arXiv:2304.02817v1 [math.GR] 6 Apr 2023

关于计算可解置换群的闭包

I利娅·波诺马连科 和 ANDREY V. VASIL' EV

Abstract. 设 $m \geq 3$ 为一个整数。本文证明，可以在 $n^{O(m)}$时间内构造给定的次数为 n 的可解置换群的 m-闭包。关键词。置换群，闭包，多项式时间算法。

1. Introduction

令 m 为正整数，且Ω 为有限集合。 m-闭包 $G^{(m)}$ 关于$G \leq$ Sym(Ω)是Ω上具有与 G在其诱导作用于笛卡尔幂 Ω^m时相同轨道的最大置换群。置换群的 m-闭包由H. Wielandt 于 [22], 引入；在那里特别证明了，$G^{(m)}$ 可以视为所有关于 G不变的 m-元关系的集合的全自同构群。此后，该理论沿不同方向得到发展，例如，研究了本原群 [13, 17, 25], 的闭包、闭包相对于置换群运算 [7, 10, 20],的行为、完全闭的抽象群 [1, 2, 8], 等。

从计算的角度来看，求给定置换群的 m-闭包这一 m-闭包问题具有特殊意义；下文中均假设置换群由生成集给出，参见 [19]。当数 m 作为输入的一部分给出时，即使输入群是阿贝尔群，该问题似乎也非常困难。因此，将 m-闭包问题限制在 m 固定且输入群属于某一类群的情形，是十分自然的。在这种情况下，对于奇数阶群 [9] 构造出了求 m-闭包的多项式时间算法；当 $m = 2$时，对于幂零群和超可解群 [15, 16]也构造出了这类算法。注意， $m = 1$ 的情形是平凡的，因为任意置换群 G 的 1-闭包都等于作用在 G的轨道上的对称群的直积。

本文的目标是在所有可解群这一类中，为 $m \geq 3$ 解决 m-闭包问题（注意，存在一种高效算法，可用于测试给定的置换群是否可解）。

定理 1.1. 给定整数 $m \geq 3$，次数为 n 的可解置换群的 m-闭包可在 $n^{O(m)}$ 时间内求得。

定理 1.1 的证明见第 3 节。我们证明方法的出发点是 [14] 中的主要结果，该结果指出，对于 $m \geq 3$ ，每个可解置换群的 m-闭包都是可解的。要应用这一结果，对于给定的可解群 G ，只需找到一个可解超群，然后在其中找到 $G^{(m)}$ 即可。

第二位作者获得俄罗斯科学院基础研究计划项目 FWNF-2022-0002 的资助。

借助Babai-Luks算法 [3]；后者尤其能够高效地找出任意群 G 相对于可解群 H 的相对 m-闭包 $G^{(m)} \cap H$。

为说明如何找到上群，我们回顾一下：如果一个置换群包含于一个具有积作用的wreath 积中，则称其为非基本的；否则称其为基本的，见 [4, 第 4节。3] 对具有忠实正则轨道的本原可解线性群进行分类 [24] 可推出，对于充分大的本原基本可解群 G，我们有 $G = G^{(m)}$ 对所有 $m \geq 3$。这将问题归结为非基本的可解群，即那些可以嵌入较小群的直积或 wreath积中的群。事实上，我们只需检验相应的嵌入是否存在，并在存在时将其明确找出。这是第 2 节的主题。

所有未定义术语均可在 [4]（关于置换群）和 [19]（关于置换群算法）中找到。

作者感谢 S. V. 斯克列萨诺夫进行富有成效的讨论并提出有益的意见。

2. The embedding problem

给定置换群 $K \leq \mathrm{Sym}(\Delta)$ 和 $L \leq \mathrm{Sym}(\Gamma)$，我们用 $K \times L$（分别用 $K \wr L$、$K \uparrow L$）表示由 K 和 L 的直积（分别为绕积）在 $\Delta \cup \Gamma$（分别为 $\Delta \times \Gamma$、$\Delta^{|\Gamma|}$）上的作用所诱导的置换群。

定理 2.1. 设 $m \geq 2$ 为整数，K、L 为置换群，且 $\star \in \{\times, \wr, \uparrow\}$。那么

$$(K \star L)^{(m)} \leq K^{(m)} \star L^{(m)}$$

除非 $\star = \uparrow$、$m = 2$和 K 是 2-传递的。

证明。参见 [14, 定理 3.1、3.2] 和 [20, 定理 1.2]。 □

定理 2.1 用于将研究群 $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ 的 m-闭包化简为较小集合上的置换群。从算法角度来看，我们需要解决 $\star$嵌入问题：检验是否存在一个从 G到 $K \star L$ 的嵌入，其中 G群的某些子商 $K \leq \mathrm{Sym}(\Delta)$ 和 $L \leq \mathrm{Sym}(\Gamma)$ 满足 $|\Delta| < |\Omega|$ 且 $|\Gamma| < |\Omega|$；如果存在，则显式求出该嵌入。具体而言，就是找出一个从 Ω 到 $K \star L$底集的双射 f，使得

$$f^{-1} G f \leq K \star L. \tag{1}$$

如果 G 是非传递的且 $\star = \times$，或者是非本原的且 $\star = \wr$，那么 $\star$ 嵌入问题就很容易。本节剩余部分，我们将聚焦于本原 G 和 $\star = \uparrow$ 的 $\star$ 嵌入问题。

Ω的笛卡尔分解在 [18] 中定义为Ω 的分划的有限集合 $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$，使得 $|P_i| \geq 2$ 对于每个 i 以及 $|\Delta_1 \cap \cdots \cap \Delta_k| = 1$ 对于每个$\Delta_1 \in P_1$，....., $\Delta_k \in P_k$。如果 $\mathcal{P}$只包含一个分划，即单元素集分划，则称笛卡尔分解 $\mathcal{P}$是平凡的；如果数量 $|P_i|$ 不依赖于 $i = 1$，....., k，则称 $\mathcal{P}$ 是齐次的。 $\mathcal{P}$的每个分划 π都定义了一个笛卡尔分解 $\mathcal{P}_\pi$，该分解由交 $P_{i_1} \wedge \cdots \wedge P_{i_\ell}$ 构成，其中 $\{P_{i_1}, \ldots, P_{i_\ell}\}$ 是 π 的一个类。

群 $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$保持（分别地，稳定）笛卡尔分解 $\mathcal{P}$，如果 G 的任意元素置换 P_i（分别地，固定每个 P_i）。在此情况下，我们称 $\mathcal{P}$ 对于 G 是极大的，如果 $\mathcal{P} = \mathcal{Q}_\pi$ 对于没有任何由 G 保持（分别地，稳定）的笛卡尔分解 $\mathcal{Q}$ 以及没有非平凡划分 π

的 $\mathcal{Q}$。注意，如果 G 保持 $\mathcal{P}$，且 G 在 $\mathcal{P}$ 上的作用是传递的，那么 $\mathcal{P}$是齐性的。此外，如果 G 稳定一个非平凡的 $\mathcal{P}$，那么 G 不可能是本原的。

笛卡尔分解的一个自然例子来自 wreath 积$G = K \uparrow L$，其中与前文一样，$K \leq$ Sym(Δ) 且 $L \leq$ Sym(Γ)。G的底集等于 Δ^k，其中 $k = |\Gamma|$，并且可以定义一个划分 $P_i (i = 1, \ldots, k)$，其 $|\Delta|$ 个类的形式为

$$\{(\delta_1, \ldots, \delta_k) \in \Delta^k : \ \delta_i \text{ is a fixed element of } \Delta\}.$$

划分 $P_1, \ldots, P_k$构成 Ω 的一个笛卡尔分解 $\mathcal{P}$，它由 G 保持，并由 K^k稳定；我们称 $\mathcal{P}$ 是 G的标准笛卡尔分解。显然，对于任意给定的 K 和 L，都可以高效地找到它。积作用下 wreath 积 [11] 的众所周知的性质表明，若 G 是本原的，则标准笛卡尔分解 (a) 是齐次的，并且 (b) 在由 G保持的分解中是极大的，当且仅当 K 是基本的。

引理 2.2。令 $G \leq$ Sym(Ω)为一个本原群。那么，G 是非基本的，当且仅当 G 保持Ω 的一个非平凡齐次笛卡尔分解。此外，给定这样的分解，可以高效地找到将 G 嵌入到具有积作用的 wreath 积中的嵌入。

证明。设 G 非基本。于是，对于某个 $K \leq$ Sym(Δ) 和 $L \leq$ Sym(Γ)，存在一个将 G 嵌入群 $K \uparrow L$的嵌入，使得 $|\Delta| < |\Omega|$ 且 $|\Gamma| < |\Omega|$。记 f 为从Ω到 $\Delta^{|\Gamma|}$ 的相应双射。于是，G 保持一个齐次非平凡的笛卡尔分解 $f^{-1}(\mathcal{P})$，其中 $\mathcal{P}$ 是 $K \uparrow L$ 的标准笛卡尔分解。

设 G 保持 Ω 的一个非平凡齐性笛卡尔分解 $P_1, \ldots, P_k$。记 L（分别地，K）为 G（分别地，G 中 P_1 的稳定子）在 $\Gamma = \{P_1, \ldots, P_k\}$（分别地，$\Delta = P_1$）上的作用所诱导的置换群。按照 [18, 定理 5.13]，的证明，可以有效地将每个 P_i 识别为 Δ。于是，可以有效地找到将笛卡尔积 $\Delta_1 \times \ldots \times \Delta_k \in P_1 \times \ldots \times P_k$ 映到 $\Delta_1 \cap \ldots \cap \Delta_k$ 中唯一点的双射 f，其定义域为 $\Delta^k = P_1 \times \ldots \times P_k$，陪域为 Ω。现在，双射 f^{-1} 将 G 映到 $K \uparrow L$ 的一个子群中。□

定理 2.3. 设 G 是次数为 n 的置换群，且 $\star \in \{\times, \wr, \uparrow\}$。假设当 $\star = \wr$时 G 是非本原的，而当 $\star =\uparrow$ 时是本原的。那么，G 的 $\star$-嵌入问题可在 poly(n) 时间内求解。

证明。使用标准置换群算法 [19, 第 3 节1],，当 $\star = \times$ 或 $\wr$时，可以为 $G \leq$ Sym(Ω) 解决 $\star$-嵌入问题。假设 $\star =\uparrow$ 且 G是本原的。那么（同样通过标准置换群算法），可以在 poly(n) 时间内找到 G 的基群 $S =$Soc(G)，并测试 S 是否为阿贝尔群。

在阿贝尔情形，所需陈述几乎可以用与 [9, 第5节中1] 针对可解群所采用的相同方式证明。事实上，在此情形下，群 S是阶为 $n = p^k$ 的初等阿贝尔群，并且可以自然地与Ω 视为同一对象，因此 Ω 可以被视为域 p上的线性空间。引用论文中所描述的 BLOCK 程序能够高效地找到一个最小子空间 $\Delta \subseteq \Omega$，使得 Ω是属于集合 $\Gamma = \{\Delta^g$ 的子空间的直和：$g \in G\}$。现在，所需的 G 嵌入仅当 $\Delta \neq \Omega$ 时才存在，此时则作为 L 和 K 之一

可以取群 G^Γ 以及其将 Δ （作为一个点）的稳定子限制到 Δ（作为一个集合）。

设 S 为非阿贝尔群。那么 S 是若干两两同构的非阿贝尔单群的直积。我们需要两个辅助结论。

断言 1. 至多存在一个由 S 稳定的非平凡极大笛卡尔分解 $\mathcal{P}$。此外，可以在 poly(n) 时间内检验 $\mathcal{P}$ 是否存在；若存在，则可在相同时间内找到它。

证明. 我们将说明，除语言（事实上是相干构形的语言，见 [5]）之外，这一断言几乎可直接由 [6, 12] 中的结果推出。首先注意，由 S 稳定的笛卡尔分解恰好是与 S 相关联的相干构形 $\mathcal{X}$ 的张量分解（详见 [6]）。因此，根据 [6, 定理 1], , 由 S 稳定的笛卡尔分解与相干构形 $\mathcal{X}$ 本身的笛卡尔分解之间存在一一对应关系（且可高效计算）。此外，若 S 的每个子度都至少为 2，即 $\mathcal{X}$ 按照 [6], 的术语是厚的，那么 $\mathcal{X}$ [6, 至多存在一个非平凡极大笛卡尔分解 $\mathcal{P}$ 定理 2]。 [6, 引理 13] 中的多项式时间算法使我们能够找到证书，证明 $\mathcal{X}$ 只有平凡的笛卡尔分解，或构造出 $\mathcal{P}$。

假设 S 的至少一个（非平凡）子次数等于 1。由于 S 的一点稳定子的单点轨道之并是本原群 G 的一个块，这个并集就是整个集合 Ω，且群 S 是正则的。在这种情况下，相干构形 $\mathcal{X}$ 也正则， $S = \mathrm{Aut}(\mathcal{X})$；由上述 [6, 定理 1], 可知, $\mathcal{X}$ 的笛卡尔分解与群 S 本身的直积分解一一对应。如果该群是单群，那么 S 只稳定平凡的笛卡尔分解。否则，将 S 分解为两两同构的（非阿贝尔）单群的直积，便得到由 S 稳定的最大非平凡笛卡尔分解 $\mathcal{P}$ 。最后需要指出，利用 [12] 中的主算法可以高效地找到 $\mathcal{P}$ 。□

断言 2. 假设 G 是非基本的。那么，对某个 π （它是断言 1 中笛卡尔分解 $\mathcal{P}$ 的一个划分）， G 保持形如 $\mathcal{P}_\pi$ 的非平凡齐次笛卡尔分解。

证明。由于 G 不是基本的，我们可以假设 $G \le K \uparrow L$，其中 K 是基本本原的，而 L 是传递的。记 Q 为相应的标准笛卡尔分解（引理 2.2）。我们还可以假设 K 是 P 在 G中的稳定子对 $P \in Q$ 的作用所诱导的置换群。于是，根据 [4, 定理 4.7] （以及其后的注记）， G 的 socle S 是 wreath 积 $K \uparrow L$的基群的子群。由此可知， S 稳定 Q。因此，根据断言 1，存在唯一的由 S 稳定的非平凡笛卡尔分解 $\mathcal{P}$，以及 $\mathcal{P}$的某个划分 π ，使得 $Q = \mathcal{P}_\pi$ 。由于 G 在 $\mathcal{P}$上传递地作用，分解 Q 是齐次的。□

让我们完成证明。根据引理 2.2，只需检验 G 是否保持一个非平凡的笛卡尔分解；如果保持，则高效地找出该分解。应用断言1中的算法，我们高效地检验 S 是否稳定一个非平凡的笛卡尔分解。如果不是，那么 G 不可能保持一个非平凡的笛卡尔分解（见断言 2）。否则，我们高效地找出笛卡尔分解 $\mathcal{P}$ ，从

命题1.根据命题2，我们只需检验是否存在一个分割 π的 $\mathcal{P}$，使得 $\mathcal{P}_\pi$ 是由 G 保持的非平凡齐次笛卡尔分解；如果存在，则高效地找出它。由于 $\mathcal{P}$ 是非平凡的，我们有 $|\mathcal{P}| \le \log n$ ，并且幂集 $2^{\mathcal{P}}$ 的基数至多为 $2^{\log n} = n$。此外，由 G 保持的笛卡尔分解 $\mathcal{P}_\pi$ 与满足以下条件的那些子集 $Q \subseteq \mathcal{P}$ 一一对应：

$$\{Q^g : g \in G\} \text{ is a homogeneous partition of } \mathcal{P}.$$

由于该条件只需对生成元 g 的 G进行检验，我们就完成了。 □

3. Proof of Theorem 1.1

我们从一个适用于任意完备群类的更一般结论推导出定理 1.1。若一个（抽象）群类在取子群、商群和扩张时封闭，则称其为完备群类 [21, 定义 11.3]。显然，任何完备群类在直积、wreath 积以及取子商时都封闭。所有属于 $\mathfrak{K}$ 、次数至多为 n 的置换群构成的类记为 $\mathfrak{K}_n$。

定理 3.1. 设 m、 $n \in \mathbb{N}$、 $m \ge 3$ 和 $\mathfrak{K}$ 是一个完备的群类。那么

(i) $\mathfrak{K}_n$ 对取 m-闭包运算封闭，当且仅当 $\mathfrak{K}_n$ 包含 $\mathfrak{K}_n$ 中每个本原基本群的 m-闭包；(ii) 通过调用用于求出 $\mathfrak{K}_n$ 中每个本原基本群的 m-闭包，以及相对于任意 $\mathfrak{K}_n$ 求出 $\mathfrak{K}_n$ 中每个群的相对 m-闭包的预言机，可以在 poly(n) 时间内求出 $\mathfrak{K}_n$ 中任意群的 m- 闭包。

证明. 命题 (i) 中“仅当”部分显然。为证明“当”部分及命题 (ii)，我们给出一个或多或少标准的递归算法，用于求群 $G \in \mathfrak{K}_n$ 的 m-闭包 $G^{(m)}$。在每一步中，我们都将验证 $G^{(m)} \in \mathfrak{K}_n$。

根据 $G \le$ Sym(Ω) 是非传递、非本原还是本原，我们分别令 $\star = \times$、 $\wr$ 或 $\uparrow$。根据定理 2.3，为 G 求解 $\star$-嵌入问题后，可以在 poly(n) 时间内测试是否存在从 G 到 $K \star L$ 的嵌入，其中某些子商

$$K \le \mathrm{Sym}(\Delta) \quad \text{and} \quad L \le \mathrm{Sym}(\Gamma)$$

满足 G，使得数值 $n_K = |\Delta|$ 和 $n_L = |\Gamma|$ 小于 $n = |\Omega|$；如果存在，则明确求出该嵌入。如果不存在这样的嵌入，则 G 是本原基本的，属于 $\mathfrak{K}_n$，并且可以通过调用相应预言机一次的代价求出 G 的 m-闭包。

假设 G 不是本原基本的，并且给定一个双射 f 从Ω 到 $K \star L$的底层集合，使得等式(1) 成立。由于 $f^{-1}G^{(m)}f$ =($f^{-1}Gf$)$^{(m)}$，我们还可以假设

$$G \le K \star L.$$

注意， $K \in \mathfrak{K}_{n_K}$ 和 $L \in \mathfrak{K}_{n_L}$，因为类 $\mathfrak{K}$ 是完备的。递归地将算法应用于 K 和 L，我们分别在时间poly(n_K)和poly(n_L)内找到群 $K^{(m)}$ 和 $L^{(m)}$ ，然后在时间poly(n)内得到群 $K^{(m)} \star L^{(m)}$。由归纳法， $K^{(m)} \in \mathfrak{K}_{n_K}$ 和 $L^{(m)} \in \mathfrak{K}_{n_L}$，从而 $K^{(m)} \star L^{(m)} \in \mathfrak{K}_n$。另一方面，根据定理 2.1，我们有

$$G^{(m)} \le (K \star L)^{(m)} \le K^{(m)} \star L^{(m)}.$$

因此， $G^{(m)} \in \mathfrak{K}_n$。访问（一次）用于寻找 m-闭包（ G 相对于 $K^{(m)} \star L^{(m)}$）的预言机，我们最终得到群 $G^{(m)}$。

还需估算预言机调用的次数。每次递归调用都会将一个次数为 n 的群的问题，分解为一个次数为 n_K的群 K 的问题和一个次数为 n_L的群 L 的问题。此外，

$$n = \begin{cases} n_K + n_L & \text{if } \star = \times, \\ n_K \cdot n_L & \text{if } \star = \wr, \\ {n_K}^{n_L} & \text{if } \star = \uparrow. \end{cases}$$

因此，递归调用的总次数，进而访问预言机的次数，至多为 n。□

对于 $m = 2$ 证明定理 3.1 的一个障碍，在于定理 2.1 的例外情形。事实上，假设类 $\mathfrak{K}$ 并不包含所有群。那么，它就不可能包含次数任意大的对称群。然而，任意次数为 n 的二重传递群的 2-闭包都等于 Sym(n)。因此， $\mathfrak{K}$ 也不可能包含次数充分大的二重传递群。看来，这实质上限制了类 $\mathfrak{K}$ 。

注记 3.2。事实上，定理 3.1 的证明表明，该定理的以下弱化版本成立：对于 $m = 2$ ，若将“本原基本群”替换为“本原群”，定理 3.1 的两个陈述仍然成立。

定理1.1 的证明。用 $\mathfrak{K}$ 表示所有可解群的类。这个类显然是完备的。此外，根据 [3, 推论3.6]（另见 [16, 第6.2] 节），任意 $\mathfrak{K}_n$中的群相对于 $\mathfrak{K}_n$ 中的任意其他群的相对 m-闭包都可以在poly(n)时间内找到。根据定理 3.1，只需验证本原基本群 $G \in \mathfrak{K}_n$ 的 3-闭包可以在 poly(n) 时间内找到；事实上，如果 $m > 3$，那么 $G^{(m)} \leq G^{(3)}$ 可以作为 G相对于 $G^{(3)}$的相对 m-闭包找到。

首先，假设一个点稳定子 H （属于 G ）具有一个正则轨道。于是，根据 [14, 推论 2.5], , G 是3-闭的，无需再做任何处理，因为 $G = G^{(3)}$。现在，如果该群 H 没有正则轨道且 n 足够大，那么数量$n = q$ 是一个素数幂，并且 $H \leq \Gamma\mathrm{L}(1, q)$，见 [24, 推论3.3]。在这种情况下，根据 [23, 命题3.1.1] ，$H = H^{(2)}$ ，再次有 $G = G^{(3)}$。在剩余情形下， G 的度数被某个绝对常数所界定，设为 N，并且可以通过检查 Sym(N) 的所有置换找到群 $G^{(3)}$ 。

References

[1] A. Abdollahi、M. Arezoomand 和 G. Tracey， *On finite totally 2-closed groups*，C. R. Math. Acad. Sci. Paris，360，1001–1008（2022）。[2] M. Arezoomand、M. A. Iranmanesh、C. E. Praeger、G. Tracey， *Totally 2-closed finite groups with trivial Fitting subgroup* 2111 02253 2021 ，arXiv：。

（）。[3] L. Babai 和 E. M. Luks， *Canonical labeling of graphs*，载于：第 15 届 ACM STOC 会议论文集（ 1983），第 171–183 页。[4] P. J. Cameron， *Permutation groups*，剑桥大学出版社（1999）。[5] G. Chen 和 I. Ponomarenko， *Coherent Configurations*，华中师范大学出版社，武汉（ 2019 `http://www.pdmi.ras.ru/~inp/ccNOTES.pdf` ）；草稿见 [6] *Tensor products of coherent configurations* G. Chen 和 I. Ponomarenko，，《中国数学前沿》，17，第 5 期，829–852（2021）。[7] D. Churikov， *Structure of k-closures of finite nilpotent permutation groups*，《代数与逻辑》，60，第 2 期，154–159（2021）。

[8] D. Churikov 和 C. E. Praeger, *Finite totally k-closed groups*。《数学与力学研究所汇刊》，27，第 1 期，240–245（2021）。[9] S. Evdokimov 和 I. Ponomarenko, *Two-closure of odd permutation group in polynomial time* 1 232 2001 ，《离散数学》，235，第 -3 期，221– （）。[10] L. A. Kaluˇznin 和 M. H. Klin, *On some numerical invariants of permutation groups*，《拉脱维亚数学年刊》，18，第 1 期，81–99（1976）。[11] L. A. Kaluˇznin、M. H. Klin 和 V. I. Suˇsˇcans'kiˇi, *Exponentiation of permutation groups. I*，（俄文），《高等院校数学学报》，第 8 期，26–33（1979）。[12] N. Kayal 和 T. Nezhmetdinov, *Factoring Groups Efficiently*，《计算机科学讲义》，5555，585–596（2009）。[13] M. W. Liebeck、C. E. Praeger 和 J. Saxl, *On the 2-closures of finite permutation groups*，《伦敦数学学会杂志》（第 2 辑），37，第 2 期，241–252（1988）。[14] E. A. O'Brien、I. Ponomarenko、A. V. Vasil'ev 和 E. Vdovin, *The 3-closure of a solvable permutation group is solvable* **607**, 618 637 2022 ，《代数学杂志》，A 部，– （）。[15] I. Ponomarenko, *Graph isomorphism problem and 2-closed permutation groups*，《工程、通信与计算中的应用代数》，5，9–22（1994）。[16] I. Ponomarenko 和 A. Vasil'ev, *Two-closure of supersolvable permutation group in polynomial time* 5 2020 ，《计算复杂性》，29，第 （）。[17] C. E. Praeger 和 J. Saxl, *Closures of finite primitive permutation groups*，《伦敦数学学会通报》，24，251–258（1992）。[18] C. E. Praeger 和 C. Schneider, *Permutation Groups and Cartesian Decompositions*，《伦敦数学学会讲义丛书》，449，剑桥大学出版社，剑桥（2018）。[19] ´A. Seress, *Permutation group algorithms*，剑桥大学出版社（2002）。[20] A. V. Vasil'ev 和 I. N. Ponomarenko, *The closures of wreath products in product action*，《代数与逻辑》，60，第 3 期，188–195（2021）。[21] H. Wielandt, *Zusammengesetzte Gruppen endlicher Ordnung*，1963/64 年冬季学期在图宾根大学的讲座。载于：Huppert, B., Schneider, H.（编），《Helmut Wielandt：数学著作》，第 1 卷：群论，第 607–655 页。德格鲁伊特出版社，柏林（1994）[22] H. Wielandt, *Permutation groups through invariant relations and invariant functions*，俄亥俄州立大学数学系讲义，哥伦布（1969）。[23] J. Xu、M. Giudici、C. H. Li 和 C. E. Praeger, *Invariant relations and Aschbacher classes of finite linear groups* **18**, 1, 1 33 2011 ，《电子组合学杂志》，第 – 期 （）。[24] Y. Yang、Al. Vasil'ev 和 E. Vdovin, *Regular orbits of finite primitive solvable groups, III*，《代数学杂志》，590，1–13（2020）。[25] X. Yu 和 J. Pan, *2-closures of primitive permutation groups of holomorph type*，《开放数学》，17，795–801（2019）。

Steklov Institute of Mathematics at St. Petersburg, Russia
Email address: inp@pdmi.ras.ru
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia;
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
Email address: vasand@math.nsc.ru