arXiv:2304.02788v2 [math.DG] 2 May 2023

使能量最小化的光滑映射与校准几何

KOTA HATTORI

Abstract. 我们将校准子流形的概念推广到光滑映射，并证明微分几何中出现的若干光滑映射实例都属于我们的情形。此外，我们应用这些概念，给出黎曼流形之间给定同伦类中光滑映射的能量下界，并考察在具有特殊和乐群的黎曼流形上由恒等映射取得最小值的能量泛函。

Contents

1. 引言 1 2. 校准映射 3 3. 示例 4 3.1. 全纯映射 5 3.2. 校准子流形 6 3.3. 纤维化 6 3.4. 环面之间的全测地映射 8 4. p-能量的下界 10 5. 恒等映射的能量 12 6. 光滑映射的相交 16 参考文献 20

1. Introduction

在本文中，我们介绍黎曼流形之间光滑映射的校准几何概念，并考察几种光滑映射的能量的下界或极小化元。令(X, g)和(Y, h)为紧黎曼流形，且 $f\colon X \to Y$ 为光滑映射。则 f 的 p- 能量定义为

$$\mathcal{E}_p(f) := \int_X |df|^p d\mu_g$$

对于 $p \geq 1$，其中μ_g 是 g的体积测度。调和映射被定义为 $\mathcal{E}_2$的临界点，对它的研究是微分几何中的重要领域之一。1964年，EellsandSampson [4] 证明，存在一个与 f 同伦的调和映射 f'，如果 h的截面曲率

非正。此外，Hartman [5] 证明，这类调和映射会使 $\mathcal{E}_2|_{[f]}$ 最小，其中 $[f]$ 是由 f 表示的同伦类。

一般而言，调和映射不一定使能量达到最小值。例如，尽管任意黎曼流形上的恒等映射总是调和的，但已知存在一个与恒等映射 f_ε 同伦的光滑映射，使得 $\mathcal{E}_2(f_\varepsilon) = \varepsilon$ 在带有标准度量的 n维球面 S^n 上成立，并且$n \geq 3$。根据 White [10], 的结果，如果对所有 $1 \leq l \leq k$， $\pi_l(X)$都是平凡的，那么 $\inf \mathcal{E}_k|_{[1_X]} = 0$，其中 1_X 是 X的恒等映射。

现在，我们考虑如何在给定的同伦类 $[f]$ 中求能量的下界，以及如何找到使其达到最小值的映射。Lichnerowicz [8] 最先在(X, g)和(Y, h)均为 K¨ahler 流形的情形下得到了这样的下界；随后，人们证明了 K¨ahler 流形之间的任意全纯映射都能在其同伦类中使 $\mathcal{E}_2$ 达到最小值。此外，Croke[3] 证明，实射影空间上带标准度量的恒等映射在其同伦类中使 $\mathcal{E}_2$ 达到最小值。之后，Croke 和 Fathi [2]引入了一种称为相交的新同伦不变量，它为给定同伦类 $[f]$ 中的 $\mathcal{E}_2|_{[f]}$ 提供下界。最近，Hoising- ton [7] 在 X 为实、复或四元数射影空间（均带标准度量）的情形下，为适当的 p 给出了 $\mathcal{E}_p$ 的下界。

本文将校准几何的概念推广到光滑流形之间的光滑映射，并给出若干能量的下界。校准几何起源于厄米内积空间中偶数维子空间的魏廷格不等式 [11], ，随后许多研究者对其进行了完善或推广。在 [6], ，Harvey和Lawson定义了Calabi-Yau、 G_2 或 $Spin(7)$流形中的校准子流形，这些子流形在其同调类中使体积最小。类似地，我们定义了一类新的光滑映射，称为校准映射，并证明它们针对给定情形使适当的能量最小。此外，我们还得到以下结果作为应用。

第一个应用是获得限制于给定同伦类的 p-能量的下界。我们假设 X 是定向的。 f的拉回诱导出一个线性映射 $[f^*]^k\colon\ H^k(Y, \mathbb{R}) \to H^k(X, \mathbb{R})$。通过固定 $H^k(X, \mathbb{R})$、 $H^k(Y, \mathbb{R})$的基，我们得到 $[f^*]^k$的矩阵 $P([f^*]^k)$，并令$|P([f^*]^k)| := \sqrt{\mathrm{tr}({}^tP([f^*]^k) \cdot P([f^*]^k))}$。

定理 1.1. 设 (X, g) 和 (Y, h) 如上所述。对于任意 $1 \leq k \leq$维 X，存在一个正的常数 C ，它仅依赖于 k、(X, g)、(Y, h) 以及 $H^k(X, \mathbb{R})$、 $H^k(Y, \mathbb{R})$ 的基，使得对于任意 $f \in C^\infty(X, Y)$，我们有

$$\mathcal{E}_k(f) \geq C|P([f^*]^k)|.$$

特别地，如果 $[f^*]^k$ 非零，那么 $\inf(\mathcal{E}_k|_{[f]})$ 为正。

在上述定理中， Y 的紧致性并非必要。参见定理 4.2。

第二个应用是证明某些具有特殊和乐群的黎曼流形的恒等映射使相应的

能量达到最小。正如我们已经提到的，实射影空间或复射影空间上的恒等映射分别由 [3] 和 [8],使其在同伦类中最小化 $\mathcal{E}_2$ 。Wei [9] 证明了带有标准度量的四元数射影空间 $\mathbb{HP}^n$ 上的恒等映射是 $\mathcal{E}_p$ 的不稳定临界点，其中 $1 \leq p < 2 + 4n/(n+1)$。此外，Hoisington给出了 $p \geq 4$的$\mathcal{E}_p|_{[1_{\mathbb{HP}^n}]}$ 的非平凡下界。这里，四元数射影空间是四元数K¨ahler流形的典型例子，它们是维数为 $4n$ 的黎曼流形，其和乐群包含在 $Sp(n) \cdot Sp(1)$中。现在，设 A 是一个 $n \times m$ 实值矩阵，并用 a_1，...， $a_m \in \mathbb{R}$ 表示 ${}^tAA$的非负特征值，然后令$|A|_p := (\sum_{i=1}^m a_i^{p/2})^{1/p}$。此外，我们通过

$$\mathcal{E}_{p,q}(f) := \int_X |df|_p^q d\mu_g,$$

那么我们有 $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{2,p}$。

定理 1.2. 设 (X, g) 是一个维数为 $4n \geq 8$ 的紧致四元数 K ¨ahler 流形。那么 X 上的恒等映射在其同伦类中使 $\mathcal{E}_{4,4}$ 最小。

我们也可以证明其他全纯群情况下的类似定理。如果 (X, g) 是一个紧致 G_2 流形，那么 1_X 在$,3|_{[1_X]}$ 意义下取极小；如果 (X, g) 是一个紧致 $Spin(7)$ 流形，那么 1_X 在$,4|_{[1_X]}$ 意义下取极小（见定理5.6）。此外，容易看出，如果恒等映射在$\mathcal{E}_{p,q}$ 意义下取极小，那么根据 H¨older 不等式，对所有 $p' \geq p$ 和 $q' \geq q$ ，它在 $\mathcal{E}_{p',q'}$ 意义下也取极小。当然，我们也可以分别考虑 K¨ahler、Calabi-Yau 和超 K¨ ahler 流形的情形；不过，这些情形下的结果也可由 [8]推出。

本文的组织如下。第 2 节定义校准映射的概念，这是对校准子流形概念的类比。第 3 节介绍校准映射的一些例子。特别地，我们证明，K¨ ahler 流形之间的全纯映射以及校准子流形的包含映射都可以视为校准映射。此外，我们还可以证明，正则纤维为校准子流形的纤维化是校准映射。我们在第 4 节证明定理1.1，在第5节证明定理 1.2。在第 6节，我们将 [2] 中引入的同伦不变与本文定义的不变量进行比较。

致谢。感谢Frank Morgan 教授对本文提出的建议。本研究得到日本学术振兴会科研费项目编号 JP19K03474、JP20H01799 的资助。

2. Calibrated maps

设 X、Y为维数分别为 $X = m$ 和 $Y = n$的光滑流形。在本文中，我们假设 X 是紧致且定向的。我们在 X上固定一个体积形式 vol $\in \Omega^m(X)$，即一个处处不为零的 m-形式，它决定了

以及 X的一个定向和测度。对于 m-形式 $v_1, v_2 \in \Omega^m(X)$，存在$\varphi_i \subset C^\infty(X)$，使得 $v_i = \varphi_i$vol。于是，如果对于所有 $x \in X$，$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$，我们就写作 $v_1 \leq v_2$。

如果给定一个映射 $\sigma\colon C^\infty(X,Y) \to L^1(X)$，那么我们可以定义能量$\mathcal{E}\colon C^\infty(X,Y) \to \mathbb{R}$ 为

$$\mathcal{E}(f) := \int_X \sigma(f)\mathrm{vol}.$$

现在，f_0、$f_1 \in C^\infty(X,Y)$被称为是同伦的，如果存在一个光滑映射 $F\colon [0,1]\times X \to Y$，使得 $F(0,\cdot) = f_0$且 $F(1,\cdot) = f_1$。根据惠特尼逼近定理，这等价于存在连接 f_0和 f_1的连续同伦。对于 $f \in C^\infty(X,Y)$，用 $[f] \subset C^\infty(X,Y)$表示由 f代表的同伦等价类。本文考虑 $\mathcal{E}|_{[f]}$ 的下界或 $\mathcal{E}|_{[f]}$ 的最小值。

记 $1_X\colon X \to X$ 为 X上的恒等映射。我们定义光滑映射 $(1_X, f)\colon X \to X \times Y$，使得

$$(1_X, f)(x) := (x, f(x)).$$

下一个定义是 [6] 的类比。

定义 2.1. $\Phi \in \Omega^m(X \times Y)$ 是一个 σ-校准形式，如果 $d\Phi = 0$ 并且

$$(1_X, f)^*\Phi \leq \sigma(f)\mathrm{vol}$$

对于任意光滑映射 $f\colon X \to Y$。此外，f是一个 (σ,Φ)-校准映射，若

$$(1_X, f)^*\Phi = \sigma(f)\mathrm{vol}.$$

定理 2.2。令 σ 为能量密度，且 Φ 为一种 σ-校准形式。

(i) 常数 $\int_X (1_X, f)^*\Phi$由同伦类 $[f]$决定。换言之，$\int_X (1_X, f_0)^*\Phi = \int_X (1_X, f_1)^*\Phi$当 $[f_0] = [f_1]$时成立。(ii) 对任意 $f \in C^\infty(X,Y)$，我们有 $\inf \mathcal{E}|_{[f]} \geq \int_X (1_X, f)^*\Phi$。(iii) 我们有 $\mathcal{E}(f) = \int_X (1_X, f)^*\Phi$，当且仅当 f是 (σ,Φ)-校准映射。特别地，任意 (σ,Φ)-校准映射都会在其同伦类中使 $\mathcal{E}$ 达到最小值。

证明。（i）如果 f_0、f_1 是同伦的，那么（1_X、f_0）和（1_X、f_1）相应地也是同伦的，因此（1_X、f_0）$^*\Phi$和（1_X、f_1）$^*\Phi$根据 [1,推论 4.12] 表示相同的上同调类。

（ii）由 σ-校准形式的定义可知。

（iii）根据逐点不等式（1_X、f）$^*\Phi \leq \sigma$（f）vol，有 $\mathcal{E}$（f）$=\int_X$（1_X、f）$^*\Phi$ 当且仅当（1_X、f）$^*\Phi = \sigma$（f）vol。□

3. Examples

映射的能量的一个典型例子是定义在黎曼流形之间光滑映射上的 p-能量。设(X,g)和(Y,h)为黎曼流形，且 $f\colon X \to Y$为光滑映射。然后拉回f^*h是 $T^*X \otimes T^*X$的一个截面，我们可以取迹tr$_g(f^*h)$。对于 $p \geq 1$,

令$\sigma_p(f) := \{\mathrm{tr}_g(f^*h)\}^{p/2}$。我们假设 X 是定向的，并用vol_g 表示 g的体积形式。p-能量 $\mathcal{E}_p(f)$定义为

$$\mathcal{E}_p(f) := \int_X \sigma_p(f)\mathrm{vol}_g.$$

现在，微分 df_x 对于每个 $x \in X$ 都是 $T_x^*X \otimes T_{f(x)}Y$的一个元素。由于 g_x 和 $h_{f(x)}$ 在 $T_x^*X \otimes T_{f(x)}Y$ 上诱导出自然内积和范数，因此我们也可以写作 $\sigma_p(f)(x) = |df_x|^p$。

根据 H¨older 不等式，我们有

$$\mathcal{E}_p(f) \le \mathrm{vol}_g(X)^{1-p/q}\mathcal{E}_q(f)^{p/q}$$

对于 $1 \le p \le q$。因此我们得到以下命题。

命题 3.1.设 $\Phi \in \Omega^m(X \times Y)$ 是一个 σ_p-校准形式。则

$$\mathrm{vol}_g(X)^{-1+p/q}\int_X (1_X, f)^*\Phi \le \mathcal{E}_q(f)^{p/q}$$

对于任意 $q \ge p$ 和 $f \in C^\infty(X, Y)$。

3.1. 全纯映射。这里，假设 X、Y 是复流形，且 g、h 是 K¨ahler 度量。令 $m = \dim_{\mathbb{C}} X$ 且 $n = \dim_{\mathbb{C}} Y$。那么我们有如下分解。

$$T^*X \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0}T^*X \oplus \Lambda^{0,1}T^*X,$$
$$TY \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}Y \oplus T^{0,1}Y,$$

因此，导数 $df \in \Gamma(T^*X \otimes f^*TY)$ 被分解为

$$\begin{aligned} df &= (\partial f)^{1,0} + (\partial f)^{0,1} + (\overline{\partial} f)^{1,0} + (\overline{\partial} f)^{0,1} \\ &\in (\Lambda^{1,0}T^*X \otimes T^{1,0}Y) \oplus (\Lambda^{1,0}T^*X \otimes T^{0,1}Y) \\ &\quad \oplus (\Lambda^{0,1}T^*X \otimes T^{1,0}Y) \oplus (\Lambda^{0,1}T^*X \otimes T^{0,1}Y). \end{aligned}$$

由于 df 为实数，我们有

$$\overline{(\partial f)^{1,0}} = (\overline{\partial} f)^{0,1}, \quad \overline{(\partial f)^{0,1}} = (\overline{\partial} f)^{1,0}.$$

分别用 ω_g、ω_h 表示 g、h 的 K¨ahler 形式，则体积形式为 $\mathrm{vol}_g = \frac{1}{m!}\omega_g^m$。Lichnerowicz 给出了以下观察结果。

定理3.2（[8]）。对于任意光滑映射 $f\colon X \to Y$，我们有

$$\omega_g^{m-1} \wedge f^*\omega_h = (m-1)!(|(\partial f)^{1,0}|^2 - |(\overline{\partial} f)^{1,0}|^2)\mathrm{vol}_g,$$
$$|df|^2 = 2|(\partial f)^{1,0}|^2 + 2|(\overline{\partial} f)^{1,0}|^2.$$

特别地，我们有

$$\mathcal{E}_2(f) \ge \frac{2}{(m-1)!}\int_X \omega_g^{m-1} \wedge f^*\omega_h$$

且当且仅当 f 为全纯映射时等号成立。

现在，我们考虑 $\omega_g^{m-1} \wedge \omega_h \in \Omega^m(X \times Y)$。定理 3.2 中的前两个等式表明，$^2{}_{(m-1)!}\omega_g^{m-1} \wedge \omega_h$ 是一个 σ_2-校准形式。此外，第二个结论表明，当且仅当 f 为全纯映射时，f 是一个（σ_2，$^2{}_{(m-1)!}\omega_g^{m-1} \wedge \omega_h$）-校准映射。还可以看出，当且仅当 f 为反全纯映射时，f 是一个（σ_2, $-\ ^2{}_{(m-1)!}\omega_g^{m-1} \wedge \omega_h$）-校准映射。

3.2. 校准子流形。在本小节中，我们将考察 [6] 意义下的校准子流形与校准映射之间的关系。假设 (Y^n, h) 是一个黎曼流形。

定义 3.3（[6]）。对于整数 $0 < m < n$，$\psi \in \Omega^m(Y)$ 是一个校准形式，若 $d\psi = 0$ 且

$$\psi|_V \leq \mathrm{vol}_{h|_V}$$

对于任意 $y \in Y$ 以及 m 维定向子空间 $V \subset T_yY$。这里，$h|_V$ 是 V 上的诱导度量，$\mathrm{vol}_{h|_V}$ 是其体积形式，其定向与 V 所赋予的定向相容。此外，若一个定向子流形 $X \subset Y$ 满足

$$\psi|_{T_xX} = \mathrm{vol}|_{h|_{T_xX}}$$

对于任意 $x \in X$。

现在，若 X 是一个带有体积形式 $\mathrm{vol} \in \Omega^m(X)$ 的定向流形，那么对于每个线性映射 $A\colon T_xX \to T_yY$，通过取 T_xX 的一组基 $e_1, \ldots, e_m$ 以及 T_yY 的一组标准正交基，且 $\mathrm{vol}_x(e_1, \ldots, e_m) = 1$，可以将其视为一个 $n \times m$ 矩阵。于是 $\sqrt{\det({}^tA \cdot A)}$ 不依赖于这些基的选择。因此，对于 $f \in C^\infty(X, Y)$，我们可以定义能量密度 $\tau_m(f)(x) := \sqrt{\det({}^t df_x \cdot df_x)}$，以及能量 $\mathcal{E}_{\tau_m}(f) := \int_X \tau_m(f)\mathrm{vol}$。

命题 3.4。设 (X, vol) 是一个配备体积形式的定向流形，且 $\psi \in \Omega^m(Y)$ 是闭的。假设 $\dim_{\mathbb{R}} X = m < n$，并记 $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ 为自然投影。那么 ψ 是校准形式，当且仅当 $\pi_Y^*\psi \in \Omega^m(X \times Y)$ 是一个 τ_m-校准形式。此外，对于任意嵌入 $f\colon X \to Y$，以下条件等价。

(i) $f(X)$ 是一个校准子流形，其中 $f(X)$ 的定向确定为使 f 保持该定向。(ii) f 是一个 $(\tau_m, \pi_Y^*\psi)$-校准映射。

证明。注意，$(1_X, f)^*(\pi_Y^*\psi) = f^*\psi$ 和 $\tau_m(f)\mathrm{vol}_g = \mathrm{vol}_{f^*h}$。因此，$\psi$ 是校准形式，当且仅当 $\pi_Y^*\psi \in \Omega^m(X \times Y)$ 是一个 τ_m-校准形式。此外，假设 f 是一个嵌入。那么，f 是一个 $(\tau_m, \pi_Y^*\psi)$-校准映射，当且仅当 $f(X)$ 是一个校准子流形。□

3.3.纤维化。设（X^m，g）是一个定向黎曼流形，且 Y^n 是一个配备体积形式 $\mathrm{vol}_Y \in \Omega^n(Y)$ 的光滑流形。在此，我们假设 $n < m$ 并令 $\varphi \in \Omega^{m-n}$ 是按照定义 3.3 意义下的校准形式。固定 T_xX 的一个标准正交基以及一个基 e'_1，.....，$e'_n \in T_yY$，其具有

$\mathrm{vol}_Y(e'_1, \ldots, e'_n) = 1$，我们可以将线性映射 A: $T_xX \to T_yY$视为一个 $m \times n$-矩阵。于是，$\sqrt{\det(A \cdot {}^tA)}$的值与上述基的选择无关。对于光滑映射 f: $X \to Y$，令 $\tilde{\tau}_{m,n}(f)|_x := \sqrt{\det(df_x \cdot {}^t df_x)}$ 以及 $\Phi := \mathrm{vol}_Y \wedge \varphi$。

Put

$$X_{\mathrm{reg}} := \{x \in X | \, x \text{ is a regular point of } f\}.$$

注意，X_{reg} 在 X中是开集。若 $x \in X_{\mathrm{reg}}$，则有正交分解 $T_xX = \mathrm{Ker}(df_x) \oplus H$，且 $df_x|_H$: $H \to T_{f(x)}Y$是线性同构。令 $y = f(x)$，并假设 $f^{-1}(y)$关于适当的定向是校准子流形。若存在 T_xX 的一组基 $v_1, \ldots, v_m$，使得.....，则称 df_x 保持定向，

$$\begin{aligned} v_1, \ldots, v_n \in H, \quad & \mathrm{vol}_Y(df_x(v_1), \ldots, df_x(v_n)) > 0, \\ v_{n+1}, \ldots, v_m \in \mathrm{Ker}(df_x), \quad & \varphi_x(v_{n+1}, \ldots, v_m) > 0, \\ \mathrm{vol}_g(v_1, \ldots, v_m) > 0. & \end{aligned}$$

命题 3.5。Φ 是一个$\tilde{\tau}_{m,n}$-校准形式。此外，光滑映射 f: $X \to Y$ 是一个$(\tilde{\tau}_{m,n}, \Phi)$-校准映射，当且仅当

(i) 对任意 $y \in Y$，$f^{-1}(y) \cap X_{\mathrm{reg}}$ 关于 φ 及适当的定向是校准子流形；(ii) 对任意 $x \in X_{\mathrm{reg}}$，df_x 保持定向。

证明。如果 $x \in X$ 是 f 的临界点，那么我们可以看到

$$f^*\mathrm{vol}_Y \wedge \varphi|_x = \tilde{\tau}_{m,n}(f)\mathrm{vol}_g|_x = 0.$$

固定一个正则点 x 以及一个定向标准正交基 e_1、.....、$e_m \in T_xX$，使得 e_{m-n+1}、.....、$e_m \in \subset \mathrm{Ker}(df_x)$。于是我们有

$$\begin{aligned} f^*\mathrm{vol}_Y \wedge \varphi(e_1, \ldots, e_m) &= \mathrm{vol}_Y(df_x(e_1), \ldots, df_x(e_n))\varphi(e_{n+1}, \ldots, e_m), \\ \tilde{\tau}_{m,n}(f)|_x &= |\mathrm{vol}_Y(df_x(e_1), \ldots, df_x(e_n))| \, . \end{aligned}$$

由于 φ 是一个校准形式，我们有 $\varphi(\pm e_{n+1}, e_{n+2}$、.....、$e_m) \leq 1$，因此 $|\varphi(e_{n+1}$、.....、$e_m)| \leq 1$。所以，

$$f^*\mathrm{vol}_Y \wedge \varphi(e_1, \ldots, e_m) \leq |\mathrm{vol}_Y(df_x(e_1), \ldots, df_x(e_{m-n}))| = \tilde{\tau}_{m,n}(f)|_x,$$

这意味着 Φ 是一个 $\tilde{\tau}_{m,\ n}$-校准形式。

接下来我们考虑条件

$$f^*\mathrm{vol}_Y \wedge \varphi|_x = \tilde{\tau}_{m,n}(f)\mathrm{vol}_g|_x,$$

其中 x 是 f 的正则值。在这种情况下，我们有正交分解 $T_xX = \mathrm{Ker}(df_x) \oplus H$，其中 H 是一个 n 维子空间。我们

可以取一组标准正交基 $e_1, \ldots, e_m \in T_xX$，使得

$$\begin{aligned} e_1, \ldots, e_n &\in H, \\ e_{n+1}, \ldots, e_m &\in \mathrm{Ker}(df_x), \\ a := \mathrm{vol}_Y(df_x(e_1), \ldots, df_x(e_{m-n})) &> 0, \\ \mathrm{vol}_g(e_1, \ldots, e_m) &> 0. \end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned} f^*\mathrm{vol}_Y \wedge \varphi(e_1, \ldots, e_m) &= a\varphi(e_{n+1}, \ldots, e_m), \\ \tilde{\tau}_{m,n}(f)\mathrm{vol}_g(e_1, \ldots, e_m) &= |a| = a. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$f^*\mathrm{vol}_Y \wedge \varphi|_x = \tilde{\tau}_{m,n}(f)\mathrm{vol}_g|_x$$

当且仅当 $\varphi(e_{n+1}, \ldots, e_m) = 1$。现在我们任意取了 $x \in X_{\mathrm{reg}}$，因此有

$$f^*\mathrm{vol}_Y \wedge \varphi = \tilde{\tau}_{m,n}(f)\mathrm{vol}_g$$

当且仅当对于任意 $y \in Y$，$f^{-1}(y) \cap X_{\mathrm{reg}}$ 是校准子流形，且对于所有 $x \in X_{\mathrm{reg}}$，df_x 保持定向。□

3.4. 环面之间的全测地映射。设 $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 为 n 维环面，并考虑从 $\mathbb{T}^m$ 到 $\mathbb{T}^n$的光滑映射。设 $G = (g_{ij}) \in M_m(\mathbb{R})$ 和 $H = (h_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ 为正定对称矩阵。分别用 $x = (x^1, \ldots, x^m)$ 和 $y = (y^1, \ldots, y^n)$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^n$上的笛卡尔坐标，则我们有闭 1-形式 $dx^i \in \Omega^1(\mathbb{T}^m)$ 和$dy^i \in \Omega^1(\mathbb{T}^n)$。我们在 $\mathbb{T}^m$ 上定义平坦黎曼度量 $g = \sum_{i,\ j} g_{ij}dx^i \otimes dx^j$，并在 $\mathbb{T}^n$上定义 $h = \sum_{i,\ j} h_{ij}dy^i \otimes dy^j$。

对于光滑映射 $f\colon\ \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n$，我们有拉回 $f^*\colon\ H^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}) \to H^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{R})$。这里，由于

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{T}^m, \mathbb{Z}) &= \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{[dx^1], \ldots, [dx^m]\}, \\ H^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z}) &= \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{[dy^1], \ldots, [dy^n]\}, \end{aligned}$$

存在 $P = (P_i^j) \in M_{m,\ n}(\mathbb{Z})$，使得 $f^*[dy^j] = \sum_i P_i^j[dx^i]$。矩阵$P$ 由 f的同伦类决定。现在，令 $*_g$ 为 g 的 Hodge 星算子，并设

$$\Phi := \sum_{i,j,k} h_{jk}P_i^j *_g dx^i \wedge dy^k \in \Omega^m(\mathbb{T}^m \times \mathbb{T}^n). \tag{1}$$

于是我们可以验证

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^m}(1_{\mathbb{T}^m},f)^*\Phi &= \sum_{i,j,k,l} h_{jk}P_i^jP_l^k\int_{\mathbb{T}^m} *_g dx^i\wedge dx^l\\ &= \sum_{i,j,k,l} h_{jk}P_i^jP_l^kg^{il}\mathrm{vol}_g(\mathbb{T}^m)\\ &= \mathrm{tr}({}^tPG^{-1}PH)\mathrm{vol}_g(\mathbb{T}^m) =: \|P\|^2\mathrm{vol}_g(\mathbb{T}^m)\geq 0.\end{aligned}$$

因此，根据 G^{-1} 和 H 的正性，$\int_{\mathbb{T}^m}(1_{\mathbb{T}^m},f)^*\Phi = 0$ 当且仅当 $P=0$。

命题 3.6。假设 $f^*\colon\ H^1(\mathbb{T}^n,\mathbb{R})\to H^1(\mathbb{T}^m,\mathbb{R})$ 不是零映射。若 $\|P\|^{-1}\Phi$ 是一个 σ_1-校准形式，且 f 是一个 $(\sigma_1,\|P\|^{-1}\Phi)$-校准映射，则 $f(x)=Px+a$ 对某个 $a\in\mathbb{T}^m$ 成立。此外，f 在其同伦类中使 $\mathcal{E}_2$ 最小，当且仅当 $f(x)=Px+a$ 对某个 $a\in\mathbb{T}^m$ 成立。

证明。固定 $x\in\mathbb{T}^m$ 并令 $df_x := A = (A_i^j)\in M_{n,m}(\mathbb{R})$，并证明 $(1_{\mathbb{T}^m},f)^*\Phi\leq\sigma_1(f)\mathrm{vol}_g$ 在 x 处成立。由于

$$\begin{aligned}(1_{\mathbb{T}^m},f)^*\Phi|_x &= \sum_{i,j,k,l} h_{jk}P_i^jA_l^k *_g dx^i\wedge dx^l|_x\\ &= \left(\sum_{i,j,k,l} h_{jk}P_i^jA_l^kg^{il}\right)\mathrm{vol}_g|_x\\ &= \left(\mathrm{tr}({}^tPG^{-1}AH)\right)\mathrm{vol}_g|_x.\end{aligned}$$

在这里，根据柯西-施瓦茨不等式，有

$$\mathrm{tr}({}^tPG^{-1}AH)\leq\sqrt{\|P\|\|A\|},$$

且当且仅当 $A=\lambda P$ 为某个常数 $\lambda\geq 0$时，等号成立。因此，我们有

$$(1_{\mathbb{T}^m},f)^*\Phi\leq\|P\|\sigma_1(f)\mathrm{vol}_g,$$

这意味着 $\|P\|^{-1}\Phi$ 是一个 σ_1-校准形式。此外，等式成立当且仅当 $df_x=\lambda_x\cdot{}^tP$对于某个 $\lambda_x\geq 0$。因此，$f(x)={}^tPx+a$对于某个 $a\in\mathbb{T}^m$是一个 $(\sigma_1,\|P\|^{-1}\Phi)$-校准映射。

对于任意 $f\in C^\infty(\mathbb{T}^m,\mathbb{T}^n)$，有

$$\int_X(1_{\mathbb{T}^m},f)^*\Phi\leq\|P\|\int_X\sigma_1(f)\mathrm{vol}_g\leq\|P\|\sqrt{\mathrm{vol}_g(\mathbb{T}^m)\mathcal{E}_2(f)}$$

由柯西-施瓦茨不等式可得。此外，我们有以下等式。

$$\int_X(1_{\mathbb{T}^m},f)^*\Phi=\|P\|\sqrt{\mathrm{vol}_g(\mathbb{T}^m)\mathcal{E}_2(f)}$$

当且仅当 $df_x=\lambda_x\cdot{}^tP$对于某个 $\lambda_x\geq 0$，且 $\sigma_1(f)$ 是定义在 $\mathbb{T}^m$ 上的常值函数。由于 $\sigma_1(f)(x)=\lambda_x\|P\|$，若 $\sigma_1(f)$ 为常数，则 $\lambda_x=\lambda$与 x 无关。因此，我们可以写作 $f(x)=\lambda\cdot{}^tPx+a$，其中 $a\in\mathbb{T}^m$。此外，由于 $f^*=P$在 $H^1(\mathbb{T}^n)$ 上成立，我们有 $\lambda=1$。□

在上述命题中，我们无法证明每个 $(\sigma_1, \|P\|^{-1}\Phi)$-校准映射都可表示为 $f(x) = {}^tPx + a$，其中 a。下面的情形是一个反例。

设 $m = n = 1$，并令 $P = 1$。若置 $f(x) = x + \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$，则得到一个与恒等映射同伦的光滑映射 $\mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$。容易验证，$f$ 是一个 $(\sigma_1, \|P\|^{-1}\Phi)$-校准映射，因为 $f'(x) \geq 0$。

4. The lower bound of p-energy

本节给出一般情形下 p-能量的下界。设 (X, g) 和 (Y, h) 是黎曼流形，并假设 X 是紧致且定向的。现在有如下分解

$$\Lambda^k T^*_{(x,y)}(X \times Y) \cong \bigoplus_{l=0}^{k} \Lambda^l T^*_x X \otimes \Lambda^{k-l} T^*_y Y,$$

则将由 $\Lambda^l T^*_x X \otimes \Lambda^{k-l} T^*_y Y$ 的光滑截面组成的集合记为 $\Omega^{l,k-l}(X \times Y) \subset \Omega^k(X \times Y)$。对于 $\Phi \in \Omega^k(X \times Y)$，令 $|\Phi_{(x,y)}|$ 为关于 $X \times Y$ 上度量 $g \oplus h$ 的范数。

引理 4.1。设 $\Phi \in \Omega^{m-k,k}(X \times Y)$ 是闭且 $\sup_{x,y} |\Phi_{(x,y)}| < \infty$。那么存在一个仅依赖于 Φ、m、n、k 的常数 $C > 0$，使得 $C\Phi$ 是一个 σ_k-校准形式。

证明。固定 $x \in X$，令 $\{e_1, \dots, e_m\}$ 和 $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ 分别为 $T_x X$ 和 $T_{f(x)} Y$ 的标准正交基。置

$$\mathcal{I}^m_k := \left\{ I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{Z}^k \,|\, 0 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m \right\}.$$

对于 $I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}^m_k$, $J = (j_1, \dots, j_k) \in \mathcal{I}^n_k$，我们记为

$$e_I := e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}, \quad e'_J := e'_{j_1} \wedge \cdots \wedge e'_{j_k}.$$

于是我们有

$$\Phi_{(x,f(x))} = \sum_{I \in \mathcal{I}^m_k, J \in \mathcal{I}^n_k} \Phi_{IJ} (*_g e_I) \wedge e'_J$$

对于某些 $\Phi_{IJ} \in \mathbb{R}$ 和

$$\{(1_X, f)^* \Phi\}_x = \sum_{I,J} \Phi_{IJ} (*_g e_I) \wedge df^*_x e'_J.$$

若记 $(df_x)_{IJ}$ 为一个 $k \times k$ 矩阵，其 (p, q)-分量由 $g(df_x(e_{i_q}), e'_{j_p})$ 给出，则有

$$(*_g e_I) \wedge df^*_x e'_J = \det((df_x)_{IJ}) \mathrm{vol}_g|_x \leq k! |df_x|^k \mathrm{vol}_g|_x,$$

因此，我们可以看到

$$\{(1_X, f)^* \Phi\}_x \leq \left(\sum_{I,J} |\Phi_{IJ}| \right) k! |df_x|^k \mathrm{vol}_g|_x.$$

由于 $|\Phi_{x,\ f(x)}|^2 = \sum_{I,\ J} |\Phi_{I,\ J}|^2$，我们有

$$(1_X, f)^*\Phi \le k!(\#\mathcal{I}_k^m)(\#\mathcal{I}_k^n) \sup_{x,y} |\Phi_{(x,y)}| \sigma_k(f) \mathrm{vol}_g,$$

这就说明了该断言。 □

对于 $f \in C^\infty(X,Y)$，用 $[f^*]^k$ 表示 $H^k(Y,\mathbb{R}) \to H^k(X,\mathbb{R})$ 的拉回。对于闭形式 $\alpha \in \Omega^k(Y)$，用 $[\alpha] \in H^k(Y,\mathbb{R})$ 表示其上同调类。令

$$H^k_{\mathrm{bdd}}(Y,\mathbb{R}) := \left\{ [\alpha] \in H^k(Y,\mathbb{R}) |\, \alpha \in \Omega^k(Y),\, d\alpha = 0,\, \sup_{y\in Y} h(\alpha_y, \alpha_y) < \infty \right\}.$$

这是 $H^k(Y,\mathbb{R})$的一个子空间，并且当 Y紧致时，我们有 $H^k_{\mathrm{bdd}}(Y,\mathbb{R}) = H^k(Y,\mathbb{R})$。记 $[f^*]^k_{\mathrm{bdd}}$为 $[f^*]^k$在 $H^k_{\mathrm{bdd}}(Y,\mathbb{R})$上的限制。固定 $H^k(X,\mathbb{R})$和 $H^k_{\mathrm{bdd}}(Y,\mathbb{R})$的基，我们得到 $[f^*]^k_{\mathrm{bdd}}$的矩阵 $P = P([f^*]^k_{\mathrm{bdd}}) \in M_{N,d}(\mathbb{R})$，其中 $d = \dim H^k_{\mathrm{bdd}}(Y,\mathbb{R})$且 $N = \dim H^k(X,\mathbb{R})$。令$|P| := \sqrt{\mathrm{tr}({}^tPP)}$，这可能取决于基的选择。这里，由于 d可能变为无穷大，我们可能有 $|P| = \infty$。

定理 4.2。设(X^m, g)和(Y^n, h) 是黎曼流形，且 X是紧致且定向的。对于任意 $1 \le k \le m$，存在一个常数 $C > 0$，其仅取决于 k、(X,g)、(Y,h) 以及 $H^k(X,\mathbb{R})$、 $H^k_{\mathrm{bdd}}(Y,\mathbb{R})$ 的基，使得对于任意 $f \in C^\infty(X,Y)$，我们有

$$\mathcal{E}_k(f) \ge C|P([f^*]^k_{\mathrm{bdd}})|.$$

特别地，如果 $[f^*]^k_{\mathrm{bdd}}$ 是非零映射，那么 $\mathcal{E}_k|_{[f]}$ 的下确界为正。

证明。取有界闭 k-形式 $\beta_1, \dots, \beta_d \in \Omega^k(Y)$，使得 $\{[\beta_l]\}_l$是 $H^k_{\mathrm{bdd}}(Y,\mathbb{R})$ 的一组基。

根据霍奇理论， $H^k(X)$与调和k-形式空间在向量空间意义下同构。因此，对于 $H^k(X,\mathbb{R})$的任意一组基，都存在对应的调和 k-形式空间的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \Omega^k(X)$。令 $G_{ij} := \int_X \alpha_i \wedge *_g\alpha_j$，它是对称正定的。

定义 $P = (P_{ij}) \in M_{N,d}(\mathbb{R})$ 为 $[f^*]^k_{\mathrm{bdd}}([\beta_j]) = \sum_i P_{ij}[\alpha_i]$。如果我们令

$$\Phi := \sum_{i,j} P_{ij}\beta_j \wedge (*_g\alpha_i),$$

那么，每个 $\beta_j \wedge (*_g\alpha_i)$ 都是闭的，并且满足引理 4.1 的假设，因为 X 是紧致的，而 β_j 是有界的。取引理 4.1 中的常数 $C_{ij} > 0$ 。这里， C_{ij}仅取决于 m、n、k 和 α_i、β_j。那么，对于任意

$f \in C^\infty(X,Y)$，我们有

$$\begin{aligned}(1_X,f)^*\{\beta_j \wedge (*_g\alpha_i)\} &\leq C_{ij}\sigma_k(f)\mathrm{vol}_g,\\ (1_X,f)^*\Phi &\leq \sum_{i,j} C_{ij}|P_{ij}|\sigma_k(f)\mathrm{vol}_g\\ &\leq \sqrt{\sum_{i,j} C_{ij}^2}|P|\sigma_k(f)\mathrm{vol}_g,\end{aligned}$$

因此

$$\mathcal{E}_k(f) \geq \left(\sum_{i,j} C_{ij}^2\right)^{-1/2} |P|^{-1}\int_X (1_X,f)^*\Phi.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}\int_X (1_X,f)^*\Phi &= \sum_{i,j}\int_X P_{ij} f^*\beta_j \wedge (*_g\alpha_i)\\ &= \sum_{i,j}\int_X P_{ij}\sum_k P_{kj}\alpha_k \wedge (*_g\alpha_i)\\ &= \sum_{i,j,k} P_{ij}P_{kj}G_{ki}.\end{aligned}$$

若我们将 $\lambda > 0$ 称为 $(G_{ij})_{i,\ j}$的最小值特征值，则有$\sum_{i,\ j,\ k} P_{ij}P_{kj}G_{ki} \geq \lambda|P|^2$。因此得到

$$\mathcal{E}_k(f) \geq \lambda\left(\sum_{i,j} C_{ij}^2\right)^{-1/2}|P|.$$

□

注 4.3. 将上述定理与命题 3.1 结合起来，我们还得到任意 $p \geq k$ 下 $\mathcal{E}_p$ 的下界。

5. Energy of the identity maps

在本节中，我们考察紧致定向黎曼流形 X 上的恒等映射何时使能量达到最小值。在这里，我们考虑能量族。对于黎曼流形(X^m,g)、(Y^n,h)以及点 $x \in X$、$y \in Y$，取一个线性映射 A: $T_xX \to T_yY$。固定 T_xX 和 T_yY的标准正交基，我们可以将 A 视为一个 $n \times m$阶矩阵。记 ${}^tA \cdot A$ 的特征值为 a_1、 ... 、 $a_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，则置

$$|A|_p := \left(\sum_{i=1}^m a_i^{p/2}\right)^{1/p}$$

对于 $p > 0$。然后， $|A|_p$ 与所选的 T_xX 标准正交基无关。对于光滑映射 f: $X \to Y$，令

$$\sigma_{p,q}(f)|_x := |df_x|_p^q,$$
$$\mathcal{E}_{p,q}(f) := \int_X \sigma_{p,q}(f)\mathrm{vol}_g.$$

注意，$\sigma_{2,\ p} = \sigma_p$ 且 $\mathcal{E}_{2,\ p} = \mathcal{E}_p$。

从现在起，我们考虑 $(Y,h) = (X,g)$ 以及一个映射 f: $X \to X$。令 1_X为 X的恒等映射。

命题 5.1. 若 1_X 使 $\mathcal{E}_{p,\ q}|_{[1_X]}$最小化，则对于任意 $p' \geq p$ 和 $q' \geq q$，它也使 $\mathcal{E}_{p',\ q'}|_{[1_X]}$最小化。

证明。首先，对于任意光滑映射 f，我们有

$$|df_x|_p \leq m^{1/p-1/p'}|df_x|_{p'},$$
$$\mathcal{E}_{p,q}(f) \leq m^{q/p-q/p'}\mathrm{vol}_g(X)^{1-q/q'}\left(\int_X |df|_{p'}^{q'}\mathrm{vol}_g\right)^{q/q'},$$

根据 H¨older 不等式，可得 $\mathcal{E}_{p',\ q'}(f) \geq C\mathcal{E}_{p,\ q}(f)^{q'/q}$ ，其中 $C > 0$为某个常数。此外，对于 $f = 1_X$，等号成立。因此，我们可以看到

$$\inf \mathcal{E}_{p',q'}|_{[1_X]} \geq \inf C\mathcal{E}_{p,q}^{q'/q}|_{[1_X]} = C\mathcal{E}_{p,q}(1_X)^{q'/q} = \mathcal{E}_{p',q'}(1_X) \geq \inf \mathcal{E}_{p',q'}|_{[1_X]}.$$

□

命题5.2（参见[7, 引理2.2]）。设(X,g)是一个维数为 m 的紧致定向黎曼流形。那么 1_X 在其同伦类中使$\mathcal{E}_{1,m}$ 最小。

证明。证明基本上由 [7, 引理 2.2]给出。对于任意映射f: $X \to X$，我们可以看到

$$f^*\mathrm{vol}_g = \det(df)\mathrm{vol}_g \leq m^{-m}\sigma_{1,m}(f)\mathrm{vol}_g.$$

这里，第二个不等式由该不等式得出。

$$\frac{\sum_{i=1}^m a_i}{m} \geq \left(\prod_{i=1}^m a_i\right)^{1/m}$$

对于任意 $a_i \geq 0$。因此，我们可以看到

$$\mathcal{E}_{1,m}(f) \geq m^m \int_X f^*\mathrm{vol}_g.$$

此外，当 $f = 1_X$ 时等式成立。 □

接下来我们考虑上述命题的类比。我们假设X 具有一个非平凡的平行 k-形式。

记 g_0 为 $\mathbb{R}^m$上的标准度量，它也诱导了$\Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*$上的度量。设 $\varphi_0 \in \Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*$ 并固定 $\mathbb{R}^m$的一个定向。对于定向流形 X上的 k-形式 φ和黎曼度量 g ， 我们称(g_0,φ_0)

是(g,φ)的局部模型，如果对任意 $x\in X$ 存在保定向的等距 $I\colon \mathbb{R}^m\to T_xX$ 使得 $I^*(\varphi|_x)=\varphi_0$。

记 $*_{g_0}\colon \Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*\to\Lambda^{m-k}(\mathbb{R}^m)^*$ 由标准度量诱导的霍奇星算子，并令$\mathrm{vol}_{g_0}\in\Lambda^m(\mathbb{R}^m)^*$ 为体积形式。首先，我们证明局部模型（g_0,φ_0）的以下命题。

命题5.3。设 (g_0,φ_0) 如上。假设当 $|u|_{g_0}=1$ 时，$|\iota_u\varphi_0|_{g_0}$ 独立于 $u\in\mathbb{R}^m$。我们有

$$A^*\varphi_0\wedge *_{g_0}\varphi_0\le\frac{|\varphi_0|^2_{g_0}}{m}|A|^k_k\mathrm{vol}_{g_0}$$

对于任意 $A\in M_m(\mathbb{R})$。此外，如果 $A=\lambda T$ 对于 $\lambda\in\mathbb{R}$, $T\in O(m)$ 且 $A^*\varphi_0=\lambda'\varphi_0$ 对于某个 $\lambda'\ge 0$，那么我们有该等式。

证明。对于任意 A，我们可以取（$\mathbb{R}^m$）* 的定向标准正交基 $\{e_1,\dots,e_m\}$ 和e'_1, ..., e'_m，使得对于某个 $a_i\in\mathbb{R}$，有 $A^*e'_i=a_ie_i$。我们令

$$\varphi_0=\sum_{I\in\mathcal{I}^m_k}F_Ie_I=\sum_{I\in\mathcal{I}^m_k}F'_Ie'_I$$

对于某些 $F_I,F'_I\in\mathbb{R}$。现在，令 $a_I:=a_{i_1}\cdots a_{i_k}$对于 $I=(i_1,\dots,i_k)\in\mathcal{I}^m_k$。那么我们有 $A^*\varphi_0=\sum_I F'_Ia_Ie_I$和

$$\begin{aligned}A^*\varphi_0\wedge *_{g_0}\varphi_0=g_0(A^*\varphi_0,\varphi_0)\mathrm{vol}_{g_0}&=\sum_I F_IF'_Ia_I\mathrm{vol}_{g_0}\\&\le\sum_I|F_IF'_I||a_I|\mathrm{vol}_{g_0}.\end{aligned}$$

若令 $\{I\}:=\{i_1,\dots,i_k\}$，则

$$|a_I|=\left(|a_{i_1}|^k\cdots|a_{i_k}|^k\right)^{1/k}\le\frac{1}{k}\sum_{j\in\{I\}}|a_j|^k,$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_I|F_IF'_I||a_I|&\le\frac{1}{k}\sum_I|F_IF'_I|\sum_{j\in\{I\}}|a_j|^k\\&=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^m|a_j|^k\sum_{I\in\mathcal{I}^m_k,j\in\{I\}}|F_IF'_I|.\end{aligned}$$

记由度量 g_0 诱导的同构为 $\hat{}g_0\colon(\mathbb{R}^m)^*\to\mathbb{R}^m$。设。

$$\varphi_1:=\sum_{I\in\mathcal{I}^m_k}|F_I|e_I,\quad\varphi_2:=\sum_{I\in\mathcal{I}^m_k}|F'_I|e_I$$

并定义一个正交矩阵 U: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$乘 $U \circ \hat{g}_0(e_j) = \hat{g}_0(e'_j)$。现在我们可以看到

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_k^m, j\in\{I\}} |F_I F'_I| = g_0\left(\iota_{\hat{g}_0(e_j)}\varphi_1, \iota_{\hat{g}_0(e_j)}\varphi_2\right) \le \left|\iota_{\hat{g}_0(e_j)}\varphi_1\right|_{g_0} \cdot \left|\iota_{\hat{g}_0(e_j)}\varphi_2\right|_{g_0}$$
$$= \left|\iota_{\hat{g}_0(e_j)}\varphi_0\right|_{g_0} \cdot \left|\iota_{\hat{g}_0(e_j)}(U^*\varphi_0)\right|_{g_0}$$

and

$$\left|\iota_{\hat{g}_0(e_j)}(U^*\varphi_0)\right|_{g_0} = \left|U^*(\iota_{U\circ\hat{g}_0(e_j)}\varphi_0)\right|_{g_0} = \left|\iota_{U\circ\hat{g}_0(e_j)}\varphi_0\right|_{g_0}.$$

因此，根据假设，我们可以看出 $C = \left|\iota_{\hat{g}_0(e_j)}\varphi_0\right|_{g_0} = \left|\iota_{U\circ\hat{g}_0(e_j)}\varphi_0\right|_{g_0}$与 j 无关，因此我们有 $\sum_{I\in\mathcal{I}_k^m,\ j\in\{I\}} |F_I F'_I| \le C^2$并且

$$A^*\varphi_0 \wedge *_{g_0}\varphi_0 \le \frac{C^2}{k}\sum_{j=1}^m |a_j|^k \mathrm{vol}_{g_0} = \frac{C^2}{k}|A|_k^k \mathrm{vol}_{g_0}.$$

在上述不等式中，当 $A = 1_m$ 时等号成立，因此我们可以确定常数 C。此外，我们还可以验证，当 $A = \lambda T$ 时等号成立，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$, $T \in O(m)$，且 $A^*\varphi_0 = \lambda'\varphi_0$ 对某个 $\lambda' \ge 0$ 成立。□

命题5.4. 设(X^m, g)为紧致定向黎曼流形，且 $\varphi \in \Omega^k(X)$为调和形式。假设存在(g, φ)的局部模型(g_0, φ_0)，且当 $|u|_{g_0} = 1$时 $|\iota_u\varphi_0|_{g_0}$ 与 $u \in \mathbb{R}^m$ 无关。记 pr_i: $X \times X \to X$ 为到第 i个分量的投影，其中 $i = 1, 2$。则$\Phi = m|\varphi_0|_{g_0}^{-2}\mathrm{pr}_2^*\varphi \wedge \mathrm{pr}_1^*(*_g\varphi)$是一个$\sigma_{k,k}$-校准形式。此外，任何满足 $f^*\varphi = \varphi$ 的等距f: $X \to X$ 都是$(\sigma_{k,k}, \Phi)$-校准的。

证明。 Φ是$\sigma_{k,k}$-校准形式当且仅当

$$f^*\varphi \wedge *_g\varphi \le \frac{|\varphi_0|_{g_0}^2}{m}|df|_k^k \mathrm{vol}_g.$$

通过令 $A = df_x$ 并识别 $\mathbb{R}^m \cong T_xX$，这等价于命题5.3中的不等式。此外，若对所有 $x \in X$ 有$(df_x)^*\varphi|_x = \varphi|_x$且 df_x 为等距，则等号成立。□

接下来我们需要考察何时满足关于 (g_0, φ_0) 的假设。如果 $G \subset SO(m)$ 是一个闭子群，那么 $SO(m)$ 在 $\mathbb{R}^m$ 上的线性作用会诱导出 G 在 $\mathbb{R}^m$ 上的作用。类似地，由于 $SO(m)$ 对 $\Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*$ 的所有 k 都有作用， G 也对它们有作用。在这里，如果子空间 $W \subset \mathbb{R}^m$ 在 G 的作用下保持不变，则必有 $W \subset \mathbb{R}^m$ 等于 $\mathbb{R}^m$ 或 $\{0\}$，此时称 $\mathbb{R}^m$ 是一个不可约的 G 表示。对于 $\varphi_0 \in \Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*$，用 $\mathrm{Stab}(\varphi_0) \subset SO(m)$ 表示 φ_0 的稳定子群。

引理5.5.设 G 是 $SO(m)$ 的闭子群，并假设 $\mathbb{R}^m$ 作为 G-表示是不可约的。此外，假设 $G \subset \mathrm{Stab}(\varphi_0)$。那么，当 $|u|_{g_0} = 1$ 时， $|\iota_u\varphi_0|_{g_0}$ 与 $u \in \mathbb{R}^m$ 无关。

证明。定义线性映射 Ψ: $\mathbb{R}^m \to \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^m)^*$，其定义为 $\Psi(u) := \iota_u\varphi_0$，于是可见 Ψ 是 G-等变映射，因为 G作用保持 φ_0。由于$SO(m)$-作用于 $\Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^m)^*$ 时保持内积，我们可以看到

$$g_0(A\Psi(u), A\Psi(v)) = g_0(\Psi(u), \Psi(v))$$

对于任意 $A \in G$ 和 u, $v \in \mathbb{R}^m$。此外，左端等于$g_0(\Psi(Au)\ \Psi(Av))$，因为 Ψ 是 G-等变的。

现在，令 $e_1, \dots, e_m$ 为 $\mathbb{R}^m$的标准正交基，并定义对称矩阵 $H = (H_{ij})_{i,j}$如下： $H_{ij} := g_0(\Psi(e_i)\ \Psi(e_j))$。于是由上述论证我们有 ${}^tAHA = H$。令 $\lambda \in \mathbb{R}$ 为 H的任意特征值，并记 $V(\lambda) \subset \mathbb{R}^m$ 为与 λ相关的特征子空间。于是我们可以看到， $V(\lambda)$ 在 G-作用下是闭的，因此由不可约性可得 $V(\lambda) = \mathbb{R}^m$，这意味着

$$|\Psi(Au)|^2_{g_0} = \lambda |u|^2_{g_0}$$

对于所有 $u \in \mathbb{R}^m$ 和 $A \in G$。 □

设 (X^m, g) 是一个定向黎曼流形，并记$\mathrm{Hol}_g \subset SO(m)$ 为其全纯群。我们考虑 $(X, g, \varphi, G, g_0, \varphi_0)$，其中 $\varphi \in \Omega^k(X)$ 是闭的，(g_0, φ_0)是 (g, φ) 的一个局部模型，并且 G 是 $SO(m)$ 的一个闭子群，使得 $\mathrm{Hol}_g \subset G \subset \mathrm{Stab}(\varphi_0)$。下面给出一些例子。

TABLE 1. $(X, g, \varphi, G, g_0, \varphi_0)$的示例

(X, g, φ)	m	G	k
K¨ahler流形	$2q$	$U(q)$	2
四元数 K¨ahler 流形	$4q \geq 8$	$Sp(q) \cdot Sp(1)$	4
G_2 流形	7	G_2	3
$Spin(7)$ 流形	8	$Spin(7)$	4

我们可以将命题5.4和引理 5.5应用于上述情形，并得到以下结果。

定理5.6. 设 (X, g, φ) 是一个定向紧致黎曼流形，其几何结构属于表1中的一种，并设 Φ 如命题5.4所述。那么，恒等映射 1_X 是一个 $(\sigma_{k,\ k}, \Phi)$-校准映射。特别地，1_X 在其同伦类中使$\mathcal{E}_{k,\ k}$ 达到最小值。

6. Intersection of Smooth maps

在 [2], Croke 和 Fathi 引入了光滑映射 f 的同伦不变 $X \to Y$，它给出了 2-能量 $\mathcal{E}_2$ 的下界。在本节中，我们将比较我们的不变与 [2] 中的不变。

首先，我们回顾 [2]中引入的光滑映射的相交。令 (X, g)和 (Y, h)为黎曼流形，并假设 X 是紧致的。这里，我们不假设 X 是定向的，而是使用 g 的体积测度 μ_g，而不是体积形式。

Croke 和 Fathi 定义了以下量

$$i_f(g,h) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{S_g(X)} \phi_t(v) d\mathrm{Liou}_g(v)$$

对于光滑映射 $f\colon X \to Y$，并称其为 f 的相交。这里，Liou_g 是单位切丛 $S_g(X)$ 上的刘维尔测度，而 $\phi_t^f(v) = \phi_t(v)$ 是 Y 中与固定端点同伦的所有路径的最小长度

$$s \mapsto f(\gamma_v(s)), \quad 0 \le s \le t,$$

其中，γ_v 是从 $p \in X$ 出发且满足 $\gamma_v'(0) = v \in S_g(X)$ 的测地线。

定理 6.1 ([2])。对于光滑映射 $f\colon X \to Y$，相交 $i_f(g,h)$ 是同伦不变的，也就是说，如果 $[f'] = [f]$，则 $i_f(g,h) = i_{f'}(g,h)$。此外，对于任意 f，我们有

$$\int_X \sigma_2(f) d\mu_g \ge \frac{m}{V(S^{m-1})^2 \mu_g(X)} i_f(g,h)^2,$$

其中，$V(S^{m-1})$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中单位球面 S^{m-1} 的体积。

首先，我们引入 $i_f(g,h)$ 的变体，并改进上述定理。我们定义

$$j_f(g,h) := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \int_{S_g(X)} \phi_t(v)^2 d\mathrm{Liou}_g(v).$$

定理 6.2。对于光滑映射 $f\colon X \to Y$, $j_f(g,h)$ 在同伦下不变。此外，对于任意 f，我们有

$$\int_X \sigma_2(f) d\mu_g \ge \frac{m}{V(S^{m-1})} j_f(g,h),$$

其中，当且仅当 f 所映射的测地线像在端点固定的同伦类中长度最短时，等号成立。

证明。证明与定理 6.1 的证明类似。$j_f(g,h)$ 的同伦不变性与 $i_f(g,h)$ 的情形相同。参见 $[2, \text{引理 } 1.3]$ 的证明。

接下来我们证明该不等式。这里我们可以看到

$$\int_X \sigma_2(f) d\mu_g = \frac{m}{V(S^{m-1})} \int_{S_g(X)} |df(v)|_h^2 d\mathrm{Liou}_g(v).$$

对于 $s \ge 0$，令 $g_s\colon S_g(X) \to S_g(X)$ 为测地流。由于 g_s 保持刘维尔测度，我们可以看到

$$\begin{aligned}\int_{S_g(X)} |df(v)|_h^2 d\mathrm{Liou}_g(v) &= \frac{1}{t} \int_{S_g(X)} \left(\int_0^t |df(g_s v)|_h^2 ds \right) d\mathrm{Liou}_g(v) \\ &= \frac{1}{t} \int_{S_g(X)} \mathcal{E}_2(f \circ \gamma_v|_{[0,t]}) d\mathrm{Liou}_g(v),\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{E}_2$ 是 (Y,h) 中曲线的 2-能量。若 $L(c)$ 是 c 的长度，则有

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2(c) = \int_a^b |c'(s)|_h^2 ds &\geq \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b |c'(s)|_h ds\right)^2 \\ &= \frac{1}{b-a}\min_c L(c)^2,\end{aligned}$$

因此

$$\int_{S_g(X)} |df(v)|_h^2 d\mathrm{Liou}_g(v) \geq \frac{1}{t^2}\int_{S_g(X)} \phi_t(v)^2 d\mathrm{Liou}_g(v)$$

对于任意 $t > 0$。因此，通过考虑$t \to \infty$，我们得到第二个断言。最后，我们考虑以下条件：

$$\int_{S_g(X)} |df(v)|_h^2 d\mathrm{Liou}_g(v) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_{S_g(X)} \phi_t(v)^2 d\mathrm{Liou}_g(v)$$

成立。为考察这一点，我们证明

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_{S_g(X)} \phi_t(v)^2 d\mathrm{Liou}_g(v) = \inf_{t>0}\frac{1}{t^2}\int_{S_g(X)} \phi_t(v)^2 d\mathrm{Liou}_g(v). \tag{2}$$

由 [2, 引理 1.2]，可知

$$\phi_{t+t'}(v) \leq \phi_{t'}(g_t v) + \phi_t(v)$$

对于任意的 t、$t' \geq 0$。然后结合柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{S_g(X)} \phi_{t+t'}(v)^2 d\mathrm{Liou}_g(v) \leq &\int_{S_g(X)} \phi_{t'}(g_t v)^2 d\mathrm{Liou}_g(v) \\ &+ 2\sqrt{\int_{S_g(X)} \phi_{t'}(g_t v)^2 d\mathrm{Liou}_g(v)\int_{S_g(X)} \phi_t(v)^2 d\mathrm{Liou}_g(v)} \\ &+ \int_{S_g(X)} \phi_t(v)^2 d\mathrm{Liou}_g(v).\end{aligned}$$

由于刘维尔测度在测地流下保持不变，我们可以看到$\int_{S_g(X)} \phi_{t'}(g_t v)^2 d\mathrm{Liou}_g(v) = \int_{S_g(X)} \phi_{t'}(v)^2 d\mathrm{Liou}_g(v)$，因此

$$\int_{S_g(X)} \phi_{t+t'}(v)^2 d\mathrm{Liou}_g(v) \leq \left(\sqrt{\int_{S_g(X)} \phi_{t'}(v)^2 d\mathrm{Liou}_g(v)} + \sqrt{\int_{S_g(X)} \phi_t(v)^2 d\mathrm{Liou}_g(v)}\right)^2.$$

如果令

$$P_t := \sqrt{\int_{S_g(X)} \phi_t(v)^2 d\mathrm{Liou}_g(v)},$$

于是我们有 $P_{t+t'} \leq P_t + P_{t'}$，因此

$$\inf_{t>0}\frac{P(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{P(t)}{t}.$$

因此我们得到（2）。

现在，假设

$$\int_X \sigma_2(f)d\mu_g = \frac{m}{V(S^{m-1})} j_f(g,h).$$

通过上述论证，我们可以看出，对于任意 $v \in S_g(X)$ 和 $t>0$，$f\circ\gamma_v|_{[0,t]}$ 都是测地线，而 $L(f\circ\gamma_v|_{[0,t]})$ 给出了最小值。

$$\left\{L(c)\middle|\, c \text{ is homotopic with the fixed endpoints to } f\circ\gamma_v|_{[0,t]}\right\}.$$

□

注 6.3. 根据柯西-施瓦茨不等式，我们有、】【

$$j_f(g,h) \geq \frac{i_f(g,h)^2}{\mu_g(X)V(S^{m-1})},$$

因此，定理 6.2 中的不等式蕴含定理 6.1 中的不等式。

接下来，我们在平坦环面的情形下计算 $j_f(g,h)$，并将其与命题 3.6 得到的下界进行比较。设$(\mathbb{T}^m, g)$和$(\mathbb{T}^n, h)$如第 3.4 小节所述，并取 x 作为 $\mathbb{T}^m$ 上的坐标，取 y 作为 $\mathbb{T}^n$ 上的坐标，如第 3.4 小节所述。

命题 6.4. 设 $f\colon \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n$是一个光滑映射，使得 $f^*([dy^j]) = \sum_i P_i^j [dx^i]$ 对于 $P = (P_i^j) \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$成立。若我们按第 3.4 小节中的 (1) 定义 Φ，则有

$$j_f(g,h) = \frac{V(S^{m-1})}{m} \int_{\mathbb{T}^m} (1_{\mathbb{T}^m}, f)^*\Phi.$$

证明. 首先，我们可以看出 f 与由$x \mapsto Px$ 给出的映射同伦，其中 $x \in \mathbb{T}^m$，因此只需令$f(x) = {}^tPx$并证明该等式即可。

由于经 f 映射后的测地线像在其固定端点的同伦类中长度最小，因此由定理 6.2 可得 $\mathcal{E}_2(f) = V^{\frac{m}{(S^{m-1})}} j_f(g,h)$。我们可以直接计算 $\mathcal{E}_2(f)$，得到

$$\mathcal{E}_2(f) = \int_{\mathbb{T}^m} |df|^2 \mathrm{vol}_g = \sum_{i,j,k,l} h_{ij} P_k^i P_l^j g^{kl} \mathrm{vol}_g(\mathbb{T}^m) = \|P\|^2 \mathrm{vol}_g(\mathbb{T}^m).$$

此外，根据第 3.4 小节中的计算，我们已证明

$$\int_{\mathbb{T}^m} (1_{\mathbb{T}^m}, f)^*\Phi = \|P\|^2 \mathrm{vol}_g(\mathbb{T}^m).$$

因此，

$$\int_{\mathbb{T}^m} (1_{\mathbb{T}^m}, f)^*\Phi = \|P\|^2 \mathrm{vol}_g(\mathbb{T}^m) = \frac{m}{V(S^{m-1})} j_f(g,h).$$

□

References

[1] RaoulBott 和 Loring W. Tu。《 *Differential forms in algebraic topology*》，*Graduate Texts in Mathematics*第82卷。Springer-Verlag，纽约-柏林，1982年。[2] C.Croke 和A. Fathi。能量与交数之间的不等式。《 *Bull. London Math. Soc.* 22 5 489 494, 1990 》，0：–。[3] Christopher B. Croke。映射的能量下界。《 *Duke Math. J.*》，55(4)：901–908，1987年。[4] JamesEells,Jr. 和 J. H.Sampson。黎曼流形的调和映射。《*Amer. J. Math.*》，86：109–160，1964。《[5] PhilipHartman。关于同伦调和映射。《 *Canadian J. Math.*》，19：673–687，1967年。[6] Reese Harvey 和 H.Blaine Lawson。校准几何。《 *Acta Mathematica*》，148 1 47 157，1982年( )：–。[7] Joseph Hoisington。校准形式与秩-1对称空间的能量极小映射。《 *arXiv preprint arXiv:2112.03160*》，2021年。[8] Andr´ ´ ´ ¨ *Rend. Sem.* e *Mat. Fis. Milano* 39 186 195, 1969 Lichnerowicz。调和应用与卡勒流形。，：–。[9] Shihshu Walter Wei。用 p-调和映射表示同伦群和映射空间。《 *Indiana Univ. Math. J.*》，47(2)：625–670，1998年。[10] BrianWhite。同伦类中能量泛函的下确界。《 *J. Differential Geom.* 23 2 127 142, 1986 》，0：–。

[11] W. Wirtinger。一种行列式恒等式及其在欧几里得和厄米度量下解析簇上的应用。《¨》，44 1 343 365，1936年 ( )：–。

Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku, Yokohama 223-8522, Japan
Email address: hattori@math.keio.ac.jp