关于基于Spalart-Allmaras模型的合成湍流特征长度尺度

郭启龙[1], 刘鹏鑫[1], 李晨[1]*, 孙东[1], 袁显旭[1]

1. 空气动力学国家重点实验室，绵阳 621000，中华人民共和国

摘要：在混合RANS-LES模拟中，应在RANS到LES的界面处添加适当的湍流脉动，以尽可能快速地驱动数值解恢复为物理上可解析的湍流。此类湍流生成方法大多需要了解背景RANS模型中特征长度尺度的分布，这对恢复过程至关重要。由于Spalart-Allmaras（S-A）模型具有单方程特性，其长度尺度的近似并非易事。作为直接类比，可根据普朗特混合长度的定义推导出近似值。此外，本文提出了一种新的代数表达式，用于近似S-A模型的固有长度尺度。推导这一新表达式时，充分利用了S-A模型内在的输运机制。本文将该新表达式用于合成湍流生成，并对典型壁面湍流流动进行混合RANS-LES模拟。对比结果表明，这种新长度尺度用于在LES入口生成合成湍流是可行的，且性能有所提升。

关键词: 长度尺度, 合成湍流, 混合 RANS-大涡模拟, Spalart-Allmaras模型

1. 引言

混合雷诺平均纳维–斯托克斯（RANS）–大涡模拟（大涡模拟）方法在过去几十年中不断发展。这类方法结合了 RANS 方法的高效率和大涡模拟方法解析大尺度湍流结构的能力。在混合方法中，仅在需要解析大尺度结构的区域采用大涡模拟，而其余区域则使用 RANS 方法对平均流动进行建模。文献中提出了许多混合策略。Frohlich 和 von Terzi [1] 总结了混合 RANS–大涡模拟方法的基本概念、分类及其局限性。当混合方法以分区或嵌入方式应用时，两种方法所覆盖的区域之间总会存在一些人工界面。这些界面上的耦合边界条件至关重要，因为界面下游大涡模拟的性能将很大程度上

*通讯作者： lichen@skla.cardc.cn

取决于上游非定常流动的特征。应在界面处添加适当的湍流脉动，否则大涡模拟区域内会出现较大的适应区，以形成物理上得到解析的湍流。过大的适应区会降低整个下游大涡模拟区域的解的精度。

基于对 Navier-Stokes（N-S）方程进行统计平均的 RANS 方法只求解平均流动，并通过半经验模型计算湍流统计量的影响。近似的平均流动和低阶统计量可用于为 LES入口合成湍流脉动。合成脉动的一项常见基本原则是，基于 RANS 结果得到的统计信息必须尽可能接近真实物理湍流。RANS 提供的统计信息可通过多种方法加以利用，例如合成湍流生成器（STG）[2, 3], 、合成涡方法（SEM）[4, 5], 、合成傅里叶模态方法[6, 7]以及动态强迫方法[8]。Tabor 和 Baba-Ahmadi[9], 、Dhamankar 等人[10], 以及 Wu[11]对此进行了全面综述。

近期，Probst 等人[12] 评估了 SEM 和 STG 在轻微分离的壁面湍流中作为灰区缓解工具的性能。结果表明，此类合成脉动确实有助于提高混合 RANS-LES 计算的精度。Patterson 等人[13] 研究了 STG 用于生成直接数值模拟（DNS）入口流动时的偏差和时间收敛误差。他们开发了一种显式方法，用于测量由随机数数组引入的这些误差，并可借此优化随机数的选取，从而尽可能减小误差。一般而言，这类方法的基本输入是从 RANS 计算中获得的有限统计信息。在这方面，两方程 RANS 模型天然优于单方程 RANS 模型，因为前者对两个特征尺度各自的输运进行建模，因此能够毫无歧义地近似二阶统计量。而对于单方程 RANS 模型，只直接求解一个输运方程来表征一个特征尺度。因此，要适当近似二阶统计量，就必须为另一个特征尺度（通常为特征长度尺度）补充恰当的代数表达式。因此，将单方程模型与 SEM 或 STG 配合使用并非易事。事实上，文献中的背景 RANS 模型大多为两方程模型[2-5]。

在航空航天工程领域，Spalart和Allmaras提出的单方程模型[14], 下文称为S-A模型，在过去几十年中一直是最为成功的湍流模型之一。因此，S-A模型在混合模拟中充当RANS部分具有很大的潜力。这促成了当前关于S-A模型长度尺度近似的研究，而该近似对于采用类似于LES入口处理的.....是不可或缺的

上述 SEM 或 STG。

在本文中，我们选择[2, 3] 中的STG来生成施加于大涡模拟入口的人工湍流脉动。STG基于一系列随机生成的傅里叶模态的叠加，所有随机量仅在模拟开始时定义一次，这使得该方法易于实现且高效。STG所需的二阶统计量是预先给定的模型能谱，这对于构造傅里叶模态至关重要。模型能谱由单一长度尺度表征，该长度尺度代表能量最大的含能模态的波长。如上所述，对于两方程模型，例如k-ω 剪切应力输运模型[15]，（下文简称SST模型），可以很容易地获得该长度尺度。当背景RANS改为S-A模型时，应找到一个代数表达式来近似该长度尺度。即使给出了一个可行的代数表达式，如果不对与该长度尺度相关的输运方程进行显式建模，它也无法充分考虑历史信息和边界信息的影响。代数表达式带来的这一缺陷可能会影响合成湍流向真实湍流的恢复过程。

针对上述问题，本文旨在为S-A模型中的STG提供作为输入的长度尺度的合理近似，并研究长度尺度与恢复过程之间的联系。研究将表明，可根据普朗特混合长度的定义获得可行的近似。作为一种替代方法，本文论证了可通过输运方程推导出S-A模型长度尺度的内在方程。对典型壁面湍流流动进行的数值测试表明，采用新提出的表达式可以改善恢复过程。

本文结构安排如下。第2节介绍STG的主要流程以及长度尺度所发挥的作用。第3节提出S-A模型长度尺度的一些可行近似，并推导湍流长度尺度的新型代数表达式。此外，基于湍流边界层的高分辨率模拟数据进行了后验测试。第4节采用基于S-A模型的STG [2, 3] 中的长度尺度表达式，为混合RANS-LES模拟构造入口湍流脉动。本文选取两种典型的壁面约束湍流流动算例，即平板边界层和充分发展通道流，对比接口下游的壁面摩擦、二阶统计量和展向积分长度尺度。结论见第5节。

2. 合成湍流生成方法

2.1 基本公式

[2, 3] 中的STG方法已成功应用于采用SST模型的若干湍流问题模拟。其主要流程是利用入口处RANS模型计算得到的雷诺应力张量构造湍流速度脉动，具体如下

$$u_i'(\vec{r},t) = a_{ij} v_j'(\vec{r},t), \tag{1}$$

其中， u_i' 对于i=1,2,3，分别对应速度脉动在x_i方向上的分量。a_{ij} 由雷诺应力张量R_{ij}的 Cholesky 分解定义，其形式为

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \sqrt{R_{11}} & 0 & 0 \\ R_{21}/a_{11} & \sqrt{R_{22}-a_{21}^2} & 0 \\ R_{31}/a_{11} & (R_{32}-a_{21}a_{31})/a_{22} & \sqrt{R_{33}-a_{31}^2-a_{32}^2} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

偏应力通过 Bousinessq 近似计算，而法向应力等于湍动能k的 2/3。向量 v_j' 由时空傅里叶模态叠加构成，并根据 von Karman 谱模型 $E(\xi)$中的归一化振幅进行加权，其形式为

$$\mathbf{v}'(\vec{r},t) = \sqrt{6}\sum_{n=1}^{N} \sqrt{q^n}\,[\boldsymbol{\sigma}^n \cos(\xi^n \boldsymbol{d}^n \cdot \boldsymbol{r}'(t) + \varphi^n)], \tag{3}$$

$$q^n = \frac{E(\xi^n)\Delta\xi^n}{\sum_{n=1}^{N} E(\xi^n)\Delta\xi^n}. \tag{4}$$

其中，上标“n”表示第n个傅里叶模态，q为局部振幅， $\boldsymbol{\xi} = \xi \cdot \boldsymbol{d}$ 为波数向量，其模长为ξ 。 $\boldsymbol{d}$ 为方向在球面上均匀分布的随机单位向量。 $\boldsymbol{\sigma}$ 为另一个与 $\boldsymbol{d}$垂直的随机向量。φ 为在[0, 2π]中均匀分布的随机相位。时变向量 $\boldsymbol{r}'(t)$和模型谱 $E(\xi)$的形式为

$$\boldsymbol{r}' = \{x_1', x_2', x_3'\},\ x_1' = \frac{2\pi}{\xi^n \cdot max\{L_e(\boldsymbol{r})\}}(x_1 - U_0 t),\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3, \tag{5}$$

$$E(\xi) = \frac{(\tilde{\xi}_e)^4}{\left[1+2.4(\tilde{\xi}_e)^2\right]^{17/6}} \cdot f_\eta \cdot f_{cut} \quad with\ \tilde{\xi}_e \equiv \xi \cdot L_e/2\pi, \tag{6}$$

其中，U_0 是界面处的宏观速度，f_η 和f_{cut} 是经验函数， L_e 是含能量最多模态的长度尺度。上述量和函数的其他详细表达式可参见文献[3]。

在上述方程中，背景RANS 模型提供的量包括湍动能k、湍流涡黏度 ν_t 和特征长度尺度 L_e。前两个量（k 和 ν_t）用于构成矩阵 a_{ij} （或R_{ij}），而特征长度尺度 L_e 用于描述方程 (6) 中的归一化模型能谱，这将在下一小节中讨论。

2.2 模型能谱

要确定模型能谱，至少需要两个特征尺度，即一个

用于表征动能，另一个用于提供长度尺度；这两个尺度必须通过 RANS 计算获得。

对于基于涡黏性假设的RANS 模型，与湍动能相关的尺度是明确且直接的，因为湍动能的输运方程可以通过相对较少的经验性处理从N-S 方程推导得到。事实上，在一些 RANS 方法中，动能的输运是直接建模的，例如k-ε 模型、k-ω 模型等。对于不直接涉及湍动能的模型，可以根据以下假设得到：雷诺剪切应力与湍动能之比为常数 [16], ，即 $R_{12} \approx \beta_r k$，其中 $\beta_r = 0$。3是 Bradshaw 常数。考虑 Boussinesq 假设，湍动能可以近似表示为

$$k \approx \frac{2\nu_t S_{12}}{\beta_r} \approx \frac{\nu_t S}{\beta_r}, \tag{7}$$

其中 $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$、 $S_{ij} = 0.5$（$\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i$）。图 1 给出了$Re_\theta = 900$ 时湍流边界层的k剖面。将 S-A模型得到的结果与 SST模型的k剖面进行了比较。为便于比较，还展示了 Wu 和 Moin 的直接数值模拟（直接数值模拟）数据中的 R_{12}/β_r 剖面[17] 。可以看出，S-A模型对湍动能的近似是可接受的。

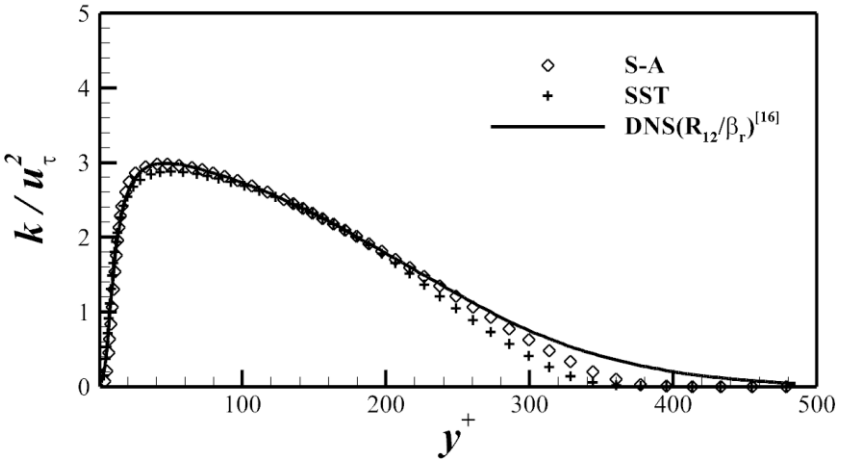


图 1 湍流边界层中 S-A 模型和 SST模型的湍动能分布

另一个特征尺度代表最具能量的含能模态的波长，即L_e 在方程(6) 中。如果通过尺度分辨模拟或实验测量提供了关于湍流统计量的充分信息，则可以得到表征长度尺度的多个积分量，

可以定义湍流。根据[18, 19], , 从真实的冯·卡门模型谱获得的积分长度尺度，几乎等价于最理想化情形（即均匀各向同性湍流）中与含能模态相对应的长度尺度。当涉及壁面约束湍流时，这些长度尺度是空间坐标的函数。对于SST模型，[2] 中建议 L_e 可近似为

$$L_e = min(2d_w, C_l \cdot L_t), \tag{8}$$

其中， d_w 为到壁面的最小距离， L_t 为基于RANS计算中的已知变量定义明确的某个函数长度尺度（也称为湍流长度尺度），且C_l =3.0。项 $2d_w$ 与Townsend模型[20] 一致，该模型指出，湍流边界层中大涡的长度尺度与壁法向距离成正比。当STG的背景RANS采用SST模型时，湍流长度尺度可以根据已知量（k和ω）轻松获得，

$$L_t = k^{1/2}/(C_\mu \omega), \tag{9}$$

采用 C_μ=0.09。然而，当单方程S-A模型用作背景RANS模型时，湍流长度尺度的近似问题并不像第1节讨论的两方程模型那样简单。若要成功地将STG方法与S-A模型结合使用，就必须将湍流长度尺度适当地近似为已知量的代数表达式。

3. S-A模型的长度尺度

在本节中，我们讨论一些 用于近似长度尺度的可选方案，以实现S-A模型与STG之间的耦合。鉴于壁面湍流具有重要的工程应用价值，讨论范围限定于此类流动。除了上述闭合问题之外，自然还需要探讨输入L_e 沿边界层应具有什么样的变化，以实现STG的最佳恢复过程。此外，我们还根据S-A模型的输运方程提出了一个新的湍流长度尺度代数表达式。

3.1 长度尺度的代数表达式

（i）与普朗特混合长度的类比

在湍流边界层中，普朗特混合长度 l_m 定义为

$$\nu_t = l_m^2 \cdot \mathrm{S}. \tag{10}$$

作为 RANS 模型特征长度尺度的一种通用近似，可以合理地假设湍流长度尺度与l_m 之间存在类比关系，由此得到

$$L_t \propto l_m = \sqrt{\frac{\nu_t}{S}}. \tag{11}$$

一些零方程模型的成功在一定程度上证实了普朗特混合长度的有效性。对于湍流边界层，实验测量表明，在对数层中 $l_m = \kappa d_w$ 成立，且κ=0.41 是冯·卡门常数。因此，我们可以将其改写为

$$L_t = \frac{2}{\kappa} l_m = \frac{2}{\kappa}\sqrt{\frac{\nu_t}{S}}. \tag{12}$$

以便在近壁区拟合 Townsend 附着涡模型 ($L_t \approx 2d_w$)。

(ii) 修正普朗特混合长度

根据下一小节中关于长度尺度的后验测试，采用一个常数系数对公式（12）进行修正，修正后变为

$$L_t = \frac{2.7}{\kappa}\sqrt{\frac{\nu_t}{S}}. \tag{13}$$

（iii）Townsend 附着涡模型

根据 [2, 3] 中的原始建议（另请参见方程 (8)），长度尺度进一步限制为不大于Townsend 附着涡模型，即 $L \approx 2d_w$。因此，我们有以下方程：

$$L_e = min\left(2d_w, C_l \cdot \frac{2}{\kappa}\sqrt{\frac{\nu_t}{S}}\right), \tag{14}$$

使用 $C_l = 3.0$。

（iv）新表达式

由于模型方程已对湍流黏度输运的主要机制进行了充分建模和仔细校准，因此将长度尺度与输运方程联系起来是合理的。基于这一思路，我们提出了一个新的湍流长度尺度代数表达式。推导过程如下。

首先，将湍动能的输运方程写为如下形式，以考察其动力学行为：

$$\frac{Dk}{Dt} = \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu\frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i' u_j'} - \frac{1}{\rho}\overline{p' u_j'}\right], \tag{15}$$

其中 $\frac{D(\cdot)}{Dt} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j}$，$\varepsilon$ 为湍流耗散率。需要注意的是，方程 (15) 是直接由雷诺应力张量的输运方程推导而来，没有引入任何近似。它也可视为许多涡黏模型的理论基础。通过雷诺平均运算，湍流级联中的动能耗散由单项 ε 建模。因此，k 的耗散可表示为 $Dk/Dt = -\varepsilon$，这表明湍动能消失的时间尺度可由 $\tilde{t} = k/\varepsilon$ 表征。因此，含能涡在耗散殆尽之前平均移动的空间距离为

$$L = \tilde{u} \cdot \tilde{t} = k^{3/2}/\varepsilon, \tag{16}$$

其中 $\tilde{u} = \sqrt{k}$ 为特征速度。[7] 已表明，在近壁区域，长度尺度（定义为 $k^{3/2}/\varepsilon$）可近似为 $2d_w$ 。事实上，方程 (16) 对标准k-ε 模型 [21] 的湍流长度尺度给出了恰当的估算。

基于上述理解，我们将 S-A 模型的湍流长度尺度重新解释为与建模的动能和湍流耗散率相同的表达式，即方程 (16)。如果适当给定湍流耗散率 ε，则可根据方程 (7) 给出的湍动能确定湍流长度尺度。例如，如果我们将 ε_0 定义为

$$\varepsilon_0 = C_\varepsilon \nu_t S^2, \tag{17}$$

结合 $C_\varepsilon = \beta_r^{-3/2} \cdot \kappa/2 \approx 1.248$，很容易发现，将方程（17）代入方程（16）即可立即得到公式（12）。

为了寻找适用于 S-A模型的耗散率表达式，本文还考察了该模型的输运方程，其形式如下：

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = \underbrace{C_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu}}_{production} - \underbrace{C_{w1} f_w (\tilde{\nu}/d_w)^2}_{destruction} + \frac{1}{\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left((\nu + \tilde{\nu})\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}\right) + C_{b2}\frac{\partial^2 \tilde{\nu}}{\partial x_j^2}\right], \tag{18}$$

其中， $\tilde{\nu}$ 为建模的输运变量，ν 为分子黏度，而 $\tilde{S}$ 为由下式定义的修正应变率

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu} f_{v2}}{\kappa^2 d_w^2}. \tag{19}$$

湍流涡黏度 ν_t 为

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}. \tag{20}$$

函数 f_{v1}、f_{v2} 和 f_w 是经验关联式，C_{b1}、C_{b2}、C_{w1} 和 σ 是经验参数。这些量的具体表达式和值可参考 [14]。

结合方程（7）和方程（20），可得

$$\frac{Dk}{Dt} \cong \frac{D}{Dt}\left(\frac{S f_{v1}}{\beta_r}\tilde{\nu}\right). \tag{21}$$

经验关联式 f_{v1} 是 $\tilde{\nu}$ 与 ν_t 的比值，在边界层的大部分区域（除黏性底层和外缘附近外）恰好等于 1.0。因此，方程（21）可进一步简化为

$$\frac{Dk}{Dt} \cong \frac{1}{\beta_r}\left(S\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} + \nu_t \frac{DS}{Dt}\right). \tag{22}$$

$\frac{Dk}{Dt}$ 和 $\frac{D\tilde{\nu}}{Dt}$ 分别表示方程 (15)和方程 (18) 的对流效应。右侧的第二项 $\nu_t \frac{DS}{Dt}$ 对应于湍流涡黏性所带来的扩散。为了建立方程(15) 和方程 (18) 之间的联系，有人认为其中包含的生成项和破坏项

在方程 (22) 的左边和右边应遵循相同的行为，这给出

$$\nu_t S^2 - \varepsilon \cong \frac{S}{\beta_r}\left[C_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu} - C_{w1}f_w(\tilde{\nu}/d_w)^2\right] \cong \frac{S}{\beta_r}[C_{b1}S\nu_t - C_{w1}f_w(\nu_t/d_w)^2], \tag{23}$$

其中采用了简化形式 $\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu_t S^2$ 。然后可得耗散率的近似表达式：

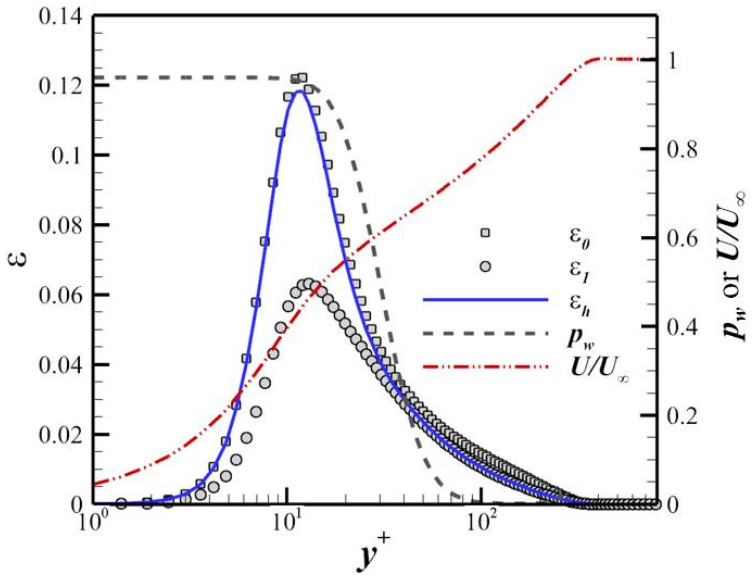
$$\varepsilon_1 = \left(1 - \frac{C_{b1}}{\beta_r}\right)\nu_t S^2 + \frac{C_{w1}}{\beta_r}f_w S(\nu_t/d_w)^2. \tag{24}$$

需要强调的是，方程 (24) 仅在近似条件 $f_{v1} \cong 1.0$ ($\tilde{\nu} = \nu_t$) 成立的区域内才合理。为简化计算，经验函数 f_w 可进一步用常数 0.5 替代，从而得到该区域的粗略近似。在近壁区，采用与 ε_0 的混合运算，即

$$\varepsilon_h = (\varepsilon_0)^{p_w} \cdot (\varepsilon_1)^{1-p_w}, \tag{25}$$

$$p_w = 1.0 - \tanh[0.04 \cdot (1 + A \cdot \chi_t^2)], \tag{26}$$

其中 $\chi_t = \nu_t/\nu$ 、 $A = 1$、$3+3$、$8\frac{\nu}{S \cdot d_w^2}$。幂函数 p_w 在近壁区接近 1.0。因此，混合耗散率 ε_h 将恢复为 ε_0 （方程 (17)）。在湍流边界层的外层， ε_h 等价于 ε_1 （方程 (24)）。图 2 展示了在 $Re_\theta = 900$ 条件下， ε_0、 ε_1 和 ε_h 沿湍流边界层剖面的分布。图中还给出了幂函数 p_w 。



Fi图 2 湍流边界层中近似耗散率和幂函数的分布

将 ε_h 代入公式（16），即可得到长度尺度的新代数表达式。为避免公式（16）中出现除以零的情况，应对 ε_h 的最小值加以限制。因此，可以得到以下表达式：

$$\varepsilon_h = \max\{(\varepsilon_0)^{p_w} \cdot (\varepsilon_1)^{1-p_w}, 1.0 \times 10^{-10}\}, \tag{27}$$

$$L = k^{3/2}/\varepsilon_h. \tag{28}$$

总结而言，公式（17）中的 ε_0 源自长度尺度公式（12），该公式采用了普朗特混合长度的类比表达式以及 Townsend模型。公式（24）中的 ε_1 则由 S-A模型输运方程中包含的耗散行为推导而来。而公式（28）中的 ε_h 表示对前两种表达式进行分区混合。值得注意的是，上述表达式（公式（12-14）和公式（28））的计算均不涉及非局部变量。

3.2 后验测试

这里采用平板上的零压梯度湍流边界层（缩写为湍流边界层），对来自不同代数表达式的长度尺度分布进行后验测试。选择湍流边界层中Re_θ=1000 的流向位置来进行测试。

利用第3.1节中引入的表达式（方程（12-14）和公式（28））， 可以无歧义地提取长度尺度的分布。背景RANS数据由单方程S-A模型获得。在图3中，灰色散点是来自高分辨率大涡模拟中若干流向位置的数据，该大涡模拟采用了非常精细的网格，其分辨率接近直接数值模拟的水平（也称为准直接数值模拟 [22]）。长度尺度的结果计算为 [7]

$$L = \frac{2\sqrt{\langle u_1' \, u_2' \rangle}}{\kappa \cdot |du_1/dx_2|}. \tag{29}$$

尖括号表示展向和时间平均。与STG入口相比，通过验证壁面摩擦和二阶统计量的剖面，可以将所选位置视为“恢复状态”。模拟的详细信息将在第4节中阐述。图3中的加号“+”是Glegg等人汇总的结果（见[7]中的图2），与高分辨率大涡模拟数据相比，其吻合度较好。因此，下文将[7] 以及当前计算中的数据称为“参考数据”。对于每组数据，长度尺度（L）和距壁面距离（x_2）均按局部边界层厚度δ进行缩放。

图3显示，各近似表达式的分布存在显著差异。第一种，即与普朗特混合长度的类比（公式（12））， 在边界层厚度的大部分范围内都低于参考数据。此外，通过调整系数的值，我们可以轻松得到公式（13），使其更好地拟合参考数据。图3中分布范围最大的曲线由公式（14）给出，该公式直接沿用了 [2, 3] 中的建议。在边界层的较大范围内，这条曲线与 $L = 2d_w$ 的直线重合。还需注意，将 C_l 的值降至 1.35，会得到与公式（13）相同的曲线。作为一项新提议，公式（28）试图在长度尺度与模型方程所体现的输运行为之间建立合理的关系。它与之吻合。

在 $x_2/\delta \leq 0.35$区域与参考数据吻合较好，但在BL外部区域似乎大于参考数据。鉴于湍动能的分布，所合成傅里叶模态的波长与所采用的长度尺度表达式密切相关。在下一节中，将在实际数值实验中比较长度尺度的四种代数表达式，旨在为入口ST恢复中关于哪一种分布最为合适的问题提供一些启示。

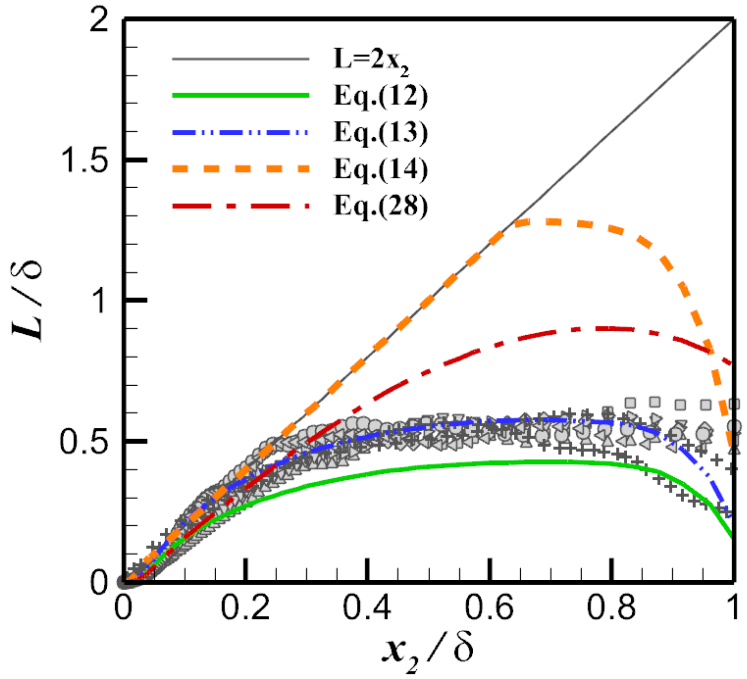


图3 湍流边界层内长度尺度表达式的分布（灰色散点：当前计算结果；符号“+”：[7]中的数据）

4. 数值测试

本节采用两个典型的壁面湍流算例进行数值测试。第一个算例是第 3.2 节所用的湍流边界层，第二个算例是充分发展湍流槽道流（简称 TC）。在模拟中，采用我们自主开发的计算流体力学求解器求解（滤波后的）可压缩纳维–斯托克斯方程。该求解器已在许多复杂流动算例中得到验证 [23-27]。本文采用的数值方法如下：对流项采用一种优化的四阶有限差分格式进行离散，该格式由 WENO-SYMBO 格式的线性形式复制而来 [28]。黏性项采用四阶中心差分格式进行离散。时间推进采用双时间步进。马赫数设为 0.2，以近似不可压缩流动状态。The

基于S-A模型的改进型延迟分离涡模拟（IDDES） [29] 被用作亚格子尺度模型。两个算例均采用空间发展处理。在入口处，将规定的速度脉动（由STG方法生成）叠加到相应的RANS解上。两个算例中的壁面均设置为无滑移和等温条件。壁面温度为300K。在有效计算域下游，两个算例均采用海绵层来阻尼虚假反射。展向边界设为周期性边界。对安装了四种代数表达式的入口湍流脉动进行比较，这四种表达式分别称为“L1-L4”（见表1）。

表 1 长度尺度的近似

案例名称	长度尺度
L1	公式（12）
L2	公式（13）
L3	公式（14）
L4	公式（28）

4.1 湍流边界层

在湍流边界层情况下，计算域如图 4 所示， δ_0 表示名义厚度。基于动量厚度的雷诺数Re_θ 在入口处约为 1000。有效计算域在流向（x_1）、壁法向（x_2）和展向（x_3）方向上的尺寸分别为 $26\delta_0$、$5.4\delta_0$ 和 $4.5\delta_0$ 。

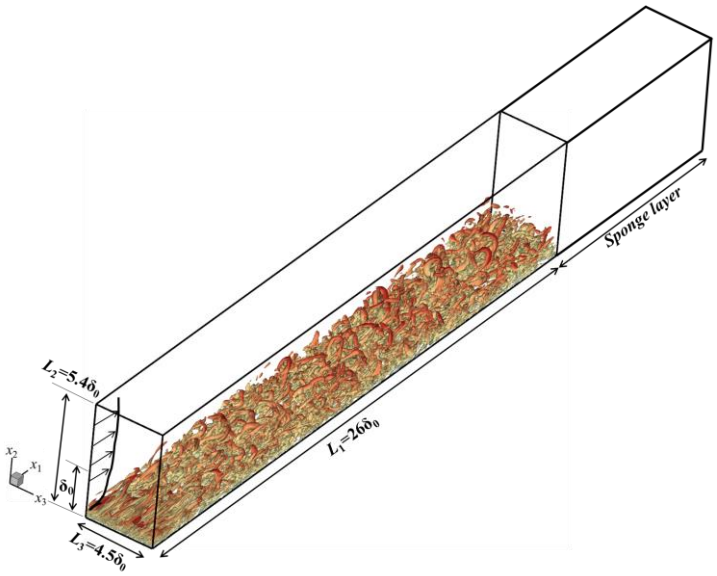


图 4 湍流边界层计算域示意图

在当前模拟中，平行于壁面的方向上的网格间距在壁面单位下约为 Δx_1^+=20.0和 Δx_3^+=10.0，已接近直接数值模拟。壁法向上的网格点分布保持不变，首个间距为 $\Delta x_{2,min}^+$ =0.48。网格点数为N_1×N_2×N_3=521×121×181。为使流场有充足的时间演化，所有算例在采集样本前均运行了约 $150 \cdot \delta_0/U_\infty$ ，并且还检查了壁面摩擦的时间历程，以确保已达到统计稳定状态。

壁面处和 x_2^+=15 的涡量大小瞬时场如图5所示。图中可以清楚地看到附着于壁面的流向条带结构。各算例之间未观察到明显的定性差异。

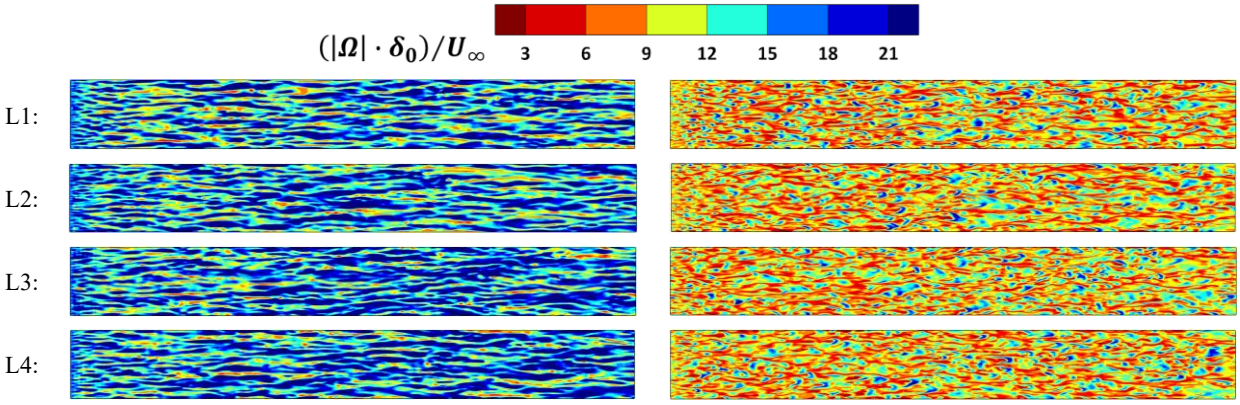


图5 x_2=0 （左图）和 x_2^+=15 （右图）处涡量大小的瞬时场

在图 6 中，平均壁面摩擦系数 C_f （分别相对于 Re_θ 和 x/δ_0）与不可压缩湍流边界层的经验方程进行比较，该方程表示为 [30]

$$C_f = 0.024 \cdot Re_\theta^{-1/4}. \tag{30}$$

图中的符号表示来自[30, 31]的直接数值模拟数据。可以看出，两幅图中显示的 C_f曲线形状相似。在距入口约 ΔRe_θ ≈120~140 （或 Δx_1 ≈8.4~9.6δ_0）距离的流向适应区之后，所有情况下的壁面摩擦系数均恢复到其充分发展水平。在适应区内，C_f 的值明显低于参考值。在所考虑的各个情况下，‘L3’和‘L4’得到的曲线在充分恢复区域内与参考值吻合得最好。采用‘L1’和‘L2’似乎会降低 C_f，而‘L2’相对更接近参考值。

为考察湍流边界层定量特征的发展，我们比较了四个流向位置处的平均速度剖面和二阶统计量 R_{11}^+，R_{22}^+ 和 R_{12}^+ (R_{ij}^+ =

$\langle u_i' u_j' \rangle / u_\tau^2$)，即 x_1/δ_0=2.1、4.2、6.3 和 8.4。相应的 Re_θ 分别约为 1032、1064、1096 和 1128。Wu 和 Moin 的直接数值模拟数据 [17] 被用作参考数据。图 7 展示了湍流边界层在不同流向位置处的平均速度剖面。可以看出，L2、L3 和 L4 的平均速度剖面差异并不显著，而 L1 得到的剖面略高于其他情况。这是因为与 L2、L3 和 L4 相比，L1 情况下的 C_f 被低估了（见图 6）。随着位置向下游移动，可以观察到明显的恢复过程。在最后一个位置（x_1/δ_0=8.4），L2、L3 和 L4 的平均速度剖面与直接数值模拟数据非常吻合。还应指出，湍流边界层外层区域的数值与直接数值模拟数据之间存在差异，这是由不同的 Re_θ （或不同的u_τ）造成的。

第一个位置 x_1/δ_0=2.1处的雷诺应力分量与参考数据吻合良好。通过比较不同算例发现，法向应力 R_{11}^+ 存在较大差异，而 R_{22}^+ 和 $-R_{12}^+$ 的结果在所有算例中均略低于参考值。随着位置移至 x_1/δ_0=4.2，所有所考虑的量均增大。x_1/δ_0=6.3 和x_1/δ_0=8.4 处的结果非常接近，表明二阶统计量已经完全恢复。不同算例之间最明显的差异出现在 0.18<x_2/δ_0<0.8 的壁法向坐标范围内的 R_{11}^+曲线上。定量比较表明，较大的长度尺度将产生更高的 R_{11}^+。回顾图3可知，该区域与所提供长度尺度的差异区域一致，表明入口ST的长度尺度会影响湍动能的产生。

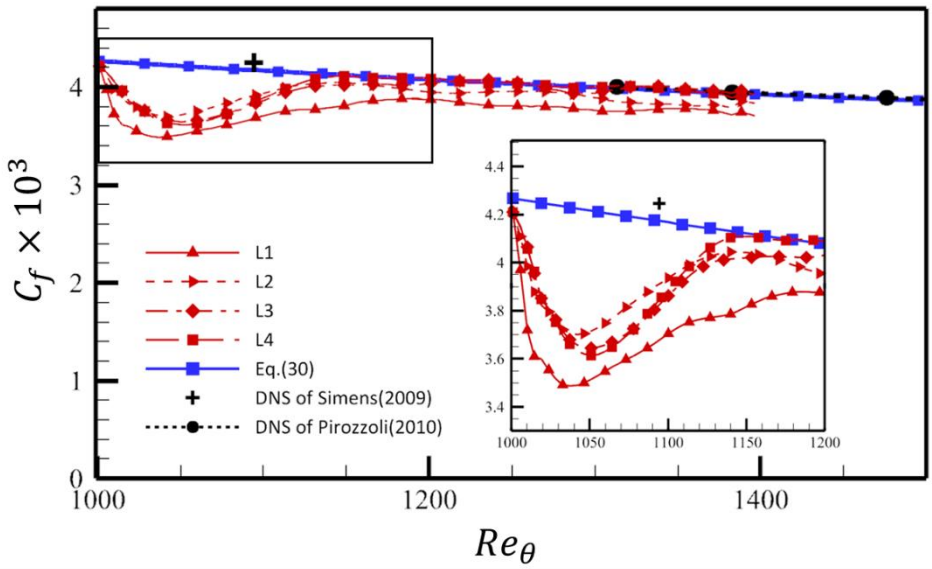
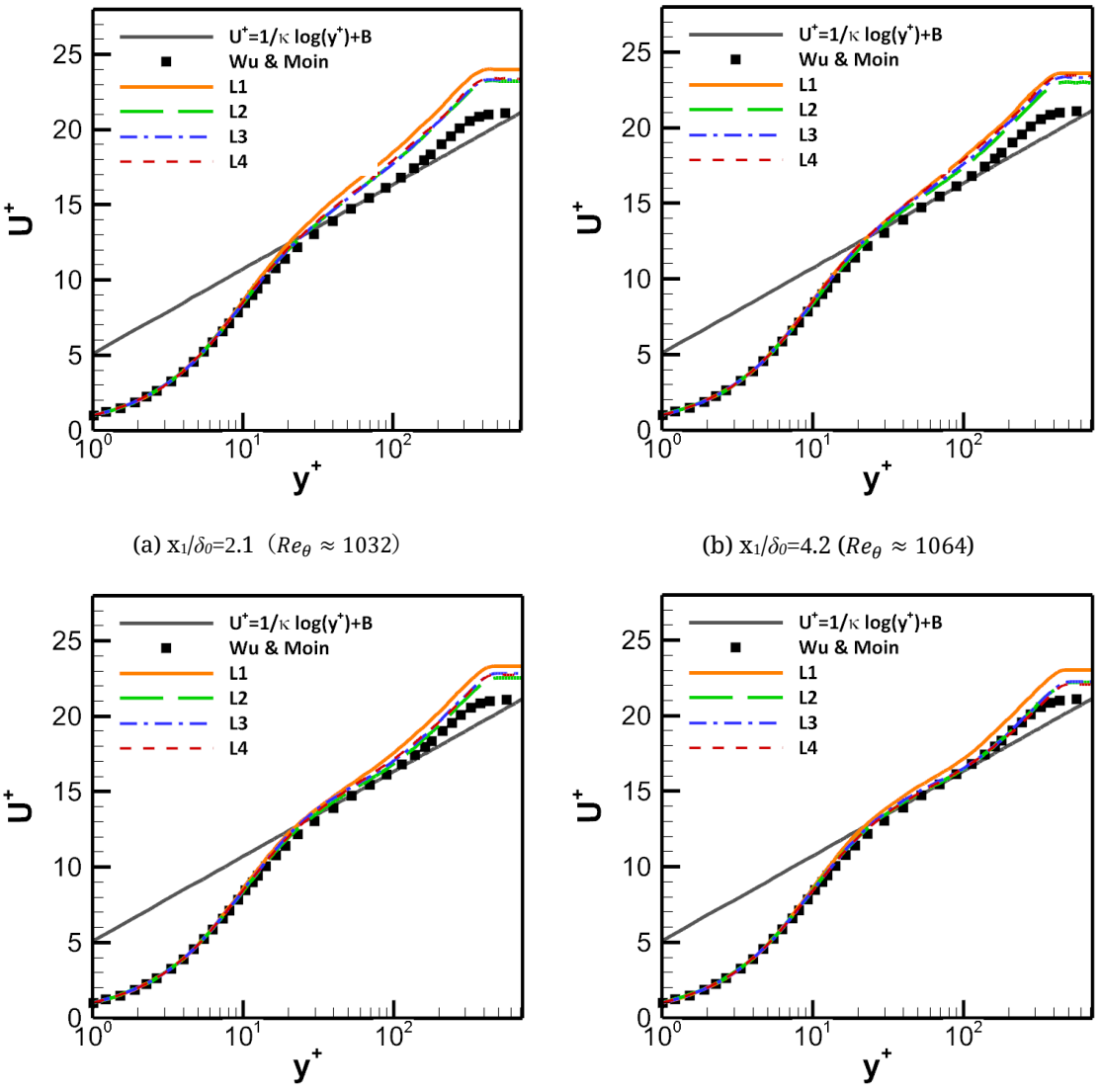


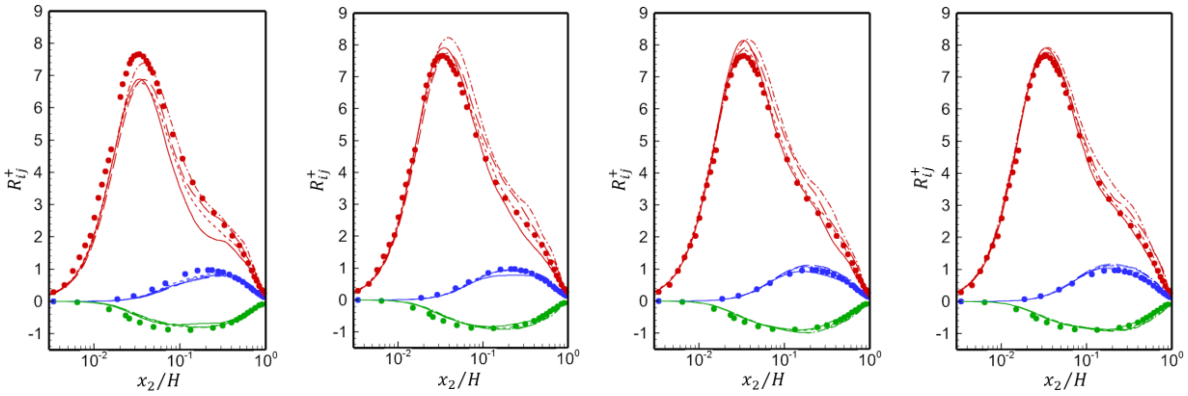
图 6 湍流边界层算例中的壁面摩擦系数分布



(a) x_1/δ_0=2.1（$Re_\theta \approx 1032$）　(b) x_1/δ_0=4.2 ($Re_\theta \approx 1064$)

(c) x_1/δ_0=6.3 ($Re_\theta \approx 1096$)　(d) x_1/δ_0=8.4 ($Re_\theta \approx 1128$)

图 7 湍流边界层案例中不同流向位置处平均速度剖面的壁法向分布



(a) x_1/δ_0=2.1 ($Re_\theta \approx 1032$)　(b) x_1/δ_0=4.2 ($Re_\theta \approx 1064$)　(c) x_1/δ_0=6.3 ($Re_\theta \approx 1096$)　(d) x_1/δ_0=8.4 ($Re_\theta \approx 1128$)

图 8 湍流边界层各案例中不同流向位置处雷诺应力的壁法向分布

（不同情况：实线，L1；虚线，L2；点划线，L3；长虚线，L4；实心圆，直接数值模拟 [17]】【。

Different colors: red, R_{11}^{+}; blue, R_{22}^{+}; green, R_{12}^{+})

为了考察涡结构的特征长度尺度，展向宽度长度 l_z可估算为两点自相关函数与常数 0.05 [32, 33]，的两个连续交点之间的距离，其中两点自相关函数 R 定义为

$$\mathcal{R}(x_1, x_2) = \frac{\langle u_1(x_1, x_2, x_3, t) \cdot u_1(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, t) \rangle}{\langle u_1(x_1, x_2, x_3, t)^2 \rangle} \tag{31}$$

在图 9 中，展示了在 x_1/δ_0=0.6和 x_1/δ_0=11.2处沿壁面法向方向的 l_z 分布。[32] 中也绘制了实验数据。各案例的曲线表明，即使在壁面摩擦和雷诺应力完全恢复的阶段（图 9 中x_1/δ_0=11.2处的符号），涡结构仍具有不同的特征长度尺度。在这些案例中，案例“L4”的结果似乎最接近实验数据。在靠近入口的流向位置（图 9 中x_1/δ_0=0.6处的线条），估算得到的展向长度尺度 l_z 通常低于相应的下游结果。

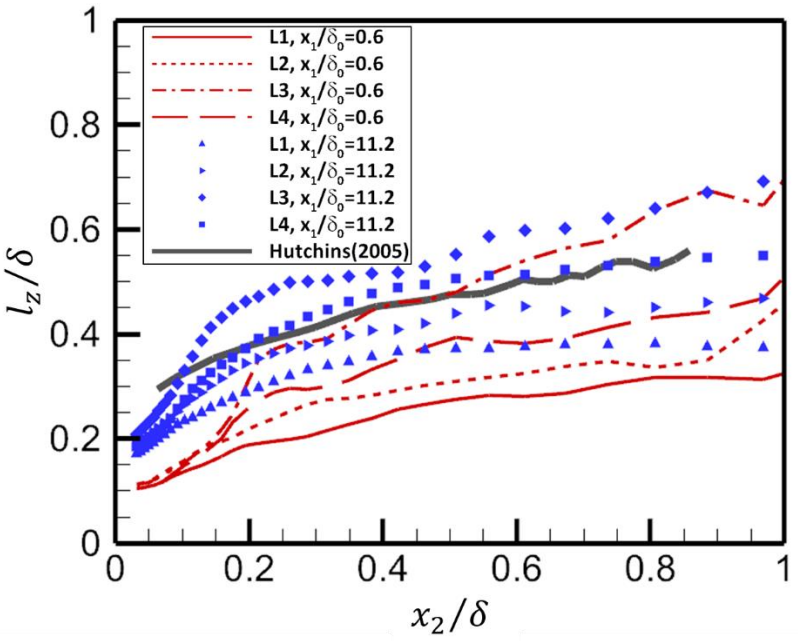


图 9 TBL 算例中 l_z 沿壁面法向的分布

4.2 湍流通道流动

在湍流槽道流工况中，基于半宽度（H）和入口处的摩擦速度（u_τ）的雷诺数约为Re_τ=395~400，此类工况的数值结果已在文献中得到广泛记录[34-36]，并采用流向周期性配置。在此，空间发展模拟采用通过流向周期性 RANS 模拟获得的平均剖面进行初始化。施加一个恒定体力

在整个计算域内。计算域的尺寸设置为 $L_{x1}\times L_{x2}\times L_{x3}=28H\times 2H\times 3.4H$。平行于壁面的方向所采用的网格分辨率约为 $\Delta x_1^+=28.0$ 和 $\Delta x_3^+=10.0$ 壁面单位。在壁法向方向，网格在两侧壁面附近加密，壁面单位下的最小间距为 $\Delta x_{2.min}^+=0.8$。沿流向、壁法向和展向的网格点数分别为 $N_1\times N_2\times N_3=401\times 109\times 137$。在采集样本之前，各算例运行了约 $120\cdot H/U_b$

可能有人会质疑，鉴于湍流通道流的流动物理似乎与湍流边界层相似，因此没有必要对其进行数值测试。然而，有观点认为，通道中的受限几何构型会导致流动对入口ST的响应存在差异。当流动充分发展后，附着在两个相对壁面上的边界层会相互作用，而内层（对数层）的影响变得更加关键。

通道流的平均壁面摩擦系数与RANS结果（$C_{f,RANS}\approx 6.24\times 10^{-3}$）在图10中进行了比较。适应区域在流向上持续约7~10H。可以看出，‘L4’获得了最短的恢复区域，而‘L2’是最后达到正确平均壁面摩擦的情况。结果与湍流边界层情况中的结果呈现出不同趋势，表明如上所述，对入口ST存在不一致的响应。选取了四个流向位置，在x_1/H=2.5~10.9范围内比较平均速度剖面以及二阶统计量 R_{11}^+、 R_{22}^+和 R_{12}^+ 。Modesti等人[34] （‘INC6’情况）的直接数值模拟数据被用作参考，其具有相似的Re_τ。在图11中，对不同情况下获得的平均速度剖面进行了比较。结果表明，随着位置向下游移动，L4情况最早与直接数值模拟数据达成一致。对于二阶统计量，图12清楚地显示了各分量的流向变化，尤其是在 R_{11}^+峰值附近。‘L4’的结果与直接数值模拟数据吻合最佳。而‘L2’情况下的 R_{11}^+ 显著大于直接数值模拟数据，‘L1’和‘L3’情况下的 R_{11}^+ 则介于‘L2’和‘L4’之间。

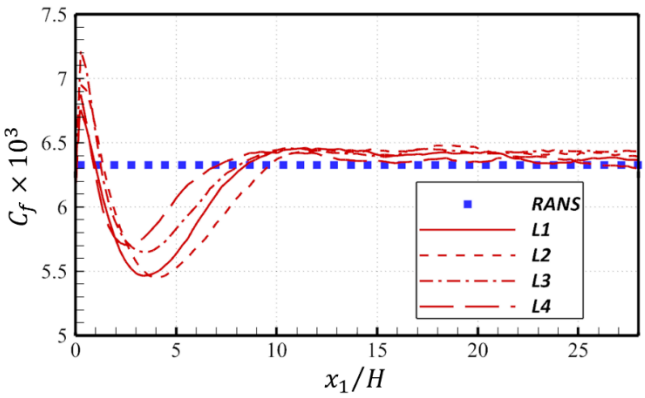
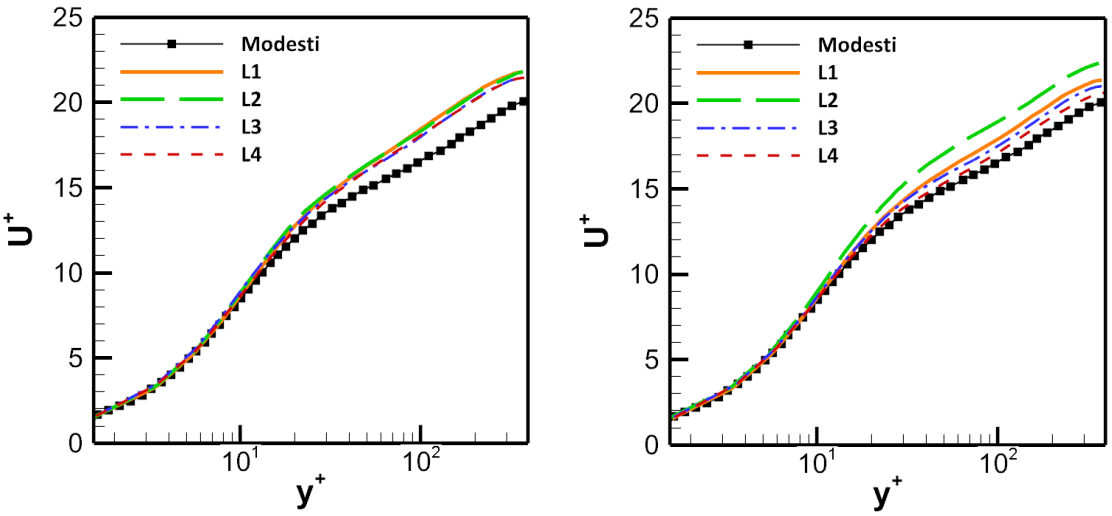
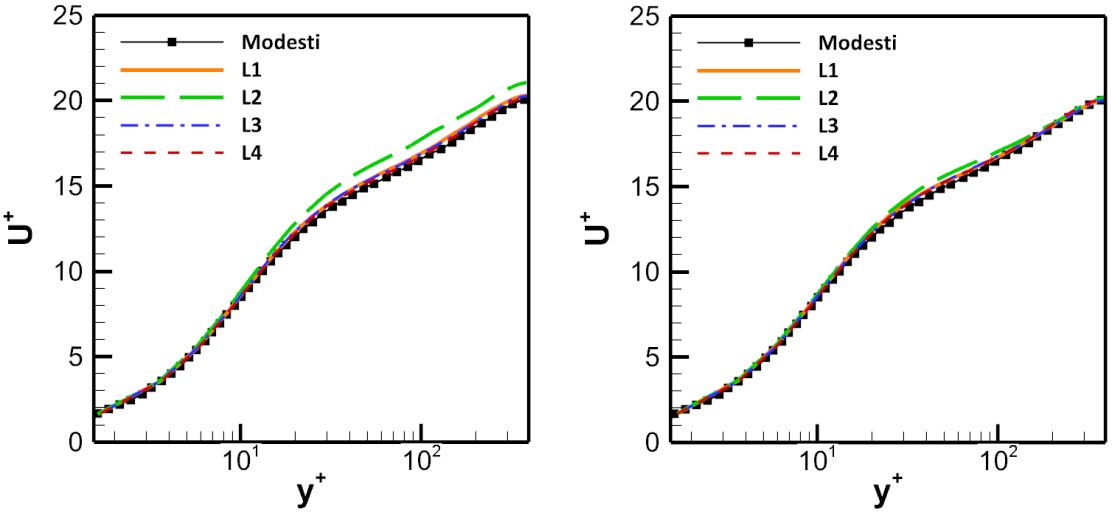


图 10 通道流中壁面摩擦系数的流向分布

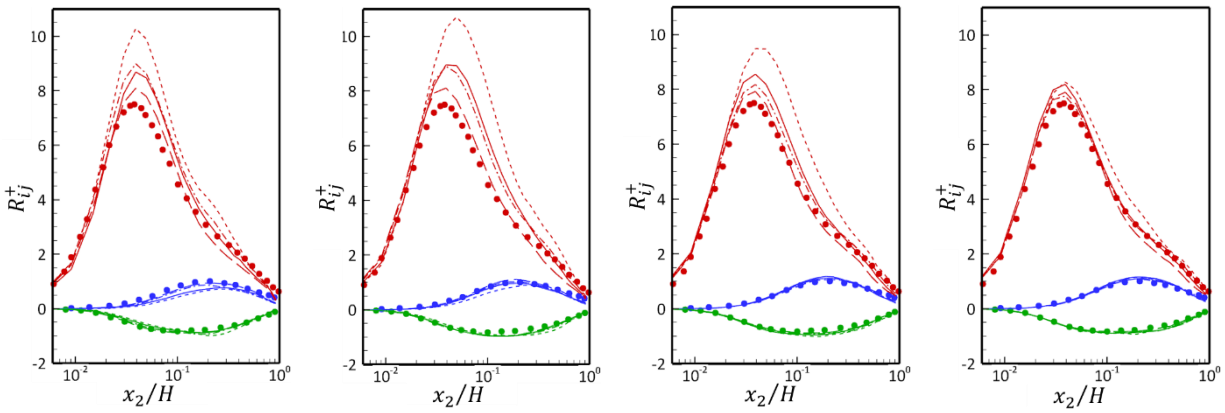


(a) x₁/H=2.5 (b) x₁/H=5.3



(c) x₁/H=8.1 (d) x₁/H=10.9

Fi图 11 TC 算例中不同流向位置的平均速度剖面的壁法向分布



(a) x₁/*H*=2.5 (b) *x*₁/*H*=5.3 (c) x₁/*H*=8.1 (d) *x*₁/*H*=10.9

图12TC算例中不同流向位置处雷诺应力的壁法向分布（不同算例：实线，L1；虚线，L2；点划线，L3；长虚线，L4；实心圆，直接数值模拟[34]。不同颜色：红色，R_{11}^{+}；蓝色，R_{22}^{+}；绿色，R_{12}^{+}）

沿两条典型壁法向线（x_1/H=2.5 和 10.9）的展向积分长度尺度 l_z 分布如图13所示。在两个流向位置处，与湍流边界层相比，各工况之间呈现出不同的相对趋势：沿 x_1/H=2.5 的近壁范围以及 x_1/H=10.9 的整个范围，‘L4’的结果都逐渐接近‘L1’的结果。Monty 等人的实验测量[33] 以灰色实线绘出，可以观察到其与 L1 和 L4 的剖面吻合良好。

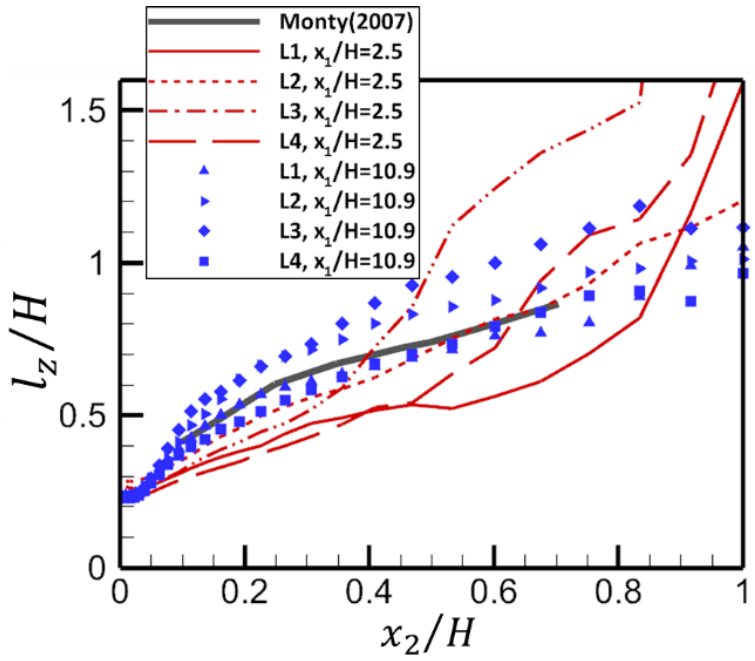


图 13 展向积分长度尺度随壁法向坐标的变化

4.3 长度尺度与恢复过程

通过上述分析，证明了所考虑的长度尺度表达式可为基于单方程模型的STG提供输入信息。通过考察两种壁面约束流动中的壁面摩擦、二阶统计量和展向积分长度尺度的发展，来研究恢复过程。

公式（12）在湍流边界层算例中给出了最长的恢复距离，但在湍流槽道流中的恢复距离似乎适中。相反，公式（13）在湍流槽道流计算中恢复得最晚，但在湍流边界层中的表现良好。这表明，普朗特混合长度适用于近壁区（对数层）。然而，在外层，普朗特混合长度可能相对较小。这就是为什么一个

1.35的系数能使公式（13）的表现优于公式（12）。作为最大的长度尺度，公式（14）在两种情况下的恢复效果都令人满意，见C_f。其主要问题是在湍流边界层中 R_{11}^+ 的恢复过程不理想（见图8），且展向长度尺度大于实验测量值。基于上述认识，公式（28）的新表达式在内层等同于普朗特混合长度，并恰当地利用了S-A模型中包含的耗散机制。综合所有比较来看，公式（28）的恢复过程在所有表达式中最佳。

5. 结论

特征长度尺度对于在混合RANS-LES模拟的交界面上生成适当的湍流脉动起着重要作用。基于STG方法[2, 3], ，我们讨论了单方程S-A模型中湍流特征长度尺度近似的问题，该问题仍未得到闭合。不同于双方程涡黏模型，单方程模型无法同时描述湍动能和湍流特征长度尺度，而了解这两者是重现合理湍流统计量最基本的要求。我们在湍流边界层的高分辨率大涡模拟数据上进行后验测试，对几种现有的长度尺度近似表达式进行了比较，其中包括一种新的表达式，用以表征长度尺度与模型方程底层输运机制之间的关系。

后验测试表明，与普朗特混合长度的类比所得到的分布小于直接数值模拟数据，而参考文献 [2, 3] 中的原始建议所得的分布最大。通过调整常数类比系数，可以显著改善吻合程度。新表达式在 $x_2/\delta \leq 0.35$区域内与参考数据吻合良好，但在边界层外部区域大于参考数据。针对平板上的湍流边界层和充分发展湍流槽道流，评估了由不同湍流长度尺度表达式生成的入口脉动的性能。壁面摩擦、二阶统计量以及展向积分长度尺度的恢复过程均进行了详细考察。结果表明，与所考虑的其他表达式相比，采用新的长度尺度表达式生成入口湍流脉动能够获得更好的恢复特性。

致谢

本研究得到国家重点研发计划（2019YFA0405201）、国家自然科学基金（12002360、92052301）和国家数值风洞项目的支持。

References

[1] Frohlich, J., vonTerzi,D.：基于Spalart-Allmaras模型的湍流流动模拟混合大涡模拟/RANS方法。航空航天科学进展。44(5)，349-377（2008）[2] Admian,D.,Travin, A.：在壁面受限流和自由剪切流嵌入式大涡模拟中RANS-大涡模拟界面的高效合成湍流生成器。载于：计算流体力学2010，第6届国际计算流体力学会议论文集，圣彼得堡，739-744（2010）[3] Shur, M., L., Spalart,P., R.,Strelets, K., Travin,A.：用于空气动力学和气动声学问题分区模拟中RANS-大涡模拟界面的合成湍流生成器。流动、湍流与燃烧。93(1)，63-92（2014）[4] Poletto,R., Craft, T.,Revell,A.：一种用于再现大涡模拟入口流动条件的新型无散合成涡方法。流动、湍流与燃烧。91(3)，519-539（2013）[5] Jarrin, N., Prosser, R., Uribe, J.,C.,Benhamadouche, S., Laurence, D.：使用合成涡方法重构混合RANS/大涡模拟中的湍流脉动。国际传热与流体流动杂志。30(3)，435-442（2009）[6] Auerswald,T.,Probst, A., Bange,J.：一种用于大涡模拟的各向异性合成湍流方法。国际传热与流体流动杂志。62(B)，407-422（2016）[7] Glegg,S.,Morin, B., Atassi, O., Reba,R.：利用雷诺平均Navier-Stokes计算预测后缘噪声。AIAA期刊。48(7)，1290-1301（2010）[8] Laraufie,R., Deck,S.,Sagaut,P.：一种用于非定常湍流入口条件的动态强迫方法。计算物理学杂志。230，8647-8663（2011）[9] Tabor, G., R.,Baba-Ahmadi, M., H.：大涡模拟的入口条件：综述。计算机与流体。39(4)，553-567（2010）[10] Dhamankar, N., S., Blaisdell,G.,A.,Lyrintzis, A.,S.：大涡模拟湍流入口边界条件概述（特邀）。AIAA论文2015-3213（2015）[11] Wu, X.：入口湍流生成方法。流体力学年度评论。49，23-49（2017）[12] Probst, A., Schwamborn, D., Garbaruk, A., Guseva, E., Shur,M.,Strelets, M.,Travin,A.：压力诱导分离流动中分区和非分区RANS-大涡模拟方法内灰区缓解工具的评估。国际传热与流体流动杂志。68，237-247（2017）[13] Patterson, J.,W.,Balin, R.,Jansen, K.,E.：评估并改进合成湍流生成的准确性。流体力学杂志。906，R1。（2021）[14] Spalart,P.,R.,Allmaras, S., R.：用于空气动力学流动的单方程湍流模型。AIAA论文92-0439（1992）[15] Menter, F., R.：用于空气动力学流动的分区双方程k-ω 湍流模型。AIAA论文1993-2906（1993）[16] Wilcox, D., C.：用于CFD的湍流建模。第3版，DCW Industries，2006年，第4章[17] Wu,X.,Moin,P.：名义零压力梯度平板边界层中湍流的直接数值模拟。流体力学杂志。630，5-41（2009）[18] Hunt,J., C.,R.：二维钝体绕流湍流理论。流体力学杂志。61(4)，625- 706（1973）[19] Carlotti, P.,Drobinski, P.：高雷诺数壁面受限湍流中的长度尺度。流体力学杂志。516，239-264（2004）[20] Townsend, A.,A.：湍流剪切流的结构，第2版，剑桥大学出版社，纽约，1976年，第7章[21] Launder, B.,E., Sharma,B.,I.：将湍流能量耗散模型应用于旋转圆盘附近流动的计算。传热与传质通讯。1(2)，131-138（1974）

[22] Spalart, P. R., Jou, W.-H., Strelets, M., Allmaras, S. R.：关于大涡模拟应用于机翼的可行性及混合 RANS/大涡模拟方法的探讨。第一届 AFOSR 国际直接数值模拟/大涡模拟会议论文集，《直接数值模拟/大涡模拟进展》，137-147（1997）[23] Liu, P.-X., Guo, Q.-L., Sun, D., Li, C., Zhang, H.-X.：壁面效应对三维旋转爆震波流动结构的影响。《国际氢能杂志》，45(53)，29546-29559（2020）[24] Guo, Q.-L., Li, C., Tu, G.-H., Chen, J.-Q., Wan, B.-B., Liu, Y.：微沟槽深度对抑制高超声速边界层第二模态的影响研究。《物理学会议系列》，1786，012053（2021）[25] Sun, D., Guo, Q.-L., Li, C., Liu, P.-X.：微型坡道对高超声速激波/边界层相互作用影响的直接数值模拟。《流体物理学》，31，126101（2019）[26] Sun, D., Chen, J.-Q., Li, C., Liu, P.-X., Guo, Q.-L., Yuan, X.-X.：高超声速流中微型坡道涡流发生器的尾流结构。《流体物理学》，32，126111（2020）[27] Li, C., Guo, Q.-L., Sun, D., Zhang, H.-X.：采用 IDDES 方法预测球形返回舱模型周围高超声速流的气动热特性。《现代物理学国际期刊 B》，34，20400780（2020）[28] Wu, M., Martin, M., P.：压缩坡道上超声速湍流边界层的直接数值模拟。《AIAA 期刊》，45(4)，879-889（2007）[29] Shur, M., L., Spalart, P., R., Strelets, K., Travin, A.：具备延迟 DES 和壁面建模大涡模拟能力的混合 RANS-大涡模拟方法。《国际传热与流体流动杂志》，29(6)，1638-1649（2008）[30] Pirozzoli, S., Bernardini, M.：中等雷诺数下超声速边界层中的湍流。《流体力学杂志》，668，120-168（2011）[31] Simens, M., P., Jimenez, J., Hoyas, S., Mizuno, Y.：用于湍流边界层的高分辨率代码。《计算物理学杂志》，228，4218-4231（2009）[32] Hutchins, N., Hambleton, W., T., Marusic, I.：湍流边界层中的倾斜横向立体粒子图像测速测量。《流体力学杂志》，541，21-54（2005）[33] Monty, J., P., Stewart, J., A., Williams, R., C., Chong, M., S.：湍流管流与槽道流中的大尺度特征。《流体力学杂志》，589，147-156（2007）[34] Modesti, D., Pirozzoli, S.：可压缩湍流槽道流中的雷诺数和马赫数效应。《国际传热与流体流动杂志》，59，33-49（2016）[35] M. Mossi, P. Sagaut. 使用激波捕捉格式对充分发展槽道流进行数值研究。《计算与流体》，2003，32：249-274。[36] Yaomin Zhao, Zhenhua Xia, Yipeng Shi, Zuoli Xiao, Shiyi Chen. 槽道流层流-湍流转捩的约束大涡模拟。《流体物理学》，2014，26：095103。