arXiv:2304.02809v1 [math.RA] 6 Apr 2023

莱布尼茨代数的全表示

ZHANGJU LIU 和盛云鹤

摘要。本文首先将莱布尼茨代数 g 在向量空间 V 上的 omni-表示定义为从 g 到 omni-李代数 gl(V) ⊕ V 的莱布尼茨代数同态。随后，我们介绍与 omni-表示相关的 omni-上同调理论，并建立 omni-上同调群与 Loday-Pirashvili上同调群之间的关系。

目录

1. 引言2. 莱布尼茨代数的表示 3. 莱布尼茨代数的全表示 4. 莱布尼茨代数的omni-上同调 参考文献 1 2 5 8 10

1. 引言

莱布尼茨代数最早由 Bloh 发现，他称之为 D-代数 [5]。后来，Loday 重新发现了这种代数结构，并称之为莱布尼茨代数 [18]。莱布尼茨代数是一个向量空间 $\mathfrak{g}$，配备一个线性映射 $[\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}: \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$，满足

$$[x,[y,z]_\mathfrak{g}]_\mathfrak{g} = [[x,y]_\mathfrak{g},z]_\mathfrak{g} + [y,[x,z]_\mathfrak{g}]_\mathfrak{g}, \quad \forall\, x,y,z \in \mathfrak{g}. \tag{1}$$

特别地，如果括号 $[\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}$ 是反对称的，那么它就是一个 Lie代数。莱布尼茨代数在数学和数学物理中都有重要应用，例如，Courant代数胚的截面空间是一个莱布尼茨代数[19] ，而嵌入张量的底层代数结构也是一个莱布尼茨代数，并由此进一步应用于高阶规范理论 [15]。

莱布尼茨代数的表示理论由 [18] 引入并进行了研究。

2010 数学主题分类：17B99，17B10。关键词和短语：莱布尼茨代数、全李代数、表示、上同调。

定义1.1。莱布尼茨代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 的表示是一个三元组(V, l, r)，其中 V 是一个向量空间，配备了两个线性映射 $l : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(V)$ 和 $r : \mathfrak{g} \longrightarrow gl(V)$，使得以下等式成立：

$$l_{[x,y]_{\mathfrak{g}}} = [l_x, l_y], \quad r_{[x,y]_{\mathfrak{g}}} = [l_x, r_y], \quad r_y \circ l_x = -r_y \circ r_x, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}. \tag{2}$$

特别地，Barnes 在[3]中研究了莱布尼茨代数的忠实表示；Kolesnikov 在[13]中研究了莱布尼茨代数的共形表示；在[21] 中，他们在研究 Leibniz双代数时给出了莱布尼茨代数的对偶表示。Benayadi 在 [4]中研究了对称Leibniz代数的表示。

注意，Lie代数 $\mathfrak{g}$ 在向量空间 V 上的表示是从 $\mathfrak{g}$ 到 Lie代数 gl(V) 的 Lie代数同态，它将一个抽象 Lie代数实现为一般线性Lie代数的子代数。然而，上述莱布尼茨代数的表示并不具备这一优点。本文旨在引入一种新的表示理论，使其能够将一个抽象莱布尼茨代数实现为一个具体莱布尼茨代数的子代数。Weinstein 在 [22] 中引入的 omni-李代数 $gl(V) \oplus V$ 自然地构成一个莱布尼茨代数，是我们研究的主要工具。我们引入莱布尼茨代数 $\mathfrak{g}$ 在向量空间 V 上的 omni-表示概念，即从 $\mathfrak{g}$ 到莱布尼茨代数 $gl(V) \oplus V$ 的同态。我们证明，一个通常的表示 (V, l, r) 可导出 $\mathfrak{g}$ 在 $V^* \otimes V$ 上的 omni-表示 $\rho = (l^* \otimes 1 + 1 \otimes l) + r$。

莱布尼茨代数的上同调理论也是由 Loday 和 Pirashvili 在 [18] 中发展起来的。关于莱布尼茨代数的 Loday-Pirashvili 上同调的更多应用，请参见 [1, 6, 7, 8, 9, 11] 。我们还为上文介绍的 omni-表示发展了 omni-上同调理论，并给出了 omni-上同调群与 Loday-Pirashvili上同调群之间的关系。

本文的组织如下。在第 2 节中，我们重新研究莱布尼茨代数的表示及其相应的半直积。在第 3 节中，我们引入莱布尼茨代数的 omni-表示概念，并研究 omni-表示与通常表示之间的关系。在第 4 节中，我们引入系数取值于 omni-表示的莱布尼茨代数的 omni-上同调群，并建立 omni-上同调群与 Loday-Pirashvili上同调群之间的关系。fficient

2. 莱布尼茨代数的表示

设 (V, l, r) 是莱布尼茨代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 的表示。

定义 2.1. $\mathfrak{g}$ 取系数于 V 的 Loday-Pirashvili上同调，是上链复形 $C^k(\mathfrak{g}, V) = Hom(\otimes^k \mathfrak{g}, V), (k \geq 0)$ 的上同调，其上边缘算子为

$$\partial : C^k(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^{k+1}(\mathfrak{g}, V)$$

定义如下

$$\begin{aligned}\partial c^k(x_1,\dots,x_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}l_{x_i}(c^k(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{k+1}))\\ &+(-1)^{k+1}r_{x_{k+1}}(c^k(x_1,\dots,x_k))\\ &+\sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^i c^k(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{j-1},[x_i,x_j]_{\mathfrak{g}},x_{j+1},\dots,x_{k+1}).\end{aligned}\tag{3}$$

所得上同调记为 $H^\bullet(\mathfrak{g};\mathfrak{l},\mathfrak{r})$。

显然，$(\mathbb{R},0,0)$ 是莱布尼茨代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 的一个表示，称为平凡表示。相应的上同调记作 $H^\bullet(\mathfrak{g})$。另一个重要的表示是伴随表示 $(\mathfrak{g},\mathrm{ad}_L,\mathrm{ad}_R)$，其中 $\mathrm{ad}_L:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 和 $\mathrm{ad}_R:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 定义如下：

$$\mathrm{ad}_L(x)(y)=[x,y]_{\mathfrak{g}},\quad \mathrm{ad}_R(x)(y)=[y,x]_{\mathfrak{g}},\quad \forall x,y\in\mathfrak{g}.\tag{4}$$

相应的上同调记为 $H^\bullet(\mathfrak{g};\mathrm{ad}_L,\mathrm{ad}_R)$。

一个排列 $\sigma\in\mathbb{S}_n$ 被称为 $(i,n-i)$-洗牌，如果 $\sigma(1)<\cdots<\sigma(i)$ 且 $\sigma(i+1)<\cdots<\sigma(n)$。若 $i=0\,\mathrm{or}\,n$，我们假设 $\sigma=\mathrm{id}$。所有 $(i,n-i)$-洗牌的集合记作 $\mathbb{S}_{(i,n-i)}$。$(i_1,\cdots,i_k)$-洗牌的概念及集合 $\mathbb{S}_{(i_1,\cdots,i_k)}$ 以类似方式定义。

令$\mathfrak{g}$ 为一个向量空间。我们考虑分次向量空间 $C^*(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=\oplus_{n\ge1}C^n(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=\oplus_{n\ge1}\mathrm{Hom}(\otimes^n\mathfrak{g},\mathfrak{g})$。分次向量空间 $C^*(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ 上的 Balavoine括号定义为：

$$[P,Q]_{\mathsf{B}}=P\bar{\circ}Q-(-1)^{pq}Q\bar{\circ}P,\tag{5}$$

对所有$P\in C^{p+1}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$、$Q\in C^{q+1}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$，其中 $P\bar{\circ}Q\in C^{p+q+1}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ 定义为

$$P\bar{\circ}Q=\sum_{k=1}^{p+1}P\circ_k Q,\tag{6}$$

且 $\circ_k$ 由以下定义

$$\begin{aligned}(P\circ_k Q)(x_1,\cdots,x_{p+q+1})=&\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(k-1,q)}}(-1)^{\sigma}(-1)^{(k-1)q}\\ &P(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(k-1)},Q(x_{\sigma(k)},\cdots,x_{\sigma(k+q-1)},x_{k+q}),x_{k+q+1},\cdots,x_{p+q+1}).\end{aligned}\tag{7}$$

众所周知，

定理 2.2。([2, 10]) 采用上述记号，$(C^*(\mathfrak{g},\mathfrak{g}),[\cdot,\cdot]_{\mathsf{B}})$ 是一个分次李代数。

特别地，对于 $\alpha\in C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$，我们有

$$[\alpha,\alpha]_{\mathsf{B}}(x,y,z)=2\alpha\circ\alpha(x,y,z)=2\Big(\alpha(\alpha(x,y),z)-\alpha(x,\alpha(y,z))+\alpha(y,\alpha(x,z))\Big).\tag{8}$$

因此，α 定义了莱布尼茨代数结构，当且仅当 $[\alpha,\alpha]_{\mathsf{B}}=0$。

对于 g 的一个表示 (V, l, r)，显然(V,l, 0)也是g 的一个表示。因此，我们有两个半直积莱布尼茨代数g $\ltimes_{(l,r)}$ V 和 g $\ltimes_{(l,0)}$ V，其括号分别由 $[\cdot,\cdot]_{(l,r)}$ 和 $[\cdot,\cdot]_{(l,0)}$ 给出

$$\begin{aligned}[x+u,y+v]_{(l,r)} &= [x,y]_{\mathfrak{g}} + l_x v + r_y u,\\ [x+u,y+v]_{(l,0)} &= [x,y]_{\mathfrak{g}} + l_x v.\end{aligned}$$

右作用 r 诱导出一个线性映射 $\mathrm{r} : (\mathfrak{g} \oplus V) \otimes (\mathfrak{g} \oplus V) \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus V$，如下所示:

$$\overline{r}(x+u,y+v) = r_y u, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g},\ u, v \in V.$$

莱布尼茨代数 g $\ltimes_{(l,0)}$ V 的伴随表示 ad_L 和 ad_R 由下式给出

$$\mathrm{ad}_L(x+u)(y+v) = [x,y]_{\mathfrak{g}} + l_x v, \ \ \mathrm{ad}_R(x+u)(y+v) = [y,x]_{\mathfrak{g}} + l_y u.$$

定理 2.3. 使用上述记号，r 满足莱布尼茨代数 g $\ltimes_{(l,0)}$ V 上的下列 Maurer-Cartan 方程:

$$\partial\overline{r} - \frac{1}{2}[\overline{r},\overline{r}]_{\mathsf{B}} = 0,$$

其中，∂ 是莱布尼茨代数 g $\ltimes_{(l,0)}$ V 关于伴随表示的上边缘算子。因此，莱布尼茨代数 g $\ltimes_{(l,r)}$ V 是通过 Maurer-Cartan 元 r 对莱布尼茨代数 g $\ltimes_{(l,0)}$ V 的变形。

证明。直接计算可得

$$\begin{aligned}\partial\overline{r}(x+u,y+v,z+w) &= \mathrm{ad}_L(x+u)\overline{r}(y+v,z+w) - \mathrm{ad}_L(y+v)\overline{r}(x+u,z+w)\\ &\quad -\mathrm{ad}_R(z+w)\overline{r}(x+u,y+v) - \overline{r}([x+u,y+v]_{(l,0)},z+w)\\ &\quad +\overline{r}(x+u,[y+v,z+w]_{(l,0)}) - \overline{r}(y+v,[x+u,z+w]_{(l,0)})\\ &= l_x r_z v - l_y r_z u - r_z l_x v + r_{[y,z]_{\mathfrak{g}}} u - r_{[x,z]_{\mathfrak{g}}} v.\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}[\overline{r},\overline{r}]_{\mathsf{B}}(x+u,y+v,z+w) &= 2(\overline{r}(\overline{r}(x+u,y+v),z+w) - \overline{r}(x+u,\overline{r}(y+v,z+w))\\ &\quad +\overline{r}(y+v,\overline{r}(x+u,z+w)))\\ &= 2r_z r_y u.\end{aligned}$$

因此，由（2），我们有

$$\begin{aligned}\Big(\partial\overline{r} - \frac{1}{2}[\overline{r},\overline{r}]_{\mathsf{B}}\Big)(x+u,y+v,z+w) &= l_x r_z v - l_y r_z u - r_z l_x v + r_{[y,z]_{\mathfrak{g}}} u - r_{[x,z]_{\mathfrak{g}}} v - r_z r_y u\\ &= l_x r_z v - l_y r_z u - r_z l_x v + r_{[y,z]_{\mathfrak{g}}} u - r_{[x,z]_{\mathfrak{g}}} v + r_z l_y u\\ &= 0.\end{aligned}$$

证明完毕。 ■

定义 $l^*: g \longrightarrow gl(V^*)$ 为

$$\langle l_x^*(\xi), u\rangle = -\langle \xi, l_x u\rangle, \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ \xi \in V^*,\ u \in V.$$

显然，$(V^* \otimes V, l^* \otimes 1 + 1 \otimes l, 0)$ 也是g的一个表示，其中 $l^* \otimes 1 + 1 \otimes l : g \longrightarrow gl(V^* \otimes V)$ 定义为

$$(l^* \otimes 1 + 1 \otimes l)_x(\xi \otimes u) = (l_x^*\xi) \otimes u + \xi \otimes l_x u, \quad \forall \xi \in V^*,\ u \in V.$$

由于 $V^* \otimes V \cong gl(V)$，$V^* \otimes V$ 中的元素 $\xi \otimes u$ 可通过 $A(v) = \langle \xi, v\rangle u$ 识别为线性映射 $A \in gl(V)$。

命题2.4。在上述记号下，对于所有 $A \in V^* \otimes V \cong gl(V)$，我们有 e

$$(l^* \otimes 1 + 1 \otimes l)_x A = [l_x, A] = l_x \circ A - A \circ l_x.$$

此外，右作用$r : g \longrightarrow gl(V)$是g上以表示 $(V^* \otimes V, l^* \otimes 1 + 1 \otimes l, 0)$ 为系数的 1-余循环。

证明。令 $A = \xi \otimes u$，则有

$$\begin{aligned}(l^* \otimes 1 + 1 \otimes l)_x A(v) &= (l^* \otimes 1 + 1 \otimes l)_x(\xi \otimes u)(v) = \Big((l_x^*\xi) \otimes u + \xi \otimes l_x u\Big)(v)\\ &= \langle l_x^*\xi, v\rangle u + \langle \xi, v\rangle l_x u = -\langle \xi, l_x v\rangle u + \langle \xi, v\rangle l_x u\\ &= [l_x, A](v).\end{aligned}$$

因此，由（2），可得

$$\partial r(x, y) = (l^* \otimes 1 + 1 \otimes l)_x r(y) - r([x, y]_{\mathfrak{g}}) = [l_x, r_y] - r_{[x,y]_{\mathfrak{g}}} = 0,$$

这意味着 r 是一个 1-余循环。 ■

3. 莱布尼茨代数的全表示

众所周知，表示的目的是将抽象代数结构实现为向量空间上线性变换的某个类。例如，Lie代数的表示是从 g 到一般线性Lie代数 gl(V) 的同态。遗憾的是，上文讨论的莱布尼茨代数的表示，并未将莱布尼茨代数实现为某个具体莱布尼茨代数的子代数。因此，为莱布尼茨代数的表示提供另一种定义是合理的。幸运的是，存在一种天赐的莱布尼茨代数，可作为“广义线性代数”，其定义如下：

给定一个向量空间 V，则 $(V, l = \mathrm{id}, r = 0)$ 是 gl(V) 的自然表示，其中 gl(V) 被视为一个莱布尼茨代数。相应的定义在 $gl(V) \oplus V$ 上的半直积莱布尼茨代数结构如下：

$$\{A + u, B + v\} = [A, B] + Av, \quad \forall A, B \in \mathfrak{gl}(V),\ u, v \in V.$$

这个莱布尼茨代数称为 omni-李代数，记作 ol(V)。Weinstein 在 [22] as 中引入了 omni-李代数的概念，作为.....的线性化。

Courant代数胚。Courant代数胚的概念引入于 [17], ，该概念已广泛应用于数学和物理学的诸多领域（详见[15] ）。其莱布尼茨代数结构在研究Courant括号的可积性时也发挥了重要作用 [12, 16]。

注意，反对称括号

$$[\![A+u, B+v]\!] = [A, B] + \frac{1}{2}(Av - Bu), \tag{9}$$

它由 $\{\cdot,\cdot\}$ 的反对称化得到，并用于 Weinstein 最初的定义。尽管 omni-李代数不是 Lie代数，V 上的所有 Lie代数结构都可以由 ol(V) 中的 Dirac 结构刻画。事实上，下一个命题将表明，V 上的每个莱布尼茨代数结构都可以实现为 ol(V) 的一个莱布尼茨子代数。对于任意 $\varphi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{gl(V)}$，考虑其图像

$$\mathcal{G}_\varphi = \{\varphi(u) + u \in \mathfrak{gl}(V) \oplus V | \ \forall u \in V\}.$$

命题 3.1. 使用上述记号， $\mathcal{G}_\varphi$ 是 ol(V) 的莱布尼茨子代数，当且仅当

$$[\varphi(u), \varphi(v)] = \varphi(\varphi(u)v), \quad \forall\ u, v \in V. \tag{10}$$

此外，在此条件下，$(\mathrm{V}, [\cdot,\cdot]_\varphi)$ 是一个莱布尼茨代数，其中线性映射 $[\cdot,\cdot]_\varphi : \mathrm{V} \otimes \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$ 定义为

$$[u, v]_\varphi = \varphi(u)v, \quad \forall\ u, v \in V. \tag{11}$$

证明。 由于 $\mathfrak{ol}(V)$ 是一个莱布尼茨代数，我们只需证明 $\mathcal{G}_\varphi$ 封闭当且仅当（10）成立。结论由下式得出

$$\{\varphi(u) + u, \varphi(v) + v\} = [\varphi(u), \varphi(v)] + \varphi(u)v.$$

另一个结论显而易见。证明完毕。 ■

注 3.2. 条件(10) 实际上意味着 φ 是一个嵌入张量。有关嵌入张量的更多详情，请参见 [20]。

回顾一下，Lie代数g 在向量空间V上的表示是从g 到 Lie代数 gl(V) 的Lie代数同态，它将一个抽象Lie代数实现为一般线性Lie代数的子代数。类似地，对于莱布尼茨代数，我们提出如下定义：

定义 3.3。莱布尼茨代数$(\mathrm{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g})$在向量空间 V上的 omni-表示是一个莱布尼茨代数同态 $\rho : \mathrm{g} \longrightarrow \mathrm{ol(V)}$。

根据 gl(V) $\oplus$V 的两个分量，每个线性映射 $\rho : \mathrm{g} \longrightarrow \mathrm{ol(V)}$ 都分解为两个线性映射： $\phi : \mathrm{g} \longrightarrow \mathrm{gl(V)}$ 和 $\theta : \mathrm{g} \longrightarrow \mathrm{V}$。于是，我们有

命题3.4。一个线性映射 $\rho = \phi + \theta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \oplus V$是莱布尼茨代数$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$的omni-表示，当且仅当 $(V, \phi, 0)$ 是莱布尼茨代数$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 的表示，并且 $\theta : \mathfrak{g} \longrightarrow V$ 是莱布尼茨代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 上取值于表示 $(V, \phi, 0)$ 的一个 1-余循环。

证明。一方面，我们有

$$\rho([x,y]_{\mathfrak{g}}) = \phi([x,y]_{\mathfrak{g}}) + \theta([x,y]_{\mathfrak{g}}).$$

另一方面，我们有

$$\{\rho(x), \rho(y)\} = \{\phi(x) + \theta(x), \phi(y) + \theta(y)\} = [\phi(x), \phi(y)] + \phi(x)\theta(y).$$

因此，ρ 是一个同态，当且仅当

$$\phi([x,y]_{\mathfrak{g}}) = [\phi(x), \phi(y)], \tag{12}$$

$$\theta([x,y]_{\mathfrak{g}}) = \phi(x)\theta(y). \tag{13}$$

等式（12）表明（V，ϕ，0）是莱布尼茨代数（$\mathfrak{g}$，$[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$）的一个表示，而等式（13）表明 θ：$\mathfrak{g} \longrightarrow V$ 是莱布尼茨代数（$\mathfrak{g}$，$[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$）上取值于表示（$V$，$\phi$，0）的系数中的一个 1-余循环。 ■

定义 1.1 意义下的通常表示自然地产生一个 omni-表示。

定理 3.5.设 (V,l,r) 是莱布尼茨代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 的表示。则

$$\rho = (l^* \otimes 1 + 1 \otimes l) + r : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{ol}(V^* \otimes V)$$

是 g 在 $V^* \otimes V$ 上的 omni-表示。

证明。由命题 2.4，$r : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 是 g 上取值于表示 $(V^* \otimes V, l^* \otimes 1 + 1 \otimes l, 0)$ 的 1- 余循环。由命题 3.4，$\rho = (l^* \otimes 1 + 1 \otimes l) + r$ 是从 g 到 $\mathfrak{ol}(V^* \otimes V)$ 的同态，这意味着 ρ 是 g 在 $V^* \otimes V$ 上的 omni-表示。 ■

一个莱布尼茨代数$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 在 $\mathbb{R}$ 上的平凡 omni-表示被定义为一个同态

$$\rho_T = \phi + \theta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$$

使得 $\phi = 0$。由命题 3.4，有

命题 3.6. 莱布尼茨代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 的平凡全表示与满足 $\xi|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_{\mathfrak{g}}} = 0$ 的 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 一一对应。

莱布尼茨代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 在 g 上的伴随 omni-表示 ad 定义为同态。

$$\mathfrak{ad} = \mathrm{ad}_L + \mathrm{id} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}.$$

4. 莱布尼茨代数的 Omni-上同调

在本节中，我们介绍与 omni-表示相关的莱布尼茨代数的omni-上同调，并证明对于平凡表示和伴随表示，omni-上同调群与 Loday-Pirashvili 上同调群是同构的。

设 $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{ol}(V)$ 是莱布尼茨代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 的一个 omni-表示。显然，$\mathrm{im}(\rho) \subset \mathfrak{ol}(V)$ 是一个莱布尼茨子代数，因此可以定义 k-上链集合如下：

$$C^k(\mathfrak{g};\rho) = \{f : \otimes^k \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{im}(\rho)\}$$

以及一个算子 $\delta : C^k(\mathfrak{g};\rho) \longrightarrow C^{k+1}(\mathfrak{g};\rho)$，定义如下：

$$\begin{aligned}\delta c^k(x_1,\ldots,x_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\{\rho(x_i), c^k(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{k+1})\}\\ &\quad +(-1)^{k+1}\{c^k(x_1,\ldots,x_k),\rho(x_{k+1})\}\\ &\quad +\sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^i c^k(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{j-1},[x_i,x_j]_{\mathfrak{g}},x_{j+1},\ldots,x_{k+1}).\end{aligned} \tag{14}$$

引理 4.1. 使用上述记号，有 $\delta^2 = 0$。

证明. 对所有 $x \in \mathfrak{g}$ 和 $u \in \mathrm{im}(\rho)$，定义

$$l_x(u) = \{\rho(x), u\}, \quad r_x(u) = \{u, \rho(x)\}.$$

由 $\mathfrak{ol}(V)$ 是一个莱布尼茨代数这一事实，我们可以推得 $(\mathrm{im}(\rho); l, r)$ 是 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathrm{im}(\rho$上的一个表示，符合定义 1.1，而 δ 正是该表示通常的上边缘算子，因此 $\delta^2 = 0$。 ■

因此，我们得到一个定义良好的上链复形 $(C^\bullet(\mathfrak{g};\rho), \delta)$。相应的上同调称为莱布尼茨代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 的 omni-上同调，其系数取值于 omni-表示 ρ，记作 $H^\bullet_{omni}(\mathfrak{g};\rho)$。特别地，$H^\bullet_{omni}(\mathfrak{g})$ 和 $H^\bullet_{omni}(\mathfrak{g};\mathrm{ad})$ 分别表示系数取值于平凡 omni-表示和 $\mathfrak{g}$ 的伴随 omni-表示的 omni-上同调。

定理 4.2. 使用上述记号，我们有 $H^\bullet_{omni}(\mathfrak{g}) = H^\bullet(\mathfrak{g})$。

证明。若 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$，根据命题 3.6，仅存在一个平凡的 omni-表示 $\rho = 0$。在这种情况下，所有余链也都为 0。因此，$H^\bullet_{omni}(\mathfrak{g}) = 0$。另一方面，在条件 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$ 下，很容易推得，对于任意 $\xi \in C^k(\mathfrak{g})$，$\partial\xi = 0$ 当且仅当 $\xi = 0$。因此，$H^\bullet(\mathfrak{g}) = 0$。

若 $[\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}]_{\mathfrak{g}}$，$\mathfrak{g}$，任意 0，$\xi \in \mathfrak{g}^*$ 使得 $\xi|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_{\mathfrak{g}}} = 0$ 导出一个平凡的全表示 ρ_T。此外，我们有 $\mathrm{im}(\rho_T) = \mathbb{R}$ 且 $C^k(\mathfrak{g}) = \otimes^k\mathfrak{g}^*$。因此，这些集合的

上链在两类表示中相同。由于 V 是 ol(V) 中的阿贝尔子代数，对于任意 $\xi \in C^k(\mathfrak{g})$，我们有

$$\begin{aligned}\delta\xi(x_1,\ldots,x_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\{\rho_T(x_i), c^k(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{k+1})\}\\ &\quad +(-1)^{k+1}\{c^k(x_1,\ldots,x_k),\rho_T(x_{k+1})\}\\ &\quad +\sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^i c^k(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{j-1},[x_i,x_j]_{\mathfrak{g}},x_{j+1},\ldots,x_{k+1})\\ &= \sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^i c^k(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{j-1},[x_i,x_j]_{\mathfrak{g}},x_{j+1},\ldots,x_{k+1})\\ &= \partial\xi(x_1,\ldots,x_{k+1}).\end{aligned}$$

因此，我们有 $H^\bullet_{omni}(\mathfrak{g}) = H^\bullet(\mathfrak{g})$。■

对于伴随 omni-表示 $\mathrm{ad} = \mathrm{ad}_L + \mathrm{id}: \mathfrak{g} \longrightarrow gl(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}$，任意 k-上链 f 都由一个线性映射 $f: \otimes^k\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ 唯一确定，使得

$$f = (\mathrm{ad}_L \circ \mathfrak{f}, \mathfrak{f}) : \otimes^k\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{im}(\mathfrak{ad}). \tag{15}$$

定理 4.3。采用上述记号，我们有 $H^\bullet_{omni}(\mathfrak{g};\mathrm{ad}) = H^\bullet(\mathfrak{g};\mathrm{ad}_L,\mathrm{ad}_R)$.

证明。 由于任意k-上链$f: \otimes^k\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{im}(\mathfrak{ad})$ 都由一个线性映射唯一确定$\mathfrak{f}: \otimes^k\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$，通过(15)。因此，两类表示所关联的上链集合之间存在一一对应关系，通过$f \leftrightsquigarrow \mathfrak{f}$。此外，我们有

$$\begin{aligned}&\delta f(x_1,\ldots,x_{k+1})\\ =\ &\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\{\mathfrak{ad}(x_i), f(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{k+1})\}\\ &+(-1)^{k+1}\{f(x_1,\ldots,x_k),\mathfrak{ad}(x_{k+1})\}\\ &+\sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^i f(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{j-1},[x_i,x_j]_{\mathfrak{g}},x_{j+1},\ldots,x_{k+1})\\ =\ &\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\{\mathrm{ad}_L(x_i)+x_i, \mathrm{ad}_L\mathfrak{f}(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{k+1})+\mathfrak{f}(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{k+1})\}\\ &+(-1)^{k+1}\{\mathrm{ad}_L\mathfrak{f}(x_1,\ldots,x_k)+\mathfrak{f}(x_1,\ldots,x_k), \mathrm{ad}_L(x_{k+1})+x_{k+1}\}\\ &+\sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^i\Big(\mathrm{ad}_L\mathfrak{f}(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{j-1},[x_i,x_j]_{\mathfrak{g}},x_{j+1},\ldots,x_{k+1})\\ &+\mathfrak{f}(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{j-1},[x_i,x_j]_{\mathfrak{g}},x_{j+1},\ldots,x_{k+1})\Big)\\ =\ &\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\Big([\mathrm{ad}_L(x_i),\mathrm{ad}_L\mathfrak{f}(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{k+1})]+\mathrm{ad}_L(x_i)\mathfrak{f}(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{k+1})\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(-1)^{k+1}\Big([\mathrm{ad}_L\mathfrak{f}(x_1,\dots,x_k),\mathrm{ad}_L(x_{k+1})]+\mathrm{ad}_L\mathfrak{f}(x_1,\dots,x_k)x_{k+1}\Big)\\
&+\sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^i\Big(\mathrm{ad}_L\mathfrak{f}(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{j-1},[x_i,x_j]_{\mathfrak{g}},x_{j+1},\dots,x_{k+1})\\
&+\mathfrak{f}(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{j-1},[x_i,x_j]_{\mathfrak{g}},x_{j+1},\dots,x_{k+1})\Big)\\
=&\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\Big(\mathrm{ad}_L[x_i,\mathfrak{f}(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{k+1})]_{\mathfrak{g}}+[x_i,\mathfrak{f}(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{k+1})]_{\mathfrak{g}}\Big)\\
&+(-1)^{k+1}\Big(\mathrm{ad}_L[\mathfrak{f}(x_1,\dots,x_k),x_{k+1}]_{\mathfrak{g}}+[\mathfrak{f}(x_1,\dots,x_k),x_{k+1}]_{\mathfrak{g}}\Big)\\
&+\sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^i\Big(\mathrm{ad}_L\mathfrak{f}(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{j-1},[x_i,x_j]_{\mathfrak{g}},x_{j+1},\dots,x_{k+1})\\
&+\mathfrak{f}(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_{j-1},[x_i,x_j]_{\mathfrak{g}},x_{j+1},\dots,x_{k+1})\Big)\\
=&\ \mathrm{ad}_L\partial\mathfrak{f}(x_1,\dots,x_{k+1})+\partial\mathfrak{f}(x_1,\dots,x_{k+1}).
\end{aligned}
$$

因此，我们有 $\delta\mathfrak{f}=0$ 当且仅当 $\partial\mathfrak{f}=0$。类似地，可以证明 $\mathfrak{f}$ 是恰当的当且仅当 $\mathfrak{f}$ 是恰当的。因此，相应的上同调群同构。 ■

最后，我们考虑一个全表示 ρ，使得 ρ 的像包含于某个线性映射 $\varphi:V\longrightarrow \mathrm{gl}(V)$ 的图 $\mathcal{G}_\varphi$ 中，其中该线性映射满足公式(10)。在这种情况下，ρ 具有 $\rho=\varphi\circ\theta+\theta$的形式，其中 $\theta:\mathfrak{g}\longrightarrow V$是一个线性映射。一个 k-余链 $\mathfrak{f}:\otimes^k\mathfrak{g}\longrightarrow \mathrm{im}(\rho)$具有$\mathfrak{f}=\varphi\circ\mathfrak{f}+$f的形式，其中 $\mathfrak{f}:\otimes^k\mathfrak{g}\longrightarrow V$ 是一个线性映射。

按照定义定义左作用和右作用1.1 如下

$$l_xu=\mathrm{pr}\{\rho(x),\varphi(u)+u\}=\varphi(\theta(x))u; \tag{16}$$

$$r_xu=\mathrm{pr}\{\varphi(u)+u,\rho(x)\}=\varphi(u)\theta(x), \tag{17}$$

其中，pr 是从 $\mathfrak{gl}(V)\oplus V$到 V的投影。与定理 4.3类似，容易证明

定理 4.4。 设 ρ 是一个 omni-表示，且 ρ 的像包含于图 $\mathcal{G}_\phi$ 中，其中线性映射 $\varphi:V\longrightarrow\mathfrak{gl}(V)$ 满足式 (10)。则有

$$H^\bullet_{omni}(\mathfrak{g};\rho)=H^\bullet(\mathfrak{g};l,r),$$

其中l 和 r 由下式给出(16) 以及(17) 分别。

参考文献

[1] J. Adashev、M. Ladra 和 B. Omirov，单莱布尼茨代数的第二上同调群。*J.Algebra Appl.* 17 (2018)，第 12 期，1850222，13 页。2[2] D. Balavoine，二次型歌剧上的代数变形。*Contemporary Math.* AMS，202 (1997)，207-234。3[3] D. W. Barnes，莱布尼茨代数的忠实表示。*Proc. Amer. Math. Soc.* 141 (2013)，第 9 期，2991-2995。2

[4] S. Benayadi, 《关于对称Leibniz代数的表示》。Glasg. Math.J.62 (2020), 第 S1期, S99-S107。2[5] A. Bloh, 《关于Lie代数概念的一种推广》, Dokl. Akad.Nauk SSSR 165 (1965), 471-473。1[6] L. M. Camacho、I. Kaygorodov、B.Omirov 和G. Solijanova, 《一些上同调刚性可解Leibniz代数》。J.Algebra 560 (2020), 502-520。2[7] Y. Cheng、L. Wu和P. Wang, 《三维Lie代数上的Rota-Baxter算子与经典Yang-Baxter方程的解》。Commun.Math. Res. 35 (2019), 81-96。2[8] J. Feldvoss 和 F. Wagemann, 《关于Leibniz上同调》。J.Algebra 569 (2021), 276-317。2[9] A. Fialowski、L. Magnin和A.Mandal, 《关于Lie代数的Leibniz上同调与形变》。J.Algebra 383 (2013), 63-77。2[10] A. Fialowski和A. Mandal, 《Lie代数的Leibniz代数形变》。J. Math. Phys.49(2008), 第 9 期, 093511, 11 页。3[11] N. Hu、Y.Pei和 D. Liu, 《Lie代数的Leibniz中心扩张的上同调刻画》。Proc.Amer.Math.Soc.136 (2008), 第 2期, 437-447。2[12] M. K.Kinyon 和A.Weinstein, 《Leibniz代数、Courant代数胚与约化齐性空间上的乘法》。Amer. J.Math. 123 (2001), 525-550。6[13] P. S.Kolesnikov, 《Leibniz代数的共形表示》。（俄文）Sibirsk. Mat. Zh.49 (2008), 第 3 期, 540–547；译文见 Sib. Math. J.49 (2008), 第 3 期, 429-435。2[14] Y.Kosmann-Schwarzbach, 《Courant代数胚：简史》。SIGMA Symmetry IntegrabilityGeom. MethodsAppl. 9 (2013), 论文 014, 8 页。1,6[15] A. Kotov和T.Strobl, 《嵌入张量、Leibniz-Loday代数及其高阶规范理论》。Comm. Math.Phys. 376(2020), 第 1 期, 235-258。1, 6[16] C. Laurent-Gengoux 和 F. Wagemann, 《积分Courant代数胚的Lie rackoids》。Ann.GlobalAnal.Geom. 57(2020), 第 2 期, 225-256。6[17] Z.-J.Liu、A. Weinstein 和 P. Xu, 《Lie双代数胚的Manin三元组》。J.Diff. Geom. 45 (1997), 547-574。6[18] J.-L.Loday和T.Pirashvili, 《Leibniz代数的泛包络代数与（上同调）》。Math. Ann. 296 (1993), 139-158。1,2[19] D.Roytenberg, 《Courant代数胚、导出括号与偶辛超流形》, 博士论文, 加州大学伯克利分校, 1999, arXiv:math.DG/9910078。1[20] Y. Sheng、R.Tang 和C. Zhu, 《嵌入张量与Lie-Leibniz三元组的控制L_∞代数、上同调与同伦》。Comm.Math.Phys. 386 (2021), 269-304。6[21] R. Tang 和 Y.Sheng, 《Leibniz双代数、相对Rota-Baxter算子与经典Leibniz Yang-Baxter方程》。J. Noncommut.Geom.16 (4) (2022), 1179-1211。2[22] A. Weinstein, 《Omni-Lie代数、薛定谔方程的微局部分析及相关主题》（日文）（京都, 1999）。S ¯urikaisekikenry¯usho K¯oky¯uroku 第 1176 号（2000）, 95-102。2, 5

数学系，北京大学，北京 100871，中国 电子邮件地址：
liuzj@pku.edu.cn

数学系，吉林大学，中国吉林长春 130012，电子邮箱：
shengyh@jlu.edu.cn