arXiv:2304.02842v1 [math.NA] 6 Apr 2023

一种用于包裹相位去噪的变分模型

Ivan May-Cen、Ricardo Legarda-Saenz 和 Carlos Brito-Loeza*

摘要

本文提出了一种基于全变分的变分模型，用于对包裹相位图像进行去噪。该模型通过保留相位图中的不连续性，并强制相位图实部和虚部之间满足基本的勾股三角恒等式，从而改进了以往的方法，提升了恢复相位的质量。我们使用标准方法证明了该模型解的存在性和唯一性。此外，我们提供了一种快速的不动点法，用于求解数值解，并证明了其收敛性。在合成图案和真实图案上的实验验证了我们的研究结果。

1 引言

光学测量技术是一种通过光在非接触过程中估计物体形状和变形等属性的技术。这项广泛应用于制造业的技术需要可靠且准确的方法。通过从一幅或一组干涉条纹图像中提取局部包裹相位，然后对其进行相位解缠，可以估计被测物体的某些物理属性（Kulkarni和 Rastogi，2017；Servin 等，2014；Surrel，2000）。在干涉合成孔径雷达（InSAR）中，所获取的包裹相位是绝对相位的主值，即取模-2π观测。。

无论是光学计量还是 InSAR，包裹相位数据中的噪声（主要由采集设备引起，Warlick 和 Katz，2015；Wyant，2003；Huntley，1997）是造成测量不准确的主要原因。因此，通常会在对包裹相位图进行解缠之前，先对其进行去噪预处理。本文提出一种专为条纹图像去噪设计的变分模型，可保留局部包裹相位信息。我们认为，现有的通用去噪算法会去除包裹相位图像中的相关信息，从而降低最终测量结果的质量。

相位图的数学表示为

$$U = A\exp(i\phi) \tag{1}$$

其中， A 是幅值， ϕ 是相位图。大多数方法都假设包裹相位（模-2π ）由以下公式给出

$$\psi = \arctan 2(\sin\phi, \cos\phi). \tag{2}$$

* 所有作者均隶属于墨西哥尤卡坦自治大学数学学院的计算学习与成像研究组。电子邮箱：ivan.mc@progreso.tecnm.mx；rlegarda、carlos.brito@correo.uady.mx。

其中函数反正切 2 定义为

$$\arctan 2(y,x) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{if } x > 0; \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0; \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0; \\ +\pi/2 & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0; \\ -\pi/2 & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0; \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0. \end{cases} \tag{3}$$

上述假设意味着需要保留由反正切函数引起的不连续性，以及 ϕ 本身可能已有的不连续性。因此，包裹相位图的去噪算法必须能够保留这两类不连续性。据我们所知，目前尚无方法考虑到这一事实。

此外，正如 Ströbel (1996) 所建议的那样，分别对含噪的实部和虚部（正弦和余弦）图像进行去噪，在使用双参数反正切函数重建包裹相位时会导致误差。为避免这一问题，我们在模型中引入一个耦合这两个三角函数的项，以改进 ψ的重建。

下文将回顾一些已用于相位去噪的方法。

在 Kulkarni 和 Rastogi (2018、2020) 中，作者提出了一种基于随机马尔可夫场和卡尔曼滤波器的概率方法，用于同时进行相位解缠和噪声滤波；他们的方法对于连续相位效果良好，但没有提及不连续相位图。 Li 等人 (2017) 提出了一种基于带全变分正则化的变分分解模型的相位滤波方法；他们也没有展示不连续相位图的相关结果。 Medina 等人 (2017) 提出了一种全局滤波过程，该方法利用包裹相位图的局部频率，并将每个像素调整至其瞬时频率；这种线性滤波方法仅适用于连续相位。 Kemao 等人 (2008、2010) 提出了若干针对不连续相位图的方法，但这些方法需要假设相位在局部呈多项式形式，而且整个处理过程需要质量窗口，这增加了方案的复杂性；若窗口大小选择不当，还会带来不确定性。基于深度学习算法的现代噪声滤波方法（Yan 等人、2020b；Zhang 等人，2019；Yan 等人，2019、2020a）也仅对连续相位图效果良好。

本文采用了变分方法，这种方法在许多其他图像处理技术中已被证明能够通过保留不连续性和滤除噪声而取得良好效果，参见例如（Sartor 等，2008；Vese 和 Le Guyader，2016；Song 和 Sun，2017）及其中的参考文献。本文提出并分析了一种用于包裹相位图去噪的变分模型，该模型不仅能够保留不连续性，还能保留相位图实部和虚部之间的勾股关系。本文的结构如下：第 2 节介绍所提出的变分模型；第 3 节专门分析该模型并推导欧拉-拉格朗日方程；第 4 节介绍该模型的数值解技术。具体而言，我们给出了一种不动点法、其收敛性证明以及计算实现；第 5 节通过一些实验展示我们模型的性能，并将其与用于去噪的先进方法进行比较。最后，在第 6 节中给出结论。

2 一个变分模型：包裹相位图去噪

In 在本节中，我们介绍用于包裹相位图像的去噪模型。 s.

ˆ数学模型：受到加性高斯噪声污染的包裹相位图 ψ 是众所周知的，其表达式为

$$\hat{\psi} = \psi + \eta \tag{4}$$

其中， ψ 是真实的缠绕相位图。

对包裹相位图进行滤波或许最常用的技术，是 Ströbel ˆ ˆ ˆ ˆ（1996）提出的方法：分别使用标准方法对 $U_{real} = A\cos\psi$ 和 $U_{im} = A\sin\psi$ 进行滤波，得到 $\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$ 估计值 U_{real} 和 U_{im}。随后，通过 ψ =arctan(U_{im}/U_{real}) 和 $\bar{A} = [(\bar{U}_{real})^2 + (\bar{U}_{im})^2]^{1/2}$ 恢复从 ψ 到 ψ 的估计值。该方法的缺点是，由于正弦和余弦函数具有周期性，模-2π 不连续性很可能在处理过程中丢失。

由于可以计算任意相位图的幅值 A for并对其进行归一化，因此在本文中，不失一般性，我们考虑 $A = 1$ 的情况，从而得到简化形式ˆ ˆ ˆ ˆ$U_{real} = \cos\psi$和 $U_{im} = \sin\psi$。然后，我们进行如下最小化

$$(\bar{U}_{real}, \bar{U}_{im}) = \arg\min_{(x,y)} F(x,y),$$

其中

$$\begin{aligned} F \equiv\ & \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega (\bar{U}_{real} - \hat{U}_{real})^2 d\Omega + \frac{\lambda_2}{2}\int_\Omega (\bar{U}_{im} - \hat{U}_{im})^2 d\Omega + \frac{\lambda_3}{2}\int_\Omega ((\bar{U}_{real})^2 + (\bar{U}_{im})^2 - 1)^2 d\Omega \\ & + \int_\Omega |\nabla \bar{U}_{real}| d\Omega + \int_\Omega |\nabla \bar{U}_{im}| d\Omega \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是积分域， λ_1， λ_2和 λ_3 是正则化参数。 F 中的前两项构成了按照 Ströbel 的方法对包裹相位图进行滤波的拟合函数Ströbel (1996)。第三项是我们模型的一项主要贡献，它通过 $(\bar{U}_{im})^2 + (\bar{U}_{real})^2 = 1$ 强制满足基本的勾股恒等式，从而改进了利用 ψ 通过$\bar{}$ $\bar{}$的估计反正切函数。最后两项用于对解 U_{im}， U_{real}进行正则化。众所周知，全变分正则项既允许解中存在不连续性，同时也能去除噪声（Chan 和 Esedoglu，2005）。

3 模型分析

本节中，我们将使用标准方法证明模型解的存在性和唯一性。首先假设 Ω 是一个凸区域，并定义 Ω 上的有界变差范数为 $||\cdot||_{BV}$。

存在性

我们首先证明 F 是 BV-强制的。为此，请注意

$$\int_\Omega (\bar{U}_{im} - \hat{U}_{im})^2 d\Omega \geq 0, \tag{6}$$

$$\int_\Omega (\bar{U}_{real} - \hat{U}_{real})^2 d\Omega \geq 0, \tag{7}$$

$$\int_\Omega ((\bar{U}_{real})^2 + (\bar{U}_{im})^2 - 1)^2 d\Omega \geq 0. \tag{8}$$

那么，显然可知。

$$\lim_{||(\bar{U}_{real}, \bar{U}_{im})||_{BV} \to \infty} F(\bar{U}_{real}, \bar{U}_{im}) = \infty \tag{9}$$

意味着 F 是BV-强制的。

（6）的弱下半连续性、（7）以及（8）源于¯巴拿赫空间中范数的弱下半连续性。同样的性质也适用于 $||U_{real}||_{BV}$ 和 $||U_{im}||_{BV}$，如Acar和 Vogel （1994）所证明。最后，由于 F 是弱下半连续的且具有 BV-强制性，根据Acar和 Vogel （1994），可保证解在 BV 空间中的存在性。

唯一性

¯解的唯一性源于模型的凸性。(6)、(7)、 $||U_{real}||_{BV}$、¯和 $||U_{im}||_{BV}$ 的凸性已在Acar 和 Vogel(1994)中证明。因此只需证明(8)的凸性。在第4.2 节中，我们将说明(8)可以表示为 $||Ku-d||_2^2$，其中 $u=(\bar{U}_{real};\ \bar{U}_{im})$ 且 K 是一个有界算子。显然，(8)因此是凸的（Boyd 和 Vandenberghe(2004）。

另请注意， F 的下界为零。

3.1 欧拉-拉格朗日方程

在本节中，我们推导该模型的欧拉-拉格朗日方程。令 $\varphi \in C(\Omega)$为具有紧支集的函数， ε 为给定的标量。然后，我们令一阶变分等于零，即

$$\delta F_{real} \equiv \frac{d}{d\varepsilon} F(\bar{U}_{real}+\varepsilon\varphi, \bar{U}_{im})\Big|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \text{and}$$
$$\delta F_{im} \equiv \frac{d}{d\varepsilon} F(\bar{U}_{real}, \bar{U}_{im}+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

¯我们将仅详细介绍 U_{real} 的过程，因为对于 U_{im} 的过程非常相似。

$$\delta F_{real} = \frac{d}{d\varepsilon}\left\{\frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega (\bar{U}_{real}+\varepsilon\varphi-\hat{U}_{real})^2 d\Omega + \frac{\lambda_2}{2}\int_\Omega (\bar{U}_{im}-\hat{U}_{im})^2 d\Omega \right. \tag{10}$$
$$+\frac{\lambda_3}{2}\int_\Omega ((\bar{U}_{real}+\varepsilon\varphi)^2+(\bar{U}_{im})^2-1)^2 d\Omega \tag{11}$$
$$\left. +\int_\Omega |\nabla(\bar{U}_{real}+\varepsilon\varphi)| d\Omega + \int_\Omega |\nabla \bar{U}_{im}| d\Omega \right\}\Big|_{\varepsilon=0} \tag{12}$$
$$= \lambda_1\int_\Omega (\bar{U}_{real}-\hat{U}_{real})\varphi\, d\Omega + 2\lambda_3\int_\Omega \left((\bar{U}_{real})^2+(\bar{U}_{im})^2-1\right)\bar{U}_{real}\varphi\, d\Omega \tag{13}$$
$$+\int_\Omega \frac{\nabla \bar{U}_{real}}{|\nabla \bar{U}_{real}|}\cdot\nabla\varphi\, d\Omega。 \tag{14}$$

现在，对最后一项应用格林定理，

$$\int_\Omega \frac{\nabla \bar{U}_{real}}{|\nabla \bar{U}_{real}|}\cdot\nabla\varphi d\Omega = -\int_\Omega \nabla\cdot\left(\frac{\nabla \bar{U}_{real}}{|\nabla \bar{U}_{real}|}\right)\varphi d\Omega + \oint_{\partial\Omega}\left(\frac{\nabla \bar{U}_{real}}{|\nabla \bar{U}_{real}|}\cdot\mathbf{n}\right)\varphi d(\partial\Omega) \tag{15}$$

可得以下非线性偏微分方程（PDE）

$$-\nabla\cdot\left(\frac{\nabla \bar{U}_{real}}{|\nabla \bar{U}_{real}|}\right)+\lambda_1(\bar{U}_{real}-\hat{U}_{real})+2\lambda_3\left((\bar{U}_{real})^2+(\bar{U}_{im})^2-1\right)\bar{U}_{real}=0 \quad \text{in } \Omega \tag{16}$$

满足诺伊曼边界条件

$$\frac{\nabla \bar{U}_{real}}{|\nabla \bar{U}_{real}|}\cdot\mathbf{n}=0 \ \text{ on } \partial\Omega \tag{17}$$

其中 $\mathbf{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。

$\bar{U}_{im}$ 对应的偏微分方程为

$$-\nabla\cdot\left(\frac{\nabla\bar{U}_{im}}{|\nabla\bar{U}_{im}|}\right)+\lambda_2(\bar{U}_{im}-\hat{U}_{im})+2\lambda_3\left((\bar{U}_{real})^2+(\bar{U}_{im})^2-1\right)\bar{U}_{im}=0\quad\text{in }\Omega \tag{18}$$

具有诺伊曼边界条件

$$\frac{\nabla\bar{U}_{im}}{|\nabla\bar{U}_{im}|}\cdot\mathbf{n}=0\ \text{ on }\partial\Omega. \tag{19}$$

4 数值解

（16）和（18）中的非线性偏微分方程是二阶非线性和各向异性方程，因此预计普通数值方法会难以快速收敛到解。这就是常用的梯度下降法的情况，由于稳定性限制，它可能会非常缓慢地收敛到解。在这两个偏微分方程中，计算离散扩散系数$D=\frac{1}{|\nabla\bar{U}_{real}|}$对于（16）时，必须通过添加一个非常小的标量$\beta>0$即 $D_\beta=\frac{1}{|\nabla\bar{U}_{real}+\beta|}$，以进行正则化，从而避免除以零。在（Marquina 和 Osher，2000）中指出，当 $\beta\to 0$时，为保证数值方法的稳定性，梯度下降方案中的时间步长参数也必须趋于零。当然，β 越小，所需的迭代次数就越多。

针对类似 PDE 开发的其他数值方法仍需在我们的包裹相位去噪模型中进行测试，包括 (Chambolle、2004；Chan 等人，1999) 中的对偶形式、交替最小化方法 (Huang 等人，2008) 及其参考文献、基于牛顿法的方法 (Ng 等人，2007)、Bregman 迭代算法 (Osher 等人，2005) 和不动点方法 (Vogel 和 Oman，1996)。本文提出了一种收敛速度快且高效的不动点法，其余方法留待未来研究。

4.1 不动点方法

这里，我们将介绍用于求解偏微分方程（16）和（18）的不动点算法。首先，以下不动点迭代方案应适用于 U_{real}，其中 U_{im} 固定

$$\left(-\nabla\cdot\left(\frac{\nabla}{|\nabla\bar{U}^k_{real}|}\right)+\lambda_1+2\lambda_3\left((\bar{U}^k_{real})^2+(\bar{U}^k_{im})^2-1\right)\right)\bar{U}^{k+1}_{real}=\lambda_1\hat{U}_{real}\quad\text{for }k=1,2,3,\ldots \tag{20}$$

然而，请注意，项 $(\bar{U}_{real})^2+(\bar{U}_{im})^2-1$ 在某些迭代中可能为负，因此对于$2\lambda_3\geq\lambda_1$，所得矩阵不再严格对角占优。因此，无法保证高斯-赛德尔和雅可比等算法收敛。为解决这一问题，我们将一项移到右侧，得到

$$\left(-\nabla\cdot\left(\frac{\nabla}{|\nabla\bar{U}^k_{real}|}\right)+\lambda_1+2\lambda_3\left((\bar{U}^k_{real})^2+(\bar{U}^k_{im})^2\right)\right)\bar{U}^{k+1}_{real}=\lambda_1\hat{U}_{real}+2\lambda_3\bar{U}^k_{real}\quad\text{in }\Omega. \tag{21}$$

现在，将始终为正的 $\lambda_1+2\lambda_3\left((\bar{U}^k_{real})^2+(\bar{U}^k_{im})^2\right)$ 加到主对角线上，即可保证严格对角占优。按照相同的步骤，我们可以得到 U_{im} 的不动点方案，其中 U_{real} 固定

$$\left(-\nabla\cdot\left(\frac{\nabla}{|\nabla\bar{U}^k_{im}|}\right)+\lambda_2+2\lambda_3\left((\bar{U}^k_{real})^2+(\bar{U}^k_{im})^2\right)\right)\bar{U}^{k+1}_{im}=\lambda_2\hat{U}_{im}+2\lambda_3\bar{U}^k_{im}\quad\text{in }\Omega. \tag{22}$$

简写时，我们可以将 (21) 和 (22) 表示为

$$H(\bar{U}_{real}^k)\bar{U}_{real}^{k+1} = f(\bar{U}_{real}^k), \tag{23}$$
$$H(\bar{U}_{im}^k)\bar{U}_{im}^{k+1} = f(\bar{U}_{im}^k) \tag{24}$$

并以交替方式求解：首先固定 U_{im} 求解 U_{real}，然后反过来。不过，我们可以做得更好，构建该系统

$$L(u^k)u^{k+1} = c^k \tag{25}$$

其中

$$L(u^k) = \begin{pmatrix} H(\bar{U}_{real}^k) & 0 \\ 0 & H(\bar{U}_{im}^k) \end{pmatrix},$$
$$u^{k+1} = \begin{pmatrix} \bar{U}_{real}^{k+1} \\ \bar{U}_{im}^{k+1} \end{pmatrix},$$
$$c^k = \begin{pmatrix} f(\bar{U}_{real}^k) \\ f(\bar{U}_{im}^k) \end{pmatrix}.$$

我们注意到，矩阵 $L(u)$继承了 H 的相同优良性质，即 L 是对称正定且严格对角占优的。

4.2 不动点算法收敛性

为了证明我们提出的不动点迭代方案（25）的收敛性，我们将使用魏茨费尔德方法，参见（Chan 和 Mulet, 1999a; Shi, 2008; Brito-Loeza 等人, 2020）。这里，我们对$\bar{U}_{real}$和 $\bar{U}_{im}$采用字典序，两者均属于 $\mathbb{R}^N$，以将 $u \in \mathbb{R}^{2N}$定义为列向量 $u = (\bar{U}_{real}, \bar{U}_{im})$，其中 $N = m \times n$。于是，我们的模型（5）可写为如下形式

$$\arg\min_u F(u) \tag{26}$$

其中

$$F(u) = \sum_l |A_l^T u|_\beta + \frac{\lambda_1}{2}||u - d_1||_2^2 + \frac{\lambda_2}{2}||u - d_2||_2^2 + \frac{\lambda_3}{2}||Ku - d_3||_2^2, \tag{27}$$

$A_l^T \in \mathbb{R}^{2\times 2N}$ 是一个数组，其中包含使用有限差分近似得到的 u 的梯度。这里，l 定义为

$$l = \begin{cases} l = (i-1)n + j & \text{if } (i,j) \text{ belongs to } \bar{U}_{real}, \\ l = N + (i-1)n + j & \text{if } (i,j) \text{ belongs to } \bar{U}_{im} \end{cases} \tag{28}$$

表示计算梯度的像素坐标，且 $|A_l^T u|_\beta = \sqrt{(\partial_x u_l)^2 + (\partial_y u_l)^2 + \beta}$其中 $\beta > 0$ 是正则化参数。

注意，$A_l^T u$ 可以拆分为两部分：$A_l^T u = (A_{1l}^T, 0)u + (0, A_{2l}^T)u$。例如，算子$(A_{1l}^T, 0)$ 计算 u 前半部分的梯度，即 $\bar{U}_{real}$，并用零填充该向量。我们将 $B_{1l} = (A_{1l}^T, 0)$ 和 $B_{2l} = (0, A_{2l}^T)$命名为。于是，式（5）中的两个正则化项可以简洁地表示为 $\sum_l |A_l^T u|_\beta$。

此外，集合 $\{d_1, d_2, d_3\}$ 的元素属于 $\mathbb{R}^{2N}$， $K \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ 是有界算子，其伴随算子为 K^*。

$$K = \begin{pmatrix} \bar{U}^k_{real} & \bar{U}^k_{im} \\ -\bar{U}^k_{im} & \bar{U}^k_{real} \end{pmatrix}, d_1 = \begin{pmatrix} \hat{U}_{real} \\ 0 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{U}_{im} \end{pmatrix}, d_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

其中，1 是所有分量均为 1 的向量，0 是零向量。

注意，式（25）中的不动点算法可写为

$$\sum_l A_l\Big(\frac{A_l^T u^{k+1}}{|A_l^T u^k|_\beta}\Big) + \lambda_1(u^{k+1} - d_1) + \lambda_2(u^{k+1} - d_2) + 2\lambda_3 K^*(Ku^{k+1} - d_3) = 0. \tag{30}$$

4.2.1 广义魏茨菲尔德方法

广义魏茨菲尔德方法是在下面假设$G(w,\ u)$下，选取一个一致严格凸二次函数，使其逼近 $F(u)$。假设1如下

假设1。

1. $G(w,\ u) = F(u) + (w-u,\ F'(u)) + \frac{1}{2}(w-u,\ C(u)(w-u))$。
2. $C(u)$是连续的。
3. $\lambda_{\min}(C(u)) \geq \mu > 0\ \forall u$。
4. $F(w) \leq G(w,u)\ \forall w$。

Weiszfeld 广义方法通过以下迭代格式求解（26）

$$u^{k+1} = \min_w G(w, u^k) \tag{31}$$

其中 $G(w,u^k)$ 是 $F(u)$ 在迭代 k处的二次近似。在假设 1 下，对于固定的 u， $G(w,u)$ 是强制的、有界且严格凸的。因此，最小值存在，并且可以通过以下方式计算

$$0 = G'_w(u^{k+1}, u^k) = F'(u^k) + C(u^k)(u^{k+1} - u^k) \tag{32}$$

w具有全局和线性收敛性Chan 和 Mulet(1999b);Shi(2008).

在下文中，我们将借助以下引理证明，(30) 和 (32) 是等价的。

引理1. 若 $C(u)$由下式给出

$$C(u) = B_1\, diag\left(\frac{1}{|B_{1l}^T|_\beta} I_2\right) B_1^T + B_2\, diag\left(\frac{1}{|B_{2l}^T|_\beta} I_2\right) B_2^T + \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 K^* K \tag{33}$$

对于 $B_1 = (B_{11}, \ldots, B_{1m})$， I_2 为 2×2 单位矩阵， B_2 以类似的方式定义。然后

$$G(w,u) = F(u) + (w-u, F'(u)) + \frac{1}{2}(w-u, C(u)(w-u)) \tag{34}$$

定义了广义魏茨费尔德方法，并且（30）等价于（32）。

证明。 证明类似于 Shi （2008）中引理 6.1 的证明。首先，我们证明假设 1 中的性质 1 得到满足，即（30）和（32）是等价的。

$$
\begin{aligned}
F'(u^k)+C(u^k)(u^{k+1}-u^k) &= \lambda_1(u^k-d_1)+\lambda_2(u^k-d_2)+2\lambda_3K^*(Ku^k-d_3)\\
&+\sum_l B_{1l}\left(\frac{B_{1l}^Tu^k}{|B_{1l}^Tu^k|_\beta}\right)+\sum_l B_{2l}\left(\frac{B_{2l}^Tu^k}{|B_{2l}^Tu^k|_\beta}\right)\\
&+\sum_l B_{1l}\left(\frac{B_{1l}^Tu^{k+1}}{|B_{1l}^Tu^k|_\beta}\right)+\sum_l B_{2l}\left(\frac{B_{2l}^Tu^{k+1}}{|B_{2l}^Tu^k|_\beta}\right)\\
&+\lambda_1u^{k+1}+\lambda_2u^{k+1}+2\lambda_3K^*Ku^{k+1}\\
&-\sum_l B_{1l}\left(\frac{B_{1l}^Tu^k}{|B_{1l}^Tu^k|_\beta}\right)-\sum_l B_{2l}\left(\frac{B_{2l}^Tu^k}{|B_{2l}^Tu^k|_\beta}\right)\\
&-\lambda_1u^k-\lambda_2u^k-2\lambda_3K^*Ku^k\\
&=\lambda_1(u^{k+1}-d_1)+\lambda_2(u^{k+1}-d_2)+2\lambda_3K^*(Ku^{k+1}-d_3)\\
&+\sum_l B_{1l}\left(\frac{B_{1l}^Tu^{k+1}}{|B_{1l}^Tu^k|_\beta}\right)+\sum_l B_{2l}\left(\frac{B_{2l}^Tu^{k+1}}{|B_{2l}^Tu^k|_\beta}\right)\\
&=\lambda_1(u^{k+1}-d_1)+\lambda_2(u^{k+1}-d_2)+2\lambda_3K^*(Ku^{k+1}-d_3)\\
&+\sum_l A_l\Big(\frac{A_l^Tu^{k+1}}{|A_l^Tu^k|_\beta}\Big).
\end{aligned}
\tag{35}
$$

性质 2 成立，是因为 $C(u)$ 的连续性由 $|B_{1l}^Tu^k|_\beta>0$ 和 $|B_{2l}^Tu^k|_\beta>0$保证。注意到 K 是一个有界的非零算子，即可得到性质 3。

性质 4 由Shi(2008)中引理 6.1 的证明过程可直接得出，此处略去。

□

4.3 数值实现

这里给出欧拉-拉格朗日方程不动点法的数值实现。为此，我们将离散域定义为 $\Omega_h=[0,m]\times[0,n]$，不失一般性地，在定义为 $\Gamma_h=\{(x,y):x=ih_x,y=jh_y,i,j\in\mathbb{Z}\}$ 的网格上，令空间步长 $h=h_x=h_y=1$。

为了近似给定变量 w 的偏导数，我们使用有限差分方法。 w 在点 $(i+1,j),(i-1,j),(i,j-1)$ 和$(i,j-1)$ 处的梯度范数计算如下

$$
|\nabla w|_{i+1,j}=\sqrt{\frac{(w_{i+1,j}-w_{i,j})^2}{h_x^2}+\frac{(w_{i,j+1}-w_{i,j})^2}{h_y^2}},
\tag{36}
$$

$$
|\nabla w|_{i-1,j}=\sqrt{\frac{(w_{i,j}-w_{i-1,j})^2}{h_x^2}+\frac{(w_{i-1,j+1}-w_{i-1,j})^2}{h_y^2}},
\tag{37}
$$

$$
|\nabla w|_{i,j+1}=\sqrt{\frac{(w_{i+1,j}-w_{i,j})^2}{h_x^2}+\frac{(w_{i,j+1}-w_{i,j})^2}{h_y^2}},
\tag{38}
$$

$$|\nabla w|_{i,j-1} = \sqrt{\frac{(w_{i+1,j-1} - w_{i,j-1})^2}{h_x^2} + \frac{(w_{i,j} - w_{i,j-1})^2}{h_y^2}}. \tag{39}$$

然后，曲率项 $\nabla \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ 在点 (i,j) 处由

$$\nabla \cdot \frac{\nabla w}{\sqrt{|\nabla w|^2 + \beta}} = \frac{(w_{i+1,j} - w_{i,j})/h_x}{\sqrt{|\nabla w|^2_{i+1,j} + \beta}} - \frac{(w_{i,j} - w_{i-1,j})/h_x}{\sqrt{|\nabla w|^2_{i-1,j} + \beta}} + \frac{(w_{i,j+1} - w_{i,j})/h_y}{\sqrt{|\nabla w|^2_{i,j+1} + \beta}} - \frac{(w_{i,j} - w_{i,j-1})/h_y}{\sqrt{|\nabla w|_{i,j-1} + \beta}} \tag{40}$$

其中，$\beta > 0$ 是用于避免除以零的正则化参数。最后，通过

$$w_{i,0} = w_{i,1}, \; w_{i,n+1} = w_{i,n}, \; w_{0,j} = w_{1,j}, \; w_{m+1,j} = w_{m,j}. \tag{41}$$

为了实现不动点迭代，首先定义 $\sqrt{|\nabla U_{real}|^2_{i,j} + \beta} = \bar{G}_{i,j}$，以及 $\sqrt{|\nabla U_{im}|_{i,j} + \beta} = \bar{G}_{i,j}$。然后，利用所得矩阵严格对角占优这一性质，不动点法的每次迭代都可以通过以下高斯-赛德尔方法求解：

$$\bar{u}_l^{k+1} = \begin{pmatrix} (\bar{U}_{real}^{k+1})_l \\ (\bar{U}_{im}^{k+1})_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{N}_{real})_{i,j}/(\mathcal{D}_{real})_{i,j} \\ (\mathcal{N}_{im})_{i,j}/(\mathcal{D}_{im})_{i,j} \end{pmatrix} \tag{42}$$

其中 l 如式（28）所示，且

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}_{real})_{i,j} = {} & G^k_{i+1,j}(\bar{U}^k_{real})_{i+1,j} + G^k_{i-1,j}(\bar{U}^{k+1}_{real})_{i-1,j} + G^k_{i,j+1}(\bar{U}^k_{real})_{i,j+1} + G^k_{i,j-1}(\bar{U}^{k+1}_{real})_{i,j-1} \\ & + \lambda_1(\hat{U}_{real})_{i,j} + 2\lambda_3(\bar{U}^k_{real})_{i,j} \end{aligned} \tag{43}$$

$$(\mathcal{D}_{real})_{i,j} = \lambda_1 + 2\lambda_3\left((\bar{U}^k_{real})^2_{i,j} + (\bar{U}^k_{im})^2_{i,j}\right) + G^k_{i+1,j} + G^k_{i-1,j} + G^k_{i,j+1} + G^k_{i,j-1} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}_{im})_{i,j} = {} & \bar{G}^k_{i+1,j}(\bar{U}^k_{im})_{i+1,j} + \bar{G}^k_{i-1,j}(\bar{U}^{k+1}_{im})_{i-1,j} + \bar{G}^k_{i,j+1}(\bar{U}^k_{im})_{i,j+1} + \bar{G}^k_{i,j-1}(\bar{U}^{k+1}_{im})_{i,j-1} \\ & + \lambda_2(\hat{U}_{im})_{i,j} + 2\lambda_3(\bar{U}^k_{im})_{i,j} \end{aligned} \tag{45}$$

$$(\mathcal{D}_{im})_{i,j} = \lambda_2 + 2\lambda_3\left((\bar{U}^k_{real})^2_{i,j} + (\bar{U}^k_{im})^2_{i,j}\right) + \bar{G}^k_{i+1,j} + \bar{G}^k_{i-1,j} + \bar{G}^k_{i,j+1} + \bar{G}^k_{i,j-1} \tag{46}$$

5 实验结果

在本节中，我们展示使用合成和真实示例得到的结果。本节介绍的所有算法均在一台配备 2.5 GHz Intel Core i7 处理器、16 GB 内存并安装了 64 位 Debian GNU/Linux 9 (stretch) 操作系统的计算机上运行。具体而言，我们的模型使用 C/C++ 语言和高性能向量数学库 BlitzVeldhuizen (2000). 代码和实验可在此处找到。

5.1 结果质量

首先，我们展示在受到不同程度加性高斯噪声污染的合成图像上的结果。在图 1 的 (a) 和 (c) 中，我们展示了一幅中间具有垂直不连续性的包裹相位图像，其信噪比（SNR）分别为 74.41 dB 和 43.34 dB。两幅图像均经过我们的模型处理，得到图 1 (b) 和 1 (d) 所示的复原图像。在这两个问题中，参数均固定为 $\beta = 0.001$、$\lambda_1 = \lambda_2 = 2.5$ 和 $\lambda_3 = 5$。值得强调的是，噪声得到了较好的去除，同时保留了不连续性。

此外，在图2 中，我们展示了实际问题中的噪声图像和复原图像。复原效果依然良好，边缘也得到了很好的保留。该问题取自一次脑部磁共振成像扫描。

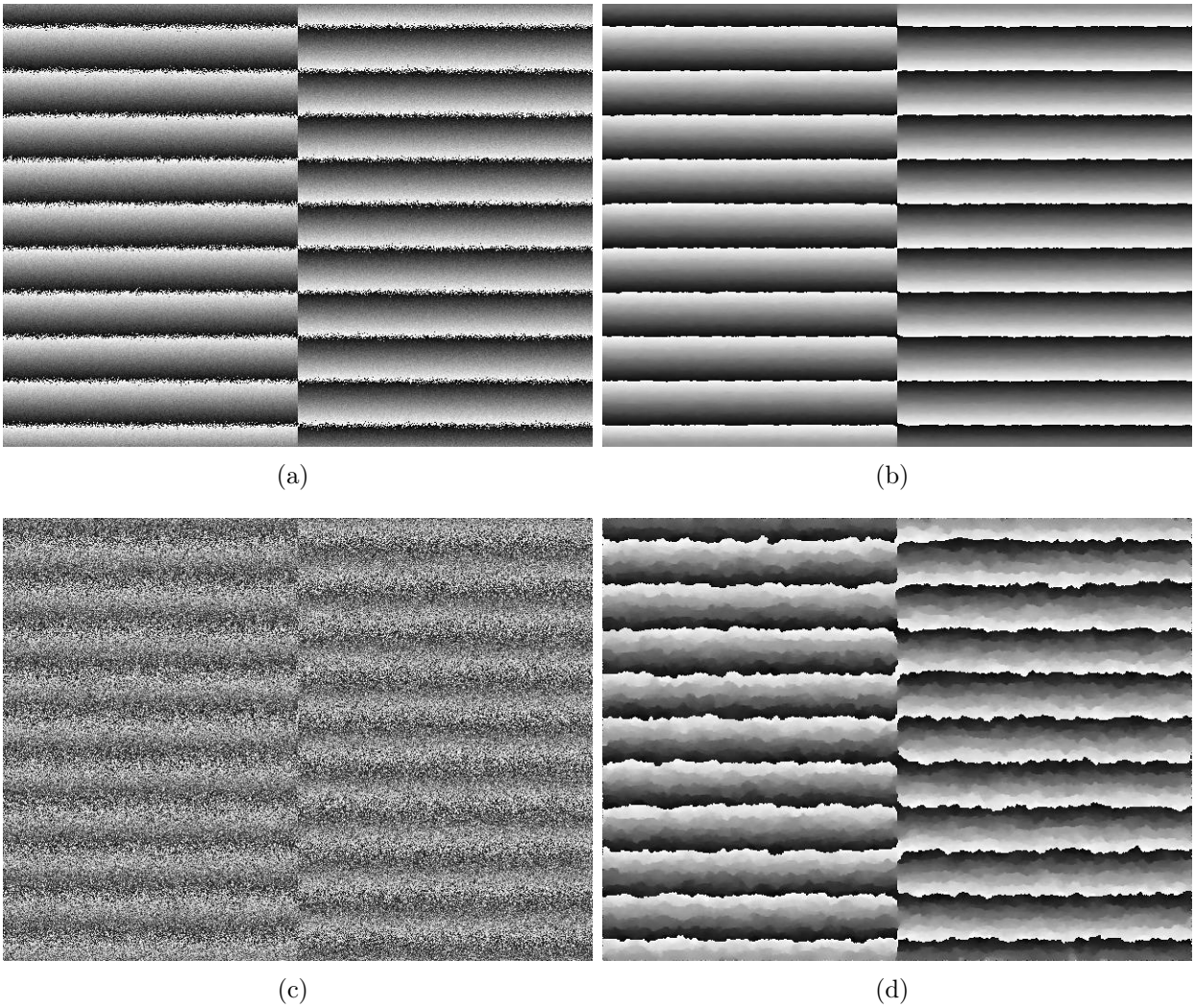


图 1：左列：信噪比为 74.41 dB（a）和 43.34 dB（c）的含噪包裹相位图像。右列：使用我们的模型恢复的相位图。

5.2 算法性能

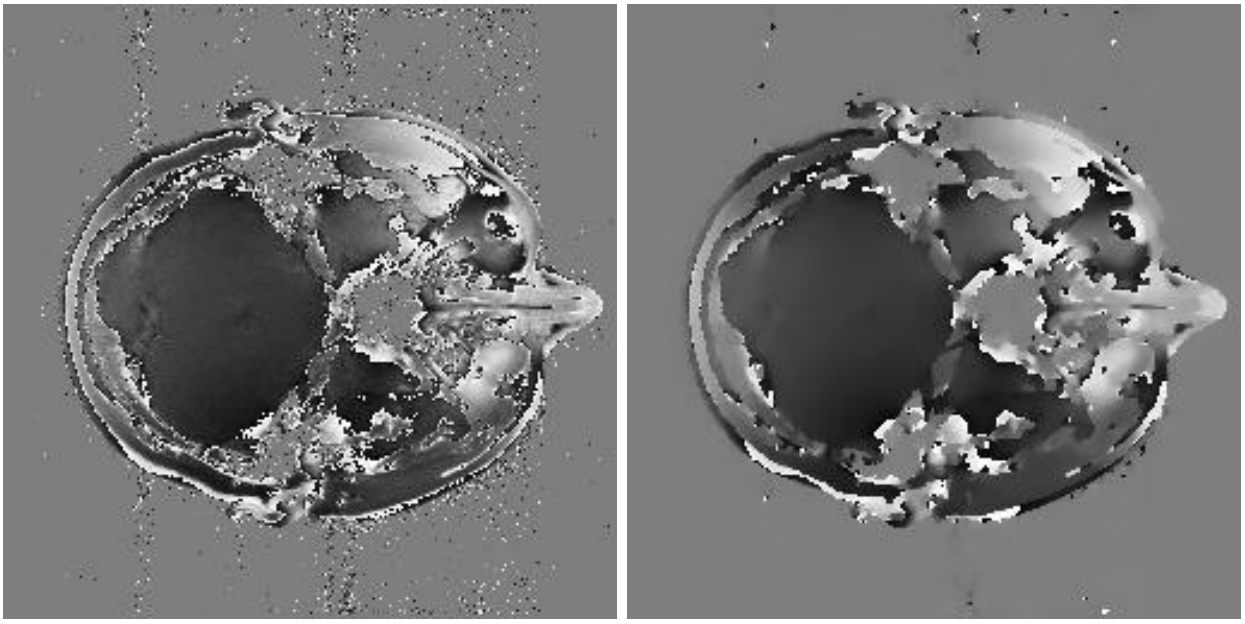
现在，我们展示用于求解变分模型的两种数值算法的性能：梯度下降法和不动点方法。

在表 1 中，我们展示了每种算法在解决图 1(a)和 (c)中的问题时所需的 CPU运行时间和迭代次数。对于两种算法，当相对残差小于 $\epsilon = 10^{-7}$ 时，且 $\epsilon \equiv ||\bar{u}^{k+1} - \bar{u}^k||_2/||\bar{u}^k||_2$

从表1 可以看出，不动点法的速度大约比预期的梯度下降法快一个数量级。

5.3 与其他去噪算法的比较

一个自然的问题是，图像去噪领域最先进的算法能否很好地复原 $\bar{U}_{real}$ 和 U_{im} 以及内在的包裹相位图。为此，我们在图Dabov 等人(2007) 的合成问题（BM3D）、非局部均值（NLM）Buades 等人(2005)，以及包裹相位图去噪的事实标准方法 Ströbel 方法Ströbel (1996)上进行了测试，使用的问题包括图1(a) 和 (c) 中的合成问题，以及图2(a) 中的真实问题。



(a) (b)

图2：(a) 磁共振成像扫描得到的含噪缠绕相位图图像。(b) 使用我们的模型恢复的缠绕相位图。

数值方法	问题	迭代次数	CPU运行时间（秒）
梯度下降	图1(a)	1,649	130
	图 1(c)	5,159	431
不动点	图 1(a)	104	18
	图1（c)	307	55

表 1：梯度下降法与不动点法的比较。后者在 CPU运行时间和迭代次数方面都优越得多。

为比较结果，我们使用以下两个指标：均方误差（MSE）和通用图像质量指数（图像质量指数）（IQI），它们针对任意变量 $y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 定义如下。

$$MSE = \frac{1}{m*n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y(i,j)-\bar{y}(i,j))^2, \tag{47}$$

and

$$IQI = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(y(i,j)-\bar{y}(i,j)\right)^2}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y(i,j)^2}. \tag{48}$$

图像质量指数（IQI）的动态范围为 $[-1,1]$，其中最差值为 -1，最佳值为 1。

这两个指标所得的结果呈现在表 2 中。到目前为止，我们的模型获得了好得多的复原结果。甚至 Strobel的方法也优于 BM3D 和 NLM，这表明¯ ¯对于包裹相位图图像的去噪，U_{real} 与 U_{im} 之间的关系必须得到保留。如果我们观察图 3 和 4，这一事实会更加明显。这些图表明，在相位图的实部和虚部之间强制施加勾股三角恒等式，能够有效改善缠绕相位图的复原，从而减少可能应用中的不准确性。

表2：不同去噪算法之间的比较。

模型	MSE		IQI	
	$\bar{U}_{real}$	$\bar{U}_{im}$	$\bar{U}_{real}$	$\bar{U}_{im}$
我们的模型	0.0555	0.0542	0.8515	0.8551
Ströbel	0.1537	0.1489	0.5891	0.6021
BM3D	0.3696	0.3687	0.0125	0.0149
NLM	0.3478	0.3511	0.0706	0.0621

6 结论

在本文中，我们提出了一种用于包裹相位图去噪的新变分模型。我们模型的两个主要性质是：通过全变分进行正则化，因此该模型能够保留不连续性；同时，强制满足相位图实部和虚部之间基本的勾股三角恒等式，从而显著改善相位图的恢复效果。此外，我们分析了该模型解的存在性和唯一性，并给出了用于数值实现的快速不动点算法。我们还对该不动点法进行了理论分析，以证明其收敛性。最后，我们给出了合成和真实示例上的恢复结果，以证明恢复质量，并讨论了与先进方法的比较。

7 声明

本文作者声明，没有需要报告的利益冲突。所有共同作者均参与了本文的撰写，并同意本文内容。我们保证，所提交的工作为原创，且未在其他刊物审稿。

参考文献

Acar，R。和Vogel，C. R.（1994）。病态问题中有界变差惩罚方法的分析。逆问题，10(6):1217。

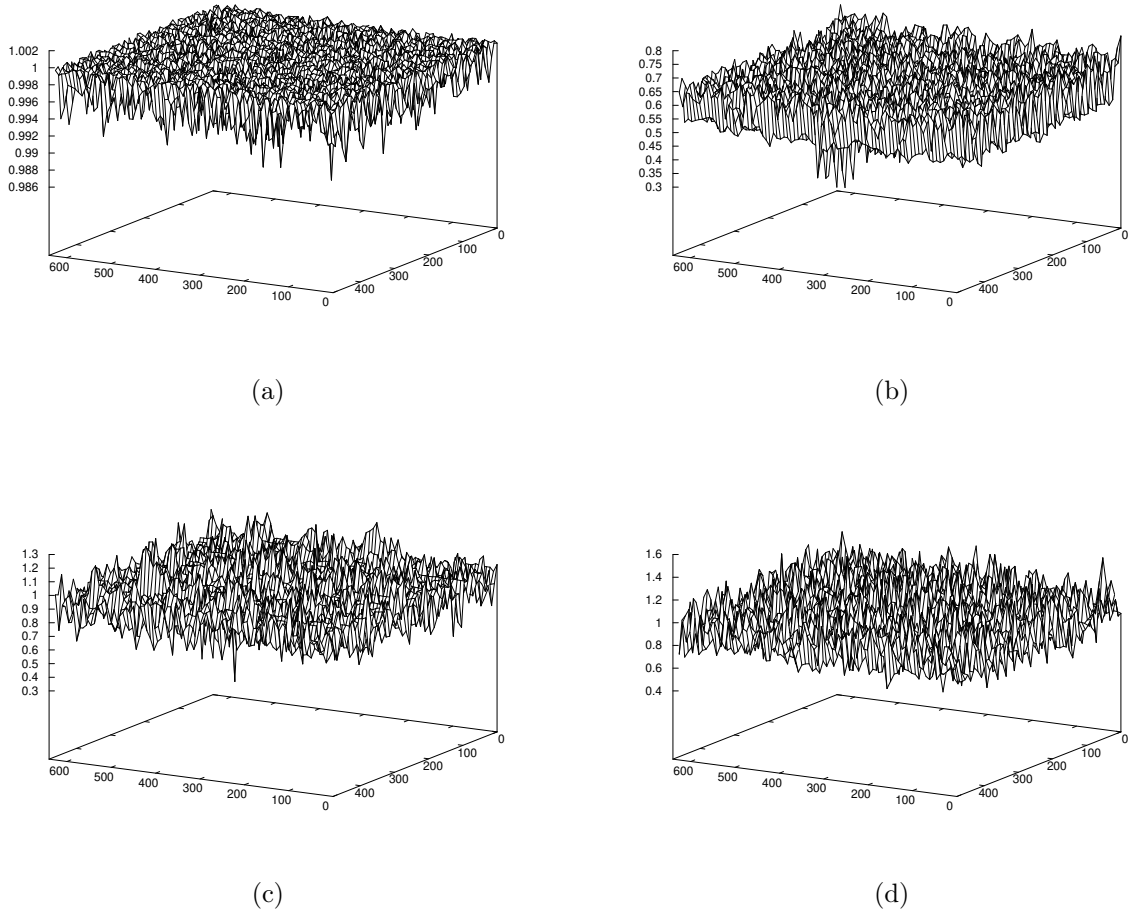
Boyd，S. 和 Va ndenberghe, L. (2004). 凸优化. 剑桥大学出版社。

Brito-Loeza, C.、Legarda-Saenz, R.和Martin-Gonzalez, A.（2020）。一种基于全变分的相位解调模型的快速算法。偏微分方程数值方法，36(3):617–636。

Buades, A.、Coll, B. 和 Morel, J.-M.（2005）。一种用于图像去噪的非局部算法。载于 *2005* 年 *IEEE* 计算机学会计算机视觉与模式识别会议（*CVPR'05*），第 2 卷。

Chambolle, A.（2004）。一种用于全变分最小化及其应用的算法。数学成像与视觉杂志，20(1)：89–97。

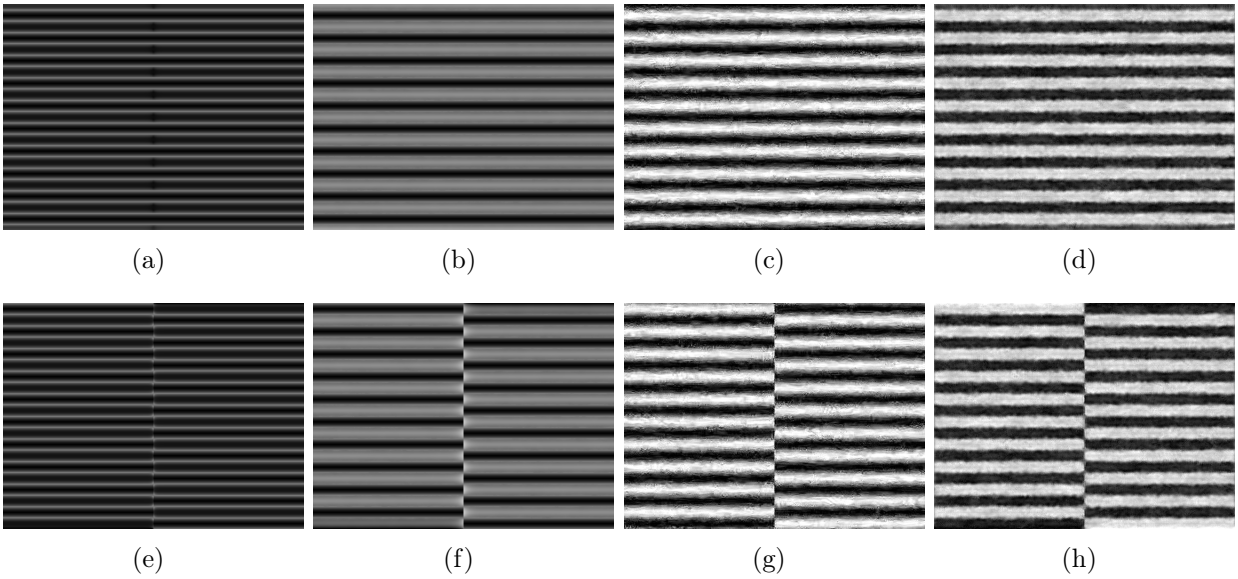
Chan,T.F.andEsedoglu, S.（2005）。全变分正则化 l 1 函数逼近的若干方面。*SIAM* 应用数学杂志，65(5)：1817–1837。



(a) (b)

(c) (d)

图3: $||\bar{U}^2_{real} + \bar{U}^2_{im}||_2$ 对应图1（a）中的问题。注意，在（a）中，我们的模型能够保留 $\bar{U}^2_{real} + \bar{U}^2_{im} = 1$ 之间的三角函数关系。另一方面，Ströbel 的（b）方法、BM3D（c）和 NLM（d）无法保留勾股性质。



‾ ^图 4：顶行展示了所有 $|U_{real} - U_{real}|$ 模型在图1(a) 中该问题上的差异‾ ^。底行展示了相同模型的差异 $|U_{im} - U_{im}|$ 。请注意，在我们的模型（第一列）中，只有少量误差，表现为细小的水平线。另一方面，Ströbel 的结果（第二列）、BM3D 和 NLM 的结果（分别位于第三列和第四列）则显示，误差出现在域内许多其他位置，且程度更大。

Chan, T. F., Golub, G. H., and Mulet, P.（1999）。一种基于全变分的非线性原始-对偶图像复原方法。科学计算 *SIAM* 杂志，20(6):1964–1977。

Chan, T. F. 和 Mulet, P.（1999a）。关于全变分图像复原中滞后扩散不动点法的收敛性。*SIAM* 数值分析杂志，36(2):354–367。Chan, T. F. 和 Mulet, P.（1999b）。关于全变分图像复原中滞后扩散不动点法的收敛性。*SIAM* 数值分析杂志，36(2):354–367。Dabov, K.、Foi, A.、Katkovnik, V. 和 Egiazarian, K.（2007）。基于稀疏三维变换域协同滤波的图像去噪。*IEEE* 图像处理汇刊，16(8):2080–2095。Huang, Y.、Ng, M. K. 和 Wen, Y.-W.（2008）。一种快速的图像复原全变分最小化方法。多尺度建模与仿真，7(2):774–795。Huntley, J. M.（1997）。数字散斑干涉测量中的随机相位测量误差。工程光学与激光，26(2-3):131–150。Kemao, Q.、Gao, W. 和 Wang, H.（2008）。窗化傅里叶滤波与质量引导相位解缠算法。应用光学，47(29):5420–5428。Kemao, Q.、Gao, W. 和 Wang, H.（2010）。窗化傅里叶滤波与质量引导相位解缠算法：针对局部高阶多项式相位。应用光学，49(7):1075–1079。Kulkarni, R. 和 Rastogi, P.（2017）。单分量与多分量数字光信号分析。IOP 出版社。Kulkarni, R. 和 Rastogi, P.（2018）。基于多项式相位近似和线性卡尔曼滤波器的相位解缠算法。应用光学，57(4):702–708。

Kulkarni, R. 和 Rastogi, P.（2020）。条纹去噪算法：综述。工程光学与激光，第 106190 页。Li, B.、Tang, C.、Gao, G.、Chen, M.、Tang, S. 和 Lei, Z.（2017）。一种基于变分图像分解、适用于不同密度电子散斑干涉条纹图像的通用滤波方法。应用光学，56(16):4843–4853。Marquina, A. 和 Osher, S.（2000）。一种基于水平集运动的新型时变模型的显式算法，用于非线性去模糊和噪声去除。*SIAM* 科学计算杂志，22(2):387–405。Medina, O. M.、Estrada, J. C. 和 López, Y. Y.（2017）。包裹相位图像滤波算法。光学工程，56(11):111704。Ng, M. K.、Qi, L.、Yang, Y.-f. 和 Huang, Y.-M.（2007）。关于全变分最小化的半光滑牛顿法。数学成像与视觉杂志，27(3):265–276。Osher, S.、Burger, M.、Goldfarb, D.、Xu, J. 和 Yin, W.（2005）。一种基于全变分的图像复原迭代正则化方法。多尺度建模与仿真，4(2):460–489。Sartor, K.、Tenali, G. B. 和 Kozaitis, S. P.（2008）。基于 Mumford–Shah 框架的干涉 SAR 数据变分相位解缠与小波去噪。国际信号与成像系统工程杂志，1(2):145–152。Servin, M.、Quiroga, J. A. 和 Padilla, M.（2014）。光学计量中的条纹图案分析：理论、算法与应用。John Wiley & Sons。Shi, Y.（2008）。修正复原问题中不动点迭代的收敛性。数学成像与视觉杂志，32(1):31–39。Song, H. 和 Sun, Y.（2017）。采用空间自适应全广义变分的 InSAR 相位滤波。遥感快报，8(4):370–379。Ströbel, B.（1996）。将干涉相位图作为复值相量图像进行处理。应用光学，35(13):2192–2198。Surrel, Y.（2000）。条纹分析。光机械学，第 55–102 页。Veldhuizen, T. L.（2000）。Blitz++：一个自认为是编译器的库。载于 Langtangen, H. P.、Bruaset, A. M. 和 Quak, E. 编，《科学计算软件工具进展》，第 57–87 页，柏林、海德堡。Springer Berlin Heidelberg。Vese, L. A. 和 Le Guyader, C.（2016）。图像处理中的变分方法。CRC Press，佛罗里达州博卡拉顿。Vogel, C. R. 和 Oman, M. E.（1996）。全变分去噪的迭代方法。*SIAM* 科学计算杂志，17(1):227–238。Warlick, Z. 和 Katz, R.（2015）。错位与扫描方法导致的非接触式传感器测量误差。国际计量与质量工程杂志，6(3):305。Wyant, J. C.（2003）。动态干涉测量。光学与光子学新闻，14(4):36–41。

Yan，K.，Chang，L.，Andrianakis，M.，Tornari，V.，和Yu，Y.（2020a）。基于深度学习的包裹相位去噪方法在数字全息散斑图样干涉测量中的应用。应用科学，10(11):4044。Yan，K.，Yu，Y.，Huang，C.，Sui，L.，Qian，K.，和 Asundi，A.（2019）。基于深度学习的条纹图样去噪。光学通信，437:148–152。Yan，K.，Yu，Y.，Sun，T.，Asundi，A.，和Kemao，Q.（2020b）。使用卷积神经网络进行包裹相位去噪。工程光学与激光，128:105999。Zhang，J.，Tian，X.，Shao，J.，Luo，H.，和Liang，R.（2019）。通过去噪和卷积分割网络实现光学计量中的相位解缠。光学快报，27(10):14903–14912。