arXiv:2304.02818v1 [math.FA] 6 Apr 2023

非线性夹逼定理

MARIO GHOSSOUB 滑铁卢大学

GIULIO PRINCIPI 纽约大学

LORENZO STANCA 卡洛·阿尔贝托学院和都灵大学

2023年4月7日

摘要。 我们为正齐次泛函提供了一条三明治定理（König (1972)），这些泛函仅在受限定义域上满足可加性。我们对可加性的放宽基于一种称为凸锥对称预序的二元关系，据此，可加性仅限于所有属于该关系的元素对。随后，我们研究了这一非线性三明治定理的应用，并证明了扩张和包络表示结果。最后，我们探讨了同向共单调性的一些应用；这一性质是决策理论、风险度量和风险分担理论中的关键性质。

1. 引言

经典版本的三明治定理给出了一个线性泛函存在于给定的次线性泛函与给定的超线性泛函之间。König (1972) 将这一结果证明为 Hahn-Banach延拓定理的一个推论。在最近的一篇论文中， Amarante(2019) 通过结合Fuchssteiner andWright(1977) 中的一个论证与 Pataraia 不动点定理（Pataraia (1997)），给出了另一种证明。在本文中，我们展示了如何直接实施Amarante (2019)所发展的优雅方法，以获得三明治定理的非线性版本，仅将（超/次）线性限制于所涉及泛函定义域的某些部分。具体而言，我们定义了一个二元关系（记为C），称之为凸锥对称预序，它是一种对称的闭预序

2020 数学主题分类。主要分类：46A22；次要分类：06A06、06F20 .

关键词和短语。三明治定理；Pataraia 定理；C-(超/次)线性；凸锥对称预序。

谢谢 Andrea Aveni、Fabio Maccheroni 和 René Pfitscher 提供的宝贵讨论，也感谢 Stephen Simons 提供了一些相关参考文献。Mario Ghossoub 感谢加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）提供的资金支持（资助编号：2018-03961）。GIULIO PRINCIPI 感谢纽约大学 Henry M. MacCracken Fellowship 提供的资金支持。

关于正数倍乘与加法。利用这一预序，我们为2）中的C-(超/次)线性泛函给出一个三明治定理（见定理（x， y） $\in$ C。这类泛函仅要求关于1）的 Hahn-Banach 型扩张结果（见推论2）。最后，我们通过一个例子说明这些结果的适用性，重点讨论同向共单调次可加泛函。

2. Pataraia 定理与序理论术语

2.1. 序理论术语。 [1] 固定一个非空集合 S。我们所说的集合 $\subseteq S\times S$上的（二元）关系，是指一个集合R S。对于所有 x、 y、 $z\in S$，我们通常用 xRy 代替(x、 y) $\in$R，并用 xRyRz 代替 xRy 和 yRz。

如果对于所有 $x\in S$，都有 xRx ，则称二元关系 R 是自反的；如果 xRy 蕴含 yRx，且对所有 x、 $y\in S$ 都成立，则称其是对称的。如果对于所有 x、 y、 $z\in S$， xRy 且 yRz 蕴含 xRz，则称 R 是传递的。自反且传递的关系称为预序。若预序 R 还具有反对称性，即对于所有 x、 $y\in S$，若 xRy 且 yRx，则 $x=y$，则 R 是偏序，此时称 (S, R) 为偏序集（下文简称 poset）。若对于所有 x、 $y\in S$，要么 xRy ，要么 yRx，则称偏序 R 是全序，此时称 (S, R) 为全序集。偏序集中的全序子集称为链。

给定一个偏序集 (S, R)，如果 $x\in S$ 是 $B\subseteq S$ 的 R-上界，即对于所有 $y\in B$，都有 xRB，也就是 xRy ，我们称元素 $x\in S$ 是 $B\subseteq S$ 的R-上界。如果 x 是 $B\subseteq S$ 的 R-上确界，即它是 B 的 R-上界，并且对于所有满足 zRB 的 $z\in S$ ，都有 zRx，我们称 x 是 $B\subseteq S$ 的 R-上确界。下确界的定义类似。给定一个偏序集 (S, R)，我们分别用 R-sup B 和R-inf B 表示 $B\subseteq S$的R-上确界和 R-下确界。当二元关系在上下文中已明确时，为简化记号，我们将分别仅写作sup和 inf。我们称偏序集 (S,R)是严格归纳有序的，如果每个链 $C\subseteq S$ 都存在一个 R-上确界。给定一个偏序集(S,R)，如果对于所有 $s\in S$，都有 F(s)Rs，我们称映射 $F\colon S\to S$是 R-膨胀的。给定一个非空集合 A、一个偏序集 (S,R) 以及两个映射 $f,g\colon A\to S$，当且仅当对于所有 $a\in A$，都有 f(a)Rg(a) 时，我们称 fRg。我们将此序称为R-逐点序；当底层关系由上下文明确时，通常简称为逐点序。显然，给定一个偏序集(S, R) 和一个集合 A， S^A 上诱导的 R- 逐点序也是一个偏序。

我们称一个（实）向量空间 V为 **有序向量空间** ，如果它赋有一个偏序 $\leq$，使得 $x\leq y$ 当且仅当 $x+z\leq y+z$ 且 $\alpha x\leq\alpha y$，对所有的 x、 y、 $z\in V$以及所有的 $\alpha\geq 0$都成立。[2] 此外，如果一个有序向量空间 (V,$\leq$)同时还是一个格，即对于所有的 x、 $y\in V$，都有 sup $\{x,y\}$、inf $\{x,y\}\in V$，那么我们称其为一个 **里斯空间** 。里斯空间 (V,$\leq$)的子集 B 如果在 V 中存在一个上界，则称其为**有上界的** 。最后，如果里斯空间 (V,$\geq$) 的每个有上界的 V 子集都有一个上确界，则称其为**戴德金完备的**。[3] 对于任意向量空间 V，我们将其零元素记为 $\mathbf{0}_V$。

[1]本小节将总结本文中使用的所有序论概念。关于这些概念的全面介绍，请读者参阅Caspard 等人(2012)以及 Schröder (2016。[2]我们将专门讨论实向量空间，以下简称向量空间。[3]关于 Riesz 空间的详细介绍，请参阅 Aliprantis and Burkinshaw(2006。

2.2. **帕塔莱亚不动点定理。** 与 Amarante (2019) 类似，我们将应用帕塔莱亚不动点定理的以下版本（另见 Escardó (2003)）。

定理 1（Pataraia）。 设 $(S, \mathbf{R})$ 是一个偏序集，且 $\mathcal{I}$ 是 S上所有膨胀映射的集合。如果 $(S, \mathbf{R})$是严格归纳有序的，那么 $\mathcal{I}$ 有一个公共不动点，即存在 $x \in S$，使得 $f(x) = x$，对每个 $f \in \mathcal{I}$均成立。

证明。 由于R 是自反的，$\mathrm{Id} \in \mathcal{I}$。此外，鉴于所有 $f \in \mathcal{I}$ 都是膨胀的，可推出 f RId。假设 $\mathcal{C}$是 $\mathcal{I}$中的一个链，并定义 $\overline{f}\colon s \mapsto$上确界 $\{f(s)\colon f \in \mathcal{C}\}$。显然$\overline{f} \in \mathcal{I}$，因此它相对于逐点序是 $\mathcal{C}$ 的 R-上确界。这表明，带有逐点序的 $\mathcal{I}$ 是严格归纳有序的。因此，根据佐恩引理，$\mathcal{I}$具有一个极大元，记为 $M \in \mathcal{I}$。注意，对于所有 $s \in S$和所有 $f \in \mathcal{I}$，$f(M(s))\mathrm{R}M(s)$。因此，由于 M是极大的且 R是反对称的，我们必须有 $f \circ M = M$。所以，对于所有 $s \in S$， $M(s)$ 是 $\mathcal{I}$的一个公共不动点。□

3. 主要结果

3.1. **凸锥对称预序。** 给定一个向量空间 V，若 $X \subseteq V$满足：对所有 $\lambda > 0$， $\lambda X \subseteq X$ 成立，且 $X + X \subseteq X$，则称 $X \subseteq V$为一个凸锥。现在设 X 为一个给定的凸锥。

定义 1。 二元关系 $\mathrm{C} \subseteq X \times X$ 是一个凸锥对称预序，当且仅当它是自反的、传递的、对称的，并满足以下性质：

(i) 对所有 $x \in X$ 和 $\lambda > 0$，$(\lambda x)\mathrm{C}x$。

(ii) 对所有 x、y、$z \in X$，若 $x\mathrm{C}y\mathrm{C}z$，则 $(x + y)\mathrm{C}z$。

定义中“凸锥”这一修饰语之所以用于凸锥对称预序，是因为 $\mathrm{C}(x) = \{y \in X\colon y\mathrm{C}x\}$是一个凸锥。注意，定义 1 中的对称性性质 (ii) 意味着，每当 $x\mathrm{C}y\mathrm{C}z$ 时，对于所有 g、u、$h \in \{x, y, z\}$，都有 $(g + u)\mathrm{C}h$。值得注意的是，只要在 X 上存在某个凸锥对称预序 C，使得 $\{\mathbf{0}_V\} \times X \subseteq \mathrm{C}$，就可推出 $X \times X = \mathrm{C}$。这是对称性和传递性的直接推论。由性质 (ii) 可知，对于所有满足$-x \in X$的 $x \in X$，若 $(-x)\mathrm{C}x$，同样也有上述结论。为便于后文引用，我们将这些简单的观察归纳为以下引理。

引理1。 设 X 是一个凸锥，且 $\mathbf{C} \subseteq X \times X$ 是一个凸锥对称预序。若 $\{\mathbf{0}_V\} \times X \subseteq \mathbf{C}$ 或 $(-x)\mathbf{C}x$ 对所有满足 $-x \in X$的 $x \in X$ 均成立，则 $X \times X = \mathbf{C}$。

因此，乍一看，人们可能会担心凸锥对称预序的限制有多宽松。我们通过示例（见第3.2.2节）说明，它既不总是平凡的，也不会过于严格。

3.2. **一个三明治定理。** 设 $(\mathbb{V}, \leq)$ 是一个Dedekind完备Riesz空间。按照Fuchssteiner和Wright (1977)的做法，我们向 $\mathbb{V}$ 中添入一个记作 $-\infty$的元素，并将$\leq$ 扩展到 $\mathbb{V} \cup \{-\infty\}$，假设 $-\infty \leq \mathbb{V}$。若映射 $F: X \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\}$ 满足以下条件，则称其为$\mathbf{C}$-次线性的：

(i) F is 正齐次，即，对于所有 $\lambda > 0$ 和所有 $x \in X$， $F(\lambda x) = \lambda F(x)$.

(ii) F is $\mathbf{C}$-*subadditive*, i.e., $F(x+y) \leq F(x) + F(y)$, for all $x, y \in X$ with $x\mathbf{C}$

$\mathbf{C}$-超线性和 $\mathbf{C}$-线性的定义是类似的。我们赋予 V 一个偏序 $\preceq$，使得 $(V, \preceq)$ 是一个偏序向量空间。若对于所有 $x, y \in X$， $x \preceq y$蕴含 $F(x) \leq F(y)$，则称函数$F: X \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\}$ 为单调 函数。我们采用约定 $0 \cdot (-\infty) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$。现在我们可以陈述并证明主要结果了。

定理 2. 假设 $P:\ X \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\}$ 是$\mathbf{C}$-超线性的，并且 $H:\ X \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\}$ 是$\mathbf{C}$-次线性的且单调的。若 $P \leq H$，则存在一个$\mathbf{C}$-线性映射 $Q:\ X \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\}$使得 $P \leq Q \leq H$。

证明将分几个步骤给出。在详细介绍其细节之前，我们先给出一些定义和简单的说明。设

$$\mathcal{D}_{\mathrm{PH}} = \left\{Q : X \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\} : Q \text{ is } \mathbf{C}\text{-superlinear and } P \leq Q \leq H\right\}.$$

显然， $P \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}} \neq \emptyset$。此外， $\mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$ 关于逐点序是一个偏序集。如果 $\mathcal{C}$是 $\mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$中的一条链，则 $\overline{Q}: x \mapsto \sup\{Q(x):\ Q \in \mathcal{C}\}$ 是$\mathbf{C}$-超线性的，并且是 $\mathcal{C}$的上确界。事实上，对于所有（x， y）$\in \mathbf{C}$以及所有 $Q \in \mathcal{C}$,

$$\overline{Q}(x+y) \geq Q(x+y) \geq Q(x) + Q(y).$$

这意味着 $\overline{Q}$ 是 $\mathbf{C}$-超线性的。因此 $\mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$ 是严格归纳有序的。令 $A:\ Q \mapsto A_Q$ 定义为

$$A_Q(x) = \inf_y \left\{H(x+y) - Q(y) : y \in \mathbf{C}(x) \text{ and } Q(y) > -\infty\right\},$$

对于所有 $x \in X$ 和所有 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$。现在固定 g、$x \in X$ 和 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$。我们还定义，

$$T_g(Q)(x) = \sup_{h,\lambda} \left\{Q(h) + \lambda A_Q(g) : h + \lambda g \preceq x,\ h \in \mathbf{C}(x),\ \lambda \geq 0\right\}.$$

于是我们得到以下结果。

引理 2。 以下断言成立：

(1) 对于所有 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$，我们有 $A_Q \geq Q$，且 A_Q 是 $\mathbf{C}$-次线性的。*(2)* 对于所有 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$ 和 $g \in X$，我们有 $T_g(Q)$ 是 $\mathbf{C}$-次超线性的。*(3)* 对于所有 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$，我们有 $Q \leq T_g(Q) \leq H$。*(4)* 对于所有 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$ 和 $x \in X$，我们有 $T_x(Q)(x) \geq A_Q(x)$。

证明。 **(1).** 固定 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$ 和 $x \in X$，然后

$$H(x+y) - Q(y) \geq Q(x+y) - Q(y) \geq Q(x) + Q(y) - Q(y) = Q(x),$$

对所有 $y \in \mathsf{C}(x)$，满足 $Q(y) > -\infty$。因此，$A_Q \geq Q$。现在假设 $(x_1, x_2) \in \mathsf{C}$且$y_1, y_2 \in \mathsf{C}(x_1)$，满足 $Q(y_1) > -\infty$, $Q(y_2) > -\infty$。注意到由于 $y_1, y_2 \in \mathsf{C}(x_1)$且 C具有对称性和传递性，我们有 $x_1 \mathsf{C} y_1 \mathsf{C} y_2 \mathsf{C} x_2$。根据对称性和性质 (ii)，可知

$$\big((x_1+y_1), (x_2+y_2)\big) \in \mathbf{C}.$$

这些观察结果意味着 $Q(y_1+y_2) \geq Q(y_1) + Q(y_2)$，从而

$$\begin{aligned} H(x_1+x_2+y_1+y_2) - Q(y_1+y_2) &\leq H(x_1+x_2+y_1+y_2) - Q(y_1) - Q(y_2) \\ &\leq H(x_1+y_1) - Q(y_1) + H(x_2+y_2) - Q(y_2). \end{aligned}$$

因此，$A_Q(x_1+x_2) \leq A_Q(x_1) + A_Q(x_2)$。因此，对于所有 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$，$A_Q$ 是 C-次可加的。正齐次性源于 Q 和 H的正齐次性，以及 $\mathsf{C}(x)$ 是一个锥这一事实。

(2)。固定 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$、$g \in X$ 和 $(x_1, x_2) \in \mathsf{C}$。则 $T_g(Q)(x_1+x_2) \geq T_g(Q)(x_1) + T_g(Q)(x_2)$。事实上，注意到如果 $h_1 \in \mathsf{C}(x_1)$、$h_2 \in \mathsf{C}(x_2)$、λ_1、$\lambda_2 \geq 0$ 满足

$$h_1 + \lambda_1 g \preceq x_1 \text{ and } h_2 + \lambda_2 g \preceq x_2,$$

则 $h_1 + h_2 + (\lambda_1+\lambda_2) g \preceq x_1 + x_2$。由于 $x_1 \mathbf{C} x_2$，根据对称性、传递性和性质(ii)我们有 $x_1 \mathbf{C} x_2$ $\mathbf{C} h_1 \mathbf{C} h_2$ 以及

$$(h_1+h_2, \lambda_1+\lambda_2) \in \left\{(h,\lambda) : h + \lambda g \preceq x_1 + x_2,\ h \in \mathbf{C}(x_1+x_2),\ \lambda \geq 0\right\}.$$

这与 Q 的 C-超可加性一起，得到

$$\begin{aligned} T_g(Q)(x_1+x_2) &= \sup_{h,\lambda} \left\{Q(h) + \lambda A_Q(g) : h + \lambda g \preceq x_1 + x_2,\ h \in \mathbf{C}(x_1+x_2),\ \lambda \geq 0\right\} \\ &\geq \sup_{h_1,h_2,\lambda_1,\lambda_2} \left\{ Q(h_1+h_2) + (\lambda_1+\lambda_2) A_Q(g) : \begin{array}{l} h_1 + h_2 + (\lambda_1+\lambda_2) g \preceq x_1 + x_2, \\ h_1 \in \mathbf{C}(x_1), h_2 \in \mathbf{C}(x_2), \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{array} \right\} \\ &\geq Q(h_1) + Q(h_2) + \lambda_1 A_Q(g) + \lambda_2 A_Q(g), \end{aligned}$$

对于所有 $h_1 \in \mathsf{C}(x_1)$、$h_2 \in \mathsf{C}(x_2)$、λ_1、$\lambda_2 \geq 0$，满足 $h_1 + \lambda_1 g \preceq x_1$ 且 $h_2 + \lambda_2 g \preceq x_2$.。因此，

$$T_g(Q)(x_1+x_2) \geq T_g(Q)(x_1) + T_g(Q)(x_2).$$

这证明了对于所有 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$ 和所有 $g \in X$，映射 $T_g(Q)$ 都是 C-超可加的。每个 $T_g(Q)$ 的正齐次性源于 Q 和 A_Q 的正齐次性（见上一点），以及 $\mathsf{C}(x)$ 是凸锥这一事实。

(3)。固定 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$。显然可见 $T_g(Q) \geq Q$（取 $\lambda = 0$ 和 $h = x$，注意到 $\mathbf{C}$ 是自反的）。我们证明 $T_g(Q) \leq H$。首先注意，若 $\lambda = 0$，则对所有 $x \in X$，由 H的单调性，

$$\sup_h \left\{Q(h) + \lambda A_Q(g) : h + \lambda g \preceq x,\ h \in \mathbf{C}(x)\right\} = \sup_h \left\{Q(h) : h \preceq x,\ h \in \mathbf{C}(x)\right\}$$

$$\leq \sup_h \left\{H(h) : h \preceq x,\ h \in \mathbf{C}(x)\right\} \leq H(x).$$

因此，我们可以关注所有 $\lambda > 0$。特别是，我们有，对于所有 $x \in X$，

$$\begin{aligned}
&\sup_{h,\lambda} \left\{Q(h) + \lambda A_Q(g) : h + \lambda g \preceq x,\ h \in \mathbf{C}(x),\ \lambda > 0\right\} \\
&= \sup_{h,\lambda} \inf_{y \in \mathbf{C}(x), Q(y) > -\infty} \left\{Q(h) + \lambda H(g+y) - \lambda Q(y) : h + \lambda g \preceq x,\ h \in \mathbf{C}(x),\ \lambda > 0\right\} \\
&= \sup_{h,\lambda} \inf_{y \in \mathbf{C}(x), Q(y) > -\infty} \left\{Q(h) + H(\lambda g + \lambda y) - Q(\lambda y) : h + \lambda g \preceq x,\ h \in \mathbf{C}(x),\ \lambda > 0\right\} \\
&\leq \sup_{h,\lambda} \left\{H(\lambda g + h) : h + \lambda g \preceq x,\ h \in \mathbf{C}(x),\ \lambda > 0\right\} \\
&= \sup_{h,\lambda} \left\{H(\lambda g + \lambda h) : \lambda h + \lambda g \preceq x,\ h \in \mathbf{C}(x),\ \lambda > 0\right\} \\
&\leq H(x),
\end{aligned}$$

其中最后两个步骤由 $\mathbf{C}(x)$ 是一个锥且 H 是单调的这一事实得出。因此，将这两个关于 $\lambda = 0$ 和所有 $\lambda > 0$的观察联系起来，我们得到：

$$T_g(Q)(x) = \sup_{h,\lambda} \left\{Q(h) + \lambda A_Q(g) : h + \lambda g \preceq x,\ h \in \mathbf{C}(x),\ \lambda \geq 0\right\} \leq H(x),$$

对所有 $x \in X$，从而 $Q \leq T_g(Q) \leq H$。

(4). L 令 $x \in X$ 和 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$。然后，由于 Q 是正齐次的，我们有 e

$$\begin{aligned}
T_x(Q)(x) &= \sup_{h,\lambda} \left\{Q(h) + \lambda A_Q(x) : h + \lambda x \preceq x,\ h \in \mathbf{C}(x),\ \lambda \geq 0\right\} \\
&\geq \sup_{h,n} \left\{Q(h) + \frac{n-1}{n} A_Q(x) : h \preceq \frac{1}{n} x,\ h \in \mathbf{C}(x)\right\} \\
&\geq \frac{1}{m} Q(x) + \frac{m-1}{m} A_Q(x) \\
&\geq -\frac{1}{m} \left|Q(x)\right| + \frac{m-1}{m} A_Q(x),
\end{aligned}$$

对所有 $m \in \mathbb{N}$。因此，令 $m \to \infty$，由于所有戴德金完备的里斯空间都是阿基米德的[4]（见 Aliprantisand Border （2006）），我们有 $T_x(Q)(x) \geq A_Q(x)$ 对所有 $x \in X$。□

这个引理强调了以下事实：对于所有 $g \in X$，$T_g(\cdot)$ 都是自映射，因为 $T_g(Q) \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$ 对所有 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$均成立。现在我们准备给出定理 2 的证明。

定理 2 的证明。根据引理 2，对所有 $g \in X$, $T_g : \mathcal{D}_{\mathrm{PH}} \to \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$ 是膨胀的。因此$\left(T_g\right)_{g \in X}$ 是一族膨胀函数。根据定理 1，这族函数$\left(T_g\right)_{g \in X}$ 有一个公共不动点 $Q^* \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$。由于对所有 $g \in X$ 和所有 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$，我们有 $T_g(Q) \leq H$，因此对所有 $x \in X$ 和 $y \in \mathbf{C}(x)$，满足 $Q^*(y) > -\infty$，

$$H(x+y) - Q^*(y) \geq T_g(Q^*)(x+y) - Q^*(y)$$

[4]我们回顾一下，里斯空间（W，$\leq$）若满足以下条件，则称为阿基米德的：如果对于任意 $\mathbf{0}_W \leq nx \leq y$，对所有 $n = 1$、2、.....以及某个$y \geq \mathbf{0}_W$，都有 $x = \mathbf{0}_W$。

$$\geq T_g(Q^*)(x) + T_g(Q^*)(y) - T_g(Q^*)(y) = T_g(Q^*)(x).$$

因此， $A_{Q^*}(x) \geq T_g(Q^*)(x) = Q^*(x)$ 对所有 $x, g \in X$均成立。此外，根据引理 2-(4)，我们有$T_g(Q^*)(x) = Q^*(x) = T_x(Q^*)(x) \geq A_{Q^*}(x)$，对所有 $x, g \in X$均成立。因此， $A_{Q^*} = Q^*$。由于A_{Q^*} 是C-次线性的，且 Q^* 是 C-超线性的，我们有 Q^* 是 C-线性的。最后，由于$Q^* \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$，断言得证。□

3.2.1. 延拓与包络结果。 由定理 2，我们推导出 Hahn-Banach 延拓定理的一个类似版本（例如，参见 Aliprantis and Burkinshaw(2006)）。

推论 1. 令 $H : X \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\}$ 为 C-次线性且单调的，并令 $Y \subseteq X$ 为一个凸锥。若 $\ell : Y \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\}$ 为 C-线性且满足 $\ell \leq H|_Y$，则存在一个 C-线性映射 $Q : X \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\}$，使得 $Q \leq H$ 且 $\ell \leq Q|_Y$。

证明。 定义 $P : X \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\}$ 如下

$$P(x) = \begin{cases} \ell(x) & x \in Y, \\ -\infty & x \notin Y, \end{cases}$$

对所有 $x \in X$均成立。因此 P是 C-超可加的。事实上，假设 xCy。若 $x, y \in Y$，则无需证明。若 $x \notin Y$或 $y \notin Y$，则 $P(x) + P(y) = -\infty \leq P(x + y)$。显然， P 是正齐次的，且 $P \leq H$。因此，由定理 2，存在一个 C-线性映射 $Q : X \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\}$，使得 $P \leq Q \leq H$。因此， $\ell = P|_Y \leq Q|_Y$。□

接下来，作为推论 1的直接应用，我们给出关于 C-次线性单调映射的一般包络表示结果。对于所有 $x \in X$，记 C_x 为由 x生成的凸锥，即 $C_x = \{\lambda x : \lambda > 0\}$。此外，对于所有映射 $H : X \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\}$，令

$$D(H) = \left\{Q : X \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\} : Q \text{ is } \mathbf{C}\text{-linear and } Q \leq H\right\}.$$

推论 2。如果 $H : X \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\}$ 是 C-次线性且单调的，那么

$$H(x) = \sup_{Q \in D(H)} Q(x), \ \textit{for all } x \in X.$$

证明。设 $x \in X$，并在 C_x 上定义 ℓ 为 $\ell(\lambda x) = \lambda H(x)$，对所有满足 $\lambda > 0$ 的 $\lambda x \in C_x$ 均成立。注意，ℓ 是 C-线性且正齐次的。此外，根据正齐次性，对于所有 $\lambda x \in C_x$，有 $\ell(\lambda x) = \lambda H(x) = H(\lambda x)$。因此，由推论 1，存在一个 C-线性映射 $Q : X \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\}$，使得 $Q \leq H$ 且 $\ell \leq Q|_{C_x}$。此外，

$$H(x) = \ell(x) \leq Q(x) \leq H(x),$$

因此 $Q(x) = H(x)$。所以，对于所有 $x \in X$，存在一个 C-线性映射 $Q_x : X \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\}$，使得 $Q_x(x) = H(x)$。这意味着

$$H(x) = \sup_{Q \in D(H)} Q(x),$$

对于所有 $x \in X$。 □

注释 1. 假设 $\mathbb{V} = \mathbb{R}$ 和 V 是一个拓扑向量空间。对于任意映射 $G : V \to [-\infty, \infty)$，我们将 G 的（有效）定义域定义为 $\mathrm{dom} G = \{x \in V : G(x) > -\infty\}$。若 $\mathrm{dom} G$ 非空，我们称 G 是适当的。值得注意的是，推论 2 也可以通过在由 $x \in V$ 生成的向量空间（即 span $\{x\}$）上定义每个 ℓ 来证明：对于所有 $\alpha \in \mathbb{R}$，令 $\ell(\alpha x) = \alpha H(x)$，然后将每个 ℓ 延拓为在其他所有地方都等于 $-\infty$ 。在这种情况下，每个延拓 $Q|_{\mathrm{dom} G}$ 都是连续的。因此，在此设定下，可以重述推论 2，并对 $D(H)$增加一项限制，即其元素限制在各自定义域上时是连续的。这种方法与 Roth（2000）采用的方法类似（例如，参见推论 3.3）。

3.2.2. 示例。

示例 1. 显然，$\mathsf{C} = X \times X$ 是一个凸锥对称预序。在此凸锥对称预序下，C-（超/次）线性对应于经典的（超/次）线性。

示例 2. [正齐次性] 固定 $x \in X$ 并定义 $\mathsf{D}_x = \{(\lambda x, \beta x) : \lambda, \beta > 0\}$。则 D_x 是一个凸锥对称预序。更重要的是，定义 $\mathsf{D} = \bigcup_{x \in X} \mathsf{D}_x$。现在我们验证 D 也是一个凸锥对称预序。由于每个 $\mathsf{D}_x \subseteq \mathsf{D}$，我们有 D 是对称的、自反的，并满足性质 (i)。任意固定 $x, y, z \in X$，并假设 $x \mathsf{D} y \mathsf{D} z$。那么存在 $\alpha, \beta, \lambda, \gamma > 0$ 以及 $v, w \in X$，使得

$$(x, y) = (\alpha v, \beta v) \text{ and } (y, z) = (\lambda w, \gamma w).$$

因此，$x = \alpha v = \frac{\alpha}{\beta} y = \lambda \frac{\alpha}{\beta} w$，从而 $x \mathsf{D} z$。于是，D 是传递的。此外，

$$(x + y, z) = \left(\lambda \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) w, \gamma w \right),$$

因此 D 满足性质 （ii）。注意，任意正齐次映射 $F : X \to \mathbb{R}$ 是D-线性的。

示例 3. [等价测度] 设 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 是一个可测空间，并记 X为可数可加测度的凸锥 $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$。对于所有测度 $\mu \in X$，我们定义 $N_\mu = \{A \in \mathcal{F} : \mu(A) = 0\}$，即 $\mathcal{F}$ 中 μ-零测的元素集合。若两个测度$\mu, \nu \in X$ 满足 $N_\mu = N_\nu$，则称它们等价，记作 $\mu \sim \nu$。可以验证，$\sim$是一个凸锥对称预序。事实上，令 $\lambda > 0$ 和 $\mu \in X$，则有 $N_{\lambda\mu} = N_\mu$。如果 $\nu, \mu, \eta \in X$, $\nu \sim \mu$，并且 $\mu \sim \eta$，那么 $N_\mu = N_\nu = N_\eta$。因此 $\sim$具有传递性。对称性也显而易见。最后，若对于 $\nu, \mu, \eta \in X$ 有 $\nu \sim \mu \sim \eta$，则对所有 $A \in N_\eta$，有 $\nu(A) + \mu(A) = 0$，反之亦然。这便得到 $N_{\nu+\mu} = N_\eta$，因此 $\sim$ 是一个凸锥对称预序。

例4。 [**严格共单调性**] 令 $(\Omega\ \mathcal{F})$为一个可测空间，并将$L^0(\Omega\ \mathcal{F})$记为 $\mathcal{F}$-可测实值函数空间。对于所有 $x \in L^0(\Omega\ \mathcal{F})$，记为

C_x由 x生成的凸锥。我们称 x、 $y \in L^0(\Omega\ \mathcal{F})$是严格同向共单调的，若满足以下任一条件: (1) $x \in C_y$; 或 (2) 对于 Ω 中的所有 $\omega_1 \neq \omega_2$,

$$\big[x(\omega_1) - x(\omega_2)\big]\ \big[y(\omega_1) - y(\omega_2)\big] > 0.$$

严格共单调关系记为 $\uparrow\!\uparrow$，要求 $x \uparrow\!\uparrow y$ 当且仅当 $x, y \in L^0(\Omega\ \mathcal{F})$ 严格同向共单调。现在验证 $\uparrow\!\uparrow$ 是一个凸锥对称序。显然，对于所有 $\lambda > 0$，都有 $(\lambda x) \uparrow\!\uparrow x$，因为对于所有 $x \in L^0(\Omega\ \mathcal{F})$， $\lambda x \in C_x$。对称性显而易见，因为若 $x \in C_y$，则 $y \in C_x$。为证明传递性，固定 $\omega_1 \neq \omega_2$，并假设 $x \uparrow\!\uparrow y$ 和 $y \uparrow\!\uparrow z$。于是有以下三种情况:

(1) If $x \in C_y$ and $y \in C_z$, then $x \in C_z$. Thus, $x \uparrow\!\uparrow z$.

(2) 若 $x \in C_y$ 且 $y \notin C_z$，则

$$\big[y(\omega_1) - y(\omega_2)\big]\ \big[z(\omega_1) - z(\omega_2)\big] > 0 \ \text{ and } \ x = \lambda y,$$

对某个 $\lambda > 0$。这意味着

$$\big[x(\omega_1) - x(\omega_2)\big]\ \big[z(\omega_1) - z(\omega_2)\big] > 0.$$

因此， $x \uparrow\!\uparrow z$

(3) 如果 $x \notin C_y$ 和 $y \notin C_z$，那么 $\big[x(\omega_1) - x(\omega_2)\big]\ \big[y(\omega_1) - y(\omega_2)\big] > 0$ 以及 $\big[y(\omega_1) - y(\omega_2)\big]\ \big[z(\omega_1) - z(\omega_2)\big] > 0$.因此，如果 $x(\omega_1) - x(\omega_2) > 0$，那么 $y(\omega_1) - y(\omega_2) > 0$，从而 $z(\omega_1) - z(\omega_2) > 0$。同样的推理（符号取反）适用于 $x(\omega_1) - x(\omega_2) < 0$ 的情况。因此 $x \uparrow\!\uparrow z$。

为了得出结ude，固定 $\omega_1 \neq \omega_2$ 并假设 $x \uparrow\!\uparrow y \uparrow\!\uparrow z$。那么，我们有三种情况:

(1) 若 $x \in C_y$ 且 $y \in C_z$，则 $x + y \in C_z$。因此，$(x + y) \uparrow\!\uparrow z$。

(2) 若 $x \in C_y$ 且 $y \notin C_z$，则

$$\big[y(\omega_1) - y(\omega_2)\big]\ \big[z(\omega_1) - z(\omega_2)\big] > 0 \ \text{ and } \ x = \lambda y,$$

对于某个 $\lambda > 0$。这意味着

$$\big[x(\omega_1) + y(\omega_1) - x(\omega_2) - y(\omega_2)\big]\ \big[z(\omega_1) - z(\omega_2)\big] > 0.$$

因此，$(x + y) \uparrow\!\uparrow z$。

(3) 若 $x \notin C_y$ 且 $y \notin C_z$，则

$$\begin{aligned}&\big[x(\omega_1) + y(\omega_1) - x(\omega_2) - y(\omega_2)\big]\ \big[z(\omega_1) - z(\omega_2)\big]\\ &= \big[x(\omega_1) - x(\omega_2)\big]\ \big[z(\omega_1) - z(\omega_2)\big] + \big[y(\omega_1) - y(\omega_2)\big]\ \big[z(\omega_1) - z(\omega_2)\big] > 0.\end{aligned}$$

Thus, $(x + y) \uparrow\!\uparrow z$.

因此， $\uparrow\!\uparrow$是一个凸锥对称预序。

同向共单调性是决策理论、风险度量和风险分担理论中的一项重要性质。另一个凸锥预序的例子涉及仿射相关的向量。

示例 5。 [**仿射**] 设 X 为向量空间，并固定 $e \in X$。如果存在 α、$\beta \neq 0$ 使得 $x = \alpha y + \beta e$，我们称 x 和 y 在 X中是 e-仿射相关的 。特别地，我们将二元关系 Aff 定义如下

$$x\mathbf{Aff}y \iff \exists\, \alpha \neq 0, \exists\, \beta \in \mathbb{R} : x = \alpha y + \beta e.$$

尽管这很直接，我们还是给出证明 Aff是凸锥对称预序的步骤。自反性是显然的，因为 $x = x$。关于对称性，若 $x\mathbf{Aff}y$，则存在$\alpha \neq 0$和 $\beta \in \mathbb{R}$使得 $x = \alpha y + \beta e$，从而有 $y = \frac{1}{\alpha} - \beta e$，这意味着 $y\mathbf{Aff}x$。假设 $x\mathbf{Aff}y$且 $y\mathbf{Aff}z$。存在 α_1、$\alpha_2 \neq 0$和 β_1、$\beta_2 \in \mathbb{R}$使得 $x = \alpha_1 y + \beta_1 e$和$y = \alpha_2 z + \beta_2 e$。然后

$$x = \alpha_1(\alpha_2 z + \beta_2 e) + \beta_1 e = \alpha_1\alpha_2 z + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1)e,$$

证明 $x\mathbf{Aff}z$，因此 Aff 是传递的。现在固定 $x \in X$，显然对于所有 $\lambda > 0$，都有 $(\lambda x)\mathbf{Aff}\, x$。总之，若 $x\mathbf{Aff}\, y\mathbf{Aff}z$，则存在 α_1、$\alpha_2 \neq 0$ 和 β_1、$\beta_2 \in \mathbb{R}$，使得 $x = \alpha_1 y + \beta_1 e$ 且 $y = \alpha_2 z + \beta_2 e$。于是

$$\begin{aligned} x + y &= \alpha_1 y + \beta_1 e + \alpha_2 z + \beta_2 e = \alpha_1\alpha_2 z + \alpha_1\beta_2 e + \beta_1 e + \alpha_2 z + \beta_2 e \\ &= (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2)\, z + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1 + \beta_2)\, e, \end{aligned}$$

这意味着 $(x + y)\mathbf{Aff}z$。因此，Aff 是一个凸锥对称预序。

为了结束本节，我们给出一些不是 凸锥对称预序的二元关系示例。显然，任何非自反、非对称或非传递的二元关系都符合条件。例如，概率独立性以及内积空间中的正交性都是相关示例。

示例 6。 [**内积空间**] 考虑希尔伯特空间 $L^2\left([0,1], \mathcal{B}[0,1], \mathrm{Leb}\right)$，其中 $\mathcal{B}[0,1]$ 表示博雷尔 σ-代数，Leb 表示勒贝格测度。我们定义关系 Corr 如下：

$$f\mathbf{Corr}g \iff \int_{[0,1]} fg\, \mathrm{dLeb} \geq 0.$$

容易看出，Corr 具有自反性和对称性，并满足定义(i) 和(ii)中的条件 1，但不满足传递性。事实上，考虑函数

$$f = \mathbf{1}_{[0,1]},\ g = \mathbf{1}_{\left[0,\frac{1}{2}\right]},\ h = -\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{2},1\right]}.$$

于是，

$$f\mathbf{Corr}g \text{ and } g\mathbf{Corr}h, \text{ but } \int_{[0,1]} fh\, \mathrm{dLeb} = -\frac{1}{2} < 0.$$

下一个例　例子给出了一种不满足定义 (ii)的性质的对称预序（定义见 1　.

例 7。 定义函数 $\varphi:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} -1 & (x,y) \in \Big((\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \{0\}\Big) \cup \Big(\{0\} \times (\mathbb{R}\setminus\{0\})\Big) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

考虑二元关系 $x\boldsymbol{\varphi}y$ 当且仅当 $\varphi(x,y) \geq 0$。根据定义，对于所有$x \in \mathbb{R}$， $\varphi(x,x) = 0$，因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 具有自反性。此外，对于所有 $x,y \in \mathbb{R}$， $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$，这证明了 $\boldsymbol{\varphi}$ 具有对称性。进一步地，如果 $x,y,z \in \mathbb{R}$ 满足 $\varphi(x,y) \geq 0$ 且 $\varphi(y,z) \geq 0$，那么必然有 $x,y,z = 0$ 或 $x,y,z \neq 0$，从而 $\varphi(x,z) = 0$。因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 具有传递性。然而，令 $x,z = 1, y = -1$，我们得到

$$\varphi(x,y) \geq 0,\ \varphi(y,z) \geq 0,\ \text{and } \varphi(x+y,z) = \varphi(0,z) < 0.$$

因此 $\boldsymbol{\varphi}$ 是一个对称预序，但不是凸锥对称预序。

4. 放宽正齐次性

在本节中，我们通过去掉性质 (i) （即正齐次性），放宽凸锥对称预序的定义。具体而言，我们定义一种新的预序，称为“和命令对称预序”。固定一个向量空间 V以及一个子集 $X \subseteq V$，使得 $X+X \subseteq X$。

定义 2。 若二元关系 $\mathsf{S} \subseteq X \times X$ 具有自反性、传递性和对称性，并满足以下性质，则称其为加和对称预序：

$$x\mathbf{S}y\mathbf{S}z \text{ implies } (x+y)\mathbf{S}z, \text{ for all } x,y,z \in X. \tag{1}$$

注意，在此情况下，$\mathsf{S}(x) = \{y \in X : y\mathsf{S}x\}$ 关于其元素的求和是闭合的。显然，若 X 是一个凸锥，且 C 是 X上的凸锥对称预序，则 C 也是一个加和对称预序。

设 $(\mathbb{V},\leq)$ 是一个Dedekind完备Riesz空间。若映射 $F\colon X \to \mathbb{V}\cup\{-\infty\}$ 满足以下条件，则称其为 S-次线性的：

(i) F是正整数齐次的，即对于所有 $n \in \mathbb{N}$和所有 $x \in X$， $F(nx) = nF(x)$。

(ii) F is $\mathbf{S}$-*subadditive*, i.e., $F(x+y) \leq F(x)+F(y)$, for all $x,y \in X$ with $x\mathbf{S}y$.

S-超线性和 S-线性的定义类似。我们在 V 上赋予偏序 $\preceq$ ，使得 $(V,\preceq)$ 成为一个偏序向量空间。若对于所有 x、 $y \in X$， $x \preceq y$蕴含 $F(x) \leq F(y)$，则称映射F：$X \to \mathbb{V}\cup\{-\infty\}$ 是单调的。我们约定 $0\cdot(-\infty) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$。按照定理 2 证明中的完全相同步骤，仅稍微改变辅助映射，我们可以得到关于 S-（超线性/次线性）泛函的定理 2 的以下版本。

定理 3。 假设 X 是一个凸锥， $P\colon X \to \mathbb{V}\cup\{-\infty\}$ 是 S-超线性的，而$H\colon X \to \mathbb{V}\cup\{-\infty\}$ 是 S-次线性且单调的。若 $P \leq H$，则存在一个S-线性映射 $Q\colon X \to \mathbb{V}\cup\{-\infty\}$，使得 $P \leq Q \leq H$。

我们省略该结果的证明，因为它与定理 2的证明几乎完全相同。我们仅给出此前证明中使用的一个辅助映射的形式。具体而言，令

$$\mathcal{D}_{\mathrm{PH}} = \left\{Q : X \to \mathbb{V} \cup \{-\infty\} : Q \text{ is } \mathbf{S}\text{-superlinear and } P \leq Q \leq H\right\}.$$

现在，固定 g、$x \in X$ 和 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$。我们还定义：

$$T_g(Q)(x) = \sup_{h,n} \left\{Q(h) + nA_Q(g) : h + ng \preceq x,\ h \in \mathbf{S}(x),\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

辅助函数 A_Q 的定义与第3.2节相同，只需用$\mathbf{S}$ 代替$\mathbf{C}$。

引理2 的类似结论在此情形下也成立。在给出证明之前，我们需要下面这个简单的结果。

引理 3。假设 X 是一个凸锥，且 $\mathbf{S}$ 是 X上的一个求和对称预序。那么对所有 x，$y \in X$，

$$x\mathbf{S}y \implies \frac{x}{n}\mathbf{S}y \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

证明。固定 x，$y \in X$ 使得 $x\mathbf{S}y$，并任意选取 $n \in \mathbb{N}$ 。由于$\mathbf{S}$ 具有自反性，因此 $x/n\mathbf{S}x/n$。于是，根据性质（1），可得

$$x = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x}{n}\right) \mathbf{S}\frac{x}{n}.$$

因此，根据 S 的传递性和对称性，我们有 $x/n\mathbf{S}y$。 □

引理 4. 以下断言成立：

(1) 对所有 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$，$A_Q \geq Q$ 和 A_Q 都是 S-次线性的。*(2)* 对所有 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$ 和 $g \in X$，$T_g(Q)$ 都是 S-超线性的。*(3)* 对所有 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$，$Q \leq T_g(Q) \leq H$。*(4)* 对所有 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$ 以及所有 $x \in X$，$T_x(Q)(x) \geq A_Q(x)$。

证明。 我们仅证明点（3）和（4）。其余各点的证明与引理 2中的证明相同。

(3)。显然，对于所有 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$ （取 $n = 0$ 和 $h = x$），$T_g(Q) \geq Q$。我们证明 $T_g(Q) \leq H$。特别地，对于所有 $x \in X$，

$$\begin{aligned}
T_g(Q)(x) &= \sup_{h,n} \left\{Q(h) + nA_Q(g) : h + ng \preceq x,\ h \in \mathbf{S}(x),\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \\
&= \sup_{h,n} \inf_{y \in \mathbf{S}(x), Q(y) > -\infty} \left\{Q(h) + nH(g + y) - nQ(y) : h + ng \preceq x,\ h \in \mathbf{S}(x),\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \\
&= \sup_{h,n} \inf_{y \in \mathbf{S}(x), Q(y) > -\infty} \left\{Q(h) + H(ng + ny) - Q(ny) : h + ng \preceq x,\ h \in \mathbf{S}(x),\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{h,n}\left\{H(ng+h) : h+ng \preceq x,\ h \in \mathbf{S}(x),\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\right\}\\
&= \sup_{h,n}\left\{H(ng+nh) : nh+ng \preceq x,\ h \in \mathbf{S}(x),\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\right\}\\
&\leq H(x),
\end{aligned}
$$

其中第四个不等式源于令 $y = \frac{h}{n}$（其属于 $\mathbf{S}$（x），根据引理 3），而最后两个步骤则源于以下事实： $\mathbf{S}$（x）关于加法是封闭的，且H 是单调的。因此， $Q \leq T_g$（Q） $\leq H$。

(4)。设 $x \in X$、 $Q \in \mathcal{D}_{\mathrm{PH}}$和 $m \in \mathbb{N}$。于是，由于 Q 和 $T_x(Q)$ 是整数正齐次的，我们有

$$
\begin{aligned}
T_x(Q)(x) &= \frac{T_x(Q)((m+1)x)}{m+1}\\
&= \frac{1}{m+1}\sup_{h,n}\left\{Q(h)+nA_Q(x) : h+nx \preceq (m+1)x,\ h \in \mathbf{S}(x),\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\right\}\\
&\geq \frac{1}{m+1}\sup_{h}\left\{Q(h)+mA_Q(x) : h \preceq x,\ h \in \mathbf{S}(x)\right\}\\
&\geq \frac{1}{m+1}Q\left(x\right)+\frac{m}{m+1}A_Q(x)\\
&\geq -\frac{1}{m+1}\left|Q\left(x\right)\right|+\frac{m}{m+1}A_Q(x).
\end{aligned}
$$

因此，令 $m \to \infty$，由于所有戴德金完备的里斯空间都是阿基米德的（参见 Aliprantis 和 Border (2006）中的引理 8.4），我们有 $T_x(Q)(x) \geq A_Q(x)$，对所有 $x \in X$。 □

定理 T 的证明 现在，3 的证明与定理 2的证明完全类似，故略去 .

5. 应用：共单调次可加性

在本节中，我们将前面的结果应用于特定可测空间上的同向共单调情形。假设 $\Omega = [0,1]$ 且 $\mathcal{F} = \mathcal{B}[0,1]$，单位区间上的 Borel σ-代数。利用我们在例 4中的结果和观察，我们得到如下结论。

命题 1。 假设 H： $B(\Omega\ \mathcal{F}) \to [-\infty,\infty)$ 在其定义域上限制时，是 $\|\cdot\|_\infty$-连续、单调、正齐次且严格同向共单调次可加的。那么

$$
H(x) = \sup_{Q \in D(H)} Q(x),\ \textit{for all}\ x \in B(\Omega,\mathcal{F}), \tag{2}
$$

其中 $D(H)$ 是从 $B(\Omega\ \mathcal{F})$ 到 $[-\infty,\infty)$ 的一组映射，它们在各自的定义域上具有同向共单调可加性且$\|\cdot\|_\infty$-连续。此外， H 在其定义域上具有同向共单调次可加性。

证明。 根据推论 2、备注 1和例 4，可得（2）成立，其中 D（H） 是从 B（Ω $\mathcal{F}$） 到 $[-\infty,\infty)$ 的一个泛函凸集，这些泛函是严格同向共单调可加的，并且当限制在其定义域上时是$\|\cdot\|_\infty$-连续的。根据附录中的引理 7，所有元素

的 $D(H)$ 在其定义域上是同向共单调可加的。注意，引理 7 还意味着 H在其定义域上是同向共单调次可加的。□

共单调可加泛函在模糊性下决策理论中发挥着核心作用。对此类泛函的研究由 Schmeidler (1989) 开创，他还用 Choquet 积分表示了此类泛函（Schmeidler (1986）。此类泛函也与风险度量理论相关（例如，参见 Denuit 等人(2005) 或 Föllmer 和 Schied (2016））。至于共单调次可加性，对这一性质的关注则较少。 Song 和 Yan (2006) 除给出其他性质外，还完整刻画了共单调次可加泛函，证明其可表示为 Choquet 积分的包络；而 Song 和 Yan(2009) 则给出了一些相关应用。

注2。 命题1 暗示了将连续、单调、正齐次且严格同向共单调次可加的泛函表示为有符号 Choquet 积分上确界的可能性。事实上，正如 Wang 等人 (2020) 所示，同向共单调可加且连续的泛函可以表示为相对于有符号容量的 Choquet 积分。

6. 结论性意见与一个开放问题

在 Amarante (2019) 以及 Fuchssteiner 和 Wright (1977) 的工作基础上，我们提出了经典三明治定理的一个非线性版本。我们利用这一结果得到了一个扩展结果和一个包络表示结果。我们的例子表明，我们引入的非线性类型涵盖了一些重要情形，这些情形在决策理论和数理金融领域已受到广泛关注。我们的方法凸显了获得 Hahn-Banach 型扩展结果的可能性，而这类结果广泛应用于泛函分析、理论经济学和数理金融领域。最后，我们提出一个（非正式）问题和两个猜想：

(O1) 我们的结果在多大程度上依赖于这样一个事实：我们的映射可以将 $-\infty$ 作为一个值? 更正式地说，是否可能证明推论1 和2的以下改述?

猜想 1. 设 $H : X \to \mathbb{V}$ 是 C-次线性且单调的，并且设 $Y \subseteq X$ 是一个凸锥。若 $\ell : Y \to \mathbb{V}$ 是 C-线性的且满足 $\ell \leq H|_Y$，则存在一个 C-线性映射 $Q : X \to \mathbb{V}$，使得 $Q \leq H$ 且 $\ell \leq Q|_Y$。

猜想 2. 若 $H : X \to \mathbb{V}$ 是C-次线性且单调的，则

$$H(x) = \sup_{Q \in \tilde{D}(H)} Q(x), \ \textit{for all } x \in X,$$

其中

$$\tilde{D}(H) = \Big\{ Q : X \to \mathbb{V} \ \Big| \ Q \text{ is C-linear and } Q \leq H \Big\}.$$

附录 A. 第 5 节的补充结果

在本节中，我们报告了在第5节中应用的一些辅助结果。特别地，我们对以下问题给出了部分答案。

问题1。若 $x, y \in B(\Omega\ \mathcal{F})$ 是同向共单调的，则存在两个序列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$，属于 $B(\Omega\ \mathcal{F})$，使得：

(1) $x_n \to x$ 和 $y_n \to y$；**(2)** 对所有 $n \in \mathbb{N}$，x_n 和 y_n 都是严格同向共单调。

显然，这在一般的可测空间中并不成立。事实上，任取一个 $\Omega \neq \emptyset$ 并令 $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$。在这个可测空间 $(\Omega\ \mathcal{F})$中，函数是 $\mathcal{F}$-可测的，当且仅当它是常数，因此不存在单射可测函数。这个观察强调，问题 1 可能只有在我们关注σ代数足够稀疏的可测空间时，才有肯定答案；这种稀疏性也取决于 Ω的基数。完整回答这个问题超出了本文的范围。因此，我们聚焦于一个特例。不过，我们首先需要一些辅助引理。

引理5。设 $x, y \in B(\Omega\ \mathcal{F})$。以下条件等价

(i) x 与 y 关于 $x \notin C_y$严格同向共单调。

(ii) 存在两个递增函数 $h, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 以及一个单射 $z \in B(\Omega\ \mathcal{F})$，使得 $x = h(z)$、$y = g(z)$以及 h, g 在 $z(\Omega)$上均为单射。

证明. $(i) \Rightarrow (ii)$。由于 x、y同向共单调，存在递增函数 h、g：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$和 $z \in B(\Omega\ \mathcal{F})$，使得 $x = h(z)$且 $y = g(z)$（例如参见Denuit等人（2023），定理2.7）。假设 z 不是单射。那么，存在 ω_1、$\omega_2 \in \Omega$，使得 $\omega_1 \neq \omega_2$ 且$z(\omega_1) = z(\omega_2)$。因此，

$$\big[x(\omega_1) - x(\omega_2)\big]\big[y(\omega_1) - y(\omega_2)\big] = \big[h(z(\omega_1)) - h(z(\omega_2))\big]\big[y(\omega_1) - y(\omega_2)\big] = 0,$$

这与 x, y 的严格共单调性矛盾。因此，z 必须是单射。现在假设 h 在 $z(\Omega)$ 上不是单射。那么存在 $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$，使得 $\omega_1 \neq \omega_2$, $z(\omega_1) \neq z(\omega_2)$，且 $h(z(\omega_1)) = h(z(\omega_2))$。由于 z 是单射，我们有 $\omega_1 \neq \omega_2$ 和

$$\big[x(\omega_1) - x(\omega_2)\big]\big[y(\omega_1) - y(\omega_2)\big] = \big[h(z(\omega_1)) - h(z(\omega_2))\big]\big[y(\omega_1) - y(\omega_2)\big] = 0,$$

这与 x, y 的严格共单调性矛盾。交换 h 与 g，并交换 x 与 y，同样的结论也适用于 g。

$(ii) \Rightarrow (i)$。如果 $\omega_1 \neq \omega_2$ 且 $h(z(\omega_1)) > h(z(\omega_2))$，那么必有 $z(\omega_1) > z(\omega_2)$，因此 $g(z(\omega_1)) > g(z(\omega_2))$。这就证明了该断言。□

引理6。假设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是*1*-利普希茨且递增的。于是，存在一列*1*-利普希茨且严格递增的函数$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$，从 $[a, b]$ 到 $\mathbb{R}$，一致收敛于 f。

证明。由于 f 连续且递增，最多存在可数个互不相交的非退化区间 $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$，在这些区间上 f 为常数，即对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 以及某个 $k_n\in\mathbb{R}$，$f(I_n)=\{k_n\}$。固定 $\varepsilon>0$ 并取有限个点，$a=a_1<\ldots<a_k=b$，使得对于所有 $i=1$、.....、$k-1$，$|a_i-a_{i+1}|<\varepsilon/2$。假设对于某个 $i<j$，$f(a_i)=f(a_j)$。由于 f递增，我们有

$$f(a_i)=f(a_{i+1})=\ldots=f(a_j).$$

这意味着，对于某个 $n\in\mathbb{N}$，有 $a_i,\ldots,a_j\in I_n$。因此，要找到一个严格递增的近似，我们需要修改点向量。具体而言，我们移除所有点 $a_i,\ldots,a_{j-1}$，并从集合中选取一个点 $\tilde{a}_i$

$$\left\{x\in[a_{i-1},\inf I_n):f(x)<f(a_i)\text{ and }\left|f(x)-f(a_i)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

对集合 $\{a_1,\ldots,a_k\}$ 中函数为常数的所有点重复这一操作，我们便可（经过有限次操作）得到一个集合 $\{\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_m\}$，满足 $\tilde{a}_1=a$ 和 $\tilde{a}_m=b$，使得

$$f(\tilde{a}_1)<(\tilde{a}_2)<\ldots<f(\tilde{a}_{m-1})<f(\tilde{a}_m).$$

定义函数 $f^m\colon\{\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_m\}\to\mathbb{R}$，令 $f^m(\tilde{a}_i)=f(\tilde{a}_i)$，对所有 $i=1,\ldots,m$ 均成立。通过线性插值，我们可以将 f^m 扩展到整个区间 $[a,b]$，并仍以 f^m 表示这一扩展。显然，f^m 严格递增。现在我们证明它也必定是 1-利普希茨的。为此，注意到 $f^m|_{\left[\tilde{a}_i,\tilde{a}_{i+1}\right]}$ 的斜率满足

$$\frac{f(\tilde{a}_{i+1})-f(\tilde{a}_i)}{\tilde{a}_{i+1}-\tilde{a}_i}\leq 1,$$

对于所有 $i=1$、.....、$k-1$，其中不等式源于以下事实：f 是 1-利普希茨的，$\tilde{a}_{i+1}>\tilde{a}_i$，且 f 是递增的。这意味着对于所有 $i=1$、.....、$k-1$，$f^m|_{\left[\tilde{a}_i,\tilde{a}_{i+1}\right]}$ 是 1-利普希茨的。如果 $x>y$，那么对于某个 $i>j$，$x\in(\tilde{a}_i,\ \tilde{a}_{i+1}]$ 和 $y\in\left[\tilde{a}_j,\tilde{a}_{j+1}\right]$。这意味着

$$\begin{aligned}\left|f^m(x)-f^m(y)\right|&=f^m(x)-f^m(y)\\&=f^m(x)-f^m(\tilde{a}_i)+f^m(\tilde{a}_i)-f^m(\tilde{a}_{i-1})+\ldots+f^m(\tilde{a}_{j+1})-f^m(\tilde{a}_j)+f^m(\tilde{a}_j)-f^m(y)\\&\leq x-\tilde{a}_i+\tilde{a}_i+\ldots+\tilde{a}_{j+1}-\tilde{a}_j+\tilde{a}_j-y=|x-y|.\end{aligned}$$

因此 f^m是 1-利普希茨的。现在我们证明，f^m与 f相差不超过 ε。对于所有 $x\in[\tilde{a}_{i-1},\tilde{a}_i]$和 $i=2$，.....，m，我们有

$$\begin{aligned}\left|f(x)-f^m(x)\right|&\leq\left|f(x)-f(\tilde{a}_{i-1})\right|+\left|f(\tilde{a}_{i-1})-f^m(x)\right|\\&\leq\frac{\varepsilon}{2}+\left|f^m(\tilde{a}_{i-1})-f^m(\tilde{a}_i)\right|\\&=\frac{\varepsilon}{2}+\left|f(\tilde{a}_{i-1})-f(\tilde{a}_i)\right|\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 x 是任意选取的，因此可得 $\|f-f^m\|_\infty\to 0$。因此，存在一个由 1-利普希茨且严格递增的函数组成的序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其一致收敛于 f。□。

现在假设 $\Omega = [0,1]$ 和 $\mathcal{F} = \mathcal{B}[0,1]$ 是博雷尔σ代数。[5]

引理7。 若 $x, y \in B(\Omega\ \mathcal{F})$ 是同向共单调的，则存在两个序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$属于 $B(\Omega\ \mathcal{F})$，使得：

(1) $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x$ 和 $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} y$；*(2)* 对所有 $n \in \mathbb{N}$，x_n 和 y_n 均与 $x_n \notin C_{y_n}$严格同向共单调。

证明。 由于 $x, y \in B(\Omega\ \mathcal{F})$ 是同向共单调的，因此存在两个递增的 1-Lipschitz 函数$h, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 以及一个 $z \in B(\Omega\ \mathcal{F})$ 使得 $x = h(z),\ y = g(z)$ (Denuit 等人 (2023)，定理2.7）。我们先证明一个断言，由此即可得到所需结果。

断言。 存在一个由单射可测函数构成的序列，收敛到 z。

断言的证明。令$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B(\Omega\ \mathcal{F})^{\mathbb{N}}$ 为一致收敛于 z的一列阶梯函数。每个 s_n 都可以唯一地对应于 Ω的非退化子区间的一个分割 $(I_i^n)_{i=1}^{k_n}$，以及某个 $k_n \in \mathbb{N}$ 的取值向量 $\left(a_1^n, \ldots, a_{k_n}^n\right)$。对于所有 $n \in \mathbb{N}$和$\varepsilon > 0$，我们可以定义如下，

$$s_n^\varepsilon(\omega) = 2\varepsilon \left(\frac{\omega - \inf I_i^n}{\sup I_i^n - \inf I_i^n} \right) + a_i^n - \varepsilon,$$

对所有 $\omega \in I_i^n$且所有 $i = 1, \ldots, k_n$。显然，s_n^ε 是一个单射博雷尔可测函数，对所有 $\varepsilon > 0$ 且所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。直观地说，我们只是在所有分割上稍微旋转每个s_n 的常数“直线”。此外，请注意，

$$\left\| s_n^\varepsilon - s_n \right\|_\infty \leq \varepsilon,$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$。这意味着 $\left(s_n^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛到 z。事实上，

$$\left\| z - s_n^{1/n} \right\|_\infty \leq \left\| z - s_n \right\|_\infty + \left\| s_n - s_n^{1/n} \right\|_\infty \leq \left\| z - s_n \right\|_\infty + \frac{1}{n} \to 0.$$

因此，我们找到了一个一致收敛于z的单射且可测函数序列。□

鉴于 z有界，存在 m、$M \in \mathbb{R}$ 使得 $z(\Omega) \subseteq (m, M)$。由于 $\left(s_n^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$一致收敛于 z，因此存在某个充分大的 $N \in \mathbb{N}$，使得

$$s_n^{1/n}(\Omega) \subset [m, M],$$

对所有 $n \geq N$。稍微滥用一下记号，我们现在将 $\left(s_n^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 及其子序列 $\left(s_{n_k}^{1/n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ 分别等同于 $n_1 = N$，$n_2 = N + 1$ 依此类推。根据引理 6，存在两个由 1-利普希茨且严格递增的函数组成的序列 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$，它们从 $[m, M]$ 映射到

[5]本节提供的所有结果对任何闭区间 $I \subseteq \mathbb{R}$均成立。

$\mathbb{R}$ 一致收敛到 h 和 g。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，令 $x_n = h_n\left(s_n^{1/n}\right)$ 和 $y_n = g_n\left(s_n^{1/n}\right)$。任意固定 $n \in \mathbb{N}$。若 $\omega_1 \neq \omega_2$，则 $s_n^{1/n}(\omega_1) \neq s_n^{1/n}(\omega_2)$，因为 $s_n^{1/n}$是单射，不妨设 $s_n^{1/n}(\omega_1) > s_n^{1/n}(\omega_2)$。由于 h_n 和 g_n 都严格递增，我们有

$$\begin{aligned}
&\left[x_n(\omega_1) - x_n(\omega_2)\right]\left[y_n(\omega_1) - y_n(\omega_2)\right] \\
&= \left[h_n\left(s_n^{1/n}\right)(\omega_1) - h_n\left(s_n^{1/n}\right)(\omega_2)\right]\left[g_n\left(s_n^{1/n}\right)(\omega_1) - g_n\left(s_n^{1/n}\right)(\omega_2)\right] > 0.
\end{aligned}$$

因此，x_n, y_n 是 st 严格同向共单调。任意固定 $n \in \mathbb{N}$。由于 h_n 是1-利普希茨的，我们有 e

$$\begin{aligned}
\left\|h(z) - h_n\left(s_n^{1/n}\right)\right\|_\infty &\leq \left\|h(z) - h_n(z)\right\|_\infty + \left\|h_n(z) - h_n\left(s_n^{1/n}\right)\right\|_\infty \\
&= \left\|h(z) - h_n(z)\right\|_\infty + \sup_{\omega\in\Omega}\left|h_n(z(\omega)) - h_n\left(s_n^{1/n}(\omega)\right)\right| \\
&\leq \left\|h(z) - h_n(z)\right\|_\infty + \sup_{\omega\in\Omega}\left|z(\omega) - s_n^{1/n}(\omega)\right| \to 0.
\end{aligned}$$

因此，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛于 x。$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$也同样如此，证明完全类似。□

参考文献

Aliprantis, C. D. 和 Border, K. C.（2006）。无限维分析。Springer，柏林，第三版。一本入门指南。Aliprantis, C. D. 和 Burkinshaw, O.（2006）。正算子。Springer，多德雷赫特。重印1985年原版。Amarante, M.（2019）。通过 Pataraia 不动点定理证明三明治定理。*Positivity*，23(1):97–100。Caspard, N.、Leclerc, B. 和 Monjardet, B.（2012）。有限有序集，第144卷，收录于数学及其应用百科全书。剑桥大学出版社，剑桥。概念、结果及应用。Denuit, M.、Dhaene, J.、Ghossoub, M. 和 Robert, C. Y.（2023）。共单调性与帕累托最优性及其在协作保险中的应用。未刊稿。Denuit, M.、Dhaene, J.、Goovaerts, M. 和 Kaas, R.（2005）。相依风险的精算理论：度量、序与模型。John Wiley & Sons。Escardó, M. H.（2003）。核框架中的并。应用范畴结构，11(2):117–124。Föllmer, H. 和 Schied, A.（2016）。随机金融：离散时间导论——4^{th} 版。Walter de Gruyter。Fuchssteiner, B. 和 Wright, J. D. M.（1977）。锥上的保序算子表示。牛津大学数学季刊（第二辑），28(110):155–162。König, H.（1972）。次线性泛函。《巴塞尔数学档案》，23:500–508。

Pataraia, D.（1997）。有向完备偏序集上塔斯基不动点定理的构造性证明。载于第*65*届层与逻辑巡回研讨会。Roth, W.（2000）。局部凸锥上的 Hahn-Banach 型定理。《澳大利亚数学学会杂志》*A*辑，68(1):104–125。Schmeidler, D.（1986）。无可加性的积分表示。《美国数学会会刊》，97(2):255–261。Schmeidler, D.（1989）。无可加性的主观概率与期望效用。《计量经济学》，57(3):571–587。Schröder, B.（2016）。有序集。Birkhäuser/Springer，第二版。从组合学到拓扑学的联系入门。Song, Y. 和 Yan, J.（2006）。 $L^{\infty}(\Omega\ \mathcal{F})$ 和 $L^{\infty}(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})$ 上两类泛函的表示。《中国科学》*A*辑，49(10):1376–1382。Song, Y. 和 Yan, J.-A.（2009）。具有共单调次可加性或凸性且符合随机序的风险度量。《保险数学与经济学》，45(3):459–465。Wang, R.、Wei, Y. 和 Willmot, G. E.（2020）。带符号 Choquet 积分的刻画、稳健性与聚合。《数学运筹学》，45(3):993–1015。

MARIOGHOSSOUB：滑铁卢大学– 统计与精算科学系 –200University Ave. W. – 滑铁卢，ON，N2L 3G1 – 加拿大电子邮箱地址： mario.ghossoub@uwaterloo.ca

GIULIO PRINCIPI：纽约大学 – 经济系 – 纽约西四街19号 – 纽约，纽约州 10012 – 美国电子邮箱：gp2187@nyu.edu

Lorenzo Stanca：卡洛·阿尔贝托学院和都灵大学 – ESOMAS系 – Corso Unione Sovietica, 218 Bis – 都灵 10134 – 意大利电子邮箱地址： lorenzo.stanca@carloalberto.org