arXiv:2304.02778v2 [math.AG] 8 Jun 2023

任意域上曲线的自同构群

DANIEL BRAGG

Abstract. 我们证明，若 K 是任意域，且 G 是有限群，则存在一条定义在 K 上的曲线，其自同构群为 G。我们还为任意域上的函数域弱逆伽罗瓦问题给出了肯定的解答。最后，我们将任意域上函数域的逆伽罗瓦问题 K 归约到 $K(T)$ 的情形。

1. Introduction

本文的目标是证明以下结果。

定理 1.1。设 K 是一个域，且 G 是一个有限群。存在一条光滑曲线C，定义在 K 上，使得 $\mathrm{Aut}_K(C) = \mathrm{Aut}_{\overline{K}}(C_{\overline{K}}) \cong G$。此外，我们可以选择 C，使其具有任意大的亏格。

这里，曲线是指一个proper的几何整 K-概形，维数 1。该结果此前已知于 K 代数闭的特殊情形，这归功于 Madden–Valentini [10], ；以及 K 为有限的情形，这归功于 Rzedowski–Calder´on和 Villa–Salvador [13, 定理 5]。我们还证明了以下更一般的结果，它允许指定自同构群概形。

定理 1.2. 设 K 是一个域，G 是 K 上的有限 ´étale 群概形。存在一条 K 上的光滑曲线 C，使得 $\mathscr{A}ut_K(C) \cong G$。此外，我们可以选择亏格任意大的 C。

我们将以下结果作为推论，推出定理 1.1 和 1.2。

定理 1.3. 设 K 为一个域，设 X 为 K 上的一条正则曲线，并设 G 为 K 上的一个有限 ´étale 群概形。存在一条 K 上的正则曲线 C 和一个有限态射 $C \to X$，使得

$$\mathscr{A}ut_K(C/X) = \mathscr{A}ut_K(C) \cong G.$$

此外，我们可以选择 C 使其具有任意大的亏格；如果 X 是光滑的，那么我们可以选择 C 为光滑的。

在这里，$\mathscr{A}ut_K(C)$表示 C在 K上的自同构群概形，而$\mathscr{A}ut_K(C/X)$表示在 X 上的自同构的子群概形（见§1.9）。我们指出，正则曲线与光滑曲线之间的区别仅在正特征的不完美域上才有意义。尽管使用光滑曲线的构造就足够了

为了证明定理 1.1和1.2，我们在正则曲线这一稍广泛的普遍性下进行研究，以便在正特征情形下获得更全面的结果。

构造具有指定自同构群的曲线这一问题，与域论中的一些经典问题密切相关。域 L 上的弱逆伽罗瓦问题，是指对于每个有限群 G，是否都存在一个有限扩张 F/L，使得 Aut(F/L) $\cong G$。域 L 上的（强）逆伽罗瓦问题进一步要求扩张 F/L 是伽罗瓦扩张。基域 K 上的函数域，是超越次数为 1 的有限生成域扩张 L/K。对应关系 $C \mapsto k(C)$ 在 K 上的正则曲线及有限态射范畴，与常数域等于 K 且定义在 K 上的函数域范畴之间建立了范畴等价。通过此等价将定理 1.3 转换过来，我们得到以下结果；该结果尤其为任意域上的函数域的弱逆伽罗瓦问题提供了肯定的解答。

定理 1.4. 设 K 为一个域，设 L 为 K 上的一个函数域，并设 K'/K 为 L 的常数域。设 G 为一个有限群。存在亏格任意大的有限扩张 F/L，其常数域等于 K'，使得

$$\mathrm{Aut}(F/L) = \mathrm{Aut}(F/K') \cong G.$$

This 该结果此前在一些特殊情形下已为人所知，下面我们将对此进行综述。 .

备注 1.5. 我们的方法无法事先控制域扩张F/L的次数。相反，我们以有限域扩张 L'/L为输入，其自同构群包含 G，并将其进一步扩张 F/L'得到 F。虽然我们可以控制扩张 F/L'的次数，但对于 L'/L的次数，我们没有特别的结论。

我们回顾函数域背景下这类构造问题的一个变体。如果 K 在 L中代数闭，则扩张 L/K 称为正则。对于域 K，正则弱逆伽罗瓦问题是：对于每个有限群 G，寻找一个有限扩张 $F/K(T)$，使得 F 在 K 上正则，并且 Aut($F/K(T)$) $\cong G$。正则逆伽罗瓦问题还要求 $F/K(T)$是伽罗瓦扩张。应用定理1.4与 $L = K(T)$，我们得到任意域 K 上的正则弱逆伽罗瓦问题的肯定解。

定理 1.3 的证明策略是，首先选取一条正则曲线 D，其上带有一个自由的 G–作用以及一个有限的 G–不变态射 $D \to X$。曲线 D 是通过 Bertini 论证得到的，它是 X 上射影空间中的一个 G– 等变完全交。由于 D 上的 G– 作用是忠实的，因此有包含映射 $G \subset \mathrm{Aut}_K(D)$。构造的第二步是对这条曲线 D 进行细化，以消除可能多出的自同构。我们证明存在一个 G–不变有限态射 $D \to \mathbf{P}^1$，使得子群概形 $\mathrm{Aut}_K(D/\mathbf{P}^1) \subset \mathrm{Aut}_K(D)$ 等于 G。接着，我们选取一列精心构造的曲线纤维积，得到一条正则曲线 C，其上有 $G \cong \mathrm{Aut}_K(C)$，以及一个 G–等变有限态射 $C \to D$。这最后一步是构造中最复杂的部分，灵感来自 Madan–Rosen [9]、Madden–Valentini [10], 和 Stichtenoth [16] 的技巧。我们还采用了 Poonen 的构造 [11]，以在任意域上构造自同构群平凡的三次覆盖曲线。

我们还证明了一个结果，将域 K 上函数域的强逆伽罗瓦问题归约到 $K(T)$ 的情形。我们首先在几何背景下陈述这一结果。我们称域 K 上正则曲线之间的有限态射 $C \to D$ 为伽罗瓦态射，若相应的函数域扩张 $k(C)/k(D)$ 是伽罗瓦扩张。若正则曲线之间的有限态射 $C \to D$ 在基变换至 K 的可分闭包后为伽罗瓦态射，则称其为几何伽罗瓦态射。几何伽罗瓦态射 $C \to D$ 的伽罗瓦群概形是群概形 $\mathrm{Aut}_K(C/D)$。

定理 1.6. 设 K 是一个无限域，G 是 K 上的有限 ´étale 群概形，并假设存在一条正则曲线 C 以及一个几何伽罗瓦态射 $f\colon C \to \mathbf{P}^1$，其伽罗瓦群概形为 G。若 Y 是 K 上的一条正则曲线，则存在一条 K 上的正则曲线 E，以及一个伽罗瓦群概形为 G 的几何伽罗瓦态射 $E \to Y$。此外，若 C 和 Y 光滑，则可以取 E 为光滑曲线。

用函数域的术语重新表述，我们得到以下结果；特别是，该结果将域 K 上所有函数域 L 的强逆伽罗瓦问题归约为 $L = K(T)$ 的情形。

定理 1.7. 设 K 是任意域，G 是有限群，并假设存在一个正则伽罗瓦扩张 $M/K(T)$，其伽罗瓦群为 G。若 L 是 K 上的正则函数域，则存在伽罗瓦群为 G 的正则伽罗瓦扩张 F/L，其亏格可以任意大。

我们的贡献在于处理无限域的情形；对于有限基域，该结果归功于 Rzedowski–Calder´ón 和 Villa–Salvador [13]，以及 ´Alvarez–Garc´ía 和 Villa– Salvador [2]。我们认为，在有限域上，定理 1.6 的更强表述（允许指定自同构群概形，而不仅仅是自同构群）很可能可以由 loc. cit. 中的方法推出，但我们尚未对此进行验证。´Alvarez–Garc´ía 和 Villa–Salvador [1] 还在无限基域情形下，沿着定理 1.7 的方向取得了一些部分结果。

我们简要回顾不同域上的弱逆伽罗瓦问题，以及构造具有给定自同构群的曲线这一相关问题的部分历史。关于 Q 上的弱逆伽罗瓦问题，Wulf–Dieter[5], E. Fried和Koll´ar [3], 以及 M. Fried [4]的工作已经解决了该问题。Greenberg [6] 在 K 为底域的函数域情形下，当 $K = \mathbf{C}$ 时，以肯定的结论解决了弱逆伽罗瓦问题。Madden–Valentini [10], 将其推广到 K 为代数闭域的情形，Rzedowski–Calder´on和 Villa–Salvador [13, 定理 5]则将其推广到 K 为有限域的情形。据我们所知，除上述情形外，K上的函数域的弱逆伽罗瓦问题，以及 K 的正则弱逆伽罗瓦问题和定理1.1，此前均属未知。我们指出，事实上 Greenberg [6] 解决了C 上函数域的强逆伽罗瓦问题。Stichtenoth [16, Satz 1,Satz 4]在附加假设 L 的亏格为 ≥ 2的情况下，将其推广到了代数闭域 K 上的函数域 L，而 Madan–Rosen [9]证明了一般情形。另一方面，

Poonen [11] 给出了一个在任意域上构造曲线的显式方法，使其完整自同构群为平凡群。这是定理 1.1 在$G = 1$ 时的特殊情形（但不包含 C 可取任意大亏格的结论）。Poonen 的结果是我们构造中的关键依据。

1.8. 本文结构。第 2 节汇集了关于曲线的自同构群在某些有限态射和纤维积下的行为的一些结果。第 3 节构造了允许任意给定的有限 ´étale 群概形自由作用的曲线，并证明任意曲线都允许具有指定自同构群的铅笔。最后，在第 4 节中，我们给出第 1 节所述结果的证明。

1.9.记号。对于域 K 上的曲线，我们指的是一个维数1的正规几何整 K-方案。域 K 上的曲线，如果其在任意点处的局部环都是正则局部环，则称其为正则的。C 上的曲线 K 如果态射 $C \to \operatorname{Spec} K$ 是光滑的，则称其为光滑的。在任意域上，光滑曲线都是正则的。如果 K 是完美域，则反之亦然，但一般情况下可能不成立。然而，如果 C 是域 K上的正则曲线，我们总能在 K 的某个扩域上得到 C 的光滑模型。事实上，如果$\overline{K}$ 是$\sim K$的代数闭包，那么 $\overline{K}$ 是完美的，因此$C_{\overline{K}}$ 的基变换 $C_{\overline{K}} = C \otimes_K \overline{K}$ 的正规化是 $\overline{K}$上的光滑曲线。我们还要指出，如果 C 是 K 上的正则曲线，并且 L/K 是一个可分域扩张，那么基变换 C_L 仍然是正则的。

如果 C 是域 K上的正则曲线，那么我们用 g_C 表示光滑模型 $C_{\overline{K}}$ 的亏格（算术或 ˜ 几何）。

如果对应的函数域扩张 $k(C)/k(D)$ 是伽罗瓦扩张，则域 K 上正则曲线之间的有限态射 $f\colon C \to D$ 是伽罗瓦的。$C \to D$ 的伽罗瓦闭包是从域 K 上正则曲线 C' 出发的有限态射 $C' \to C$，使得复合映射 $C' \to C \to D$ 是伽罗瓦的。$C' \to C$ 的极小伽罗瓦闭包是满足 $C' \to C$ 的次数最小的伽罗瓦闭包。

有限态射 $f\colon C \to D$ 从 K 上的曲线出发，其分歧轨迹是 C 中 f 不光滑处的点轨迹。f 的分歧轨迹是分歧轨迹在 D 中的像。

如果 $\pi : X \to S$ 是概形的态射，我们将满足 $\pi \circ \alpha = \pi$ 的 X 的自同构群记作 $\mathrm{Aut}_S(X)$。若上下文已明确基底 S，我们也可将 $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Aut}_S(X)$。给定态射 $f\colon X \to Y$，我们将 $\mathrm{Aut}_S(X/Y)$ 记作 $\mathrm{Aut}_S(X)$ 的子群，该子群由满足 $\pi \circ \alpha = \pi$ 和 $f \circ \alpha = f$ 的 X 的自同构 α 组成。

若 X 是一个射影 K–概形，则记 A $ut_K(X)$ 为 X的 K–自同构群概形。它表示如下函子：在 K–概形范畴上，将一个 K–概形 T 关联到群 $\mathrm{Aut}_T(X_T)$。给定一个射影 K–概形之间的态射 $f\colon X \to Y$，记 A $ut_K(X/Y) \subset$A $ut_K(X)$ 为 X 在 Y上的 K–自同构子群概形。它表示如下函子：在 K–概形范畴上，将一个 K–概形 T关联到子群 $\mathrm{Aut}_T(X_T/Y_T) \subset \mathrm{Aut}_T(X_T)$。

1.10. 致谢。作者感谢 Bjorn Poonen 提供有益的通信交流。本研究得到了美国国家科学基金会资助项目 #1840190 的支持。

2. Automorphism groups and finite morphisms of curves

在本节中，我们将确定一些条件，在这些条件下，曲线的自同构可沿有限态射下降。令 K 为一个域。沿用 Madden–Valentini [10], ，我们考虑 K 上曲线的有限态射所满足的以下条件。

定义 2.1. 正则曲线之间的有限态射 $f: C \to D$ 满足条件 $(*)$，如果对于任意在 K 上的正则曲线 V 及分解 $C \to V \to D$ of$f$，只要 $V \to D$ 不是同构，就有

$$g_V \geq \deg(V/D)^2 + 2(g_D - 1)\deg(V/D) + 2$$

其中 g_D 是 D 的亏格， g_V 是 V 的亏格。

在说明这一条件的一些推论之前，我们先记录以下结果，称为 Castelnuovo–Severi 不等式。该结果有时只针对光滑曲线陈述，但事实上，按照我们的约定，它同样适用于正则曲线。

定理 2.2（Castelnuovo–Severi）。设 $f_1: C \to D_1$ 和 $f_2: C \to D_2$ 是 K 上次数分别为 d_1 和 d_2 的正则曲线之间的有限态射。若诱导态射 $f_1 \times f_2: C \to D_1 \times D_2$ 是到其像上的双有理态射，则有

$$g_C \leq (d_1 - 1)(d_2 - 1) + d_1 g_{D_1} + d_2 g_{D_2}.$$

证明。当 C、 D_1和 D_2 在 K 上光滑时，这由 Kani [7, 命题（第 26] 页）说明。将曲线和有限态射提升到代数闭包上的正规化后，曲线的亏格和有限态射的次数均保持不变，因此正则情形可由光滑情形推出。另请参阅 Stichtenoth [15, 定理 1] ，其中给出了使用函数域语言的初等证明。

□

我们应用 Castelnuovo–Severi 不等式，推导出条件 $(*)$ 的以下推论（参见 Madden–Valentini [10,Lemma 1]）。

命题 2.3.设 $f: C \to D$ 是一个满足条件（$*$）的、定义在 K 上的正则曲线之间的有限态射。如果 $\alpha \in \mathrm{Aut}_K(C)$是一个自同构，那么存在唯一的自同构 $\beta \in \mathrm{Aut}_K(D)$，使得下图

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow[\sim]{\alpha} & C \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ D & \xrightarrow[\sim]{\beta} & D \end{array}$$

交换。

证明。令 V 为映射 $f \times (f \circ \alpha)$ 的像的正规化。对于 $i = 1$， 2 令 $\pi_i: D \times D \to D$ 表示到第 i 个因子的投影。考虑该图表。

$$\begin{array}{ccccc} C & \longrightarrow & V & \longrightarrow & D \times D \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle p_i} & \swarrow{\scriptstyle \pi_i} & \\ & & D. & & \end{array}$$

将 Castelnuovo–Severi 不等式应用于映射 $p_i : V \to D$，我们得到

$$g_V \leq (\deg(V/D) - 1)^2 + 2\deg(V/D)g_D.$$

但这违反了应用于 f 的分解 $C \to V \xrightarrow{p_1} D$ 的条件 $(*)$ 中的不等式。因此，p_1 是同构。由此可得，$V \to D \times D$ 是闭浸入，而 V 是所需自同构 β 的图，其中该自同构作用于 D。□

推论 2.4. 如果 $f : C \to D$ 是满足 $(*)$ 的 K 上正则曲线之间的有限态射，则存在一个自然的正合列

$$1 \to \mathrm{Aut}_K(C/D) \to \mathrm{Aut}_K(C) \to \mathrm{Aut}_K(D).$$

证明。我们将右侧映射定义为：把自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}_K(C)$ 映到命题 2.3 中得到的自同构 β。显然，该映射的核为子群 $\mathrm{Aut}_K(C/D)$。□

下述结果表明，在某些温和假设下，推论 2.4 的正合列可扩展为群概形的正合列。

推论 2.5. 设 $f : C \to D$ 是 K 上满足 $(*)$ 的正则曲线之间的有限态射。假设 $\mathrm{Aut}_K(C)$ 是光滑的，或者 D 是光滑的且 $g_D \geq 2$。存在一个自然的正合列

$$1 \to \mathscr{A}ut_K(C/D) \to \mathscr{A}ut_K(C) \to \mathscr{A}ut_K(D)$$

的 K-群概形。

证明。我们将把推论 2.4中产生的映射 $\mathrm{Aut}_K(C) \to \mathrm{Aut}_K(D)$ 延拓为一个群概形的映射。令 $\mathrm{Hom}_K^o(C, D)$ 为参数化有限态-射 $C \to D$的 Hom概形，并考虑由与 f 预复合给出的概形的闭浸入 $\mathrm{Aut}_K(D) \subset \mathrm{Hom}_K^o(C, D)$。我们断言，由与 f 后复合给出的映射 $\mathrm{Aut}_K(C) \to \mathrm{Hom}_K^o(C, D)$经由闭子概形 $\mathrm{Aut}_K(D)$ 因子化。为验证这一点，不妨假设 K 是可分闭的。如果 $\mathrm{Aut}_K(C)$是几何约化的，那么只需在 K–点层面验证这一点，而这由命题 2.3 得出。如果 D 是光滑的且 $g_D \geq 2$，那么 $\mathrm{Hom}_K^o(C, D)$和 $\mathrm{Aut}_K(D)$在 K上是 ´étale的，我们得到同样的结论。因此，在这两种情形下，我们都得到所需的映射 $\mathrm{Aut}_K(C) \to \mathrm{Aut}_K(D)$。由构造可知，该映射的核是子群 $\mathrm{Aut}_K(C/D) \subset \mathrm{Aut}_K(C)$。□

注记 2.6. 推论 2.5 中关于 $\mathrm{Aut}_K(C)$ 为光滑的假设，在 K 的特征为 0 或 C 在 K 上光滑时自动成立。

接下来我们考察曲线的有限态射的纤维积。下面给出一个引理。

引理 2.7. 设 $f : C \to D$ 和 $g : E \to D$ 是定义在 K 上的正则曲线之间的有限可分态射，并令 $F := C \times_D E$。

(1) F 是几何约化的，当且仅当 f和 g 的分歧轨迹互不相交（作为 D的子概形）时，它是正则的。

(2) 如果 F 是正则的，那么 F 是几何整的（因而是正则曲线）当且仅当它是几何连通的。(3) 如果 C、D 和 E 是光滑的，那么 F 是光滑的当且仅当它是正则的。

证明。将 F 视为 $C \times E$的闭子概形， F 的奇异轨迹是 F 与 f 的分歧轨迹和g的分歧轨迹之乘积的交。因此， F 是正则的，当且仅当该交为空，这等价于 f 和 g 的分歧轨迹不相交。令$\overline{K}$ 为 K的代数闭包。根据假设， C、D和 E 是几何整的，因而在K上一般光滑。此外， f 和 g 是可分的，因而一般为étale。将上述对奇异轨迹的描述作$\overline{K}$上的基变换后，我们看到$F_{\overline{K}}$ 一般光滑，因而一般约化。由于 $F_{\overline{K}} \to C_{\overline{K}}$是平坦的，我们得出 $F_{\overline{K}}$是约化的。因此， F 是几何约化的，从而完成了对(1)的验证。

假设 F 是正则的且几何连通。那么 F 是整的。将 F作基变换到 K 的可分闭包后仍然正则且连通，因此也是整的。但是，在可分闭域上的整且几何约化概形自动是几何整的，所以 F是几何整的，从而证明了 (2)。

最后我们证明（3）。如果 F是正则的，那么根据（1）， f 和 g 的分歧轨迹不相交。经过对$\overline{K}$ 作基变换后，这个条件仍然成立。此外，由于 C、D和 E是光滑的，它们在经过对 $\overline{K}$ 作基变换后仍然是正则的。因此，$F_{\overline{K}}$ 是正则的，所以 F 是光滑的。□

设 C、 D、 E 和 F 是 K 上的正则曲线。考虑一个交换图

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f'} & E \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C & \xrightarrow{f} & D \end{array} \tag{2.7.1}$$

在 K 上，其中 f、g、f' 和 g' 是有限可分态射。我们考虑以下条件。

定义 2.8. 如果图式 (2.7.1) 满足条件 $(**')$，则称其满足条件 $(**')$，当且仅当：(1) 它是笛卡尔的；(2) 存在 $C \to D$ 的极小伽罗瓦闭包 $C' \to C$，使得纤维积 $C' \times_D E$ 是连通的。

我们称 (2.7.1) 满足条件 $(**)$，如果其到 K 的可分闭包的基变换满足条件 $(**')$。

下面的两个结果给出了条件 $(**)$ 的一些推论。

命题 2.9. 如果方形 (2.7.1) 满足条件 $(**)$，那么沿 g 拉回诱导出一个同构

$$\mathscr{A}ut_K(C/D) \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}ut_K(F/E).$$

证明。为验证拉回映射是同构，我们可以假设 K 是可分闭的，此时只需证明映射 Aut(C/D) $\to$

Aut(F/E) 是一个双射。设 $C' \to C$ 为 $C \to D$的极小伽罗瓦闭包。令$F' = C' \times_C F$, 并考虑该图表。

$$\begin{array}{ccccc} F' & \longrightarrow & F & \xrightarrow{f'} & E \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C' & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D \end{array}$$

其具有笛卡尔方块。我们断言 F' 是一条正则曲线。由于 F 是正则的，引理2.7 (1) 表明， f 和 g 的分歧轨迹不相交。态射 $C' \to C$ 在 $C \to D$的分歧轨迹上是非分歧的，因此$C' \to D$ 和 $E \to D$ 的分歧轨迹不相交。此外，根据假设，右方块满足条件(∗∗)，所以 F'是连通的。由于 K是可分闭的，因此 F'是几何连通的。由引理 2.7 可知， F' 是一条正则曲线。

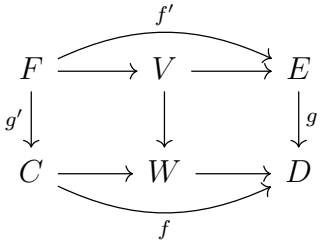
考虑拉回映射 Aut(C'/D) $\to$ Aut(F'/E)。由于 g 是忠实平坦的，该映射是单射。态射 $C' \to D$ 是伽罗瓦的，因此我们有

$$\deg(C'/D) = |\operatorname{Aut}(C'/D)| \leq |\operatorname{Aut}(F'/E)| \leq \deg(F'/E).$$

另一方面，外侧矩形是笛卡尔的，因此我们有 deg(C'/D) $=$deg(F'/E)，故这些不等式全都是等式。由此可知，拉回映射 Aut(C'/D) $\to$Aut(F'/E) 是同构，且 $F' \to E$是伽罗瓦的。类似地，拉回映射 Aut(C'/C) $\to$Aut(F'/F) 是同构。

根据伽罗瓦理论中的一个标准结果，我们可以用伽罗瓦群 Aut(C'/D) 及其子群 Aut(C'/C)来描述群Aut(C/D)：也就是说，Aut(C/D) 与商群 $N_{\mathrm{Aut}(C'/D)}$(Aut(C'/C))/ Aut(C'/C)存在典范同一。对于群Aut(F'/E)，我们也有类似的描述。我们已经证明，拉回映射Aut(C'/D) $\to$ Aut(F'/E) 是一个同构，并且其限制为 Aut(C'/C) $\to$Aut(F'/F) 时仍是一个同构。因此，沿着 g的拉回在Aut(C/D) 与 Aut(F/E) 之间诱导出一个同构。
□

引理 2.10. 假设方形 (2.7.1) 满足条件 (∗∗)。设给定一个 K 上的正则曲线 V，以及 f' 的一个分解 $F \to V \to E$。存在一个 K 上的正则曲线 W，以及一个交换图



其中两个方图均为笛卡尔图。

证明。这样的图在唯一同构意义下是唯一的，因此根据伽罗瓦下降，我们可以假设 K 是可分闭的。令 $C' \to C$ 为$C \to D$的极小伽罗瓦闭包，并设 $F' = C' \times_D E$。与命题 2.9 的证明一样， F'也是一个正则

曲线上方的曲线，且 $F' \to E$ 是伽罗瓦的。在伽罗瓦对应下，给定的曲线V对应于子群 $\Gamma_V := \mathrm{Aut}(F'/V) \subset \mathrm{Aut}(F'/D)$。由命题 2.9，$\Gamma_V$ 是 $\mathrm{Aut}(C'/D)$ 的某个子群（记作 Γ_W）的拉回。设 $W = C'/\Gamma_W$。我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccccc} F' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & V & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & W & \longrightarrow & D. \end{array}$$

根据伽罗瓦对应，$C' \to W$ 和 $F' \to V$ 的次数相等。这意味着这些方块都是笛卡尔的，从而完成证明。□

Th以下结果给出了一些使条件（$**$）成立的情形。

引理 2.11。设 $f\colon\ C \to D$ 和 $g\colon\ E \to D$ 为正则曲线之间的有限可分态射。假设 f 和 g 的分歧轨迹不相交，并且以下条件中至少有一个成立。

（1）存在 D 的一个闭点，在 g下全分歧。
（2） g 的次数为素数，且 $\deg(C/D) < \deg(E/D)$。

纤维积 $F := C \times_D E$ 是正则且几何整的，由此得到的方形(2.7.1)满足条件$(**)$。此外，如果 C、D 和 E 是光滑的，那么 F是光滑的。

证明。根据引理2.7，关于分歧的假设意味着 F 是正则的，并且当 C、D 和 E 光滑时，F 也是光滑的。为验证其余断言，我们可以假设 K 是可分闭的。令 $C' \to C$ 为 $C \to D$ 的极小伽罗瓦闭包，并设 $F' := C' \times_D E$。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} F' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C' & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D \end{array}$$

具有笛卡尔方块。我们将证明，如果给定的两个条件之一成立，那么 F' 是连通的。这将推出 F 连通，因而根据引理 2.7，它是一条正则几何整曲线，并且方块 (2.7.1) 满足条件 $(**)$。

假设条件 (1)成立。这意味着 C' 存在一个闭点，其在 F' 中的原像由单个闭点组成，因此 F' 是连通的。假设条件 (2)成立。我们有 $\deg(C'/D) \leq \deg(C/D)$!，所以$C' \to D$ 和 $E \to D$ 的次数互素，因此 F' 是连通的。□

最后，我们考虑曲线的有限态射所满足的以下条件。

定义 2.12. 设 λ 为整数。K 上正则曲线的有限态射 $f\colon\ C \to D$ 是 λ-不可压缩的，如果对于 K 上的每一个正则曲线 V 以及 f 的分解$C \to V \to D$ 使得 $V \to D$ 不是同构，我们有 $g_V \geq \lambda$。

遵循 Stichtenoth [16,引理 2], , 我们证明通过取合适的纤维积，正则曲线上的任何铅笔都可以细化为对任意大的 λ 是 λ–不可压缩的铅笔。

命题2.13。设 C 是 K 上的一条正则曲线，并设 $f : C \to \mathbf{P}^1$ 是一个有限可分态射。如果 K 是有限的，则进一步假设 f 在 $\mathbf{P}^1$的至少两个 K-点上是非分歧的。对于任意 $\lambda \in \mathbf{Z}$，存在一个有限可分态射$\varphi : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ ，使得纤维积 $D := C \times_{\mathbf{P}^1,\varphi} \mathbf{P}^1$ 是正则且几何整的，所得到的交换方形

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f'} & \mathbf{P}^1 \\ {\scriptstyle \varphi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ C & \xrightarrow{f} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

满足条件(∗∗)，且态射 $f' : D \to \mathbf{P}^1$ 是 λ-不可压缩。

证明。对于整数 $m \geq 1$，我们考虑态射

$$\varphi_m : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$$

由 $[x : y] \mapsto [x^m : y^m]$ 给出。令 m 为一个正整数，使得 $m \geq \lambda + 1$，且与 K 的指数特征互素；令 φ 为 φ_m 与 $\mathbf{P}^1$ 的一个适当自同构的复合，使得 φ 和 f 的分歧轨迹不相交。我们断言， φ 具有所需的性质。由引理 2.11 可知， D 正则且几何整，并且该方块满足条件 (∗∗)。尚需验证 f' 是 λ-不可压缩的。设有一条正则曲线 V，以及 $D \to V \to \mathbf{P}^1$ 对 f' 的一个分解，使得 $V \to \mathbf{P}^1$ 不是同构。我们将证明 $g_V \geq \lambda$。为验证这一点，我们可以将底域扩张至 K 的代数闭包，并取光滑模型，从而假设 C、 D 和 V 光滑，且 K 代数闭。令 $C \to W \to \mathbf{P}^1$ 为引理 2.10 中构造的 f 的分解，于是有如下交换图。

$$\begin{array}{ccccc} D & \longrightarrow & V & \longrightarrow & \mathbf{P}^1 \\ \downarrow & & {\scriptstyle \psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ C & \longrightarrow & W & \longrightarrow & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

具有笛卡尔方块的光滑曲线。我们将利用黎曼–胡尔维茨公式来界定 ψ的亏格 V :

$$2g_V - 2 = m(2g_W - 2) + \sum_{P \in V} (e_P - 1).$$

这里， e_P是 ψ 在 P处的分歧指数。态射 φ 在两个点处分全歧，记作 Q_0、 Q_1。我们假设态射 f 和 φ 的分歧轨迹不相交，因此 $W \to \mathbf{P}^1$ 在 Q_0 和 Q_1上非分歧。由于 $W \to \mathbf{P}^1$ 不是同构， W 上至少有四个不同的点分别位于 Q_0 或 Q_1之上。此外， ψ 是

在这些点中的每一个点上都全分歧，分歧指数为 m。我们得到

$$\begin{aligned} g_V &= mg_W - (m-1) + \frac{1}{2}\sum_{P\in V}(e_P - 1) \\ &\geq mg_W - (m-1) + \frac{1}{2}(4(m-1)) \\ &\geq m-1 \end{aligned}$$

其中最后一步用了平凡的界 $g_W \geq 0$。我们假设 $m \geq \lambda + 1$，因而得出 $g_V \geq \lambda$。□

Th以下引理给出了 λ–不可压缩条件的一个推论。

引理2.14. 设 $f\colon C \to D$ 和 $g\colon E \to D$ 是正则曲线之间的有限可分态射。假设 f 和 g 的分歧轨迹不相交，且将 f 基变换至 K 的可分闭包后，所得态射是伽罗瓦的，并且对于某个整数 $\lambda > g_E$是 λ–不可压缩的。纤维积 $F := C \times_D E$ 是正则且几何整的，并且所得方块 (2.7.1) 满足条件 $(**)$。

证明。只需假设 K 是可分闭的，并证明 F 是连通的。事实上，由引理 2.7可知，届时 F 将是正则且几何整的；又由于恒等态射 $C \to C$ 在同构意义下是 $C \to D$的唯一极小伽罗瓦闭包，这就表明方块 (2.7.1) 满足条件 $(**)$。

考虑单射

$$g^* : \mathrm{Aut}(C/D) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(F/E)$$

由沿 g 拉回给出。设 $W \subset F$ 是一个连通分支，并令 $\Gamma \subset$Aut(C/D) 为由满足 $g^*\alpha$ 将 W 映到自身的自同构 α 构成的子群。通过单射 g^*，我们也将 Γ 视为 Aut(F/E) 的子群。我们得到如下图表

$$\begin{array}{ccccc} W & \longrightarrow & W/\Gamma & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow g \\ C & \longrightarrow & C/\Gamma & \longrightarrow & D. \end{array}$$

我们断言映射 $W/\Gamma \to E$ 是一个同构。为此，考虑两个点 P、$Q \in W$，它们映到 E 中的同一点。f 的自同构群在各纤维上是传递的，因此存在一个自同构 $\alpha \in$ Aut(C/D)，使得 $g^*\alpha$ 将 P 映到 Q。由此可知，$g^*\alpha$ 保持 W 不变，因此有 $\alpha \in \Gamma$。我们得出结论：P 和 Q 在商 W/Γ 中相等，因此 $W/\Gamma \cong E$。

从上面的图中可以看出，存在有限态射 $E \cong W/\Gamma \to C/\Gamma$，因此我们有 $g_E \geq g_{C/\Gamma}$。根据假设，f 对于某个整数 $\lambda > g_E$ 是 λ不可压缩的。因此，映射 $C/\Gamma \to D$ 必定是同构。由此可得 $\Gamma =$ Aut(C/D)，因此 $|\mathrm{Aut}(W/E)| \geq |\Gamma| = |$ Aut(C/D)|。另一方面，由于f 是伽罗瓦的，我们有

$$|\mathrm{Aut}(W/E)| \leq \deg(W/E) \leq \deg(C/D) = |\mathrm{Aut}(C/D)|.$$

由此可得 $\deg(W/E) = \deg(C/D)$。因此 $W = F$，所以 F 是连通的。 □

最后，我们记录以下观察结果，以备后用。

引理 2.15. 假设 $f : C \to D$ 是一个次数为素数的有限可分态射，并且在 D 的某个闭点上，存在两个点，使得 f 在这两点处分歧次数不同。若 $C' \to C$ 是一个非分歧的几何伽罗瓦态射，则自然映射 $\mathrm{A}\ ut_K(C'/C) \to \mathrm{A}\ ut_K(C'/D)$ 是一个同构。

证明。为验证这一点，我们可以假设 K 是可分闭的，且 $C' \to C$是一个非分歧伽罗瓦态射。在这种情况下，只需证明映射 $\mathrm{Aut}(C'/C) \to \mathrm{Aut}(C'/D)$ 是一个同构。为此，我们首先注意到，满足给定分歧条件的映射不可能是伽罗瓦态射，因为伽罗瓦态射的相对自同构群在各纤维上具有传递作用。因此，$C \to D$不是伽罗瓦态射；又由于我们假设 $C' \to C$ 是非分歧的，$C' \to D$也不是伽罗瓦态射。令 $V = C'/\mathrm{Aut}(C'/D)$。于是 $C' \to D$ 分解为 $C' \to C \to V \to D$。我们假设 $C \to D$ 的次数为素数，因此 $C = V$ 或 $V = D$。但 $C' \to D$ 不是伽罗瓦态射，所以不可能有 $V = D$。因此 $C = V$，从而 $\mathrm{Aut}(C'/C) = \mathrm{Aut}(C'/D)$。□

3. Group actions on curves

在本节中，我们将证明一些关于存在配备某些群作用的曲线以及曲线上的铅笔的结果。设 K 为一个域。第一个结果表明，存在定义在 K 上的曲线，其自同构群足够大，可以包含任意有限群。

定理 3.1。设 X 是 K 上的正则曲线。设 G 是 K上的有限 ´étale 群概形。存在一个 K 上的正则曲线 C，其配备有自由的 G作用以及一个有限可分态射 $C \to X$，且该态射是 G–不变的。此外，如果 X 是光滑的，那么我们可以取 C 为光滑的。

证明。设 V 是一个配备忠实 G–作用的有限维 K–向量空间。令 $Z \subset \mathbf{P}(V)$ 为几何点 $x \in \mathbf{P}(V)$ 的闭子集，使得 $g \cdot x = x$ 对某个非平凡的 $g \in G$ 成立。我们假设 Z 在 $\mathbf{P}(V)$ 中的余维至少为 2。例如，正则表示的适当大的张量幂就具有此性质。令 $\pi : \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V)/G$ 为商映射。选取一个射影嵌入$X \times (\mathbf{P}(V)/G) \subset \mathbf{P}^N$。若 $U \subset \mathbf{P}^N$ 是余维为 n 的完全交，我们记作$C_U = (\mathrm{id}_X \times \pi)^{-1}((X \times (\mathbf{P}(V)/G)) \cap U)$。$G$–作用在 $X \times \mathbf{P}(V)$ 上限制为对 C_U 的作用，并且有 $C_U/G = (X \times (\mathbf{P}(V)/G)) \cap U$。因此我们得到一个图表。

$$\begin{array}{ccccc} C_U & \xrightarrow{\pi_{C_U}} & C_U/G & \hookrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X \times \mathbf{P}(V) & \xrightarrow{\mathrm{id}_X \times \pi} & X \times (\mathbf{P}(V)/G) & \hookrightarrow & \mathbf{P}^N \end{array}$$

带有笛卡尔方块。我们将证明，对于适当的 U，$C_U \to X$ 具有所需的性质。

首先假设 K 是无限的。令 $U \subset \mathbf{P}^N$ 为余维为 n的一般线性子空间。我们假设 Z 在P(V)中至少具有2的余维，因此乘积$X \times \pi$(Z)在 $X \times$(P(V)/G)中至少具有2的余维。因此 U 不与$X \times \pi$(Z)相交，从而交集 $C_U/G = (X \times (\mathbf{P}(V)/G)) \cap U$ 包含于 $X \times (\mathbf{P}(V)/G)$的正则部分中。根据Bertini定理（例如参见 [14]）， C_U/G 是正则且几何整的，并且映射 $C_U/G \to X$ 是有限且可分的。由于 π 在 Z之外是étale的，映射 $C_U \to C_U/G$ 是 ´étale的，并且 G在 C_U 上的作用是自由的。由此可得 C_U 是正则的，且映射 $C_U \to X$ 是有限且可分的。由于 C_U 是光滑几何连通概形中充足除子的完全交，C_U 是几何连通的。结合 C_U/G 是几何整的且 $C_U \to C_U/G$ 是 ´étale这一事实，我们得出 C_U 是几何整的。最后，如果 X 是光滑的，那么根据Bertini定理，C_U/G 以及因而 C_U 也将是光滑的。当 K 是无限的时候，证明即告完成。

假设 K 是有限的。那么正则与光滑是等价的。应用 Poonen 的有限域Bertini 定理 [12,定理1.1]，我们找到一个余维为 n 的完全交$U \subset \mathbf{P}^N$ （现在次数可能很高），使得 U 不与$X \times \pi$(Z)相交，从而交集 $C_U/G = (X \times (\mathbf{P}(V)/G)) \cap U$是光滑的；并且 C_U/G与子概形 $\{P\} \times (\mathbf{P}(V)/G)$的交集是维数为 0 的光滑概形，其中 $P \in X$ 是一个固定的闭点（注意，由维数原因，这个交集必定非空）。于是映射 $C_U/G \to X$ 是有限且可分的，映射$C_U \to X$也是如此。和之前一样， C_U 是几何连通的，而商映射 $C_U \to C_U/G$是有限 ´étale的，因此 C_U 也光滑，从而几何整。□

另一方面，下面的结果表明，也存在自同构群平凡的曲线。

定理 3.2（Poonen）。存在一条 Y上的光滑曲线 K，使得 A $ut_K(Y) = 1$。此外，我们可以选择 Y，使得存在有限可分态射$Y \to \mathbf{P}^1$，它在 ∞上全分歧。

证明。Poonen [11, 定理 1] 给出了曲线的显式方程（对任意域均成立），这些曲线的自同构群概形平凡，并且存在到$\mathbf{P}^1$ 的次数为 3 的态射，该态射在 ∞上全分歧。□

设 C 是无限域 K上的一条正则曲线。我们将证明， C 存在一个铅笔，其自同构群是C的自同构群中任意给定的有限子群。给定一个除子 $Z \subset C$，我们将由那些把 Z 映到自身的自同构构成的 $\mathrm{Aut}_K(C; Z)$ 子群记为 $\mathrm{Aut}_K(C)$。设 $\mathrm{Aut}_K(C)$ 是一个有限子群。令 $D = C/G$，并令 $\pi : C \to D$ 为商映射。下面的论证受到 Maden–Rosen [9,命题 2]的启发。

命题 3.3. 设 $A \subset D$ 是一个次数为 d 的除子，在其上 π 是非分歧的，令$Z \subset D$ 是一个次数为 e的非常 ample 除子，并假设 $|G|(d - e) \geq 2g_C + 3$。对于一个一般除子 $B \in |Z|$，除子 $A + B$ 具有如下性质：子群$\mathrm{Aut}_K(C; \pi^{-1}(A + B)) \subset \mathrm{Aut}_K(C)$ 等于 G。

证明。将 C 在 K 的代数闭包上正规化后，我们可以假设 K 是代数闭的，且 C 在 K 上光滑。由黎曼 – 赫尔维茨公式可知， C 的非平凡自同构至多固定 $2g_C+2$ 个闭点。因此， C 的自同构由其在任意 $2g_C+3$ 个点上的作用决定。考虑子群 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}_K(C)$, 它由满足 $|\alpha(\pi^{-1}(A)) \cap \pi^{-1}(A)| \geq |G|(d-e)$ 的 C 的自同构 α 组成。我们假设 $|G|(d-e) \geq 2g_C+3$，所以这个集合是有限的。对于每个 $\alpha \in \Gamma$，令 $V_\alpha \subset |Z|$ 为由满足 $\alpha(\pi^{-1}(B)) \subset \pi^{-1}(A+B)$ 的那些除子 B 组成的线性子空间。我们断言，若 $\alpha \notin G$，则 V_α 是 $|Z|$ 的真子空间。事实上，若 $\alpha \notin G$，则一般除子 $B \in |Z|$ 具有如下性质：$\alpha(\pi^{-1}(B)) \neq \pi^{-1}(B)$。此外，一般的 $B \in |Z|$ 也满足以下性质： B 与除子 $\pi(\alpha^{-1}(\pi^{-1}(A)))$ 不相交，因此 $\alpha(\pi^{-1}(B)) \cap \pi^{-1}(A) = \emptyset$。

令 $V \subset |Z|$ 为 V_α 的并，其中 α 遍历 $\Gamma \backslash G$的有限多个元素。设 $B \in |Z|$ 为一个不属于 V的除子。我们断言，$\mathrm{Aut}_K(C;\ \pi^{-1}(A+B)) = G$。设 α 为 C的一个自同构，满足 $\alpha \in \mathrm{Aut}_K(C;\ \pi^{-1}(A+B))$。那么 α 保持$\pi^{-1}(A+B)$，因此 $|\alpha(\pi^{-1}(A)) \cap \pi^{-1}(A)| \geq |G|(d-e)$, 从而有 $\alpha \in \Gamma$。我们还有 $\alpha(\pi^{-1}(B)) \subset \pi^{-1}(A+B)$，故 $B \in V_\alpha$。根据我们对 B的选择，可得$\alpha \in G$。□

我们继续假设 C 是定义在无限域 K 上的正则曲线。设 G 是定义在 K 上的有限 ´ 平坦群概形，并假设 G 忠实地作用于 C，或等价地，给定一个包含映射 $G \subset \mathrm{A}\ ut_K(C)$。与前面一样，我们令 $D = C/G$，并令 $\pi\colon C \to D$ 表示商映射。

定理3.4。存在一个有限可分态射 $f\colon C \to \mathbf{P}^1$ 使得 $G = \mathrm{A}\ ut_K(C/\mathbf{P}^1)$ 作为 $\mathrm{A}\ ut_K(C)$ 的子群。

证明。固定一个次数为 d 的除子 $A \subset D$，在其上 π 是非分歧的，并取一个次数为 e 的非常ample除子 $Z \subset D$，使得 $|G|(d-e) \geq 2g_C+3$。令 K^s 为K的可分闭包。根据命题3.3，对于一般除子 $B_{K^s} \in |Z_{K^s}|$，除子 $A_{K^s}+B_{K^s}$ 具有如下性质：包含映射 $G(K^s) \subset \mathrm{Aut}_{K^s}(C_{K^s}; \pi^{-1}(A_{K^s}+B_{K^s}))$是一个同构。由于 K 是无限的，我们可以找到一个除子 $B \in |Z|$，使其到 K^s 的基变换具有这一性质。考虑 $|Z|$ 中包含 B的一条铅笔，并令 $D \to \mathbf{P}^1$ 为所得的有限态射。那么复合映射 $C \to D \to \mathbf{P}^1$ 具有如下性质：包含映射 $G \subset \mathrm{A}\, ut_K(C/\mathbf{P}^1)$ 在 K^s-点上诱导一个双射，因此是一个同构。□

为处理有限域的情形，我们将使用以下引理，它给出了具有某些特殊性质的铅笔的存在性。

引理 3.5. 设 C 是有限域 K上的一条光滑曲线。对于任意整数 N，存在一个有限可分态射 $f\colon C \to \mathbf{P}^1$，使得
(1) f 的次数是一个素数 $\geq N$；(2) f 仅在 ∞上分歧；(3) 存在 C 上的两个闭点，使得 f 在这两点处分歧次数不同。

证明。根据 Lang 定理， C存在一个次数为 1 的可逆层，记为 L。根据 Kedlaya 的一个结果 $[8, \text{定理 } 1]$,，存在一个正整数 d 以及截面 $s_0, s_1 \in \mathrm{H}^0(C, \mathrm{L}^{\ d})$

它们没有公共零点，从而所得态射 $g : C \to \mathbf{P}^1$ 是有限且可分的，并且仅在$\mathbf{P}^1$, 的一个 K–点处分歧；我们可以设该点既不等于 0，也不等于 ∞。受Kedlaya方法的启发，接下来我们将修改 g ，以确保所需的性质成立。令 $B \subset C$ 为 g的分支除子，令$Z_0 = V(s_1)$ $\subset C$ 为 g的零除子，令 $Z_\infty = V(s_0)$ 为 g的极除子，并固定不同的闭点 $P, Q \in C$，它们不包含于 $B + Z_0 + Z_\infty$ 中。根据黎曼–罗赫定理，对于所有充分大的整数 e，我们可以找到截面 $t_0, t_1 \in \mathrm{H}^0(C, \mathrm{L}^e)$，它们没有公共零点，使得 t_0 在 $B + P + Q$ 的每个点上都消失，而在 Z_∞ 的任何点上都不消失，并且 t_0 在 P和 Q 处的消失阶不同。根据等差数列中素数的狄利克雷定理，我们还可以进一步假设 $d + pe$ 是素数且是 $\geq N$。考虑由 $u_0 = s_0 t_0^p$ 和 $u_1 = s_1 t_0^p + s_0 t_1^p$ 定义的截面 $u_0, u_1 \in \mathrm{H}^0(C, \mathrm{L}^{d+pe})$。由于 t_0 和 t_1 没有公共零点，且 t_0 在 $Z_\infty = V(s_0)$的任何点上都不消失，截面 u_0 和 u_1 没有公共零点，因此定义了一个有限态射 $f : C \to \mathbf{P}^1$。我们断言 f 具有所需的性质。

f 的次数为 $d+pe$，它是素数且为 $\geq N$，因此（1）成立。为验证（2），设 $R \in C$ 是 f 发生分歧的一个点。反设u_0 在 R处不为零。于是微分 $d(u_1/u_0)$在 R处有定义，且在 R处也为零。注意到 $u_1/u_0 = s_1/s_0 + (t_1/t_0)^p$，因此 $d(u_1/u_0) = d(s_1/s_0)$。于是$d(s_1/s_0)$在 R处为零，从而 $R \in B$。但根据假设， t_0 ，因此 u_0 在 B的每一点都为零，这就导致矛盾。我们得出结论： u_0 在 R处为零，因此 $f(R) = \infty$。剩下只需证明（3）成立。我们知道， t_0^p 在 P和 Q 处的消失阶数不同。由于 t_0 在 $Z_\infty = V(s_0)$的任何一点都不为零，因此 s_0 在 P 和 Q处都不为零。因此， u_0 在 P和 Q处的消失阶数不同，所以 P 和 Q在 f 下以不同的阶数发生分歧。□

4. Proofs of results

本节给出 §1中所述结果的证明。我们首先证明定理1.3。该结果立即推出定理 1.1 和定理1.2。定理1.4 是将定理 1.3 转译到函数域背景下的表述，因此也将随之得到。

设 K 是一个域，设 X 是 K上的一条正则曲线，并设 G 是 K上的一个有限 ´étale群概形。利用定理3.1，我们可以找到一条 K 上的正则曲线 C，其带有一个自由的 G–作用，以及一个有限可分态射 $\pi : C \to X$，该态射是 G–不变的。下面的结果表明， C 可以细化为一条定义在 X 上的曲线，其自同构群恰好是 G，特别地，这立即推出定理 1.3。

定理 4.1. 存在一条正则曲线 E over K ，其带有一个自由的 G–作用，以及一个有限的 G–等变态射 $E \to C$ ，使得

$$G \cong \mathscr{A}ut_K(E/X) = \mathscr{A}ut_K(E).$$

此外，我们可以选择 E 使其具有任意大的亏格，并且如果 C 是光滑的，那么我们也可以取 E 为光滑的。

我们先给出 K 为无限集时的证明。

无限域上的定理 4.1 的证明。假设 K 是无限的。根据定理 3.4，我们可以找到一个有限可分 G–不变态射 $f: C \to \mathbf{P}^1$，使得$G =$A $ut_K(C/\mathbf{P}^1)$ 作为A $ut_K(C)$的子群。固定一个整数 λ。由于 K 是无限的，f 必然在 $\mathbf{P}^1$ 的无限多个 K–点上非分歧。因此，我们可以将命题 2.13 应用于态射 f 和 λ，得到一个态射 φ:$\mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$。利用定理 3.2，我们选择一个光滑曲线 Y，使得 $\mathrm{A}\, ut_K(Y) = 1$，以及一个有限可分态射 $g: Y \to \mathbf{P}^1$，该态射在 ∞ 上全分歧。在与 $\mathbf{P}^1$ 的一个自同构复合后，我们可以假设 g 的分歧轨迹与 φ 的分歧轨迹不相交。令 $E = D \times_{\mathbf{P}^1} Y$，于是我们有一个图表

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f''} & Y \\ \downarrow & & \downarrow g \\ D & \xrightarrow{f'} & \mathbf{P}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ C & \xrightarrow{f} & \mathbf{P}^1 \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\ X & & \end{array} \tag{4.1.1}$$

带有笛卡尔方块的 K–概形。根据我们对 φ 的选择以及引理 2.11，D 和 E正则且几何整，这两个方块都满足条件 $(**)$；若 C 光滑，则 D 和 E也光滑。沿着 $\varphi \circ g$ 的拉回诱导出一个态射

$$G = \mathscr{A}ut_K(C/\mathbf{P}^1) \xrightarrow{(\varphi\circ g)^*} \mathscr{A}ut_K(E/Y). \tag{4.1.2}$$

断言 4.2。拉回映射 (4.1.2) 是一个同构。

证明。我们已经证明这两个方块都满足条件 $(**)$。先对 φ，再对 g应用命题 2.9，即得此断言。□

断言 4.3。若 λ 充分大，则包含映射

$$\mathscr{A}ut_K(E/Y) \subset \mathscr{A}ut_K(E)$$

是一个同构。

在证明断言 4.3 之前，我们先说明断言 4.2 和 4.3 如何共同推出曲线 E 及有限态射 $E \to C$ 具有所需性质。结合断言 4.2 和 4.3，我们得到一个同构

$$G = \mathscr{A}ut_K(C/\mathbf{P}^1) \xrightarrow[(\varphi\circ g)^*]{\sim} \mathscr{A}ut_K(E/Y) \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}ut_K(E).$$

此外，在拉回映射 $(\varphi\circ g)^*$ 下，子群 A $ut_K(C/X)$∩A $ut_K(C/\mathbf{P}^1)$ 被映入子群 A $ut_K(E/X)$ ∩A $ut_K(E/Y)$ =A $ut_K(E/X)$。但是，根据假设，子群 G ⊂A $ut_K(C)$ 包含于 A $ut_K(C/X)$，因此我们有

$G =$A ut_K(C/X) ∩A ut_K(C/P¹)，因此A ut_K(E/X) 包含 G 的像。由此可知，拉回映射诱导出同构

$$G \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}ut_K(E/X) \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}ut_K(E).$$

最后， f' 是 λ-不可压缩的，因此我们得到不等式 $g_E \geq g_D \geq \lambda$，所以$E$ 可以选取得使其亏格任意大。

剩下的只需证明断言 4.3。

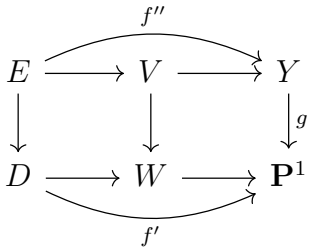
断言 4.3 的证明。我们将证明，若 λ 满足不等式

$$\lambda \geq \deg(C/\mathbf{P}^1)^2 + 2(g_Y - 1)\deg(C/\mathbf{P}^1) + 2 \tag{4.3.1}$$

那么态射 f''： $E \to Y$满足条件（$*$）。设有一个分解

$$E \to V \to Y$$

f'' 的分解，其中 V是正则曲线，且 $V \to Y$不是同构。根据引理 2.10，我们可以找到一条正则曲线 W 以及一个图表



其中两个方形都是笛卡尔方形。因此， $W \to$P¹ 也不是同构。由于 f' 是 λ–不可压缩的，我们有 $g_W \geq \lambda$。我们得到不等式

$$\begin{aligned} g_V \geq g_W \geq \lambda &\geq \deg(C/\mathbf{P}^1)^2 + 2(g_Y - 1)\deg(C/\mathbf{P}^1) + 2 \\ &= \deg(E/Y)^2 + 2(g_Y - 1)\deg(E/Y) + 2 \\ &\geq \deg(V/Y)^2 + 2(g_Y - 1)\deg(V/Y) + 2 \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式是 deg(E/Y) ≥ deg(V/Y) 和$g_Y \geq 1$ 的结果（后者由 Y具有平凡的自同构群概形这一事实推出）。这表明 f'' 满足（$*$），正如所声称的那样。

现在，如果 λ 足够大，使得不等式 (4.3.1) 成立，那么根据推论 2.5，我们有一个正合列

$$1 \to \mathscr{A}ut_K(E/Y) \to \mathscr{A}ut_K(E) \to \mathscr{A}ut_K(Y).$$

根据我们对 Y 的选择，有 A ut_K(Y) = 1，因此包含映射 A ut_K(E/Y) ⊂A ut_K(E) 是同构。□

□

现在我们给出有限基域情形下的证明。其构造通常与无限情形类似，但需要做一些修改。

有限域上的定理 4.1 的证明。假设 K 是有限的。我们首先应用引理 3.5 于 C/G，得到一个素数次数的有限可分态射 $C/G \to \mathbf{P}^1$，它仅在 ∞ 上分歧，且在某个纤维中的两个闭点上以不同次数分歧。令 $f\colon C \to \mathbf{P}^1$ 表示这个铅笔与商映射 $C \to C/G$ 的复合。由引理 2.15，我们有 $G = \mathrm{A}\ ut_K(C/\mathbf{P}^1)$，它们是 $\mathrm{A}\ ut_K(C)$ 的子群（此处我们使用了 G 在 C 上的作用是自由的这一假设，因此 $C \to C/G$ 是´étale）。由于 $\mathbf{P}^1$ 在任意域上至少有三个 K-点，f 在至少两个 K-点上非分歧。令 λ 为一个整数，令 $\varphi : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ 为通过将命题 2.13 应用于 f 和 λ 得到的态射，并设 $D = C \times_{\mathbf{P}^1,\varphi} \mathbf{P}^1$。取一个定义在 K 上、具有平凡自同构群概形的光滑曲线 Y，并将引理 3.5 应用于 Z，得到一个态射 $g\colon Y \to \mathbf{P}^1$，其分歧轨迹与 $f'\colon D \to \mathbf{P}^1$ 的分歧轨迹不相交，且其次数是一个素数，并且 $> \deg(f)$。设 $E = D \times_{\mathbf{P}^1} Y$，于是我们得到一个具有笛卡尔方块的图表 (4.1.1)。根据对 φ 的选择以及引理 2.11，D 和 E 都是定义在 K 上的光滑几何整曲线，且两个方块都满足条件 (∗∗)。证明的其余部分与无限域情形完全相同：由构造可知，f' 是 λ-不可压缩的，因此 $g_E \geq g_D \geq \lambda$，故我们可以令 E 具有任意大的亏格；断言 4.2 和 4.3 的证明无需修改即可适用，从而证明 $G \cong \mathrm{A}\ ut_K(E/X)$。□

现在证明定理 1.6。该结果立即推出定理 1.7 的无限域情形，因此这将完成§1中所述结果的证明。我们回顾如下记号：K 是一个无限域，G 是 ´上的有限étale群概形，K、C 和 Y是 K上的正则曲线，并且 $f\colon C \to \mathbf{P}^1$ 是一个几何伽罗瓦态射，其伽罗瓦群概形为 G。

定理 1.6的证明。设 λ 是一个满足 $\lambda > g_Y$ 的整数。由于 K 是无限的，f 必然在 $\mathbf{P}^1$ 的无穷多个 K–点上是非分歧的。令 $\varphi : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ 是一个满足将命题2.13 应用于 f 和 λ 所得结论的态射。令 $f'\colon D = C \times_{\mathbf{P}^1} \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ 为 f的基变换。选择一个铅笔 $g : Y \to \mathbf{P}^1$，其分歧轨迹与 f' 的分歧轨迹不相交。如定理 4.1 的证明中所述，我们设 $E = D \times_{\mathbf{P}^1} Y$，从而得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f''} & Y \\ \downarrow & & \downarrow g \\ D & \xrightarrow{f'} & \mathbf{P}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ C & \xrightarrow{f} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

构成笛卡尔方块。根据我们对 φ的选择，D 是正则且几何整的，下方的方块满足条件（∗∗），并且f' 是 λ-不可压缩的且 $\lambda > g_Y$。事实上，由命题 2.13 中的构造可知，f' 在对 K取可分闭包后进行基变换，仍然是 λ-不可压缩的。此外，根据命题 2.9，f' 是几何伽罗瓦的，其伽罗瓦群概形为 G。因此，引理2.14蕴含 E

是正则且几何整的，并且上方的方块也满足条件（$**$）。再次根据命题 2.9， f'' 是几何伽罗瓦的，其伽罗瓦群概形为 G。为验证其余断言，我们注意到，根据引理 2.7，若 C 和 Y 光滑，则 D 和 E 也将光滑。最后，由于 f' 是 λ-不可压缩的，特别地有 $g_D \geq \lambda$，因此 $g_E \geq g_D \geq \lambda$，所以我们可以选择亏格任意大的 E 。□

References

[1] C. ´Alvarez Garc´ıa和G. Villa-Salvador。具有无限常数域的函数域的伽罗瓦群中的有限群。J.Aust. Math. Soc., 88(3):301–312, 2010.[2] Ca´ın ´Alvarez Garc´ıa和Gabriel Villa Salvador。全局函数域的自同构群。Int. J.Algebra, 2(1-4):65–78, 2008.[3]ErvinFried和J´ánosKoll´ar。代数数域的自同构群。Math.Z., 163(2):121–123,1978.[4] M. Fried。关于代数数域自同构群的一则注记。Proc.Amer. Math.Soc., 80(3):386–388, 1980.[5] Wulf-Dieter Geyer。每个有限群都是有限扩张$K|$ Q 的自同构群。Arch. Math. (Basel), 41(2):139–142,1983.[6] Leon Greenberg。极大群与签名。载于《不连续群与黎曼曲面》（会议论文集，马里兰大学，College Park，Md., 1973），《数学年刊研究》丛书第79卷，第207–226页。Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1974.[7] Ernst Kani。关于 Castelnuovo 的等价缺陷。J. ReineAngew. Math., 352:24–70,1984.[8] KiranS. Kedlaya。正特征下仿射空间的更多étale 覆盖。J.AlgebraicGeom., 14(1):187–192, 2005. ´Manohar Madan 和 MichaelRosen。函数域的自同构群。Proc. Amer.Math.Soc., 115(4):923–929, 1992.[9] DanielJ. Madden和Robert C. Valentini。代数函数域的自同构群。J.Reine Angew. Math., 343:162–168,1983.[10] Bjorn Poonen。没有额外自同构的簇。I.曲线。Math. Res. Lett., 7(1):67–76, 2000.[11] Bjorn Poonen。有限域上的 Bertini 定理。Ann.of Math. (2), 160(3):1099–1127, 2004.[12] M. Rzedowski-Calder[13] ón 和 G. Villa Salvador。合同函数域的自同构。Pacific J. Math., 150(1):167–178,1991. ´Maria LuisaSpreafico。横截性的公理理论与 Bertini 型定理。Arch. Math. (Basel), 70(5):407–424, 1998.[14] Henning Stichtenoth。Castelnuovo 不等式。J.Reine Angew. Math., 348:197–202, 1984.[15] Henning Stichtenoth。关于有限群作为代数函数域自同构群的可实现性。Math. Z., 187(2):221–225, 1984.[16]

Department of Mathematics, University of Utah, Salt Lake City, UT 84112电子邮件地址：bragg@math.utah.edu