p_i) \geq \frac{1}{2} R_i. \tag{17.2}$$

我们将把 U 上的度量按 $l_i(p_i) \to \infty$ 进行重标度，并得到新的度量 $\tilde{g}_i = l_i(p_i) g$，因此~，相对于新度量，$l_i(p_i) = 1$。根据 (17.2)，重标度后的 $(U, \tilde{g}_i)$ 在局部光滑意义下收敛到 $(\mathbb{R}^3, g_{\mathrm{Euc}})$，并且在重标度下，

$$d_{\tilde{\Sigma}_i}(p_i, f_i^{-1}(\partial U)) \geq \frac{1}{2} R_i.$$

Assume, without loss of generality that $f_i(p_i) \to 0 \in \mathbb{R}^3$. For $p, p_i \in \Sigma_i$, if (under the rescaling) $d_{\tilde{\Sigma}_i}(p, p_i) \leq \frac{1}{4} R_i$, then, since the quantity $d_{\Sigma_i}(\cdot, f_i^{-1}(\partial U))\ l_i(\cdot)$ is scale invariant, $\tilde{l}_i(p) \leq \frac{R_i}{R_i/2 - R_i/4} = 4$. Thus,

$$\sup_{p \in B^{\tilde{\Sigma}_i}_{R_i/4}(p_i)} \tilde{l}_i(p) \leq 4.$$

In any compact set, the mass bound m_0 and the mononicity formula give a uniform mass bound for the rescaled immersions. Recalling that $R_i \to \infty$, we conclude that, by Lemma 16.3, (up to a subsequence) the rescaled immersions converge in $C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}$ to a complete, 2-sided $C^{1,1}$ immersion $f : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ with Lipschitz unit normal vector field ν such that $\sup_\Sigma \mathrm{Lip}_p\, \nu \leq 4$.

断言 1：f 是一个 $C^{1,1}$ 浸入，具有局部有序的片层。事实上，$C^{1,\alpha}$ 局部图形的收敛保留了浸入 f_i 的片层局部次序。

Claim 2: The image of f is a smooth embedded minimal surface. Since each sheet of the rescaled immersion in a small ball has c/R_i bounded first variation, the lower semicontinuity of the first variation (see [Sim83, Theorem 42.7]) implies that each sheet of f in a small ball is stationary. By Allard's regularity theorem [All72], f is a smooth minimal immersion. Since the sheets are ordered locally, the strong maximum principle for minimal surfaces implies that each component of the image of f is a smoothly embedded minimal surface.

Claim 3: f is a stable minimal immersion. By claim 2, f is a covering of a smooth minimal embedding, so we can assume without loss of generality that f is an embedding. We consider the limit of (17.1), where we fix a function ψ on Σ with compact support and transplant it to Σ_i using the graphical identification. Since the rescalings satisfy $|H^{\Sigma_i}| \leq c/R_i$ and $|\nabla h_i| \leq c/R_i$, the right hand side of (17.1) vanishes in the limit. Since the convergence is $C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}$, every term on the right hand side converges to the corresponding term for Σ except the $|A^{\Sigma_i}|^2$ term. Since the ambient space converges locally smoothly to Euclidean $\mathbb{R}^3$, [Lan85, Theorem 4.3] implies that the term $\int_{\Sigma_i} |A^{\Sigma_i}|^2 u^2\ d\mathcal{H}^2$ is lower semicontinuous (we have local weak convergence in $W^{2,2}$ by the uniform $C^{1,1}$ bounds). Hence, Σ satisfies the stability inequality in $\mathbb{R}^3$.

根据 [FCS80], [dCP79], 和 [Pog81] 在 $\mathbb{R}^3$ 中证明的稳定 Bernstein 定理，Σ 是平坦的。根据推论 11.2，Σ_i 在 $C^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ 下收敛到平坦极限。然而，我们选择这些点时满足 $\mathrm{Lip}_{p_i} \nu_i \geq 1$，其中 $p_i \to 0$，这就导出了矛盾。□

通常，这一估计直接推出 $C^{1,\alpha}$ 局部弱稳定 h-曲面的预紧性（参见 [ZZ20，定理 3.6]）。

第4 部分。 在 3-球面中应用于存在性

18. Min-Max Setup

我们建立了一个适当的框架，以便对规定平均曲率泛函实施 [CDL03] 的极小极大程序。

令 $v > 0$、 $\kappa > 0$和 $c > 0$ 满足

$$\frac{8\pi}{(1+\kappa)^2 + c^2/4} > 4\pi + vc. \tag{18.1}$$

考虑一个光滑度量 g 于 S^3，使得

- $R_g \geq 6$,
- $\mathrm{Ric}(g) > 0$,
- $\mathrm{Vol}(S^3, g) \leq v$,
- (S^3, g)等距嵌入于 $\mathbb{R}^N$，具有 $|A_{S^3}| \leq 1 + \kappa$。

注意，圆度量满足这些条件，其中包含$v = 2\pi^2$、 $\kappa = 0$和 $c = 0.547$。此外，标准嵌入$\mathbf{S}$存在一个显式的 C^2 图形的邻域^3 $\subset\mathbb{R}^4 \subset \mathbb{R}^N$ 以及一个显式常数 $c > 0$，通过重标度可使这些条件得到满足。令 h： $S^3 \to \mathbb{R}$ 为一个光滑函数，满足 $|h| \leq c$。此外，我们假设 h 满足 [ZZ20]中的条件（†）或（‡）。根据 [ZZ20、命题3.8和推论3.18], ，满足这些条件的函数集合是开且稠密的，所有正函数都满足（‡），并且任意这样的函数 h 都具有对于指定平均曲率为 h的曲面的唯一延拓性质。

令 g_0 为 S^3上的圆度量。令 $x_0 \in S^3$。令 $\{\Omega_t\}_{t\in[0,1]}$ 由下式给出

$$\Omega_t := B^{g_0}_{\pi t}(x_0).$$

注意，我们特别仅使用圆度量来定义标准扫出；其余部分均使用一般度量 g。令 $\mathcal{M}$ 为光滑映射 ψ： $[0,1] \times[0,1] \times S^3 \to S^3$ 的集合，使得

- $\psi(s,\ t,\ \cdot)$ 是 S^3的微分同胚,
- $\psi(0,\ t,\ \cdot) =$为恒等映射。

我们将极小极大宽度 $\omega_1(g,\ h)$ 定义为

$$\omega_1(g,h) := \inf_{\psi\in\mathcal{M}} \sup_{t\in[0,1]} \mathcal{A}^h(\psi(1,t,\Omega_t)).$$

若 $\{\Omega^j_t = \psi_j(1,\ t,\ \Omega_t)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 满足 $\psi_j \in \mathcal{M}$，则称其为极小化序列

$$\lim_{j\to\infty} \sup_t \mathcal{A}^h(\Omega^j_t) = \omega_1(g,h).$$

给定一个极小化序列，如果 $\{\Omega^j_{t_j}\}$ 是一个极小极大序列，则

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{A}^h(\Omega^j_{t_j}) = \omega_1(g,h).$$

根据标准紧性理论（参见 [Mag12, Theorem 12.26] and [Sim83, Chapter 1, Theorem 4.4]），对于任意极小极大序列 $\{\Omega^j_{t_j}\}$，存在一个集合 $\Omega \subset S^3$ 以及一个变分流形 V，满足

$$\mathbf{1}_{\Omega^j_{t_j}} \xrightarrow{L^1} \mathbf{1}_\Omega, \quad D\mathbf{1}_{\Omega^j_{t_j}} \overset{*}{\rightharpoonup} D\mathbf{1}_\Omega, \quad \mathbf{v}(\partial\Omega^j_{t_j}) \rightharpoonup V,$$

and

$$\|V\|(S^3) - \int_\Omega h \, d\mathcal{H}^3 = \omega_1(g,h). \tag{18.2}$$

我们证明以下定理。

定理 18.1。 设(S^3, g) 和 h 满足约束条件 *(18.1)* 和 $\int_{S^3} h \, d\mathcal{H}^3_g \geq 0$。那么存在一个开集 $\Omega \subset S^3$，满足

- $\mathcal{A}^h(\Omega) = \omega_1(g,h)$,
- $\partial\Omega$ 是由光滑的嵌入球面不交并组成的，这些球面相对于Ω具有指定平均曲率 h。

由于反转定向相当于改变 h 的符号，定理 1.5 和定理 1.7 可由定理 18.1 推出。

19. Density Estimates in the 3-Sphere

我们展示了具有一个密度至少为二的点的 $\mathcal{A}^h$ 泛- 函的极小极大变分流形的质量上界和下界。我们证明，在所选设置下，这两个界彼此矛盾。

我们首先证明一个上界，利用 c 的上界、(S^3, g) 的体积上界，以及 g 的数量曲率下界。

命题 19.1。 设 (S^3, g) 满足 *§18* 的假设。设 $(V, \Omega) \in \mathcal{P}$满足 $\|V\|(S^3) - \int_\Omega h \, d\mathcal{H}^3 \leq \omega_1(g, h)$。则

$$\|V\|(S^3) \leq 4\pi + vc.$$

证明。令 $h_+ := \min\{0, h\}$ 且 $h_- := \min\{0, -h\}$。我们计算

$$\begin{aligned}
\|V\|(S^3) - \int_{S^3} h_+ \, d\mathcal{H}^3 &\leq \|V\|(S^3) - \int_\Omega h \, d\mathcal{H}^3 \\
&\leq \omega_1(g,h) \\
&\leq \omega_1(g,0) + \int_{S^3} h_- \, d\mathcal{H}^3 \\
&\leq 4\pi + \int_{S^3} h_- \, d\mathcal{H}^3,
\end{aligned}$$

其中不等式 $\omega_1(g,0) \leq 4\pi$ 由假设 $\mathrm{Ric}(g) > 0$ 以及 $R_g \geq 6$ 根据[MN12，第 1 定理1]得出。由于 $|h| \leq c$ 以及 $\mathcal{H}^3(S^3, g) \leq v$，结论得证。□

为了证明下界，我们回顾 Willmore 能量的一个单调性公式（针对我们的情形作了修改）。

引理19.2 ([Sim93, (1.4)]和 [Top98, §6])。 若 V 是 $\mathbb{R}^N$ 中一个整整流 *2*-变分流，具有有界的一阶变分和有限质量，则

$$\pi\Theta^2(V, x_0) \leq \frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}^4} |H_V|^2 \, d\|V\|$$

对任意 $x_0 \in \mathbb{R}^N$。

证明。我们注意到， [Top98]中引理1证明的第一部分所给出的证明同样适用于变分流（其中，我们对平均曲率的约定与Topping的约定相差一个2的因子）。唯一使用 C^1 假设的地方，是证明 [Top98,(21)] 中的最右项在 $\sigma \to 0$时趋于零。相反，我们使用更为简单的估计：

$$\begin{aligned}\int_{B_\sigma} (\sigma^{-2} - \rho^{-2}) X \cdot H_V \, d\|V\| &\le ((\sigma^{-2} - \rho^{-2})\sigma c)\|V\|(B_\sigma) \\ &\le c\sigma \frac{\|V\|(B_\sigma)}{\sigma^2} = O(\sigma)\end{aligned}$$

由单调性公式以及有界支撑和有限质量的假设可得 $\sigma \to 0$ 。□

我们应用此单调性公式，得到质量下界。

命题19.3。 设(S^3, g) 满足第*18*节的假设。若 V 是(S^3, g) 中的一个变分流形，且其一阶变分 c-有界，并且 $\Theta^2(V, x) \ge 2$ 对某个 $x \in S^3$成立，则

$$\|V\|(S^3) \ge \frac{8\pi}{(1+\kappa)^2 + c^2/4}.$$

证明。 利用(S^3, g)到 $\mathbb{R}^N$的等距嵌入，我们将 V视为 $\mathbb{R}^N$中的一个2-变分流。由 $S^3 \subset \mathbb{R}^N$的第二基本形式有界可知，

$$|H_V^{\mathbb{R}^N}|^2 \le 4(1+\kappa)^2 + c^2.$$

由引理19.2以及存在一个密度至少为2的点这一假设可知，我们得出

$$2\pi \le \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N} |H_V^{\mathbb{R}^N}|^2 \, d\|V\| \le \frac{4(1+\kappa)^2 + c^2}{16}\|V\|(S^3),$$

从而得到所需的不等式。 □

结合质量的上界和下界，我们得出关于极小极大构造中出现的特殊变分流的密度的预期结论。

推论 19.4。 假设(S^3, g) 满足 *§18* 的假设。假设$(V, \Omega) \in \mathcal{P}$满足$\|V\|(S^3) - \int_\Omega h \, d\mathcal{H}^3 = \omega_1(g, h)$。进一步假设变分流形 V处处具有整数密度，且在(S^3, g)中具有 c-有界的一阶变分。那么对所有 $x \in \mathrm{spt}\|V\|$， $\Theta^2(V, x) = 1$ 。

证明。 反之，假设结论不成立以导出矛盾。那么根据命题19.3和命题19.1，我们必有

$$4\pi + vc \ge \frac{8\pi}{(1+\kappa)^2 + c^2/4}.$$

该不等式与（18.1）矛盾。 □

20. Min-Max Proof

我们证明， [CDL03]和 [DLP10]中的每一步都可以修改，以适用于我们的情形。

20.1. 非平凡宽度。由等周不等式可立即得出 $\omega_1(g, h) > 0$ 。根据假设 $\int_{S^3} h \, d\mathcal{H}^3 \ge 0$, $\omega_1(g, h)$ 不可能由平凡解达到（即其极限满足 $V = 0$ 和 $\Omega \in \{S^3, \varnothing\}$ 的极小极大序列）。

20.2. **拉紧**。为完整起见，我们回顾 [ZZ19，§4], [ZZ20，§5] 中的思路，并将其置于 [CDL03] 的拉紧论证背景下（具体而言，我们遵循 [CDL03] 勘误中的 §2）。

令 $\mathbf{F}$ 表示 $\mathcal{V}_2(Sg)$上的变分流形距离，Sg中2-变分流形的空间。[3]

取 $L = 2(\omega_1(g,h) + c\mathrm{Vol}_g(S^3))^9$,，并令 $A^L = \{V \in \mathcal{V}_2(S^3, g) \mid \|V\|(S^3) \leq 2L\}$，其在$\mathbf{F}$中是紧的。

对于所有光滑向量场 $X\}$，令 $A^c_\infty = \{V \in A^L \mid |\delta V(X)| \leq c\int_{S^3} |X| d\mu_V$。根据 [ZZ19，引理 4.1]， A^c_∞ 是 A^L 在 $\mathbf{F}$ 拓扑中的紧子集。

对于 $k \in \mathbb{N}$，定义 $A_k = \{V \in A^L \mid 2^{-k-2} \leq \mathbf{F}(V, A^c_\infty) \leq 2^{-k+1}\}$。

对于每个 $V \in A_k$ （根据 A^c_∞ 的定义），都存在一个光滑向量场 X_V 满足

$$\delta V(X_V) + c\int_{S^3} |X_V| d\mu_V < 0 \text{ and } \|X_V\|_{C^k} \leq \frac{1}{k}$$

（第二个条件可以通过缩放来保证）。

对于每个 $V \in A_k$，都存在一个 $\mathbf{F}$-度量球 $B^{\mathbf{F}}_{\rho_V}(V)$，使得

$$\delta W(X_V) + c\int_{S^3} |X_V| d\mu_W \leq \frac{1}{2}\left(\delta V(X_V) + c\int_{S^3} |X_V| d\mu_V\right) < 0$$

对于所有 $W \in B_{\rho_V}(V)$。

由紧致性，可用有限多个这样的度量球 A_k 覆盖 $B^{\mathbf{F}}_{\rho_i}(V_i)$。令 $\{\psi_i\}$ 为从属于覆盖 $\{B^{\mathbf{F}}_{\rho_i}(V_i)\}$ 的连续单位分解，并定义

$$V \in A_k \mapsto H^k_V = \sum_i \psi_i(V) X_{V_i}.$$

现在选取 Ψ_k 一个紧支连续函数，在 A_k 上满足 $0 \leq \Psi_k \leq 1$，且在 $\{V \in A^L \mid 2^{-k-1} \leq$ 上满足 $\Psi_k \equiv 1\ \mathbf{F}(V, A^c_\infty) \leq 2^{-k}\} \subset A_k$。在 $A^L \setminus A^c_\infty$ 上定义

$$H_V = \frac{\sum_k \Psi_k(V) H^k_V}{\sum_k \Psi_k(V)}.$$

我们可以将映射 $V \mapsto H_V$ 扩展为 A^c_∞，并以 $H_V = 0$ 用于 $V \in A^c_\infty$。由于 – $\|H_V\|_{C^k} \leq \frac{1}{k}$ 若$\mathbf{F}(V, A^c_\infty) \leq 2^{-k+1}$ 根据构造（根据 X_V的归一化选择），该扩展是映射到 C^∞ 拓扑上的光滑向量场空间的连续映射。此外， H_V满足

$$\delta V(H_V) + c\int_{S^3} |H_V| d\mu_V < 0$$

对于所有 $V \in A^L \setminus A^c_\infty$。

证明的其余部分现在完全遵循 [CDL03，《勘误》命题 2.1]（将由向量场 H_V 生成的同痕速度归一化，并对新的扫掠进行平滑处理），此外还要注意到 $\mathcal{A}^h$ 的一阶变分满足

$$\delta\mathcal{A}^h_\Omega(X) = \delta|\partial\Omega|(X) - \int_{S^3} h\langle X, \nu_{\partial\Omega}\rangle d\mu_{|\partial\Omega|} \leq \delta|\partial\Omega|(X) + c\int_{S^3} |X| d\mu_{|\partial\Omega|}$$

(对于扫掠 $\{\Omega_t\}$，由向量场 $H_{|\partial\Omega_t|}$ 生成的同痕将应用于集合 Ω_t)。

因此，存在一个极小化序列 $\{\Omega^j_t\}$，其具有如下性质：每个极小极大序列$\{\Omega^j_{t_j}\}$都满足 $\mathbf{v}(\partial\Omega^j_{t_j}) \rightharpoonup V$，对于 $V \in A^c_\infty$。

[9]回顾一下， $|h| \leq c$。

20.3. 几乎极小化。 我们称 $\Omega \subset S^3$ 在 $U \subset S^3$ 中是 ε-几乎极小化的，若不存在满足以下条件的合痕 $\phi \in \mathcal{I}(U)$

$$\mathcal{A}^h(\phi(t,\Omega)) \le \mathcal{A}^h(\Omega) + \varepsilon/8,$$
$$\mathcal{A}^h(\phi(1,\Omega)) \le \mathcal{A}^h(\Omega) - \varepsilon.$$

我们称序列 $\{\Omega^j\}$ 在 U 中是几乎极小的，如果 Ω^j 在 U 中带有$\varepsilon_j \to 0$是 ε_j 几乎极小的。

根据这一定义，我们看到，[CDL03, §5] 中的论证是一般性的，并不依赖于泛函的具体选择。因此，存在一个函数 $r : S^3 \to \mathbb{R}^+$ 以及一个极小极大序列 $\{\Omega^j\}$，满足(2)的结论，使得 $\{\Omega^j\}$ 以任何 $x \in S^3$ 为中心、外半径至多为 $r(x)$的圆环中几乎都是极小的。

为应用我们的正则性理论，我们假设（不失一般性）$\mathcal{H}^3(B_{r(x)}(x)) \le \eta/8$ 对所有 $x \in M$成立。

20.4. **弱替换的正则性。**

定义 20.1. 设 $(V, \Omega) \in \mathcal{P}_c$。一对 $(V', \Omega') \in \mathcal{P}_c$是 (V, Ω) 中的$U \subset S^3$ 弱替换，如果

- $V' \llcorner G(M \setminus \overline{U}, 2) = V \llcorner G(M \setminus \overline{U}, 2)$ 以及 $\Omega \setminus \overline{U} = \Omega' \setminus \overline{U}$,
- $\big|\|V\|(S^3) - \|V'\|(S^3)\big| \le c\mathcal{H}^3(U)$,
- $\|V'\|(S^3) - \int_{\Omega'} h\, d\mathcal{H}^3 \le \|V\|(S^3) - \int_{\Omega} h\, d\mathcal{H}^3$,
- (V', Ω')属于 $C^{1,\alpha}$局部图闭包中的 U 内弱稳定 h-曲面集合。

引理 20.2。 如果存在函数 $r : S^3 \to \mathbb{R}$，使得 $(V,\Omega) \in \mathcal{P}_c$ 在以任意 $x \in S^3$ 为中心、外半径至多为 $r(x)$的任意圆环中都有弱替换，那么 V 是整整流的，并且 V在任意 $x \in \mathrm{spt}\|V\|$ 处的任意切锥都是平面的整数倍。

证明。我们 注意，与 [CDL03, 引理 6.4] 中相同的证明在我们的情形下同样适用 .

密度下界。单调性公式意味着存在一个常数 c_2，使得

$$\frac{\|V\|(B_\sigma(x))}{\pi\sigma^2} \le \frac{c_2\|V\|(B_\rho(x))}{\pi\rho^2}$$

for any varifold V with c-bounded first variation, $x \in S^3$, and $\sigma < \rho \ll 1$. Let $r < r(x)$ sufficiently small. Let (V', Ω') be a replacement for (V, Ω) in $A(x, r, 2r)$. By the maximum principle of [Whi10], V' is not identically 0 on $A(x, r, 2r)$. Since $V' \llcorner G(A(x, r, 2r), 2)$ is the varifold of a $C^{1,1}$ immersion, there is a $y \in A(x, r, 2r)$ with $\Theta^2(V', y) \ge 1$. Then we have

$$\frac{\|V\|(B_{4r}(x))}{16\pi r^2} \ge \frac{\|V'\|(B_{4r}(x))}{16\pi r^2} - Cr \ge \frac{\|V'\|(B_{2r}(y))}{16\pi r^2} - Cr \ge \frac{c_2}{4} - Cr.$$

因此，通过令 r 足够小，我们得到密度的一个一致正下界。根据 [All72, Theorem 5.5]，V 是可求长的。

切锥。令 $x \in \mathrm{spt}\|V\|$。令 C 为 V 在 x 处的一个切锥，并令 $\rho_n \to 0$ 满足

$$(f_{x,\rho_n})_\# V \rightharpoonup C.$$

令 (V'_n, Ω'_n) 是 $A(x, \rho_n/4, 3\rho_n/4)$ 中 (V, Ω) 的一个替换。令 $W'_n = (f_{x,\rho_n})_\# V'_n$。取一个子序列（不重新标记）后，我们有 $W'_n \rightharpoonup C'$，其中 C' 是一个平稳变分流形。根据替换的定义，我们有

$$C' \llcorner G(B_1(0) \setminus A(0, 1/4, 3/4), 2) = C \llcorner G(B_1(0) \setminus A(0, 1/4, 3/4), 2),$$

$$\|C'\|(B_\rho(0)) = \|C\|(B_\rho(0)) \quad \forall \quad \rho \in (0, 1/4) \cup (3/4, 1). \tag{20.1}$$

由于 C 是一个锥，(20.1) 意味着

$$\frac{\|C'\|(B_\sigma(0))}{\pi\sigma^2} = \frac{\|C'\|(B_\rho(0))}{\pi\rho^2}$$

for all $\rho \in (0,1/4) \cup (3/4,1)$. By stationarity and monotonoicity, we conclude that C' is a cone. Since C and C' agree on $B_{1/4}(0)$, we have $C' = C$. By Theorem 17.3, the convergence in $A(0,1/4,3/4)$ is $C^{1,\alpha}_{\text{loc}}$ graphical. By the same argument as in the proof of Claims 1 and 2 in Theorem 17.3 (i.e. the mean curvature of each sheet vanishes in the limit, and the ordering of sheets is preserved so we can apply the strong maximum principle), C' is the varifold of a smooth embedded minimal surface with integer multiplicity on the annulus $A(0,1/4,3/4)$. Then C' is (an integer multiple of) a smooth embedded minimal cone in $\mathbb{R}^3$, and hence a plane with integer multiplicity. □

20.5. **替换的正则性**。

定义 20.3。 设 $(V, \Omega) \in \mathcal{P}_c$。一对 $(V', \Omega') \in \mathcal{P}_c$ 是 (V, Ω) 在 $U \subset S^3$ 中的替换，如果

- $V' \llcorner G(M \setminus \overline{U}, 2) = V \llcorner G(M \setminus \overline{U}, 2)$,
- $\big|\|V\|(S^3) - \|V'\|(S^3)\big| \leqq c\mathcal{H}^3(U)$,
- $\|V'\|(S^3) - \int_{\Omega'} h\, d\mathcal{H}^3 \leqq \|V\|(S^3) - \int_\Omega h\, d\mathcal{H}^3$,
- $V' \llcorner G(U, 2)$ 是相对于 Ω' 具有指定平均曲率 h 的嵌入光滑稳定曲面。

注记 20.4. 注意，任何替换也是弱替换。

定义20.5。 二元组（$V\Omega$） $\in \mathcal{P}_c$ 具有良好替换性质，如果

(1) there is a positive function $r : U \to \mathbb{R}^+$ such that there is a replacement (V', Ω') for (V, Ω) in any annulus centered at x with outer radius at most $r(x)$ for all $x \in U$,
(2) there is a positive function $r' : U \to \mathbb{R}^+$ such that there is a replacement (V'', Ω'') for the replacement (V', Ω') from (1) in any annulus centered at x with outer radius at most $r(x)$ and any annulus centered at y with outer radius at most $r'(y)$ for any $y \in U$,
(3) there is a positive function $r'' : U \to \mathbb{R}^+$ such that there is a replacement (V''', Ω''') for the replacement (V'', Ω'') from (2) in any annulus centered at z with outer radius at most $r''(z)$ for any $z \in U$.

引理20.6。 如果$(V,\Omega) \in \mathcal{P}_c$ 具有良好替换性质，那么 V 是相对于Ω具有指定平均曲率 h的嵌入光滑曲面。

证明。 由于唯一延拓和曲率估计成立，证明与 [CDL03 命题 6.3] 的证明相同。唯一的例外是证明 $\Sigma \subset \text{spt}\|V\|$on $B_\rho(x) \setminus \{x\}$ 的论证，在 [CDL03] 中使用了 $\|V\|(S^3) = \|V'\|(S^3)$。相反，我们采用 [ZZ19 定理 6.1 的断言 5] 以及 [ZZ20 定理 7.1 的断言 5]，中的论证，该论证适用于我们的情形。□

20.6. **替换的构造**。 [CDL03，§7] 中的构造是一般性的，适用于我们的情形（另见 [ZZ20，§6]）。我们只需作出三点说明。

首先，为了从同痕类中极小化子的正则性推导出受约束同痕类中极小化子的正则性，我们需要一个类似于 [CDL03, 引理 7.4] 的挤压引理。

我们注意到，同样的证明也适用于我们的情形，因为挤压后体积的变化可以任意小。

其次，由于弱替换是作为 $\mathcal{A}^h$ 的约束极小化问题的解的极限构造出来的，不等式

$$\|V'\|(S^3) - \int_{\Omega'} h \, d\mathcal{H}^3 \leq \|V\|(S^3) - \int_{\Omega} h \, d\mathcal{H}^3 = \omega_1(g,h) \tag{20.2}$$

对于 wea　第 k 个替换 (V', Ω')，即由 (18.2) 中的对 (V, Ω) 得到，立即可知　　.

最后，我们注意到，以这种方式构造的替换先验上仅仅是弱替换。然而，拉紧论证、引理20.2、(20.2)以及推论 19.4表明，在定理 18.1 的假设下，我们构造的弱替换实际上是强替换。

20.7. 亏格界。 我们沿用 [DLP10] 的论证。

[DLP10，命题 3.2], 的类似结论，即受约束的合痕极小化问题的正则性，可由上述内部和边界正则性定理得到，并结合以下观察：[DLP10，引理6.1] 中关于边界处的挤压论证在我们的设定下同样成立（挤压后，体积的变化将任意小）。

The proof of [DLP10, Proposition 2.1] in [DLP10, §4] follows the same argument combined with the following observations. First, the min-max limit V is a smooth embedded surface of prescribed mean curvature and satisfies unique continuation. Hence, when we solve local constrained minimization problems and take limits using the compactness theory developed in Part 3, the apriori $C^{1,1}$ local minimizers converge in $C^{1,\alpha}_{\text{loc}}$ to the smooth limit V. Since local minimizers are smooth where they have density 1, we can always take the local constrained minimizers to be smooth stable embedded surfaces of prescribed mean curvature. Second, the estimate [DLP10, Lemma 4.2] holds for smooth surfaces with bounded mean curvature, where the constant C depends on the mean curvature bound. The proof follows by keeping track of the nonvanishing left hand side in the first variation formula [DLP10, (A.2)].

借助 Simon提升引理 [DLP10，命题 2.1], 其余证明完全相同。

Appendix附录 A. Maximum Principle

为了拼接分解后的叠置圆盘极小化问题的极限，需要最大值原理。由于我们得到的正则性低于极小曲面情形，因此需要在 $C^{1,\alpha}$ 曲面的情形下建立最大值原理。

我们采用如下定义，该定义引自 [ZZ19]。

定义 A.1。 令 N_i $(i = 1,2)$ 是连通开子集 $W \subset M$ 中的连通嵌入式双侧 C^1 曲面，且满足 $\partial N_i \cap W = \varnothing$。令 ν_i 为 N_i的单位法向量。我们称 N_2 位于 N_1 的一侧，若 N_1 将 W 分为两个连通分支$W_1 \cup W_2 = W \setminus N_1$，其中 ν_1 指向 W_1，并且满足以下任一条件：

- $N_2 \subset \overline{W_1}$，我们将其写作 $N_1 \leq N_2$；或
- $N_2 \subset \overline{W_2}$，记作 $N_1 \geq N_2$。

引理 A.2（最大值原理）。设 N_1 和 N_2 是连通开集 W 中的 $C^{1,\alpha}$ 曲面，且 N_1 位于 N_2 的一侧，$N_1 \geq N_2$、$N_2 \geq N_1$，并且 N_1 与 N_2 在 $x \in W$ 处相切相交。若每个 N_i 关于法向 ν_i 在弱意义下具有非负平均曲率，则 $N_1 = N_2$ 以及每个曲面都是光滑极小曲面。

证明。 由于单位法向量方向相反，只要证明 $N_1 = N_2$，即可得出其为光滑极小曲面。

假设 $N_1 \neq N_2$ 以得到矛盾。不妨设存在一个序列 $x_j \to x$，满足 $x_j \in N_1 \setminus N_2$。令 $P \subset T_xM$ 为 N_1 和 N_2 在 x 处的公共切平面，并令 $\nu = \nu_1(x)$ 为 P 的单位法向量，使得 $\nu_2(x) = -\nu$。令 $r_0 \in (0,1)$ 足够小，使得 $\phi_x^{-1}(N_1 \cap B_r^M(x))$ 和 $\phi_x^{-1}(N_2 \cap B_{r_0}^M(x))$ 是 $C^{1,\alpha}$ 关于 $B \subset P$ 的图，由 $C^{1,\alpha}$ 函数 $u_1 \geq u_2$ 给出，并令 $\rho \in (0, r_0/2)$。令 B_r 表示 $B_r^{\mathbb{R}^2}(0)$。

我们将采用命题 11.1 证明中的相同设定。令

- $\tilde{g}$ 为重缩放的拉回度量（$\phi_x \circ \mu_\rho$）$^* g$，从而
$$\|\tilde{g} - g_{\mathrm{Euc}}\|_{C^\infty(B_2 \times [-1,1])} \leq \delta(\rho),$$
其中 $\delta(\rho) \to 0$ $\rho \to 0$;
- $\tilde{u}_i : B_2 \to \mathbb{R}$ 被定义为 $\tilde{u}_i(x) = \rho^{-1} u_i(\rho x)$ 使得
$$\|\tilde{u}_i\|_{C^1(B_2)} \leq \delta(\rho);$$
- $A(x, z, p)$ 满足：在 $\mathbb{R}^3$ 上的缩放度量 $\tilde{g}$ 下，我们有 $\mathcal{H}^2(\text{图 } u|_{B_r}) = \int_{B_r} A(x, u, Du)\, dx$ 对所有 C^1 函数 $u : B_2 \to \mathbb{R}$ 和 $r \in (0, 2)$;
- Q 表示相对于 $\tilde{g}$的 B_2 上图的平均曲率算子。

那么 $Q(u) \leq 0$ （分别为 ≥ 0）在 B_1 中以弱意义成立，等价于（按照我们所采用的符号约定）

$$\int_{B_1} (A_p(x, u, Du) \cdot D\phi + A_z(x, u, Du)\phi) \leq 0 \text{ (resp. } \geq 0)$$

对所有 $\phi \in W^{1,2}_0(B_1)$，其中 $\phi \geq 0$。

By assumption, we have $Q(\tilde{u}_1) \geq 0$ and $Q(\tilde{u}_2) \leq 0$ in the weak sense. If we let $v = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \geq 0$, then $v \in C^{1,\alpha}$ is a non-negative weak supersolution of a linear elliptic equation with continuous coefficients (depending on $\tilde{u}_1$ and $\tilde{u}_2$) as in [GT01, Theorem 10.7], i.e.

$$\int_{B_1} (a^{ij} D_j v + b^i v) D_i \phi - (-b^i D_i v + cv)\phi \geq 0$$

对于所有非负的 $\phi \in W^{1,2}_0(B_1)$，其中 $\tilde{u}_t = t\tilde{u}_1 + (1-t)\tilde{u}_2$ 且

$$a^{ij} := \int_0^1 A_{p_i p_j}(x, \tilde{u}_t, D\tilde{u}_t)\, dt$$
$$b^i := \int_0^1 A_{p_i z}(x, \tilde{u}_t, D\tilde{u}_t)\, dt$$
$$c := -\int_0^1 A_{zz}(x, \tilde{u}_t, D\tilde{u}_t)\, dt.$$

Since N_1 and N_2 intersect tangentially at x, $v(0) = 0$, and $\inf_{B_{1/4}} v = 0$. Hence, the weak Harnack inequality for supersolutions [GT01, Theorem 8.18] implies $\|v\|_{L^1(B_{1/2})} = 0$. As v is $C^{1,\alpha}$, this means $v|_{B_{1/2}} \equiv 0$, contradicting the choice of the sequence $x_j \to x$. □

References

[AA76] William K. Allard 和 Frederick J.Almgren,Jr., 具有正密度的定常一维变分流的结构, Invent. Math. **34** (1976), 第 2 期, 83–97.[ACGL22] Ben Andrews、Bennett Chow、Christine Guenther和 MatLangford, 外在几何流, 数学研究生教材，美国数学学会，2022。

[All72] William K. Allard, *On the first variation of a varifold*, Ann. of Math. (2) **95** (1972), 417–491.
[All75] ———, *On the first variation of a varifold: boundary behavior*, Ann. of Math. (2) **101** (1975), 418–446.
[Alm65] Frederick J. Almgren, Jr., *The theory of varifolds*, Mimeographed Notes, Princeton (1965).
[Alm66] ———, *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem*, Ann. of Math. (2) **84** (1966), 277–292.
[AS79] Frederick J. Almgren, Jr. and Leon Simon, *Existence of embedded solutions of Plateau's problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **6** (1979), no. 3, 447–495.
[BdCE88] João Lucas Barbosa, Manfredo do Carmo, and Jost Eschenburg, *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds*, Math. Z. **197** (1988), no. 1, 123–138.
[BK74] Iliya Ja. Bakel'man and Boris E. Kantor, *Existence of a hypersurface homeomorphic to the sphere in Euclidean space with a given mean curvature*, Geometry and topology, No. 1 (Russian), Leningrad. Gos. Ped. Inst. im. Gercena, Leningrad, 1974, pp. 3–10.
[BW18] Costante Bellettini and Neshan Wickramasekera, *Stable CMC integral varifolds of codimension 1: regularity and compactness*, arXiv e-prints (2018), arXiv:1802.00377.
[BW19] ———, *Stable prescribed-mean-curvature integral varifolds of codimension 1: regularity and compactness*, arXiv e-prints (2019), arXiv:1902.09669.
[BW20] ———, *The inhomogeneous Allen–Cahn equation and the existence of prescribed-mean-curvature hypersurfaces*, arXiv e-prints (2020), arXiv:2010.05847.
[Caf77] Luis A. Caffarelli, *The regularity of free boundaries in higher dimensions*, Acta Mathematica **139** (1977), 155–184.
[Caf80] ———, *Compactness methods in free boundary problems*, Communications in Partial Differential Equations **5** (1980), 427–448.
[Caf98] ———, *The obstacle problem revisited*, Journal of Fourier Analysis and Applications **4** (1998), 383–402.
[CDL03] Tobias H. Colding and Camillo De Lellis, *The min-max construction of minimal surfaces*, Surveys in differential geometry **8** (2003), 75–107.
[CM11] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, *A course in minimal surfaces*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Soc., 2011.
[CZ23] Da Rong Cheng and Xin Zhou, *Existence of constant mean curvature 2-spheres in Riemannian 3-spheres*, Comm. Pure Appl. Math. **76** (2023), no. 11, 3374–3436.
[dCP79] Manfredo do Carmo and Chia-Kuei Peng, *Stable complete minimal surfaces in* $\mathbf{R}^3$ *are planes*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **1** (1979), no. 6, 903–906.
[Dey22] Akashdeep Dey, *A comparison of the Almgren-Pitts and the Allen-Cahn min-max theory*, Geometric and Functional Analysis **32** (2022), no. 5, 980–1040.
[DG65] Ennio De Giorgi, *Una estensione del teorema di Bernstein*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3) **19** (1965), 79–85.
[DLP10] Camillo De Lellis and Filippo Pellandini, *Genus bounds for minimal surfaces arising from min-max constructions*, J. Reine Angew. Math. **644** (2010), 47–99.
[DLR18] Camillo De Lellis and Jusuf Ramic, *Min-max theory for minimal hypersurfaces with boundary*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **68** (2018), no. 5, 1909–1986.
[DM13] Benoît Daniel and Pablo Mira, *Existence and uniqueness of constant mean curvature spheres in* Sol_3, J. Reine Angew. Math. **685** (2013), 1–32.
[EFPS24] Alberto Enciso, Antonio J. Fernández, and Daniel Peralta-Salas, *Small spheres with prescribed nonconstant mean curvature in Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal. **286** (2024), no. 11, Paper No. 110415, 16.
[FCS80] Doris Fischer-Colbrie and Richard Schoen, *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), no. 2, 199–211.
[FF60] Herbert Federer and Wendell H. Fleming, *Normal and integral currents*, Ann. of Math. (2) **72** (1960), 458–520.
[Fle62] Wendell H. Fleming, *On the oriented Plateau problem*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **11** (1962), 69–90.
[Ger98] Claus Gerhardt, *Closed hypersurfaces of prescribed mean curvature in locally conformally flat Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **48** (1998), no. 3, 587–613.

[GG16] Pedro Gaspar and Marco A. M. Guaraco, *The Allen–Cahn equation on closed manifolds*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **57** (2016), 1–42.

[GG19] ———, *The Weyl Law for the phase transition spectrum and density of limit interfaces*, Geometric and Functional Analysis **29** (2019), 382 – 410.

[GT01] David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2001.

[Gua18] Marco A. M. Guaraco, *Min-max for phase transitions and the existence of embedded minimal hypersurfaces*, J. Differential Geom. **108** (2018), no. 1, 91–133.

[HK19] Robert Haslhofer and Daniel Ketover, *Minimal 2-spheres in 3-spheres*, Duke Math. J. **168** (2019), no. 10, 1929–1975.

[HS79] Robert Hardt and Leon Simon, *Boundary regularity and embedded solutions for the oriented Plateau problem*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 3, 439–486.

[HT00] John E. Hutchinson and Yoshihiro Tonegawa, *Convergence of phase interfaces in the van der Waals-Cahn-Hilliard theory*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **10** (2000), no. 1, 49–84.

[IMN18] Kei Irie, Fernando C. Marques, and André Neves, *Density of minimal hypersurfaces for generic metrics*, Ann. of Math. (2) **187** (2018), no. 3, 963–972.

[Ket22] Daniel Ketover, *Flipping Heegaard splittings and minimal surfaces*, arXiv e-prints (2022), arXiv:2211.03745.

[Lan85] Joel Langer, *A compactness theorem for surfaces with L_p-bounded second fundamental form*, Math. Ann. **270** (1985), no. 2, 223–234.

[LMN18] Yevgeny Liokumovich, Fernando C. Marques, and André Neves, *Weyl law for the volume spectrum*, Ann. of Math. (2) **187** (2018), no. 3, 933–961.

[Mag12] Francesco Maggi, *Sets of finite perimeter and geometric variational problems: An introduction to geometric measure theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2012.

[Maz22] Liam Mazurowski, *Prescribed mean curvature min-max theory in some non-compact manifolds*, arXiv e-prints (2022), arXiv:2204.07493.

[Mee13] William H. Meeks, III, *Constant mean curvature spheres in* Sol_3, Amer. J. Math. **135** (2013), no. 3, 763–775.

[MMPR21] William H. Meeks, III, Pablo Mira, Joaquín Pérez, and Antonio Ros, *Constant mean curvature spheres in homogeneous three-manifolds*, Invent. Math. **224** (2021), no. 1, 147–244.

[MMPR22] ———, *Constant mean curvature spheres in homogeneous three-spheres*, J. Differential Geom. **120** (2022), no. 2, 307–343.

[MN12] Fernando C. Marques and André Neves, *Rigidity of min-max minimal spheres in three-manifolds*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 14, 2725–2752.

[MN17] ———, *Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in positive Ricci curvature*, Invent. Math. **209** (2017), no. 2, 577–616.

[MNS19] Fernando C. Marques, André Neves, and Antoine Song, *Equidistribution of minimal hypersurfaces for generic metrics*, Invent. Math. **216** (2019), no. 2, 421–443.

[Mor03] Frank Morgan, *Regularity of isoperimetric hypersurfaces in Riemannian manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 12, 5041–5052.

[MSY82] William Meeks, III, Leon Simon, and Shing Tung Yau, *Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature*, Ann. of Math. (2) **116** (1982), no. 3, 621–659.

[Pit81] Jon T. Pitts, *Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds*, Mathematical Notes, vol. 27, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1981.

[Pog81] Aleksei V. Pogorelov, *On the stability of minimal surfaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **260** (1981), no. 2, 293–295.

[PX09] Frank Pacard and Xingwang Xu, *Constant mean curvature spheres in Riemannian manifolds*, Manuscripta Math. **128** (2009), no. 3, 275–295.

[RS20] Harold Rosenberg and Graham Smith, *Degree theory of immersed hypersurfaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **265** (2020), no. 1290, 1–64.

[Sil05] Luis Silvestre, *The two membranes problem*, Communications in Partial Differential Equations **30** (2005), 245 – 257.

[Sim68] James Simons, *Minimal varieties in riemannian manifolds*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 62–105.

[Sim83] Leon Simon, *Lectures on geometric measure theory*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, vol. 3, Australian National University, Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983.

[Sim93] ———, *Existence of surfaces minimizing the Willmore functional*, Communications in Analysis and Geometry **1** (1993), no. 2, 281–326.

[Smi83] Francis R. Smith, *On the existence of embedded minimal 2-spheres in the 3-sphere, endowed with an arbitrary metric*, PhD thesis, Supervisor: Leon Simon, University of Melbourne (1983).

[Son23] Antoine Song, *Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in closed manifolds*, Ann. of Math. (2) **197** (2023), no. 3, 859 – 895.

[SS81] Richard Schoen and Leon Simon, *Regularity of stable minimal hypersurfaces*, Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981), no. 6, 741–797.

[SU81] Jonathan Sacks and Karen K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of* 2*-spheres*, Ann. of Math. (2) **113** (1981), no. 1, 1–24.

[SY19] Ovidiu Savin and Hui Yu, *On the multiple membranes problem*, Journal of Functional Analysis **277** (2019), no. 6, 1581–1602.

[Ton05] Yoshihiro Tonegawa, *On stable critical points for a singular perturbation problem*, Communications in Analysis and Geometry **13** (2005), no. 2, 439–459.

[Top98] Peter Topping, *Mean curvature flow and geometric inequalities*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) **1998** (1998), no. 503, 47–61.

[TW83] Andrejs E. Treibergs and S. Walter Wei, *Embedded hyperspheres with prescribed mean curvature*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 3, 513–521.

[TW12] Yoshihiro Tonegawa and Neshan Wickramasekera, *Stable phase interfaces in the van der Waals-Cahn-Hilliard theory*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) **2012** (2012), no. 668, 191–210.

[VC74] Giorgio Vergara Caffarelli, *Variational inequalities for two surfaces of constant mean curvature*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **56** (1974), 334–347.

[Whi10] Brian White, *The maximum principle for minimal varieties of arbitrary codimension*, Comm. Anal. Geom. **18** (2010), no. 3, 421–432.

[Whi16] ———, *Introduction to minimal surface theory*, Geometric analysis (Hubert L. Bray, Greg Galloway, Rafe Mazzeo, and Natasa Sesum, eds.), IAS/Park City mathematics series, vol. 22, American Mathematical Society, Providence, RI, 2016, pp. 385–436.

[WZ23a] Zhichao Wang and Xin Zhou, *Existence of four minimal spheres in* S^3 *with a bumpy metric*, arXiv e-prints (2023), arXiv:2305.08755.

[WZ23b] ———, *Improved* $C^{1,1}$ *regularity for multiple membranes problem*, arXiv e-prints (2023), arXiv:2308.00172.

[Yau82] Shing-Tung Yau, *Problem section*, Seminar on Differential Geometry, Ann. of Math. Stud., vol. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982, pp. 669–706.

[Yau97] ———, *A remark on the existence of sphere with prescribed mean curvature*, Asian J. Math. **1** (1997), no. 2, 293–294.

[Yau01] ———, *Geometry of three manifolds and existence of black hole due to boundary effect*, Adv. Theor. Math. Phys. **5** (2001), no. 4, 755–767.

[Ye91] Rugang Ye, *Foliation by constant mean curvature spheres*, Pacific J. Math. **147** (1991), no. 2, 381–396.

[ZZ19] Xin Zhou and Jonathan J. Zhu, *Min-max theory for constant mean curvature hypersurfaces*, Invent. Math. **218** (2019), no. 2, 441–490.

[ZZ20] ———, *Existence of hypersurfaces with prescribed mean curvature I—generic min-max*, Camb. J. Math. **8** (2020), no. 2, 311–362.

Department of Mathematics, Princeton University, Princeton, NJ 08540, USA电子邮件地址: lorenzos@princeton.edu

Department of Mathematics, Princeton University, Princeton, NJ 08540, USA电子邮件地址: dstryker@princeton.edu