arXiv:2304.02863v1 [math.PR] 6 Apr 2023

单模随机测度度量空间及其上的 Palm 理论

Ali Khezeli *†

2023年4月7日

摘要

在本文中，我们将幺模随机测度度量空间定义为对各种其他概念的共同推广。这包括离散情形，如单模图和平稳点过程，也包括非离散情形，如平稳随机测度，以及作为图的标度极限而产生的连续度量空间。我们给出了各种例子，并证明了许多一般性结果；例如关于弱极限、重新定根不变性、随机游走、遍历分解、可 amen性和平衡传输核的结果。此外，我们将 Palm 理论推广到给定单模空间上的点过程和随机测度。这对于 Palm 计算很有用，也有助于将一些问题归约到离散情形。

1 引言

质量传输原理（MTP）指的是一些关键方程，这些方程以各种形式出现在概率论的多个分支以及数学的其他领域中。这些方程体现（有时也将其形式化）了随机齐次性的直观概念；在不同语境下，它表现为平稳性、幺模性、点的典型性、重新定根不变性、对合不变性，或仅仅是不变性。MTP 各种版本之间的相似性促成了不同领域之间富有成效的联系。

在第 1.1 小节中，我们将快速综述文献中的 MTP。随后，在引言的下一部分将介绍本文的贡献。

1.1 文献中的质量传输原理

质量传输原理（MTP）最初在 [20] 中用于研究树上的渗流。随后， [7] 进一步发展了这一原理，用于研究群不变的

*Inria Paris，ali.khezeli@inria.fr

†应用数学系，数学科学学院，塔比亚特·莫达雷斯大学，邮政信箱 14115-134，德黑兰，伊朗，khezeli@modares.ac.ir

图上的渗流，并在 [8] 中用于证明平面图局部极限的回返性。 [4] 还为有限图的局部极限确立了一种称为对合不变性的性质[1]。事实证明，这种性质是质量传输原理的一个特例，实际上与之等价。随后， [3] 将质量传输原理直接用作定义，定义了幺模随机图，给出了各种一般例子，并确立了它们的许多性质。 [3] 选择“单模”这一术语，是因为要使一个固定的传递图 G 满足质量传输原理，其自同构群 G 为幺模群是充要条件。

回顾单模图的质量传输原理很有用。质量传输或传输函数是一个函数 g，它将图 G 和图的两个顶点 G 作为输入，并输出一个 $\mathbb{R}^{\geq 0}$ 中的值。我们将 $g(G,u,v)$ 视为从 u 传输到 v 的质量。对 g 的假设是可测性（需适当定义）和不变性；此处后者意味着 g 在同构下不变。若随机根图 $[\boldsymbol{G},\boldsymbol{o}]$ （其中图 $\boldsymbol{G}$ 和根顶点 $\boldsymbol{o}$ 都是随机的）满足以下质量传输原理，则称其为单模的；该原理适用于任意传输函数 g:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x\in\boldsymbol{G}} g(\boldsymbol{G},\boldsymbol{o},x)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{x\in\boldsymbol{G}} g(\boldsymbol{G},x,\boldsymbol{o})\right]. \tag{1.1}$$

在 $\mathbb{R}^d$中的点过程也有类似的质量传输原理（MTP）版本。最近的一个应用例子是利用质量传输原理构造点过程与公平镶嵌之间的完美匹配（参见例如 [25] 和 [13]）。这些质量传输原理是随机几何中年代久远得多的定理的特例；例如，Mecke公式、Mecke 定理和 Neveu交换公式，这些定理在随机几何中已得到广泛应用。特别是，Mecke 定理（参见例如 [33]）可以改述如下：如果 Φ_0 是一个平稳点过程的 Palm 版本（即以其包含原点为条件，或者等价地，从一个典型点观察该点过程），那么

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x\in\Phi_0} g(\Phi_0,0,x)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{x\in\Phi_0} g(\Phi_0,x,0)\right]. \tag{1.2}$$

这个方程与(1.1)相似，不同之处在于随机对象的性质不同，并且传输函数 $g = g(\Phi,u,v)$的不变性条件是关于欧几里得平移的不变性。事实上，(1.2)刻画了一类更大的点过程，它们在 [33] 中被称为点平稳点过程（例如，简单随机游走的零点集或图）。进一步讨论请参见第 4.1 小节。

由于（点）平稳点过程中的质量传输原理与幺模随机图中的质量传输原理相似，人们发现这两种理论之间存在许多联系。特别是， [3] 指出，在平稳点过程上构造的任何图（满足一定的等变性和可测性条件）都会产生一个幺模随机图。此外，还有各种结果和证明

[1]图的局部极限的质量传输原理也在 [8] 中被观察到。

一种理论中的技术经过细微修改后可以转化为另一种理论中的技术（见 [6]）。前人的工作 [6] 通过定义单模随机离散空间，统一了这两个概念。

上述关于平稳点过程的定理实际上更为一般，适用于平稳随机测度。特别是，一般形式的 Mecke 定理可以等价地改写为质量传输原理形式如下：如果 Ψ_0 是 $\mathbb{R}^d$ 上平稳随机测度的 Palm 版本，那么

$$\mathbb{E}\left[\int g(\Psi_0, 0, x) d\Psi(x)\right] = \mathbb{E}\left[\int g(\Psi_0, x, 0) d\Psi(x)\right] \tag{1.3}$$

对于每个函数 $g = g(\Psi_0, u, v) \geq 0$，只要它是平移不变且可测的。与前一种情况一样，(1.3)刻画了一个更大的随机测度类，它们在 [33] 中被称为质量平稳随机测度。进一步讨论见第 4.1 小节。

如上所述，图的局部极限满足质量传输原理（1.1）。对于图的某些缩放极限实例，也已确立了类似性质。这里，缩放极限是指将图距离度量乘以某个趋于零的因子，而极限则是指一列随机度量空间的极限（有时，这些度量空间带根，即有一个指定点，和／或带测度，即有一个指定测度）。最值得注意的是，若干具有紧的带根测度缩放极限的实例满足所谓的重新定根不变性；也就是说，分布在随机更改根（依据模型上的指定测度）后保持不变。布朗连续随机树 [2], 稳定树 [15] 以及布朗地图 [34] 都属于这种情形。此外，在少数缩放极限非紧的例子中，也观察到了类似于（1.3）的质量传输原理（例如 [10]）。然而，文献中似乎尚缺乏关于缩放极限的一般性严格质量传输原理结果。本文通过给出质量传输原理的一般形式，并证明其在弱极限下保持不变，来弥补这一空缺。这一一般性结果可直接推出已知缩放极限例子中的质量传输原理和重新定根不变性。我们还将给出非紧情形下的一些重新定根不变性性质。

在此，我们还应提及可数博雷尔等价关系理论中的质量传输原理。我们将在下一小节介绍该原理，并在第 4.6 小节中进一步讨论。

1.2 通过单模 rmm 空间统一质量传输原理

在上一小节中，我们回顾了单模图、点过程、随机测度和缩放极限等理论都以不同形式体现了质量传输原理。这些公式的相似性为这些理论之间建立富有成效的联系提供了基础。因此，自然会提出这样的问题：能否建立一种统一这些概念的质量传输原理一般理论？我们看到，离散情形（单模图和点过程）可以通过单模离散空间这一概念统一起来 [6] （这些情形也与可数博雷尔等价关系理论紧密相关）。

本研究的首要任务是统一离散与非离散情形下的质量传输原理。为此，我们在第 2 节引入随机带根测度度量空间，简称单模 rmm 空间。这一概念可以视为单模图、（点）平稳点过程、（质量）平稳随机测度，以及缩放极限中出现的随机连续空间的共同推广。在这一部分，为一般缩放极限确立质量传输原理是一个新成果，也是本研究的主要动机之一。

单模rmm 空间被定义为随机三元组 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$，其中 $\boldsymbol{X}$是一个有界紧度量空间， $\boldsymbol{o}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 中的一个点，称为根，而 $\boldsymbol{\mu}$是 $\boldsymbol{X}$上的有界有限博雷尔测度。Gromov-Hausdorff-Prokhorov 度量以 [31], 中给出的最一般形式，为这一定义提供了测度论要求。随后，通过相应地修改质量传输原理（1.3），给出了这一情形下的单模性定义。请注意，为使质量传输原理有意义，需要在 $\boldsymbol{X}$ 上指定一个测度。第 4 节讨论了许多单模 rmm 空间的具体例子和一般类别。

在第 3 节和第 5 节中，我们给出了关于单模空间的一般结果。特别地，我们证明了幺模性在弱收敛下得以保留。这意味着所有（测度）缩放极限都是单模的（这也是本研究的主要动机之一），因此，在紧情形下满足重新定根不变性。我们还研究了非紧情形下的重新定根，以及单模随机测度度量空间上随机游走的性质。我们定义了遍历性，并证明了遍历分解定理。此外，我们还给出了 amenable 性的若干定义，并证明它们彼此等价；这些定义基于数学其他领域中的类似定义，例如局部均值、近似均值、超有限性和 Følner条件。我们还证明，单模随机测度度量空间的拓扑端数几乎必然属于 $\{0, 1, 2, \infty\}$。

我们应当指出，上文讨论的质量传输原理（MTP）的离散情形，与可数博雷尔等价关系（CBER）理论有关；该理论源自截然不同的领域（动力系统的遍历理论、群作用和轨道等价理论）[2]。这一理论中存在一个类似质量传输原理的公式，事实上，它定义了何时一个等价关系是保测度的；也就是说，测度是不变的。这是动力系统和群作用中保测度性质的一种推广。正如 [3], 中所讨论的，这一概念通过图化与单模图相关联。尽管这两种理论有大量交集，但其视角和动机各不相同。事实上，可数博雷尔等价关系理论可以被视为单模图理论的数学基础；这就如同测度论与概率论之间的区别。本工作中对质量传输原理的统一并未涵盖可数博雷尔等价关系，因为我们关注的是随机度量空间。不过，我们仍将在

[2]这套理论几乎与 Mecke 定理一样古老，在概率论中非常有用，但在概率学界仍有待获得更多认可。这套理论中的一些结果后来被概率学家重新发现；例如，可和情形下 *one-ended treeing* 的存在性（例如参见 [12], [24] 和 [40]）以及因子点过程（参见 [32]）。

证明其中一些结果。这将在第 4.6 小节中进一步讨论。

1.3 Palm 理论的推广

在本工作中，我们还考虑给定单模随机测度度量空间上的随机测度和点过程。从这一视角看，基空间可以被视为欧几里得空间或双曲空间的一种推广。直观而言，点过程 Φ 在 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 上的强度，是 Φ 每单位测度（由 $\boldsymbol{\mu}$测量）内的点数期望。此外， Φ中点上某种量的均值，就是该量在 Φ的典型点处的期望。我们将在第 6 节中通过推广 Palm 理论来形式化这些概念，这是本工作的第二项主要任务。我们将推广随机几何中的各种概念和定理，例如 Campbell测度、Pam分布、Campbell公式、Mecke 定理、Neveu交换公式以及平衡传输核的存在性。我们还将证明，Palm 理论同时推广了 Palm反演（即从 Palm 分布重构概率测度），并推广了通过向另一个给定的单模图添加顶点和边来构造各种单模图的方法（例如单模平面图的对偶图）。

本文中 Palm 理论的一项重要应用，是构造一个配备不变测度的可数博雷尔等价关系。具体做法是添加一个泊松点过程，并考察其 Palm 版本；借助可数博雷尔等价关系理论的结果，这一方法可用于证明若干定理（例如关于可amen 性和不变分解的定理）。这些应用收录于第7节。

2 单模 rmm 空间

本节将单模 rmm 空间定义为单模图、平稳点过程、平稳随机测度等概念的共同推广。该定义基于一种质量传输原理，类似于 (1.1)、(1.2) 和 (1.3)。请注意，在质量传输原理中，应预设一个指定点和一个测度（因为这些空间不一定是离散的）。因此，我们先讨论带根测度度量空间及一些记号。

2.1 符号约定

如果 X 是一个度量空间，则以 $x \in X$ 为中心、半径为 r 的闭球记为 $\overline{B}_r(x) := \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$。开球记为 $B_r(x)$。此外，假设所有测度都是博雷尔测度。如果 $f : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ 是可测的，则 X上的测度 $f\mu$定义为 $(f\mu)(A) := \int_A f d\mu$。如果 μ是概率测度，则对 μ 进行偏置 f 意味着考虑概率测度$\frac{1}{c}(f\mu)$，其中 $c = \int_X f d\mu$。 X上有限测度之间的Prokhorov度量记为 d_P。

2.2 有根测度度量空间的空间

以根为基点的测度度量空间，简称 rmm 空间，是一个元组 (X, o, μ)，其中 X 是一个度量空间，μ 是定义在 X上的非负博雷尔测度，而 o 是 X 中的一个指定点，称为根。为简化记号，若无歧义，X 上的度量总记作 d，否则记作 d^X。在本文中，我们总是假设度量空间有界紧致（即每个闭球都是紧致的），且 μ 局部有限（即在 μ下，每个球的测度都有限）。类似地，双根测度度量空间是一个元组 (X, o_1, o_2, μ)，其中 μ同前，而 o_1和o_2 是 X中的两个有序指定点。注意，我们不要求X 是测地空间。它甚至可以是不连通的。

两个 rmm 空间 (X, o, μ) 和 (X', o', μ') 之间的同构（或 GHP 等距）是一个双射等距映射 $\rho : X \to X'$，满足 $\rho(o) = o'$ 并且$\rho_*\mu = \mu'$，其中 $\rho_*(\mu)$ 表示测度 μ 在 ρ 下的推前。如果存在这样的 ρ，则称 (X, o, μ) 和 (X', o', μ') 同构。双根空间之间的同构类似定义。在此等价关系下，包含 (X, o, μ)（分别地，(X, o_1, o_2, μ)）的等价类记作 $[X, o, \mu]$（分别地，$[X, o_1, o_2, \mu]$）。

令 $\mathcal{M}_*$ 为 rmm 空间在同构关系下的等价类集合。类似地，定义 $\mathcal{M}_{**}$ 为双根带测度度量空间的集合。在 Gromov–Hausdorff–Prokhorov（GHP）度量下，这些集合构成波兰空间（关于 GHP 度量的一般情形及其历史，见 [31] ）。为聚焦于主要目标，我们略去该度量的定义，仅介绍 GHP 拓扑（见 [29] 的第 3 节）：当这些空间可等距嵌入到一个共同的有界紧度量空间 Z 中，并且嵌入后，o_n 收敛到 o，X_n 作为 Z 的闭子集收敛到 X（在 Fell 拓扑下），且 μ_n 在模糊拓扑下收敛到 μ（即对紧支撑连续函数的积分收敛）时，序列 $[X_n, o_n, \mu_n]$ 收敛到 $[X, o, \mu]$。

$\mathcal{M}_*$ 的波兰性使得人们可以使用概率论中的经典工具来研究取值于 $\mathcal{M}_*$的随机元素，本文称之为随机 rmm 空间。特别地，每个随机根图都定义了一个随机 rmm 空间（配备图距离度量和顶点上的计数测度）。点过程也是如此。此外，以原点为根并配备 $\mathbb{R}^d$上的随机测度的 $\mathbb{R}^d$，定义了一个随机 rmm 空间。有界紧性条件与每个例子中的局部有限性条件相对应。

约定 2.1。随机 rmm 空间用一组粗体符号表示，例如 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$。按照惯例，对于大多数随机对象，我们将使用熟悉的符号 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{E}$（而不是将其写成长积分的形式），即使它们属于不同的空间，即使引入了额外随机性。以下说明有助于减少可能的混淆。请注意，该组符号只确定 $\mathcal{M}_*$ 中的一个随机元素，而符号$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{o}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 单独来看都没有意义。任何包含这些符号的公式都应对 rmm 空间的同构类定义良好。相比之下，在

第 6 节中，我们将考虑 $\mathcal{M}_*$ 或类似空间上的多个概率测度。在这种情况下，也可以将 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 视为 $\mathcal{M}_*$ 的一般元素的符号，并针对不同的概率测度 $\mathbb{P}$ 和 Q 使用诸如 $\mathbb{P}[[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}] \in A]$ 和 $Q([\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}] \in A)$ 这样的公式。

2.3 幺模性

在本小节中，我们定义单模 rmm 空间和一些基本例子。

定义 2.2。传输函数是一个可测函数 $g : \mathcal{M}_{**} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$。值 $g(X, u, v, \mu)$ 被解释为 u 发送给 v 的质量；如果 X 和 μ 已知，也将其简写为 $g(u, v)$。令 $g^+(u) := \int g(u, x) d\mu(x)$ 和 $g^-(u) := \int g(x, u) d\mu(x)$ 分别表示从 u 发出的质量和传入 u 的质量。

定义 2.3. 若以下质量传输原理成立，则称随机 rmm 空间是单模的：对于每个传输函数 g，

$$\mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} g(\boldsymbol{o}, x) d\boldsymbol{\mu}(x)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} g(x, \boldsymbol{o}) d\boldsymbol{\mu}(x)\right]. \tag{2.1}$$

若 $\boldsymbol{\mu} \neq 0$ 几乎处处成立，则称其为非平凡；若 $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{X}$ 几乎处处成立，则称其为适当。

换言之，从根发出的期望质量应当等于流入根的期望质量。情形 $\boldsymbol{\mu} := 0$ 显然满足质量传输原理，并不是很有趣。然而，也存在一些有趣的非正规的例子类别（例如，在扩展单模图时，例6.23，或 $\mathbb{R}^d$，以及任何配备点过程或随机测度的其他空间，例4.1和定义6.1）。另一个基本例子是 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}]$ 任意，而 $\boldsymbol{\mu} := \delta_{\boldsymbol{o}}$ 是 $\boldsymbol{o}$处的狄拉克测度。更一般地说，有限测度提供了下面将要解释的基本例子。

例 2.4（有限测度）。当 $\boldsymbol{\mu}$ 几乎必然是有限测度时，单模性等价于重新定根不变性：如果从 $\boldsymbol{X}$ 中按与 $\boldsymbol{\mu}$ 成比例的分布选取 $\boldsymbol{o}'$ 作为另一个随机点，那么 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}', \boldsymbol{\mu}]$ 与 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 具有相同的分布（见定理 3.8）。粗略地说，根是从 $\boldsymbol{X}$ 中按与 $\boldsymbol{\mu}$ 成比例的分布选取的一个随机点。

虽然对我们的目的而言，无限情形更有趣，但当极限空间是紧致的情况下，有限情形也出现在许多重要的缩放极限例子中（见第 4.3 小节）。我们将看到，这些例子中的重新定根不变性是弱收敛保持单模性这一事实的直接推论（引理 3.1）。

例 2.5（乘积）。设 $[\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{o}_i, \boldsymbol{\mu}_i]$ 对于 $i = 1, 2$ 是单模的。那么，$[\boldsymbol{X}_1 \times \boldsymbol{X}_2, (\boldsymbol{o}_1, \boldsymbol{o}_2), \boldsymbol{\mu}_1 \otimes \boldsymbol{\mu}_2]$ 也是单模的。这里，$\boldsymbol{X}_1 \times \boldsymbol{X}_2$ 上的度量可以是最大度量或和度量。

例2.6（偏置）。设 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是单模的，且 $b: \mathcal{M}_* \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ 是可测函数，满足 $\mathbb{E}[b(\boldsymbol{o})] = 1$。设 $b\boldsymbol{\mu}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 上由 $b\boldsymbol{\mu}(A) := \int_A b(x) d\boldsymbol{\mu}(x)$ 定义的测度。令 $[\boldsymbol{X}', \boldsymbol{o}', \boldsymbol{\mu}']$ 由将测度 $\boldsymbol{\mu}$ 改为 $b\boldsymbol{\mu}$，再用 $b(\boldsymbol{o})$ 对概率测度进行偏置得到；即，

$$\mathbb{E}\left[h(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{o}', \boldsymbol{\mu}')\right] = \mathbb{E}\left[b(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}) h(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, b\boldsymbol{\mu})\right].$$

因此，$[\boldsymbol{X}', \boldsymbol{o}', \boldsymbol{\mu}']$ 是一个单模随机测度度量空间。这可以通过直接验证质量传输原理看出。事实上，在例6.22中，将证明这是把 $b\boldsymbol{\mu}$ 视为 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$上的附加测度时的 Palm 版本。

对单模性的启发式解释是，根是测度 $\boldsymbol{\mu}$ 的典型点。当 $\boldsymbol{\mu}$ 是有限测度时，根据例 2.4，这一启发式解释是严格成立的。在一般情形下，这一启发式解释是：在根处取值的任何（等变）量的期望，是对度量空间中各点上该量的平均值的一种解释。更确切地说，对于可测函数 $f(\boldsymbol{o}) := f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu})$，期望 $\mathbb{E}[f(\boldsymbol{o})]$ 是对 $\boldsymbol{X}$ 的各点上的 $f(\boldsymbol{X}, \cdot, \boldsymbol{\mu})$ 的平均值的一种解释，其中平均值是按照测度 $\boldsymbol{\mu}$ 取的（事实上，在非遍历情形下，这一点应作修改；参见第 5.4 小节）。严格表述见推论 5.8。

3 单模性的基本性质

本节将介绍单模性的基本性质，这些性质有助于讨论下一节中的例子。第 5 节还将介绍其他性质。

3.1 弱极限

引理 3.1（弱极限）。单模性在取弱极限时保持不变。

这与单模图的情形类似，但证明更为复杂，因为 rmm 空间的收敛序列不一定会在给定窗口中稳定下来。我们将通过推广斯特拉森定理来处理这一问题。

引理 3.1 和例 2.4 自然地给出了如下对 sofic 性的推广：

问题 3.2。每个单模随机测度度量空间都是 sofic 的吗？也就是说，它是否是由一列确定性的紧致测度度量空间在随机点处取根，并且随机点的分布与 μ_n成正比，所得到的弱极限？

这推广了 [3], 中涉及单模图的第 10.1 个问题。注意，每个这样的弱极限都是单模的。此外，不失一般性，可以假设 X_n是一个有限度量空间，并且 μ_n 是计数测度的倍数。

引理 3.1 的证明。假设 $[\boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{o}_n, \boldsymbol{\mu}_n]$ 是单模的（$n = 1$、2、.....），并收敛于 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$。要证明 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 的幺模性，只需对有界连续函数 g 证明质量传输原理 (2.1)。定义 $f\colon \mathcal{M}_* \to \mathbb{R}^{\geq 0}$，其中

$$f(X, o, \mu) := \int_X g(X, o, p, \mu) d\mu(p).$$

通过用更简单的函数逼近 g，只需假设对于某些$R < \infty$，$g(X、o、p、\mu) = 0$，只要 $d(o、p) \geq R$，并且 f和 g均由 R界定。在这种情况下，我们将在下一段中证明 f 是一个有界连续函数。因此，弱收敛意味着 $\mathbb{E}[f(\boldsymbol{X}_n、\boldsymbol{o}_n、\boldsymbol{\mu}_n)] \to \mathbb{E}[f(\boldsymbol{X}、\boldsymbol{o}、\boldsymbol{\mu})]$。当在 f的定义中交换 o和 p时，类似的论证同样成立。现在，通过对 $[\boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{o}_n, \boldsymbol{\mu}_n]$ 的质量传输原理取极限即可推出 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 的质量传输原理，命题得证。

其余部分致力于证明 f 的连续性，首次阅读时可以跳过。假设 $[X_n, o_n, \mu_n]$ 是收敛到$[X, o, \mu]$的确定性随机度量测度空间。可以假设 X_n都是某个共同的有界紧度量空间的子空间，收敛到 Z，$o_n \to o$ 和 μ_n 模糊地收敛到 μ。因此，存在 $\epsilon_n \geq 0$ 以及测度 μ_n'，它们夹在将 μ_n 限制到$\overline{B}_{R+3-\epsilon_n}(o)$和 $\overline{B}_{R+3+\epsilon_n}(o)$所得到的测度之间（这些球位于 Z 中），使得，如果 μ'是将 μ限制到 $\overline{B}_{R+3}(o)$ 所得到的测度，那么 $d_P(\mu_n', \mu') \leq \epsilon_n$（参见 [29]的第3节）。不妨假设 $\epsilon_n < 1$。根据 [31] 的广义斯特拉森定理（定理 2.1），存在 μ_n' 和 μ'的近似耦合；即，在 $X_n \times X$ 上存在一个测度 α_n，使得

$$|\pi_{1*}\alpha_n - \mu_n'| + |\pi_{2*}\alpha_n - \mu'| + \alpha_n(\{(x, y) \in X_n \times X : d^Z(x, y) > \epsilon_n\}) \leq \epsilon_n.$$

这里，π_1和 π_2分别是从 $X_n \times X$到 X_n和 X的投影。此外，根据关于 g的假设、收敛性以及紧致性论证，存在 $M < \infty$，使得对所有 n，$\sup\{g(X_n, o_n, p, \mu_n) : p \in X_n\} \leq M$，且 X也满足同样的结论。另外，通过考察 g 在某个适当紧集上的连续模，可得 $\delta_n := \sup\{|g(X_n, o_n, p, \mu_n) - g(X, o, q, \mu)| :$

$d^Z(p,q) \le \epsilon_n\} \to 0$。现在，

$$
\begin{aligned}
& |f(X_n,o_n,\mu_n) - f(X,o,\mu)| \\
= \;& \left| \int_{X_n} g(X_n,o_n,p,\mu_n) d\mu_n(p) - \int_X g(X,o,q,\mu) d\mu(q) \right| \\
\le \;& M\,|\pi_{1*}\alpha_n - \mu_n'| + M\,|\pi_{2*}\alpha_n - \mu'| + \\
& \left| \int_{X_n} g(X_n,o_n,p,\mu_n) d(\pi_{1*}\alpha_n)(p) - \int_X g(X,o,q,\mu) d(\pi_{2*}\alpha_n)(q) \right| \\
\le \;& M\,|\pi_{1*}\alpha_n - \mu_n'| + M\,|\pi_{2*}\alpha_n - \mu'| + \\
& \int\int |g(X_n,o_n,p,\mu_n) - g(X,o,q,\mu)|\, d\alpha_n(p,q) \\
\le \;& M\big(\,|\pi_{1*}\alpha_n - \mu_n'| + |\pi_{2*}\alpha_n - \mu'| + \alpha_n(\{(x,y)\in X_n\times X : d(x,y) > \epsilon_n\})\big) \\
& + \int\int |g(X_n,o_n,p,\mu_n) - g(X,o,q,\mu)|\, 1_{\{d(p,q)\le\epsilon_n\}} d\alpha_n(p,q) \\
\le \;& M\epsilon_n + \delta_n\,|\alpha_n| \\
\le \;& M\epsilon_n + \delta_n\epsilon_n + \delta_n\,|\mu'|\,.
\end{aligned}
$$

由此可得 $|f(X_n,o_n,\mu_n) - f(X,o,\mu)| \to 0$，并证明了 f 的连续性。引理得证。 □

3.2 子集选择

直观来说，单模性意味着根是一个典型点。特别是，根处不可能观察到的任何点的性质，在几乎所有其他点处也都观察不到。下面这个简单但重要的引理将这一点形式化。

定义3.3. 令 $[\boldsymbol{X},\boldsymbol{o},\boldsymbol{\mu}]$ 是一个随机rmm空间且 $A \subseteq \mathcal{M}_*$ 可测。集合 $\boldsymbol{S} := \boldsymbol{S}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\mu}) := \{p\in\boldsymbol{X} : (\boldsymbol{X},p,\boldsymbol{\mu}) \in A\}$ 被称为 $\boldsymbol{X}$ 的因子子集。注意，因子子集是 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 的函数，并不依赖于 $\boldsymbol{o}$。

引理3.4（所有事情都发生在根处）。设 $[\boldsymbol{X},\boldsymbol{o},\boldsymbol{\mu}]$ 是一个非平凡的单模 rmm 空间。对于每个因子子集 $\boldsymbol{S}$,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{o}\in\boldsymbol{S}\ \textit{a.s.} \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{S}\ \textit{has full measure w.r.t.}\ \boldsymbol{\mu},\ \textit{a.s.},\\
\mathbb{P}[\boldsymbol{o}\in\boldsymbol{S}] > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}[\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{S}) > 0] > 0.
\end{aligned}
$$

证明。只需证明第一个断言。定义 $g(u,v) := 1_{\{v\notin\boldsymbol{S}\}}$。于是，$g^+(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{S})$，且 $g^-(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X})1_{\{\boldsymbol{o}\notin\boldsymbol{S}\}}$。由于 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) > 0$ 几乎处处成立，该断言由质量传输原理 (2.1) 得出。 □

这是 [3] 中引理 2.3 的推广。通过同时允许额外随机性，也可以对其进行推广，但需要注意一些问题，相关讨论见第5.1小节。

令 $\boldsymbol{S}$:=supp($\boldsymbol{\mu}$)，立即可得：

推论 3.5。如果 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是一个非平凡的单模随机测度度量空间，那么 $\boldsymbol{o} \in \operatorname{supp}(\boldsymbol{\mu})$ 几乎处处成立。

备注 3.6。注意，与离散情形不同，不能用 $\mathbb{P}[\boldsymbol{S} \neq \emptyset] > 0$ 替换引理 3.4 中的最后一个结论。用博雷尔等价关系的术语来说，尽管可数等价关系的情形并非如此，但零测集的饱和集可能具有正测度。

引理 3.7（有界选择）。若 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) = \infty$ 几乎必然成立，则每个 $\boldsymbol{X}$ 的因子子集$\boldsymbol{S}$ 几乎必然为空或无界。此外，$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{S}) \in \{0, \infty\}$ 几乎必然成立。

这是对单模图的推论 2.10（见 [5] ）的推广。正如命题 4（见 [35], ）之前所提到的，这与庞加莱回返定理有关。另请参见引理 5.15，其中给出了进一步的推广。

证明。令 A 为一个事件，在该事件中 $\boldsymbol{S}$ 非空且有界。因此，在 A 上有 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{S}) < \infty$ 。如有必要，可将其替换为 $\boldsymbol{S}$ 的一个适当邻域，从而可以假设在 A 上有 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{S}) > 0$ 。因此，只需证明第二个断言。令 B 为事件 $0 < \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{S}) < \infty$。令 $g(u, v) := (\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{S}))^{-1} 1_{\{v \in \boldsymbol{S}\}} 1_B$。于是，$g^+(\boldsymbol{o}) = 1_B$，并且当 $\boldsymbol{o} \in \boldsymbol{S}$ 和 B 成立时，$g^-(\boldsymbol{o}) = \infty$ 。若 $\mathbb{P}[B] > 0$，则根据引理 3.4，后一个结论以正概率成立。这与 g 的质量传输原理矛盾。□

3.3 重新定根不变性

在下面的命题中，即使在非紧情形下，也考虑对单模随机测度度量空间重新定根。假设对每个 rmm 空间 (X, o, μ)，在 X 上给定一个概率测度 $k_o = k_{(X,o,\mu)}$ 。这将被视为把根从 o 更换为新根的概率律。固定 (X, μ) 并令 o 变化，可将其视为 X 上的马尔可夫核 $k^{(X,\mu)}$ （假设满足下述可测性条件）。若它在 rmm 空间的同构下不变，且对于每个可测集 $A \subseteq \mathcal{M}_{**}$，函数 $[X, o, \mu] \mapsto k_o(\{y \in X\colon [X, o, y, \mu] \in A\})$ 是 $\mathcal{M}_*$ 上的可测函数，则称其为等变马尔可夫核。

给定一个确定性对 (X, μ)，等变马尔可夫核 k 将 μ 转换为 X 上的另一个测度，该测度定义为 $\mu'(\cdot) := \int_X k_y(\cdot) d\mu(y)$。若 $\mu' = \mu$，则称 μ 为该核在 X 上的平稳测度。

设 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是一个单模随机测度度量空间，且 k 是一个等变马尔可夫核。在给定 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$的条件下，按照分布$k_{\boldsymbol{o}}(\cdot)$随机选择 $\boldsymbol{o}' \in \boldsymbol{X}$ ，并将其视为新的根。

定理 3.8（重新定根不变性）。假设 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是单模的，k 是等变马尔可夫核，且 $\boldsymbol{o}'$ 是依照 $k_{\boldsymbol{o}}(\cdot)$ 的规律选取的新根。若几乎必然地，$\boldsymbol{\mu}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 上的马尔可夫核 $k^{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mu})}$ 的平稳测度，则 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}', \boldsymbol{\mu}]$ 与 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 具有相同的分布。

特别地，在紧情形下，该定理蕴含了例2.4中提到的重新定根不- 变性。这也推广了 Palm 分布在双射点移位下的不变性，以及关于单模

图（ [5] 的命题 3.6）。另请参见第 5.2 小节，其中将其推广到考虑初始偏置的情形。

在证明定理之前，我们需要一些引理。首先，当 $k(\boldsymbol{o})$ 关于 $\boldsymbol{\mu}$ 绝对连续时，我们将使用质量传输原理；然后，再由第一种情形推出一般情形。

引理 3.9. 若 $k_{\boldsymbol{o}}$ 几乎必然关于 $\boldsymbol{\mu}$ 绝对连续，则 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}', \boldsymbol{\mu}]$ 的分布关于 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 的分布绝对连续。此外，若拉东-尼科迪姆导数 $dk_{\boldsymbol{o}}/d\boldsymbol{\mu}$ 由 $f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \cdot, \boldsymbol{\mu})$ 给出，其中 $f{:}\mathcal{M}_{**} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ 是可测函数，则 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}', \boldsymbol{\mu}]$ 的分布可由 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 的分布经 $f^{-}(\boldsymbol{o})$ 偏置得到。

事实上，证明表明，总存在这样一个可测的拉东-尼科迪姆导数 f。

证明。令 α 和 β 为定义在 $\mathcal{M}_{**}$ 上的 σ-有限测度，定义如下:

$$\begin{aligned} \alpha(A) &= \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} 1_A[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, x, \boldsymbol{\mu}] dk_{\boldsymbol{o}}(x)\right], \\ \beta(A) &= \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} 1_A[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, x, \boldsymbol{\mu}] d\boldsymbol{\mu}(x)\right]. \end{aligned}$$

α 只是 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{o}', \boldsymbol{\mu}]$的分布。容易看出，$\alpha$ 关于 β绝对连续。令 $f(X, o, o', \mu)$为 α 关于 β 在 $[X, o, o', \mu]$处的拉东-尼科迪姆导数。可以证明，f 满足引理中提到的假设。现在，令 A 为 $\mathcal{M}_*$中的一个事件。则有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}', \boldsymbol{\mu}] \in A\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} 1_A[\boldsymbol{X}, x, \boldsymbol{\mu}] dk_{\boldsymbol{o}}(x)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} f(\boldsymbol{o}, x) 1_A[\boldsymbol{X}, x, \boldsymbol{\mu}] d\boldsymbol{\mu}(x)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} f(x, \boldsymbol{o}) 1_A[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}] d\boldsymbol{\mu}(x)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[1_A[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}] f^{-}(\boldsymbol{o})\right], \end{aligned}$$

其中第三个等号由质量传输原理（2.1）成立。因此，结论得证。 □

引理3.10. 存在一个传输函数 h，使得 h 对称，$h > 0$ 且 $h^{+}(\cdot) = h^{-}(\cdot) = 1$，除了在一个相对于每个非平凡单模随机测度度量空间 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 都具有零测度的事件上。事实上，如果 $g > 0$ 是任意传输函数，使得 $g^{+}(\boldsymbol{o}) = 1$ 几乎处处成立，那么可以令

$$h(X, u, v, \mu) := \int_X \frac{g(u, x) g(v, x)}{g^{-}(x)} d\mu(x). \tag{3.1}$$

事实上，这只是对应于 g （给定 (X, μ)）的马尔可夫核与其时间反演的复合。这保证了新的核保持 μ。

证明。可以如下构造 g。给定 (X, o, μ)，令 $N > 0$ 为满足 $\mu(\overline{B}_N(o)) > 0$ 的最小整数（除非 $\mu = 0$）。对于每个 $k \geq 1$，令 $g_k(o, \cdot)$为 $\overline{B}_{N+k}(o)$上的常值函数，使得 $g_k^+(o) = 1$。然后，令 $g := \sum_k 2^{-k} g_k$。现在，根据（3.1）定义 h。假设

$$0 < g^-(x) < \infty \text{ for } \boldsymbol{\mu} - \text{a.e. } x \in \boldsymbol{X} \text{ almost surely}, \tag{3.2}$$

容易验证 h 定义良好，且 $h^+(\boldsymbol{o}) = h^-(\boldsymbol{o}) = 1$a.s.因此，只需证明(3.2)。由于 $g > 0$，有 $g^-(\boldsymbol{o}) > 0$ a.s. 此外，质量传输原理 (2.1) 给出 $\mathbb{E}[g^-(\boldsymbol{o})] = 1$，从而，$g^-(\boldsymbol{o}) < \infty$ a.s. 因此，引理 3.4 蕴含 (3.2)，命题得证。 □

备注 3.11. 给定 $\mathcal{M}_*$ 上的任意可测函数 $b \geq 0$，可以修改引理 3.10 的证明，使得 $h^+(\boldsymbol{o}) = h^-(\boldsymbol{o}) = b(\boldsymbol{o})$ 几乎处处成立。注意，在这种情况下，核以 $b(\cdot)\boldsymbol{\mu}$ 作为平稳测度（这一点也可由引理 3.10 和例2.6 直接推出）。此外，由 h 定义的核 h （即 $\tilde{h}_{\boldsymbol{o}} := b(\boldsymbol{o})^{-1} h(\boldsymbol{o}, \cdot)\boldsymbol{\mu}$）可以在如下意义下任意接近平凡核：$d_P(h_{\boldsymbol{o}}, \delta_{\boldsymbol{o}})$ 几乎处处小于任意常数 $\epsilon > 0$。

定理 3.8 的证明。在第一种情形中，假设如引理 3.9 所示，$k_{\boldsymbol{o}}(\cdot)$ 关于 $\boldsymbol{\mu}$ 几乎处处绝对连续，且其拉东-尼科迪姆导数为 $f\colon \mathcal{M}_{**} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$。由于 $k_{\boldsymbol{o}}(\cdot)$ 是概率测度，$f^+(\boldsymbol{o}) = 1$ 几乎处处成立。此外，由于马尔可夫核 $k^{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mu})}$ 保持 $\boldsymbol{\mu}$，故在 $\boldsymbol{X}$ 上几乎处处有 $f^-(\cdot) = 1$。因此，根据引理 3.4，$f^-(\boldsymbol{o}) = 1$ 几乎处处成立。因此，根据引理 3.9 的第二部分，$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}', \boldsymbol{\mu}]$ 与 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 具有相同的分布。

现在考虑一般情形。根据引理 3.10，存在一个传输函数 $h > 0$，使得 $h^+(\boldsymbol{o}) = h^-(\boldsymbol{o}) = 1$ 几乎处处成立。将与 h 对应的马尔可夫核与 k 复合，得到一个新的等变核 η:

$$\eta_{\boldsymbol{o}}(\cdot) := \int_{\boldsymbol{X}} h(\boldsymbol{o}, x) k_x(\cdot) d\boldsymbol{\mu}(x).$$

现在，η 是一个等变马尔可夫核，且几乎必然保留 $\boldsymbol{\mu}$；可以验证，$\eta_{\boldsymbol{o}}(\cdot)$几乎必然相对于 $\boldsymbol{\mu}$ 绝对连续。因此，第一种情形意味着两次根变换的复合保留了 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$的分布。但第一次根变换（对应于 h）已经保留了 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 的分布，因为 $h^-(\boldsymbol{o}) = 1$ 几乎必然成立。这意味着第二次根变换也保留了它，故命题得证。 □

4 例子的一般类别

本节将介绍单模 rmm 空间中的各种一般性或具体例子。我们还将在第 4.6 小节研究它与博雷尔等价关系的联系。

4.1 点过程和随机测度

$\mathbb{R}^d$ 中的点过程是 $\mathbb{R}^d$的随机离散子集。更一般地， $\mathbb{R}^d$ 上的随机测度是 $\mathbb{R}^d$上的随机局部有限测度。若对任意 $t \in \mathbb{R}^d$， Φ 上的点过程或随机测度是平稳的，则 $\Phi + t$ 与 Φ 具有相同的分布。此时，可以通过多种方式定义 Φ 的 Palm 版本；直观而言，这意味着从一个典型点观察 Φ ，或对$0 \in \Phi$进行条件化。形式上，若 $B \subseteq \mathbb{R}^d$ 是任意有界博雷尔集，则按 $\Phi(B)$进行偏置，并将原点移至一个分布为 $\Phi\big|_B$的随机点；即

$$\mathbb{P}\left[\Phi_0 \in A\right] = \frac{1}{\lambda_\Phi}\mathbb{E}\left[\int_B 1_A(\Phi - x)d\Phi(x)\right], \tag{4.1}$$

其中， λ_Φ 是称为 Φ的强度的常数，此处假设该常数为正且有限。关于定义 Palm 版本的其他方法，可以提及 Campbell测度和镶嵌的使用，这将在第 6 节中推广。

Palm版本满足Mecke定理 [37], 该定理可以等价地改写为[3] 质量传输原理 (1.2) 和 (1.3) （另见 [30] 和 [33]）。Mecke 进一步证明，在满足某个有限矩条件的情况下，该方程刻画了平稳点过程的 Palm 版本。此外，还可以通过一个称为 Palm反演的公式，从Palm版本重构平稳版本。在不满足有限矩条件的情况下，质量传输原理(1.2)和 (1.3)定义了更大的点过程和随机测度类，这些类在 [33] 中被称为点平稳点过程和质量平稳随机测度。[4] 例如，可以提到简单随机游走的零点集、它的图，以及布朗运动在零点处的局部时间（更多例子见 [6] ）。质量传输原理 (1.2) 和 (1.3) 直接推出以下结论。

例 4.1.如果 Φ_0 是 $\mathbb{R}^d$ 中平稳点过程的Palm版本（或更一般地说，是点平稳的点过程），那么 $[\Phi_0, 0]$ 是一个单模随机测度度量空间（配备计数测度）。如果 Ψ_0 是平稳随机测度的 Palm 版本（或更一般地说，是质量平稳随机测度），那么 [supp(Ψ_0)0， Ψ_0] 和 $[\mathbb{R}^d, 0, \Psi_0]$ 是单模的。注意，后者可能是不适当的。

注 4.2。由于 rmm 空间是按同构来考虑的，因此将点过程和随机测度视为 rmm 空间时，会丢失一些几何信息（例如坐标轴）。为解决这一问题，可以将 $\mathcal{M}_*$ 扩展到配备某种额外几何结构的 rmm 空间，这将在第5.1小节中讨论。从这个意义上说，可以说单模 rmm 空间是（点）平稳点过程和（质量）平稳随机测度的推广。我们还将在第 6 节中通过在给定的单模 rmm 空间上定义平稳点过程和随机测度，进一步进行推广。从这一视角来看，单模 rmm 空间推广了基空间 $\mathbb{R}^d$。

[3]Mecke定理在文献中以不同的记号表述，但很容易将方程转换为这种形式。[4]在 [33] 中，点平稳性的定义更为复杂，但 [33] 证明了它等价于 Mecke 条件。

4.2 单模图与离散空间

如引言中所述，单模（随机）图 [3] 是满足质量传输原理（1.1）的随机根图。此外，质量传输原理在单模图与（点）平稳点过程之间建立了许多联系。作为一种共同推广， [6] 定义了单模离散空间，即满足类似质量传输原理的随机有界有限离散度量空间。由于根图的 Benjamini–Schramm 拓扑与GHP 拓扑相容（例如见 [29]），质量传输原理蕴含以下结论。

例4.3. 若 $[\boldsymbol{G}, \boldsymbol{o}]$ 是单模图或单模离散空间，则它也是一个单模随机测度度量空间（配备计数测度）。

将图视为 rmm 空间时，可能会丢失一些信息（例如，平行边和自环）。不过，可以考虑配备某些附加结构的 rmm 空间来保留这些信息（见第5.1小节）。从这个意义上说，单模 rmm 空间是单模图的推广。

更一般地， [3] 定义了单模网络，即在顶点和边上带有某些标记的单模图。此外， [6] 定义了单模带标记离散空间。与上例类似，这些可以视为配备适当附加结构的单模 rmm 空间。

例4.4. 以下例子是单模 rmm 空间，其中的图（或离散空间）配备了不同于计数测度的测度。在这些例子中，偏置是第 6 节所发展的 Palm 理论的一个特例（见例6.22）。

(i) 非简单平稳点过程的 Palm 版本。

(ii) 如果 $[\boldsymbol{G}, \boldsymbol{o}]$ 是一个单模图，那么已知通过按$\deg(\boldsymbol{o})$ 对概率测度进行偏置，可以得到简单随机游走的平稳分布。可以看出，经过这种偏置后，$[\boldsymbol{G}, \boldsymbol{o}, \deg(\cdot)]$ 是单模的。(iii)令 $\boldsymbol{S}$ 为过程$(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的像，该过程具有平稳增量，且 $Y_0 = 0$ （例如，一个随机游走）。令 $\boldsymbol{\mu}$ 为 $\boldsymbol{S}$ 上的计数测度，令 $\boldsymbol{m}$ 为 $\boldsymbol{S}$上的重数测度。假设 $\boldsymbol{S}$ 是离散的且 $\boldsymbol{m}$ 是有限的，则 $[\boldsymbol{S}, 0, \boldsymbol{m}]$ 是单模的（这很容易由指标集 $\mathbb{Z}$ 上的质量传输原理推出）。然而，要使 $[\boldsymbol{S}, 0, \boldsymbol{\mu}]$ 单模，需要按 $\boldsymbol{m}(0)^{-1}$ 进行偏置（参见 [6] 的第 4.3 小节）。

(iv)在某些随机带根图 $[\boldsymbol{G}, \boldsymbol{o}]$ 中，质量传输原理仅当在包含根的特定子集 $\boldsymbol{S}$ 上求和时才成立。这些情形有时称为局部单模；通过令 $\boldsymbol{\mu}$ 为 $\boldsymbol{S}$ 上的计数测度（而不是 $\boldsymbol{G}$ 上的计数测度），它们是单模 rmm空间。一个例子是 $\mathbb{Z}$上的零常返马尔可夫链的图，其中 $\boldsymbol{S}$ 是该图的一个水平集。另一个例子出现在按照例6.23中所述扩展单模图时。

4.3 标度极限

设 $\boldsymbol{G}_n$ 是一列有限图（或度量空间），它们可以是确定性的，也可以是随机的；令 $\boldsymbol{o}_n$ 是从 $\boldsymbol{G}_n$ 中均匀随机选取的一个顶点。$\boldsymbol{G}_n$ 的（带测度）缩放极限是形如 $[\epsilon_n \boldsymbol{G}_n, \boldsymbol{o}_n, \delta_n \boldsymbol{\mu}_n]$ 的序列作为 $\mathcal{M}_*$ 中随机元素时的弱极限。这里，$\boldsymbol{\mu}_n$ 是 $\boldsymbol{G}_n$ 的顶点上的均匀测度，而 $\epsilon_n \boldsymbol{G}_n$ 表示将图距离度量按 ϵ_n 缩放。类似地，（带测度）子序列缩放极限定义为沿某个子序列取极限。系数 ϵ_n 和 δ_n 也可以依赖于非根图 $\boldsymbol{G}_n$（但不依赖于 $\boldsymbol{o}$）。由于 $\boldsymbol{o}_n$ 是均匀选取的，$[\boldsymbol{G}_n, \boldsymbol{o}_n]$ 是单模图（事实上，只需满足重新定根不变性，见例 2.4）。

另一种研究缩放极限的情形，是对给定的单模图或 rmm 空间 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$进行缩小观察；也就是说，当因子 ϵ_n 和 δ_n 不依赖于 $\boldsymbol{o}$，并以适当方式趋于零时，考察 $[\epsilon_n \boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \delta_n \boldsymbol{\mu}]$ 的（子序列）极限。也有一些例子是在给定的 rmm 空间（甚至是紧空间）的根处进行放大观察，此时 ϵ_n、$\delta_n \to \infty$ 以适当方式变化。下面将提及各种例子。

在上述每种情形下，引理 3.1 都蕴含以下结论。

引理4.5（缩放极限）。在上述假设下，每个测度缩放极限都是单模的，并满足 MTP （ 2.1 ）。特别地，如果极限几乎必然是紧的，那么它满足重新定根不变性。对于子序列缩放极限，若所选子序列不依赖于 $\boldsymbol{o}$，结论也同样成立。

非紧缩放极限也具有某种重新定根不变性，这一点在定理 3.8 中有所阐述。

备注 4.6。对于非测度的标度极限，幺模性没有意义。然而，在许多情况下，通过预紧性论证，可以推导出某个子序列测度标度极限的存在性。例如，如果标度极限是紧的，情况总是如此。

例子 4.7（布朗运动）。$\mathbb{Z}$ 上简单随机游走（SRW）的零点集缩放后趋于配备局部时测度的布朗运动零点集。SRW 的图缩放后趋于由时间轴诱导测度的布朗运动图（度量的扭曲方式有所不同，但幺模性仍得以保留）。$\mathbb{Z}^d$ （$d \geq 3$）上 SRW 的像缩放后趋于 $\mathbb{R}^d$ 上配备 $\mathbb{R}$ 上测度的推前测度的布朗运动像。根据例子 4.4，后者是单模的。这些例子给出了单模 rmm 空间（以及质量平稳随机测度）。

例4.8（布朗树）。布朗连续随机树（BCRT）[1] 是 n 个顶点上的随机树的缩放极限。重新定根不变性（在 [2]中观察到）是上述引理4.5的直接推论。Aldous 还证明，通过适当地选择更大的缩放因子，可以得到一个非紧的缩放

得到的极限称为自相似连续随机树（SS-CRT）。引理4.5表明，SS-CRT 也是一个单模随机测度度量空间，并满足质量传输原理，这似乎是一个新的结果。

例 4.9（稳定树）。稳定树推广了 BCRT，是在规模趋于无限大的条件下，具有无限方差的Galton–Watson树的缩放极限 [14]。文献 [15] 证明了稳定树的重新定根不变性。注意，Galton–Watson树并不具有重新定根不变性。然而，也可以证明，稳定树同样是临界单模 Galton–Watson（UGW）树（ [3]的例 1.1）的缩放极限。由于 UGW 树是单模的，重新定根不变性可直接由引理 3.1 推出。

例 4.10（自相似单模空间）。令 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 为一个自相似集，使得 $K = \cup f_i(K)$，其中每个 f_i 都是一个位似变换（见 [9]）。在其上赋予唯一的自相似概率测度 μ ，并选择 $\boldsymbol{o} \in K$，其分布为 μ。假设所有位似比均相等，且开集条件成立。在这种情况下，通过在 $\boldsymbol{o}$处放大，存在一个子序列缩放极限。这可以类似于 [6] 的定理 4.14（关于自相似单模离散空间）加以证明；为简洁起见，省略证明（该极限可以通过向 K 中添加一些等距副本并递归地继续构造而得，类似于 [6]的备注4.21）。此外，当对 [6]中定义的单模离散自相似集进行缩小时，该极限与子序列缩放极限相同。因此，缩放极限是单模的。

例4.11（微集）。比例 4.10 更一般地，微集是通过在给定点处对任意紧集 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 进行放大来定义的（见 [9]的第 2.4 小节）。设 μ 是 K 上的一个概率测度，并按照 μ的分布随机选择 $\boldsymbol{o}$。通过略微修改微集的定义以允许非紧微集（利用 $\mathbb{R}^d$ 的闭子集的收敛），并同时对 μ 进行缩放，可以得到：在 $\boldsymbol{o}$ 处定义的每个子序列测度微集，若其定义为弱极限（子序列和缩放参数不应依赖于 $\boldsymbol{o}$），都是单模的。

例 4.12（布朗网络）。布朗网络是各种排水网络模型的缩放极限（例如见 [18]），这些模型是嵌入平面中的随机树。该极限通常以一种不同的收敛概念来定义（作为平面中的路径集合），但最近在 [11]中也证明了，在格罗莫夫–豪斯多夫拓扑下缩放极限同样存在。自然可以预期，带测度的缩放极限也存在。然而，该极限是布朗网络骨架的完备化，因此具有由 $\mathbb{R}^2$上的勒贝格测度诱导出的自然测度。由平稳性可知，所得的带测度连续树是一个单模 rmm 空间。

例4.13（均匀生成森林）。令 $\boldsymbol{C}$ 为包含0的 $\mathbb{Z}^d$ 的均匀生成森林的连通分支（参见 [3]的第7节）。已知 $[\boldsymbol{C}, 0]$ 是单模的（这在任何单模图中也成立）；事实上，它是点平稳的。作为配备有一个的 $\mathbb{R}^d$ 的随机闭子集。

测度后，可以使用预紧性来证明存在子序列测度缩放极限。如果证明了缩放极限的存在（或者以平移不变的方式选择子序列），那么该极限是一个单模随机测度度量空间。人们还猜想，$\boldsymbol{C}$ 存在作为嵌入于 $\mathbb{R}^d$中的随机实树的缩放极限，并且对于 $d \geq 5$，该极限与布朗嵌入的 SSCRT 相同（见例4.8和 [41]）。

例 4.14（平面地图）。随机平面图和平面地图的缩放极限一直是概率论和物理学中备受关注的主题。例如，布朗地图和布朗圆盘是紧随机度量空间，它们是某些均匀随机平面三角剖分和四边形剖分模型的缩放极限（参见 [34]）。布朗平面是一种非紧模型，可通过对均匀无限平面四边形剖分进行缩小观察得到，也可通过对布朗地图进行放大观察得到。因此，配备体积测度（即计数测度的缩放极限）的布朗平面是一个单模随机测度度量空间。

此外， [10] 将双曲布朗平面定义为一列经过适当缩放的平面三角剖分的极限。[10] 中指出，这个模型满足一种形式的质量传输原理（MTP）。事实上，这意味着双曲布朗平面是一个单模随机测度度量空间，这直接推论自引理 3.1。

此外，在均匀无限半平面三角剖分中，根位于边界上，而边界是一条双无限路径。已有证明表明，该模型的缩放极限存在。赋予其长度测度（这是边界上计数测度的缩放极限）后，便得到一个单模随机测度度量空间（它是不适当的）。

4.4 群与确定性空间

在本小节中，我们研究确定性随机度量测度空间 $[X, o, \mu]$ 何时是单模随机测度度量空间。根据引理 3.4，必要条件是 (X, μ) 具有传递性；也就是说，对于每个 $y \in X$， $[X, o, \mu]$ 都与 $[X, y, \mu]$ 同构。然而，仅有传递性还不够。下文将推广关于传递图的类似结果（见 [7]）。

命题 4.15。设 $[X, o, \mu]$ 是一个确定性随机度量测度空间。

(i) $[X, o, \mu]$ 是单模的，当且仅当（X， μ）是传递的，并且（X， μ）的自同构群是幺模群。(ii) 假设 Γ 是（X， μ）的自同构群的闭子群。那么，当且仅当 Γ 是单模的并在 X上传递作用时，质量传输原理对 $X \times X$ 上的所有 Γ-不变函数成立。

第一部分以更一般的形式在定理 4.18 中得到证明。第二部分也可以类似地证明，为简洁起见，此处略去证明。

推论 4.16（幺模群）。每个配备哈尔测度和有界紧左不变度量 d 的单模群 Γ（例如，

任何配备凯莱图的有限生成群都是单模随机测度度量空间。

也很容易通过直接验证质量传输原理来证明这一推论。

例 4.17。欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 是一个幺模群，因此，$[\mathbb{R}^d, 0, \mathrm{Leb}]$ 是单模的。双曲空间 $\mathbb{H}^n$ 不是群，但命题 4.15 蕴含它是单模的。然而，带有一个指定理想点的双曲平面（可视为具有某种附加结构的 rmm 空间；见第5.1小节）不是单模的，因为它的自同构群不是幺模的。

4.5 拟传递空间

设 (X, μ) 为一个确定性测度度量空间。在本小节中，我们探讨何时可以选取一个随机根 $\boldsymbol{o} \in X$，使得 $[X, \boldsymbol{o}, \mu]$ 是单模的。这推广了拟传递图的情形；[5] 参见 [7] 以及 [3] 的第 3 节。

Γ 是（X, μ）的自同构群。如果 Γ 只包含恒等函数，那么很容易看出 μ 应为有限测度，且 $\boldsymbol{o}$ 的分布应与 μ 成正比（见例 2.4）。然而，如果 Γ 非平凡，情况就更加复杂。

$x \in X$ 的轨道是集合 $\Gamma x = \{\gamma x : \gamma \in \Gamma\}$。$X$ 的有界紧性意味着 Γ 是一个局部紧拓扑群。设 $|\cdot|$ 是 Γ上的左不变哈尔测度。设 B 是一个任意的开集，它与每个轨道相交于一个非空有界集。例如，对于任意 $o \in X$，可以令 $B := \bigcup_{n\geq 1} B_n(o) \setminus \Gamma \overline{B}_{n-2}(o)$。对于 $x \in X$，定义

$$h(x) := |\Gamma_{x,B}|^{-1}, \text{ where } \Gamma_{x,B} := \{\gamma \in \Gamma : \gamma^{-1} x \in B\}.$$

这些假设意味着 $0 < h(x) < \infty$。此外，对于 $\alpha \in \Gamma$，有 $\Gamma_{\alpha x,\, B} = \alpha \Gamma_{x,\, B}$，因此，$h(\alpha x) = h(x)$。

定理 4.18. 存在一个随机点 $\boldsymbol{o} \in X$，使得 $[X, \boldsymbol{o}, \mu]$ 是单模的，当且仅当 Γ 是单模群且 $\int_B h d\mu < \infty$。在这种情况下，$[X, \boldsymbol{o}, \mu]$ 的分布是唯一的。此外，$\boldsymbol{o}$ 可以选取为其分布与 $(h\mu)\big|_B$ 成正比。

这是对 [3] 的定理 3.1 的推广。事实上，当 X 是图或网络，且 μ 是计数测度时，可以通过从每个轨道中恰好选取一个点来选择 B。在这种情况下，对于 $x \in B$，$h(x)$ 是 x 的稳定子的测度的倒数。还可以将该结论的“若”部分推广到 Γ 是自同构群的一个传递作用的闭子群的情形。

例 4.19. 设 X 是双曲平面中对应于理想点 ω 的一个 horoball，并设 μ 是 X 上的体积测度。定理 4.18 表明，

[5] 这就是本小节标题唯一的由来。

可以选取一个随机点 $\boldsymbol{o} \in X$，使得 $[X, \boldsymbol{o}, \mu]$ 是单模的。事实上，若 B 是任意两条经过 ω 的直线之间的区域，那么只需在 B 中均匀选取 $\boldsymbol{o}$ 即可（注意，Γ 与 $\mathbb{R}$ 的自同构群同构）。这可以看作是树冠树的连续版本。

作为一个更简单的例子，设 α 是 $\mathbb{R}$ 上的有限测度，且 $\mu := \alpha \times \mathrm{Leb}$。那么，$[\mathbb{R}^2, \boldsymbol{o}, \mu]$ 是单模的，其中 $\boldsymbol{o}$ 在 x 轴上选取，其分布与 α 成正比。

定理 4.18 的证明。对于每个可测函数 $f\colon X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$，有

$$\int_X f(y)d\mu(y) = \int_B \int_\Gamma h(x) f(\gamma x) d\gamma d\mu(x).$$

这可通过在右侧作变量代换 $y := \gamma x$，并注意到 h 和 μ 是 Γ-不变的来证明。首先，假设 $a := \int_B h(x)d\mu(x) < \infty$ 且 $\boldsymbol{o} \sim \frac{1}{a}(h\mu)\big|_B$。因此，对于每个传输函数 g，

$$\begin{aligned} a\mathbb{E}\left[\int g(\boldsymbol{o}, y)d\mu(y)\right] &= \int_B h(z) \int_X g(z, y)d\mu(y)d\mu(z) \\ &= \int_B h(z) \int_B \int_\Gamma h(x) g(z, \gamma x) d\gamma d\mu(x) \\ &= \int_\Gamma \int_B \int_B h(z)h(x)g(z, \gamma x)d\mu(x)d\mu(z)d\gamma. \end{aligned}$$

类似地，

$$a\mathbb{E}\left[\int g(y, \boldsymbol{o})d\mu(y)\right] = \int_\Gamma \int_B \int_B h(z)h(x)g(\gamma z, x)d\mu(x)d\mu(z)d\gamma.$$

注意，$g(\gamma z, x) = g(z, \gamma^{-1}x)$。如果 Γ 是单模的，那么变量代换 $\gamma \to \gamma^{-1}$ 保持哈尔测度不变。这意味着上述两个公式相等，从而证明了 $[X, \boldsymbol{o}, \mu]$ 的幺模性。

反过来，假设 $\boldsymbol{o} \in X$ 是一个随机点，且 $[X, \boldsymbol{o}, \mu]$ 是单模的。令 $\mathbb{P}$ 和 ν 分别为 $\boldsymbol{o}$ 和 $[X, \boldsymbol{o}, \mu]$ 的分布。对于 $A \subseteq X$，定义 $[A] := \{[X, u, \mu]\colon u \in A\}$。因此 $\nu([A]) = \mathbb{P}[\boldsymbol{o} \in \Gamma A]$。令 C、$D \subseteq X$ 任意，并定义 $g(u, v) := \big|\{\gamma\colon \gamma^{-1}u \in C, \gamma^{-1}v \in D\}\big|$。有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_X g(\boldsymbol{o}, y)d\mu(y)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_X \int_\Gamma 1_C(\gamma^{-1}\boldsymbol{o}) 1_D(\gamma^{-1}y) d\gamma d\mu(y)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_X \int_\Gamma 1_C(\gamma^{-1}\boldsymbol{o}) 1_D(y) d\gamma d\mu(y)\right] \\ &= \mu(D)\ \mathbb{E}\left[\int_\Gamma 1_C(\gamma^{-1}\boldsymbol{o}) d\gamma\right], \end{aligned}$$

其中第二个等式是通过变量替换 $y' := \gamma^{-1}y$ 得到的。同理，

$$\mathbb{E}\left[\int_X g(y, \boldsymbol{o})d\mu(y)\right] = \mu(C)\ \mathbb{E}\left[\int_\Gamma 1_D(\gamma^{-1}\boldsymbol{o}) d\gamma\right].$$

由于 g 是 Γ-不变的，质量传输原理表明这两个方程相等。由于它对任意 C 和 D 都成立，存在一个常数 b 使得

$$\mathbb{E}\left[\int_{\Gamma} 1_C(\gamma^{-1}\boldsymbol{o})d\gamma\right] = b\mu(C), \quad \forall C \subseteq X. \tag{4.2}$$

因此，对于 上的每个可测函数

f X $\mathbb{E}\left[\int_\Gamma f\ \gamma^{-1}\boldsymbol{o}\ d\gamma\right]$ =，都有 ( ) 。

$b\int_X f d\mu$ $f = h1_A1_B$ $A \subseteq X$ Γ

特别地，令 ，其中 是任意 -不变集。因此，

$$\begin{aligned} b\int_X h1_A1_B d\mu &= \mathbb{E}\left[\int_\Gamma h(\gamma^{-1}\boldsymbol{o})1_A(\gamma^{-1}\boldsymbol{o})1_B(\gamma^{-1}\boldsymbol{o})d\gamma\right] \\ &= \mathbb{E}\left[h(\boldsymbol{o})1_A(\boldsymbol{o})\int_\Gamma 1_B(\gamma^{-1}\boldsymbol{o})d\gamma\right] \\ &= \mathbb{E}\left[1_A(\boldsymbol{o})\right] = \nu([A]). \end{aligned}$$

这证明了 ν 的唯一性。此外，令 $A := X$，可得 $\int_B h d\mu < \infty$ 和 $b = 1/a$。这也意味着，若选择另一个分布为 $b(h\mu)\big|_B$ 的点， ν 不会改变。因此，从一开始就可以选取 $\boldsymbol{o} \sim b(h\mu)\big|_B$ 。此外，对于每个 $\beta \in \Gamma$，由于 $\mu(C) = \mu(\beta C)$，(4.2) 推出

$$\mathbb{E}\left[\int_\Gamma 1_C(\gamma^{-1}\boldsymbol{o})d\gamma\right] = \mathbb{E}\left[\int_\Gamma 1_{\beta C}(\gamma^{-1}\boldsymbol{o})d\gamma\right] = m(\beta)^{-1}\mathbb{E}\left[\int_\Gamma 1_C(\gamma^{-1}\boldsymbol{o})d\gamma\right],$$

其中，最后一个等式来自变量代换 $\gamma' := \gamma\beta$ ，这会使哈尔测度乘以常数因子 $m(\beta)$，其中 m 是 Γ 的模函数。上式意味着 $m(\beta) = 1$；也就是说， Γ 是单模的。因此，结论得证。

□

4.6 与博雷尔等价关系的联系

设 S 是一个波兰空间， E 是 S上的一个等价关系。如果它是$S \times S$ 的一个博雷尔子集，且每个等价类都是可数的，那么它称为可数博雷尔等价关系（ CBER）。如果对于所有可测函数 f： $S \times S \to \mathbb{R}^{\geq 0}$，都有$\int \sum_{y\in R(x)} f(x,y)$ $d\nu(x) = \int \sum_{y\in R(x)} f(y,x)d\nu(x)$，则称 ν 上的概率测度 ν 在 R 下不变，其中 $R(x)$是包含 x的等价类。正如 [3], 的例9.9所述，这一概念与单模图密切相关: 如果 R 有一个图化，且 $\boldsymbol{o} \in X$是一个分布为 ν的随机点，那么包含 $\boldsymbol{o}$ 的图化分支是单模的。反过来，如果 $\mathbb{P}$ 是 $\mathcal{G}_*$上的一个单模概率测度，其中 $\mathcal{G}_* \subseteq \mathcal{M}_*$ 是连通根图的空间，那么 $\mathbb{P}$ 在 $\mathcal{G}_*$ 上的等价关系下不变，该等价关系对所有 $v \in G$定义为$(G,o) \sim (G,v)$。当 $\mathbb{P}$ 集中于没有非平凡自同构的图上时，最后这一结论是一个充要命题。正如 [3], 所述，这两种理论有很大一部分重叠，但它们的视角和动机不同。事实上，CBER的图化更为一般，可以捕捉到单模图无法捕捉的一些图极限特征。

（参见 [22] 中的局部-整体收敛）。此外，关于单模图的一些结果是通过 CBER 的相关结果证明的；例如，遍历分解和可 amen 性。需要注意的是，由于自同构的存在，转化为图化时会丢失一些几何信息。这个问题需要设法解决；例如，可以添加额外随机性来打破自同构。

对于单模 rmm 空间，由 $(X, o, \mu) \sim (X, v, \mu)$ 在 $v \in X$ 上定义的 $\mathcal{M}_*$ 上的类似等价类并非可数。因此，CBER 理论不能直接适用。在第7节中，我们将通过在单模 rmm 空间上引入泊松点过程来构造一个 CBER。此外，借助第 6 节中发展的 Palm 理论，我们将为该 CBER 构造一个不变测度。这使我们能够运用 CBER 理论中的结果。

5 单模 rmm 空间的进一步性质

5.1 允许额外随机性

引理 3.4 讨论的是因子子集，它们是底层测度度量空间的函数。如果在适当选择子集时允许引入额外随机性，只要幺模性得以保留，该引理仍然成立。然而，由于可测性方面的问题，这一点并不容易形式化（所有 (X, o, μ, S) 的空间中，S 是 X的一个 Borel 子集，并没有自然的拓扑）。[6]

为进行这一推广，假设已经存在一个随机几何结构 $\boldsymbol{m}$，定义在 $\boldsymbol{X}$ 上，并且 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{m}]$ 是一个配备了某种附加结构的随机 rmm 空间。只要存在 GHP 度量的适当推广，这一设定就是有意义的。例如，$\boldsymbol{m}$ 可以是定义在 $\boldsymbol{X}$ 上的随机测度、$\boldsymbol{X}$ 的随机闭子集，等等。在先前的工作 [29]，中，提出了一个相当一般的框架，利用函子的概念推广 GHP 度量。该框架可以应用于各种类型的附加几何结构，并且还给出了保证波兰性的充分条件（必须对每个确定性的 (X, o, μ)，附加结构的集合 (X, o, μ) 都是波兰空间，但还需要更多假设）。这里，我们同样假设波兰性成立。

定义 5.1。若即使 g 依赖于附加结构 $\boldsymbol{m}$，MTP（2.1）仍然成立，则称 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{m}]$ 是单模的。

事实上，这意味着存在一个给定 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 时 $\boldsymbol{m}$ 的条件分布版本，使得该条件律不依赖于根。这将在第 6 节中形式化（见定义 6.1、引理 6.3 和备注 6.7）。

一旦我们有了这样的附加结构，就可以通过允许它成为 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{m})$ 的函数来扩展因子子集的概念。这样，本文中的结果（如引理 3.4 和 3.1）就可以推广到这一更一般的情形。

[6]这类似于定义 $\mathbb{R}^d$的随机博雷尔子集时所遇到的问题，在这种情况下必须改用随机场。以下想法与随机场的使用类似。

额外的几何结构本身也很有趣，文献中已分别研究了各种特殊情形（参见 [29]，了解相关文献综述及统一处理）。本文在多个地方采用这一框架；例如，在第 6 节发展 Palm 理论（其中 $\boldsymbol{m}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 上的 k 随机测度元组），在第 5.2 小节研究单模空间上的随机游走（其中 $\boldsymbol{m}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 中的点序列），用于遍历性（第 5.3 小节）、超有限性（第 5.6 小节），以及第 7 节中的证明（其中 $\boldsymbol{m}$ 是一个标记测度或闭子集）。

5.2 随机游走

在第 3.3 小节中，单模 rmm 空间的重新定根是通过等变马尔可夫核定义的。反复进行重新定根，便可在单模 rmm 空间上得到随机游走，具体形式如下。

令 $\mathcal{M}_\infty$ 为所有 $(X, o, \mu, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}})$ 的空间，其中 $(y_n)_n$ 是X 中的一个序列，且 $y_0 = o$。根据第5.1小节中的讨论，可以证明 $\mathcal{M}_\infty$ 可赋予波兰空间结构。考虑 $\mathcal{M}_\infty$上的如下移位算子：

$$\mathcal{S}(X, o, \mu, (y_n)_n) := (X, y_1, \mu, (y_{n+1})_n). \tag{5.1}$$

初始偏置是一个可测函数 $b\colon \mathcal{M}_* \to \mathbb{R}^{\geq 0}$。于是，对于每个确定的 (X, μ)，都可以得到 X 上的一个测度 $b\mu$，其定义如下：

$$b\mu(A) := \int_A b(X, y, \mu) d\mu(y). \tag{5.2}$$

令 k 为一个等变马尔可夫核（第 3.3 小节）。给定每个确定的 (X, o, μ)，核 $k^{(X,\mu)}$ 定义了 X上的一个马尔可夫链 $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$，使得 $\boldsymbol{x}_0 = o$，且 $\boldsymbol{x}_1$ 的分布为 k_o。令 $\theta_{(X,o,\mu)}$ 为 $(X, o, \mu, (\boldsymbol{x}_n)_n)$ 在 $\mathcal{M}_\infty$上的分布。令 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 为一个随机 rmm 空间，使得 $\mathbb{E}[b(\boldsymbol{o})] < \infty$，并令$Q$ 为 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, (\boldsymbol{x}_n)_n]$ 经由 $b(\boldsymbol{o})$偏置后的分布。

定理 5.2. 假设 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是一个单模随机测度度量空间。在上述假设下，若对于 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$的几乎每个样本 $[X, o, \mu]$， $b\mu$ 都是定义在 X上的马尔可夫核 $k^{(X,\mu)}$ 的平稳（分别为可逆）测度，那么 Q 在移位 $\mathcal{S}$下是平稳（分别为可逆）测度。

这推广了 [3] 的定理 4.1，该定理针对单模图。第 6 节的 6.3.4 小节进一步推广了这一结果，允许平稳测度相对于 $\boldsymbol{\mu}$是奇异的。

证明。首先，假设 $k_{\boldsymbol{o}}$ 几乎处处相对于 $\boldsymbol{\mu}$ 绝对连续。在这种情况下，可以稍作修改定理 4.1 [3] 的证明（与引理 3.9 类似）来证明这一结论。但在一般情况下，定理 3.8 的证明思路（将 k 与一个连续核复合）行不通。在这种情况下，只需用一列具有与 k （平稳性或可逆性）相同性质且满足 ˜ 绝对连续性的等变核来逼近 k。为此，设 h_n 是一列收敛到 the 的核。

˜ ˜由备注 3.11给出的平凡核。注意，核 $h_n \circ k \circ h_n$ 收敛于 k 当 $n \to \infty$ 时；如果 k 具有 $b\boldsymbol{\mu}$，则其保持 $b\boldsymbol{\mu}$；如果 k 可逆，则其可逆（因为 h_n 是对称的），并且具有绝对连续性。这证明了该结论。 □

定理 5.3（单模性的刻画）。令 h 为引理3.10中的一个固定对称传输函数（$h > 0$ 和 $h^+(\cdot) = h^-(\cdot) = 1$）。令（$\boldsymbol{x}_n$）$_n$为由核 k 给出的随机游走，该核由 k_o 定义：$= h$（o，$\cdot$）$\mu_\circ$ 则，一个随机 rmm空间 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是单模的，当且仅当 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu},$（$\boldsymbol{x}_n$）$_n]$（如上所定义）的分布在移位 $\mathcal{S}$下是平稳且可逆的。条件 $h > 0$ 也可以放宽为 $\sum_n h^{(n)} > 0$，其中 $h^{(n)}$ 由该核与自身的 n 次复合给出。

注5.4。类似地，通过令 $h^+ = h^- = b$，可以将该定理扩展为具有任意初始偏置 b。这推广了这样一个事实：对于随机带根图，在根据根的度进行偏置后，单模性等价于简单随机游走的平稳性和可逆性（见 [3] 的第 4 节）。上述定理的优点在于，它刻画了所有单模rmm 空间，而不仅仅是满足矩条件 $\mathbb{E}[b(\boldsymbol{o})] < \infty$ 的那些空间。即使对于图而言，这似乎也是新的（另见 [30] 中引理 4 的证明）。

定理 5.3 的证明。必要性由定理 5.2 得出。对于充分性，注意若 $h > 0$，则 (2.1) 两边分别为 $\mathbb{E}[g'(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{x}_1)]$ and$\mathbb{E}[g'(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{o})],$，其中 $g' := g/h_\circ$ 因此，由于 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{\mu}]$ 根据可逆性与 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 具有相同的分布，质量传输原理成立；也就是说，$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是单模的。

在较弱的条件 $\sum_n h^{(n)} > 0$ 下，令 A_n 为事件 $h^{(n)} > 0$，并记作 $g = \sum_n g_n$，其中 g_n 是 g 在 $A_n \setminus (\cup_{i=1}^{n-1} A_i)$ 上的限制。每个 $g^{(n)}$根据证明的第一部分都满足质量传输原理。因此，g 也满足质量传输原理。 □

命题 5.5（速度存在）。在定理 5.2 的设定下，随机游走 $(\boldsymbol{x}_n)_n$ 的速度（定义为 $\lim_n d(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{x}_n)/n$）存在。

这是 [3] 中命题 4.8 的推广，可以通过使用金曼次可加遍历定理的相同论证来证明。事实上，定理 5.7 表明，速度不依赖于 $\boldsymbol{o}$，并且关于不变 σ-代数可测（至多相差一个零测事件）。

5.3 遍历性

偶函数 $A \subseteq \mathcal{M}_*$ 若不依赖于根，则称其为不变；即若 $[X, o, \mu] \in A$，则 $\forall y \in X$：$[X, y, \mu] \in A_\circ$ 令 I 为不变事件的 σ-代数。若对所有 $A \in I$都有 $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$，则称单模随机测度度量空间 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$（或 $\mathcal{M}_*$上的单模概率测度）是遍历的。

可以将遍历性表述为随机游走的遍历性，如下所示。设 h 是一个固定的对称传输函数，使得 $h^+(\cdot) = h^-(\cdot) = 1$ 且$h > 0$（由引理3.10 给出）。设 $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是如定理5.3 中所述的由此得到的双向随机游走，并设 Q 是 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu},(\boldsymbol{x}_n)_n]$的分布。设Γ 是时间轴 $\mathbb{Z}$的自同构群；即，是以下变换的

形式 $t \mapsto t + t_0$ 或 $t \mapsto -t + t_0$。根据定理 5.3，$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是单模的，当且仅当 Q 在 Γ 于 $\mathcal{M}_\infty$ 上的由平移和时间反演定义的作用下是不变的（请注意，在此处考虑时间反演非常重要）。在这里，我们证明：

定理 5.6. $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 遍历，当且仅当 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, (\boldsymbol{x}_n)_n]$ 的分布在 Γ 的作用下遍历。

后者意味着每个 Γ-不变事件的概率为零或一。这个结果可直接由以下定理推出。

定理 5.7。在上述设定下，对于每个平移不变事件 $B \subseteq \mathcal{M}_\infty$，都存在一个不变事件 $A \in I$，使得 $B \Delta \{(X, o, \mu, (x_n)_n) : (X, o, \mu) \in A\}$ 对配备随机游走 $(\boldsymbol{x}_n)_n$ 的每个单模随机测度度量空间而言，其发生概率均为零。

这将 [3] 中的定理 4.6 推广了，并补充指出 A 不依赖于单模概率测度的选择（这在下一节很重要）。这里同样的证明也成立，为简洁起见不再赘述。该结果对保持初始偏置的任意随机游走也成立（如定理 5.2 中所述）。此外，还可以像定理 5.3 中那样，将条件 $h > 0$ 放宽为 $\sum_n h^{(n)} > 0$。

推论 5.8。设 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 和 $(\boldsymbol{x}_n)_n$ 如上。那么，对于每个 $f \colon \mathcal{M}_* \to \mathbb{R}$，使得 $\mathbb{E}[|f(\boldsymbol{o})|] < \infty$，$\operatorname{ave}(f) := \lim_n \frac{1}{2n} \sum_{i=-n}^{n} f(\boldsymbol{x}_n)$ 存在，并且 $\mathbb{E}[\operatorname{ave}(f)] = \mathbb{E}[f(\boldsymbol{o})]$。特别地，如果 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是遍历的，那么 $\operatorname{ave}(f) = \mathbb{E}[f(\boldsymbol{o})]$ 几乎处处成立。

5.4 遍历分解

在本小节中，我们将证明单模rmm 空间的遍历分解；即，将分布表示为遍历概率测度的混合。这并不能直接从现有文献中的结果推出；例如，对于保测半群作用（见 [16]）或可数博雷尔等价关系，情况都是如此。我们将从随机游走的遍历分解推导出这一结论。

令 $\mathcal{U}$（分别地，$\mathcal{E}$）表示 $\mathcal{M}_*$ 上单模（分别地，遍历）概率测度的集合。这些都是 $\mathcal{M}_*$ 上概率测度集合的子集，并且可以赋予弱收敛拓扑。此外，根据引理 3.1，$\mathcal{U}$ 是一个闭凸子集。

命题 5.9. $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{U}$ 的极端点集合。

极端点是指不能表示为另外两个点的凸组合的点。这个结论可由下面更强的结果推出，因此略去证明。

定理 5.10（遍历分解）。对于 ν 上的每个单模概率测度 $\mathcal{M}_*$，存在唯一的 λ 上的概率测度 $\mathcal{E}$，使得 $\nu = \int_{\mathcal{E}} \varphi d\lambda(\varphi)$。

另请参见定理 5.12，其中给出了另一种表述。证明借助随机游走进行。设 h 是引理 3.10 中的任意对称传输函数（$h>0$ 和 $h^{+}(\cdot)=h^{-}(\cdot)=1$），并令 $(\boldsymbol{x}_n)_n$ 为第 5.2 小节中所述的相应随机游走。令 I' 为 $\mathcal{M}_\infty$ 中 Γ 不变事件的 σ-代数，其中 Γ 是 $\mathbb{Z}$ 的自同构群（如第 5.3 小节所述）。令 $\mathcal{U}'$（分别为 $\mathcal{E}'$）表示 $\mathcal{M}_\infty$ 上在 Γ 的作用下不变（分别为遍历）的概率测度集合。令 $\pi:\mathcal{M}_\infty\to\mathcal{M}_*$ 为通过遗忘点的轨迹定义的投影。利用定理 5.3 和定理 5.6，可以直接推出$\pi_*\mathcal{U}'=\mathcal{U}$ 和 $\pi_*\mathcal{E}'=\mathcal{E}$。

定理 5.10（存在性）的证明。设 μ 为一个单模随机测度度量空间 $[\boldsymbol{X},\boldsymbol{o},\boldsymbol{\mu}]$的分布。设 $\hat{}\nu$ 为 $[\boldsymbol{X},\boldsymbol{o},\boldsymbol{\mu},(\boldsymbol{x}_n)_n]$的分布。由定理 5.2，$\hat{}\nu\in\mathcal{U}'$。因此，根据 Γ 作用的遍历分解（例如参见 [16]），存在一个定义在 $\mathcal{E}'$ 上的概率测度 α，使得$\hat{\nu}=\int_{\mathcal{E}'}\varphi d\alpha(\varphi)$。这意味着 $\nu=\int_{\mathcal{E}'}(\pi_*\varphi)d\alpha(\varphi)$。使用变量替换 $\psi:=\pi_*\varphi$，并注意到 $\pi_*\varphi\in\mathcal{E}$。可得 $\nu=\int_{\mathcal{E}}\psi d\lambda(\psi)$，其中 $\lambda=(\pi_*)_*\alpha$。至此，遍历分解的存在性得证。

□

引理 5.11。对于每个事件 $C\subseteq\mathcal{M}_*$ 和每个 $0\le p\le 1$，都存在一个不变事件 $A\in I$，使得 $\{\nu\in\mathcal{E}:\nu(C)\le p\}=\{\nu\in\mathcal{E}:\nu(A)=1\}$。

证明。令 $C':=\{(X,o,\mu,(x_n)):(X,o,\mu)\in A\}\subseteq\mathcal{M}_{\infty\circ}$ 根据 [16], 的定理 1 和定理 3，存在 $B\in I'$，使得 $\{\nu'\in\mathcal{E}':\nu'(C')\le p\}=\{\nu'\in\mathcal{E}':\nu'(B)=1\}$。现在，令 A 为定理 5.7 给出的事件。 □

定理 5.10 的证明（唯一性）。令 $\nu_1=\int_{\mathcal{E}}\varphi d\lambda_1(\varphi)$ 和 $\nu_2=\int_{\mathcal{E}}\varphi d\lambda_2(\varphi)$，其中 λ_1 和 λ_2 是 $\mathcal{E}$ 上两个不同的概率测度。集合 $E_{C,p}:=\{\nu\in\mathcal{E}:\nu(C)\le p\}$，其中 $C\subseteq\mathcal{M}_*$ 和 $0\le p\le 1$，生成弱拓扑及其对应的 Borel σ-代数。因此，存在 C 和 p，使得 $\lambda_1(E_{C,p})\ne\lambda_2(E_{C,p})$。根据引理 5.11，存在一个不变事件 $A\in I$，使得 $E_{C,p}=\{\nu\in\mathcal{E}':\nu(A)=1\}$。由于 $\varphi(A)\in\{0,1\}$，可得 $\nu_i(A)=\int\varphi(A)d\lambda_i(\varphi)=\lambda_i(E_{C,p})$。因此，$\nu_1(A)\ne\nu_2(A)$，从而$\nu_1\ne\nu_2$。

□

引理 5.11 证明了 [16] 的条件 (b)。定理 5.10 中的存在性证明也蕴含了条件 (c)。类似地，可以利用随机游走证明 [16] 的条件 (a)。因此，可以利用 [16] 中对遍历分解的直接构造，证明以下形式的遍历分解（见定义条件 (c) 后 [16] 的段落）。

定理 5.12。存在一个 I-可测映射 $\beta:\mathcal{M}_*\to\mathcal{E}$，使得对于 $\mathcal{M}_*$ 上的每个单模概率测度 ν，$\nu=\int_{\mathcal{M}_*}\beta(\xi)d\nu(\xi)$。此外，每个遍历 $\varphi\in\mathcal{E}$ 都集中在 $\beta^{-1}(\varphi)$ 上，并且没有其他遍历测度集中在 $\beta^{-1}(\varphi)$ 上。这样的映射 β 是唯一的，即对于每个单模概率测度 ν，任意两个这样的映射都 ν-几乎处处相等。

参见 [28] 的定理 4.11，其中对可数 Borel 等价关系给出了类似的陈述。

5.5 端

每个拓扑空间 [19] 都可以定义端。特别地，如果 X 有界紧且局部连通，并且 $o \in X$，那么 X 的每个端都可以由一个序列 $(U_n)_n$ 唯一表示，其中 U_n 是 $B_n(o)^c$ 的无界连通分支，且 $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots$。此外， X 与其端集的并集上还有一种自然的紧拓扑。

对于单模图，已证明端的数量（定义类似）只能是 0、1、2 或 ∞。此外，在最后一种情况下，不存在孤立端（ [3] 的命题 6.10）。在此，我们将这些结果推广到单模 rmm 空间。

定义 5.13。设 (X, o, μ) 是一个局部连通 rmm 空间。X的一个端，由序列 $(U_n)_n$ 如上所述表示，如果 $\mu(U_n) < \infty$ 对某个n成立，则称为轻。否则，称为重。如果对于某个 n， U_n 只有一个端，则称其为孤立。

如果 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) < \infty$，则不存在重端，但轻尾的数量可以是任意的（例 2.4）。此外，即使 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) = \infty$，也可能存在轻孤立端（例如，当 $\boldsymbol{X} = \cup_{n\in\mathbb{Z}} (\{n\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ 且 $\boldsymbol{\mu}$ 是 $\mathbb{R} \times \{0\}$ 上的勒贝格测度与垂直线上的某些有限测度之和时）。这里，我们关注其他情形。

命题 5.14. 假设 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是几乎必然连通且局部连通的单模随机测度度量空间，并假设 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) = \infty$ 几乎必然。

(i) $\boldsymbol{X}$ 的重端数为 1、2或 ∞。在最后一种情况下，不存在孤立的重端。
(ii) 轻端集合要么为空，要么是 $\boldsymbol{X}$ 的端集合的开稠密子集（因此是无限的）。

如果 $\boldsymbol{X}$ 不连通但局部连通，那么根据引理 3.7，对 $\boldsymbol{X}$ 的几乎每个连通分支，该结果都成立（注意，由局部连通性可知每个分支都是既开又闭的）。

关于重端这一断言的证明，是对单模图中命题 3.9的证明的修改。因此，为简洁起见，这一部分仅作概述。首先，我们给出引理 3.7 的以下推广。

引理 5.15. 设 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 如命题 5.14 所述，且 $\boldsymbol{S}$ 为因子子集。那么，几乎必然地，若 $\boldsymbol{S} \neq \emptyset$，则 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mu})$ 的每个重端都是 $\boldsymbol{S}$ 的极限点。

证明。否则，以正概率，存在一个有界子集 C 和 $\boldsymbol{X} \setminus C$ 的一个分支 U，使得 $C \cap \boldsymbol{S} \neq \emptyset$、 $U \cap \boldsymbol{S} = \emptyset$ 和 $\boldsymbol{\mu}(U) = \infty$。可以假设 C 是开且连通的，且直径至多为 n （对某个固定的 n）。令 C' 为所有此类集合 C的并。那么，C' 是一个因子子集，与 $\boldsymbol{S}$ 相交，并且可以看出 $\boldsymbol{X} \setminus C'$ 有一些质量无限的分支U'。对于每个这样的 U'，从每个 $x \in U'$向

紧集 $\partial U'$ 发送单位质量（或者，如果 $\boldsymbol{\mu}(\partial U') = 0$，则发送到 $\partial U'$ 的某个邻域）。这与质量传输原理矛盾，因为流出质量至多为 1，而在某些点上流入质量为 ∞。

□

命题 5.14 的证明。通过归纳构造 U_n，使得 $\boldsymbol{\mu}(U_n) = \infty$，即可证明重尾的存在。若重端的数量有限且至少为三个，则可以构造一个紧子集 $S \subseteq \boldsymbol{X}$，它是 $\boldsymbol{X}$ 的因子，并能分隔所有重端（考虑所有直径至多为 n 且能分隔所有端的开连通子集的并集，并注意到任意两个这样的子集都有交集）。这与引理 3.7 矛盾。此外，若 e 是一个孤立的重端，且重端至少有三个，则可以等变地为 e 指定一个有界集合 $S(e) \subseteq X$，使其将 e 与所有其他重端分隔开，并将至少另外两个重端彼此分隔开（考虑所有直径至多为 n 的此类开连通集合的并集，并注意到其中任意两个都有交集）。集合 $\cup_e S(e)$ 违反了引理 5.15。若轻端集合非空且不稠密，则存在某个直径至多为 n（其中 n 为某个固定值）的开连通集合 C，使得 $\boldsymbol{X} \setminus C$ 的某个分支仅含重端，而 $\boldsymbol{X} \setminus C$ 的另一个分支 U' 含有轻端，且 $\boldsymbol{\mu}(U') \leq 1$。可以看出，所有此类 C 的并集违反了引理 5.15。

□

5.6 可 amen 性

可 amen 性这一概念最初是为可数群定义的。此后，它也被推广到局部紧拓扑群以及可数博雷尔等价关系。后者在 [3] 中被推广到单模图。可 amen 性有多种等价定义，其中一些属于泛函分析范畴，另一些属于组合范畴。要将这些定义推广到单模 rmm 空间，现有定义无法直接适用，因为这里不存在群或可数博雷尔等价关系。

本小节将可 amen 性的一些定义从可数博雷尔等价关系（见 [12] 和 [26]）推广到单模 rmm 空间。在定理 5.21 中，我们通过将这些定义归约为某个特定可数博雷尔等价关系的类似条件，证明它们彼此等价。这一归约需要第 6 节发展的 Palm 理论。因此，主要结果的证明推迟到第 7.3 小节。

5.6.1 通过局部均值定义

群的可amen性的一种定义是存在一个不变均值。也就是说，存在一个映射，为每个有界可测函数赋予一个均值，使得该映射是群不变的且有限可加。对于可数博雷尔等价关系，已有全局均值和局部均值的两种定义（见 [26] 和 [12]）。在这里，我们将局部均值扩展到单模 rmm 空间（全局均值基于部分双射，似乎更难扩展到连续统情形）。

定义 5.16（局部均值）。设 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 为单模离散空间。局部均值 m 是一个映射，它将（某类）确定性随机度量测度空间 (X, o, μ) 赋予一个态 $m_{(X,o,\mu)} =: m_o$，该态定义在 (X, μ) 上（即 $m_o \colon L^\infty(X, \mu) \to \mathbb{R}$ 是一个正线性泛函，满足 $m_o(\mathbf{1}) = ||m_o||_\infty = 1$），使得：

(i) m 是同构不变的，并且对 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 的几乎每个实现都有定义，

（ii）如果 m_o 已定义，那么对于所有 $y \in X$ 和 $m_o = m_y$，m_y 都已定义，

(iii) 对所有有界可测函数 $f \colon \mathcal{M}_{**} \to \mathbb{R}$，映射 $[X, o, \mu] \mapsto m_o(f(o, \cdot))$ 是可测的。

那么，以下条件定义了单模随机测度度量空间 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 的可 amen 性，并且类似于 [26]的条件（AI）：

$$\text{There exists a local mean.} \tag{LM}$$

5.6.2 通过近似均值定义

定义 5.17.设 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是一个单模rmm空间。近似均值是一个可测函数序列 $\lambda_n \colon \mathcal{M}_{**} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$，使得几乎处处，$\forall y \in \boldsymbol{X} \colon \int_{\boldsymbol{X}} \lambda_n(y, \cdot) d\boldsymbol{\mu} = 1$ 且 $\forall y \in \boldsymbol{X} \colon ||\lambda_n(\boldsymbol{o}, \cdot) - \lambda_n(y, \cdot)||_1 \to 0$。

这里，$\lambda_n(y, \cdot)$被视为 $L^1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mu})$的一个元素。于是，下述条件是可 amen 性的另一种定义，并且类似于 [26] 关于博雷尔等价关系的条件（AI）：

$$\text{There exists an approximate mean.} \tag{AM}$$

“近似均值”这一名称源于这样一个事实：当 $n \to \infty$时，局部均值是通过对 $\int \lambda_n(o, \cdot) f(\cdot) d\mu$ 取超极限得到的。

5.6.3 通过超有限性给出的定义

粗略地说，如果一个可数博雷尔等价关系可以用有限等价子关系逼近，那么它就是超有限的。以下内容类似于 $\mathcal{M}_*$ 上的自然等价关系的等价子关系（第4.6小节）：

定义 5.18. 因子划分 Π 是一个映射，它为每个(X, μ)指定 X 的一个划分，并且该映射在同构下不变；此外，若$\Pi(o)$表示包含 $o \in X$的元素，则 $\{(X, o, y, \mu) : y \in \Pi(o)\}$ 是 $\mathcal{M}_{**}$的可测子集。如果 Π 的每个元素在 μ 下都有有限测度（但不必是有限集或有界集），则称该划分为有限划分。嵌套划分的因子序列$(\Pi_n)_n$ 类似地定义，条件是映射$(X, o, y, \mu) \mapsto \min\{n \colon y \in \Pi_n(o)\}$ 可测。

如果 (X, μ) 具有非平凡自同构，则并非 X 的所有划分都能出现在上述定义中。因此，我们允许使用额外随机性。但由于在 X 上定义随机划分存在拓扑问题（参见第5.1小节），我们如下使用另一种形式的额外随机性。

定义 5.19. 等变（随机）划分的定义与因子划分类似，区别在于该划分可以是 (X, o, Φ) 的因子，其中 Φ 是第 5.1 小节中所述的等变随机附加结构。等变嵌套划分序列的定义类似。

注 5.20。事实上，第7.3小节中的论证表明，只要该划分是带标记泊松点过程的因子就足够了（见例 6.10 和第7.3小节）。此外，如果几乎必然不存在非平凡自同构，那么因子划分就足够了。

这些定义使我们能够定义以下三种形式的超有限性，后文将看到它们彼此等价。

$$\text{There exist equivariant nested finite partitions } \Pi_n \text{ such that } \mathbb{P}\left[\bigcup_n \Pi_n(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{X}\right] = 1. \tag{HF1}$$

这并不意味着 $\Pi_n(\boldsymbol{o})$ 包含 $\boldsymbol{o}$ 的一个大邻域。以下条件是超有限性的另一种形式。

$$\text{There exist equivariant nested finite partitions } \Pi_n \text{ such that } \forall r < \infty : \mathbb{P}\left[\exists n : B_r(\boldsymbol{o}) \subseteq \Pi_n(\boldsymbol{o})\right] = 1. \tag{HF2}$$

超有限性也可以用如下的单个划分来表述。

$$\forall r < \infty, \forall \epsilon > 0, \text{ there exists an equivariant finite partition } \Pi \text{ such that } \mathbb{P}\left[B_r(\boldsymbol{o}) \not\subseteq \Pi(\boldsymbol{o})\right] < \epsilon. \tag{HF3}$$

5.6.4 通过 Følner 条件定义

Følner条件是一种组合方法，用于定义群（和确定性图）的可 amen 性；也就是说，存在一个有限集合 A，使得 A 的边界与 A相比可以任意小。我们为可数博雷尔等价关系（基于等变图化；参见 [12] 和 [26]）以及单模图（ [3]中的定义8.1）给出了这一条件的改版。特别地，要求 A 属于某个因子划分。推广到连续统情形并非易事。这里，我们给出如下两种Følner型条件。对于 $A \subseteq \boldsymbol{X}$ 和 $r \geq 0$，令 $\partial_r A := \{y \in A : B_r(y) \not\subseteq A\}$ 表示 A的内 r-边界。

$$\forall r < \infty, \ \forall \epsilon > 0, \text{ 存在一个等变有限划分 } \Pi \text{ such that } \mathbb{E}\left[\frac{\boldsymbol{\mu}(\partial_r \Pi(\boldsymbol{o}))}{\boldsymbol{\mu}(\Pi(\boldsymbol{o}))}\right] < \epsilon. \tag{FO1}$$

质量传输原理很容易推出，该条件等价于 (HF3)（参见定理 5.21 的证明）。

存在等变嵌套有限划分 Π_n，使得

$$\forall r: \frac{\boldsymbol{\mu}(\partial_r \Pi_n(\boldsymbol{o}))}{\boldsymbol{\mu}(\Pi_n(\boldsymbol{o}))} \to 0, \quad a.s. \qquad (\mathrm{FO2})$$

作者不确定在上述定义中是否可以使用外边界或完整边界。

5.6.5 定义的等价性

以下是本小节的主要结果。

定理 5.21. 对于单模 rmm 空间，条件 (LM)、(AM)、(HF1)、(HF2)、(HF3)、(FO1) 和 (FO2) 等价。

定义 5.22（可 amen 性）。如果定理 5.21 中的等价条件成立，则称单模随机测度度量空间是可和的。

可数群以及可数博雷尔等价关系的类似结果（ [26]的定理 1）的证明在很大程度上依赖于离- 散性。因此，这些证明无法直接推广到单模 rmm 空间。我们将通过将上述定理归约为某个特定可数博雷尔等价关系的类似结- 果来证明它。该归约基于第 6 节发展的 Palm 理论，证明被推迟到第 7.3 小- 节。简言之，利用 $\boldsymbol{X}$ 上的带标记泊松点过程构造一个可数博雷尔等价关系（例 6.10）。利用 Palm 分布构造一个不变测度（例 6.24）。随后，利用 Voronoi 镶嵌和平衡传输核证明该归约（后文：交叉引用）。

在此，我们仅证明不依赖于第 6 节的蕴含关系：

引理 5.23.(HF2) $\Rightarrow$ (HF3) $\Rightarrow$ (HF1) 和 (HF3) $\Leftrightarrow$ (FO1) $\Leftrightarrow$ (FO2)。

证明。(HF2) $\Rightarrow$ (HF3) 显然成立。

(HF3) $\Rightarrow$ (HF1)。令 Π_n 为由 (HF3) 针对 $r := n$ 和 $\epsilon := 2^{-n}$ 给出的等变划分。然后，可以令 Π'_n 为 Π_n、Π_{n+1}、.....的叠加，并利用 Borel-Cantelli 引理推出 (HF1)。

(HF3) $\Leftrightarrow$ (FO1)。令 $g(o,y) := 1/\mu(\Pi(o))1_{\{y\in\Pi(o)\}}1_{\{B_r(o)\not\subseteq\Pi(o)\}}$，由质量传输原理可得 $\mathbb{P}[B_r(\boldsymbol{o}) \not\subseteq \Pi(\boldsymbol{o})] = \mathbb{E}[\boldsymbol{\mu}(\partial_r\Pi(\boldsymbol{o}))/\boldsymbol{\mu}(\Pi(\boldsymbol{o}))]$。

(FO1) $\Leftrightarrow$ (FO2)。 $\Rightarrow$ 部分通过取一个使几乎必然收敛成立的子序列得到。 $\Leftarrow$ 部分则由有界收敛定理得到，注意到 $\partial_r A \subseteq A$。 □

注 5.24. [26] 的定理 1 假设了遍历性，但该结论对于非遍历情形同样成立。事实上，在上述每个定义中，$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是可和的，当且仅当其几乎所有遍历分量都是可和的。

6 单模 rmm 空间上的 Palm 理论

回顾第 4.1小节，平稳点过程（或随机测度）的 Palm 版本已经被定义，其启发式含义是将根重新定在点过程的一个典型点上。在本节中，我们将Palm 理论推广到单模随机测度度量空间。在这里，一个单模随机测度度量空间 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 被视为欧几里得空间或双曲空间的推广。Palm理论旨在研究在 $\boldsymbol{X}$ 上的随机测度 Φ ，这些随机测度是以等变方式选取的（例如，强度测度为 $\boldsymbol{\mu}$ 的泊松点过程）。等变随机测度的概念将在第 6.1 小节中讨论，而 Palm 理论将在接下来的小节中给出。

6.1 单模随机 rmm 空间上的附加随机测度

对于 $k \geq 1$，令 $\mathcal{M}_*^k$为所有元组 $(X, o, \mu_1, \ldots, \mu_k)$ 组成的空间，其中 (X, o, μ_1) 是一个 rmm 空间，而 $\mu_2, \ldots, \mu_k$ 是 X 上的测度。同样，令 $\mathcal{M}_{**}^k$ 为所有双根元组 $(X, o_1, o_2, \mu_1, \ldots, \mu_k)$ 组成的空间。根据第5.1小节中的讨论并利用 [29]，的结果，可以在 $\mathcal{M}_*^k$ 和 $\mathcal{M}_{**}^k$ 上赋予 GHP 度量的推广，使它们成为波兰空间。

令 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 为一个单模随机测度度量空间。粗略地说，在 $\boldsymbol{X}$ 上的等变随机测度，是指在 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 的每个实现中，为 $\boldsymbol{X}$ 配备一个额外的测度 Φ ，并且可以使用额外随机性，同时保持单模性。直观而言，给定 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 时，Φ 的分布不应依赖于根，应当是同构不变的，并满足某种可测性条件。更准确地说：

定义 6.1. 等变随机测度 Φ 是一个映射，它为每个确定性随机度量测度空间(X, o, μ) 指定一个定义在 X 上的随机测度 $\Phi_{(X,o,\mu)}$ ，使得：

(i) 对所有(X, o, μ) 以及所有 $y \in X$, $\Phi_{(X,y,\mu)} \sim \Phi_{(X,o,\mu)}$,

(ii) 如果 $\rho : (X, o, \mu) \to (X', o', \mu')$ 是一个同构，那么 $\rho_* \Phi_{(X,o,\mu)} \sim \Phi_{(X',o',\mu')}$,

(iii) 对于所有博雷尔子集 $A \subseteq \mathcal{M}_*^2$，映射 $(X, o, \mu) \mapsto \mathbb{P}\left[[X, o, \mu, \Phi_{(X,o,\mu)}] \in A\right]$可测。

此外，如果 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \mu]$ 是一个单模随机测度度量空间，则在 $\boldsymbol{X}$ 上的等变随机测度是一个映射，其上述条件放宽为：只需在一个概率为 1的不变事件上定义即可。为简便起见，我们将 $\Phi_{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{o},\boldsymbol{\mu})}$ 简记为 Φ 。

与往常一样，如果对于所有 (X, o, μ)， $\Phi_{(X,o,\mu)}$ 几乎必然是一个计数测度，则称 Φ 为等变（简单）点过程；如果 $\Phi_{(X,o,\mu)}(\cdot) \in \mathbb{Z}$ 几乎必然成立，则称其为等变（非简单）点过程。

通过将 Φ 的分布对 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 的分布积分，可得到 $\mathcal{M}_*^2$ 上的一个概率测度（类似于 [6] 的 (2.3)）。这确定了

一个来自 $\mathcal{M}_*^2$ 的随机对象。为简化记法，我们将后者记为$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi]$，并对其分布使用相同的符号 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{E}$。很容易推得，$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi]$ 在第5.1小节的意义下是单模的（见引理 6.3）；即，

定义 6.2. 随机元素 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2]$ 在 $\mathcal{M}_*^2$ 上是单模的，当且仅当以下 MTP 对所有可测函数 g 都成立：$\mathcal{M}_{**}^2 \to \mathbb{R}^{\geq 0}$:

$$\mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{Y}} g(\boldsymbol{p}, z) d\boldsymbol{\mu}_1(z)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{Y}} g(z, \boldsymbol{p}) d\boldsymbol{\mu}_1(z)\right].$$

注意，积分是关于 $\boldsymbol{\mu}_1$进行的，但 g 也可以依赖于 $\boldsymbol{\mu}_2$。

还可以扩展上述定义，以定义联合等变的随机测度对（或元组）$(\Phi_{(X,o,\mu)}, \Psi_{(X,o,\mu)})$，本节的结果仍然成立。

6.1.1 一个等价定义

$\boldsymbol{X}$ 上等变随机测度的一个更简单定义是单模组 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2]$，满足 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_1]$ 与 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 具有相同的分布。事实上，这两个定义在以下意义上是等价的。

引理 6.3. 设 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是非平凡的单模随机测度度量空间。如果 Φ 是 $\boldsymbol{X}$ 上的等变随机测度，那么 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi]$ 是单模的。反之，若 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2]$ 是单模的且 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_1] \sim [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$，则存在一个等变随机测度 Φ，使得 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2] \sim [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi]$。

该引理的证明基于下一小节中发展的 Palm 理论，并将在第 7.2 小节给出（本节不会用到该引理）。要证明逆命题，基本上需要考虑 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2]$ 关于 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_1]$ 的正则条件分布。然而，一个困难的步骤是证明存在一个不依赖于根的条件分布版本（定义 6.1 中的性质 (i)）。这将使用 Palm 理论和不变分解 [27] 来证明。

备注 6.4。上述等变测度的另一种定义有助于研究等变随机测度的弱收敛与紧性。参见下述定义和推论。它还使我们能够将 $\boldsymbol{\mu}$ 视为定义在（$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \Phi]$ 的 Palm 版本上）的等变测度，这一点将在第 6.3.1 小节中解释。相比之下，定义 6.1 有助于进行显式构造，也适用于处理两个等变随机测度的耦合；例如，定义两个等变随机测度在给定 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 条件下的独立耦合（例 6.11）。

定义 6.5。若 Φ 和 Ψ 是 $\boldsymbol{X}$ 上的两个等变随机测度，且 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi] \sim [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Psi]$（等价地，对 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 的几乎每个实现，都有 $\Phi_{(\cdot)} \sim \Psi_{(\cdot)}$），则称它们等价。另外，若 Φ_n 弱收敛到 Φ，则称 Φ_n 收敛到 Φ。

推论 6.6。设 $b\colon \mathcal{M}_* \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 是一个下半连续函数（例如，$(X, o, \mu, n) \mapsto \mu(B_n(o))$）。那么，满足 $\forall n\colon \Phi(B_n(\boldsymbol{o})) \leq b([\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}], n)$ 几乎必然成立的 Φ 上的等变随机测度集合是紧的。

备注 6.7。引理 6.3可以推广到 $\boldsymbol{X}$ 上的 Φ 所表示的任意其他类型的附加随机结构的情形，这些结构已在第5.1小节中讨论，只要波兰性成立即可。同样的证明适用于一般情形，但为简便起见，我们仅给出随机测度情形的证明。

6.1.2 例子

等变随机测度的基本例子包括 $\Phi = 0$、$\Phi = \mu$、 $\Phi = b\mu$（见（5.2））， 或者更一般地，任意因子测度；也就是说，当 $\Phi_{(X,o,\mu)}$ 是满足定义 6.1 中假设的 (X, μ) 的确定性函数时。以下是更多例子。

例6.8（平稳随机测度）。当 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}] := [\mathbb{R}^d, 0, \text{Leb}]$,每个平稳点过程或随机测度在 $\mathbb{R}^d$ 上都是 $\boldsymbol{X}$ 意义下的等变随机测度。然而，为了满足定义 6.1 中的条件，应假设它是等距变换不变的（或者只需应用一个固定0的随机等距变换）。通过注4.2中提到的修改，可以说平稳性等价于在 $\mathbb{R}^d$上成为等变随机测度。

例 6.9（强度测度）。如果 Φ 是等变随机测度，那么 Φ 的强度测度（定义为 $\Psi_{(X,o,\mu)}(\cdot) := \mathbb{E}\left[\Phi_{(X,o,\mu)}(\cdot)\right]$）也是等变的。事实上，强度测度是一种因子测度。

例6.10（泊松点过程）。设 Φ 是一个等变随机测度。具有强度测度 Φ 的泊松点过程是一个等变随机测度（其定义为：在 $\Phi_{(X,o,\mu)}$ 的每个实现中，采用具有强度测度 $\Phi_{(X,o,\mu)}$的泊松点过程的经典定义）。此外， Φ 与泊松点过程是联合等变的。注意，如果Φ 具有原子，则泊松点过程包含多重点，并且不是简单点过程。

可以证明，如果 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是遍历的，且 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) = \infty$ 几乎必然成立，那么 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi]$ 也是遍历的（如果 $0 < \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) < \infty$，则此结论不成立）。证明与 [30] 的引理 4 类似，故略去。

例 6.11（独立耦合）。设 Φ 和 Ψ 各自是 $\boldsymbol{X}$ 上的等变随机测度。按照小节 6.1.1 的定义，定义 Φ 和 Ψ 的耦合并非易事，但使用定义 6.1 则很简单：对每个确定的 (X, o, μ)，考虑 $\Phi_{(X,o,\mu)}$ 和 $\Psi_{(X,o,\mu)}$ 的一个独立耦合。于是，(Φ, Ψ) 成为联合等变的，称为 Φ 和 Ψ 的独立耦合（条件是 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$）。

6.2 Palm 分布与强度

设 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是一个非平凡的单模随机测度度量空间， Φ 是 $\boldsymbol{X}$ 上的等变随机测度（按定义 6.1 或小节 6.1.1 的含义）。受随机几何中类似概念的启发（小节 4.1），我们将定义 Palm 分布和强度。由于底空间并非固定，方法 (4.1) 在此行不通。我们将利用 Campbell测度和镶嵌来扩展另外两种方法。

Campbell测度 C_Φ 是定义在 $\mathcal{M}^2_{**}$ 上的测度，由

$$C_\Phi(A) := \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} 1_A(\boldsymbol{o}, y) d\Phi(y)\right],$$

其中，与之前一样，我们使用缩写 $1_A(\boldsymbol{o}, y)$ 表示 $1_A(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, y, \boldsymbol{\mu}, \Phi)$。不难看出， C_Φ 是一个 σ- 有限测度。Palm 分布将通过对 Campbell 测度进行解体得到，具体如下。

定理 6.12. 存在唯一的 σ-有限测度 Q_Φ on $\mathcal{M}^2_*$ ，使得对于所有可测函数 g : $\mathcal{M}^2_{**} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$,

$$\mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} g(\boldsymbol{o}, y) d\Phi(y)\right] = \int g dC_\Phi = \int_{\mathcal{M}^2_*} \left(\int_X g(y, o) d\mu(y)\right) dQ_\Phi([X, o, \mu, \varphi]). \tag{6.1}$$

请注意，左边恰好就是 C_Φ的定义。

定义6.13（强度和Palm分布）。强度 λ_Φ 的 Φ（相对于 $\boldsymbol{\mu}$）是 Q_Φ 的总质量。如果 $0 < \lambda_\Phi < \infty$，则可以将 Q_Φ 归一化以得到一个概率测度 $\mathbb{P}_\Phi := \frac{1}{\lambda_\Phi} Q_\Phi$ 在 $\mathcal{M}^2_*$ 上，该测度称为 Φ 的 Palm 分布。

为简化记法，在处理$\mathbb{P}_\Phi$时，我们仍使用相同的符号 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi]$ ；例如，我们使用 $\mathbb{P}_\Phi[[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi] \in A]$ 和 $\mathbb{E}_\Phi[g(\boldsymbol{o})]$ 这样的公式，同时牢记概率测度已经发生变化。

按照上述记法，我们可以将 (6.1) 重写如下:

$$\mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} g(\boldsymbol{o}, y) d\Phi(y)\right] = \lambda_\Phi \mathbb{E}_\Phi\left[\int_{\boldsymbol{X}} g(y, \boldsymbol{o}) d\boldsymbol{\mu}(y)\right]. \tag{6.2}$$

例6.8表明，上述定义推广了 $\mathbb{R}^d$上平稳随机测度的 Palm 分布。此外，(6.2) 是精细 Campbell 定理的推广（见 [33] 或 [38]）。

Palm 分布的直观含义是，在 $\mathbb{P}_\Phi$下，根是 Φ中的一个典型点。方程 (6.2) 意味着，如果将 $\boldsymbol{\mu}$ （分别将 Φ）解释为发送者集合（分别为接收者集合）上的测度，那么典型发送者发送的期望质量等于典型接收者收到的期望质量乘以 λ_Φ 。

我们将通过直接构造 Palm 分布来证明定理 6.12。构造（4.1）行不通，因为底空间 $\boldsymbol{X}$ 并非确定的，无法固定一个子集 B。我们用一个传输函数取而代之

h，使得 $h^-(\cdot) = 1$，具体如下。这推广了 [37] 中的 Mecke 构造（2.8）和命题 2.3，也推广了平稳点过程的等变镶嵌中典型胞腔的构造。

定理 6.14（Palm 的构造）。设 $h: \mathcal{M}_{**} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ 是一个传输函数，使得 $\forall y \in \boldsymbol{X}: h^-(y) = 1$ 几乎必然成立。那么，对于每个等变随机测度 Φ，Φ 的强度和测度 Q_Φ 可按如下方式定义，并满足 (6.1)：

$$\lambda_\Phi = \mathbb{E}\left[h_\Phi^+(\boldsymbol{o})\right] := \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} h(\boldsymbol{o}, z) d\Phi(z)\right], \tag{6.3}$$

$$Q_\Phi(A) = \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} 1_A(\boldsymbol{X}, z, \boldsymbol{\mu}, \Phi) h(\boldsymbol{o}, z) d\Phi(z)\right]. \tag{6.4}$$

因此，若 $0 < \lambda_\Phi < \infty$，Palm 分布可通过对 $h_\Phi^+(\boldsymbol{o})$进行偏置得到，然后重新定根到一个按与 $h(\boldsymbol{o}, \cdot)\Phi$成比例的概率律选取的点；即，

$$\mathbb{P}_\Phi(A) = \frac{1}{\lambda_\Phi}\mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} 1_A(\boldsymbol{X}, z, \boldsymbol{\mu}, \Phi) h(\boldsymbol{o}, z) d\Phi(z)\right]. \tag{6.5}$$

注意，根据引理 3.10，这样的传输函数 h 确实存在。

证明。只需证明 Q_Φ 满足 (6.1)。设 g 是定义在 $\mathcal{M}_{**}^2$上的传输函数。(6.1) 右侧等于：

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{M}_*^2} g^-(o) dQ_\Phi([X, o, \mu, \varphi]) &= \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} g^-(z) h(\boldsymbol{o}, z) d\Phi(z)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} \int_{\boldsymbol{X}} g(y, z) h(\boldsymbol{o}, z) d\Phi(z) d\boldsymbol{\mu}(y)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} \int_{\boldsymbol{X}} g(\boldsymbol{o}, z) h(y, z) d\Phi(z) d\boldsymbol{\mu}(y)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} g(\boldsymbol{o}, z) d\Phi(z)\right],
\end{aligned}$$

其中，第一个等号根据 Q_Φ的定义成立，第三个等号根据质量传输原理成立，最后一个等号是因为 $h^-(z) = 1$。由此证明了 (6.1)。 □

定理 6.12 的证明。存在性已在定理 6.14 中证明。为证明唯一性，设 Q_Φ 是满足 (6.1) 的测度。设 h 是一个传输函数，使得 $h^-(\cdot) = 1$ 几乎处处成立。对于任意事件 $A \subseteq \mathcal{M}_*^2$，令 $g(o, z) := h(o, z) 1_A(z)$。将 g 代入 (6.1)，得到 $Q_\Phi(A) = \mathbb{E}\left[\int 1_A(y) h(\boldsymbol{o}, y) d\Phi(y)\right]$；即 Q_Φ 是定理 6.14 中给出的测度。 □

作为 Palm 演算的第一个应用，我们证明引理 3.4 的以下推广。

命题 6.15。设 Φ 是 $\boldsymbol{X}$ 上的等变随机测度。如果 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) = \infty$ 几乎必然成立，则 $\Phi(\boldsymbol{X}) \in \{0, \infty\}$ 几乎必然成立。

证明。令 A 为事件，即 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) = \infty$ 且 $0 < \Phi(\boldsymbol{X}) < \infty$，并假设 $\mathbb{P}[A] > 0$。由于 A 是一个不变事件，(6.4) 蕴含 $Q_\Phi(A) > 0$。在 A 上，令 $g(u,v) := \Phi(\boldsymbol{X})^{-1}$。于是，在 A 上，$g_\Phi^+(\cdot) = 1$ 且 $g^-(\cdot) = \infty$。这与 (6.1) 矛盾。 □

6.3 Palm 的性质

6.3.1 Palm 版本的幺模性

等变随机测度的 Palm 分布通常不是单模的。然而，与平稳随机测度的情形（第 4.1 小节）类似，它满足以下质量传输原理。

定义 6.16. 如果随机元素 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2]$ 在 $\mathcal{M}_*^2$ 上相对于 $\boldsymbol{\mu}_2$ 满足以下质量传输原理（MTP），则称其为单模的；该原理对所有可测函数 $g : \mathcal{M}_{**}^2 \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ 均成立：

$$\mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{Y}} g(\boldsymbol{p}, z) d\boldsymbol{\mu}_2(z)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{Y}} g(z, \boldsymbol{p}) d\boldsymbol{\mu}_2(z)\right].$$

这等价于 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_1]$ 的单模性，只需将两个测度互换即可得到。

定理 6.17. 设 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是一个单模随机测度度量空间，Φ 是 $\boldsymbol{X}$ 上具有正有限强度的等变随机测度。那么，在 Palm 分布 $\mathbb{P}_\Phi$ 下，$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi]$ 相对于 Φ 是单模的。换言之，$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \Phi, \boldsymbol{\mu}]$ 在 Pam分布 下是单模的。

证明。设 g 为传输函数，设 h 如定理 6.14 所述。由 (6.5),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\Phi\left[g_\Phi^+(\boldsymbol{o})\right] &= \frac{1}{\lambda_\Phi}\mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} g_\Phi^+(y) h(\boldsymbol{o}, y) d\Phi(y)\right] \\
&= \frac{1}{\lambda_\Phi}\mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}}\int_{\boldsymbol{X}} g(y,z) h(\boldsymbol{o}, y) d\Phi(y) d\Phi(z)\right] \\
&= \frac{1}{\lambda_\Phi}\mathbb{E}_\Phi\left[\int_{\boldsymbol{X}}\int_{\boldsymbol{X}} g(y, \boldsymbol{o}) h(z, y) d\Phi(y) d\boldsymbol{\mu}(z)\right] \\
&= \frac{1}{\lambda_\Phi}\mathbb{E}_\Phi\left[\int_{\boldsymbol{X}} g(y, \boldsymbol{o}) d\Phi(y)\right],
\end{aligned}$$

其中，在第三个等式中，我们通过精化的Campbell公式（6.2）交换了 $\boldsymbol{o}$ 和 z，最后一个等式由 $h^{-1}(y) = 1$成立。这证明了该结论。 □

6.3.2 交换公式

Neveu交换公式（见 [38]的定理 3.4.5）是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上两个联合平稳随机测度之间的质量传输原理的一种形式。精细 Campbell公式 (6.2) 可以视为 $\boldsymbol{\mu}$ 与 Φ 之间的交换公式。更多。

通常，假设 (Φ, Ψ) 是 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 上一对联合等变的随机测度。假设强度 λ_Φ 和 λ_Ψ 均为正且有限，并考虑 Palm 分布 $\mathbb{P}_\Phi$ 和 $\mathbb{P}_\Psi$。

命题 6.18（交换公式）。对于上述定义在 $\boldsymbol{X}$ 上的联合等变随机测度 Φ 和 Ψ，以及任意传输函数 $g\colon\ \mathcal{M}^3_{**} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$,

$$\lambda_\Phi \mathbb{E}_\Phi \left[\int_{\boldsymbol{X}} g(\boldsymbol{o}, y) d\Psi(y) \right] = \lambda_\Psi \mathbb{E}_\Psi \left[\int_{\boldsymbol{X}} g(y, \boldsymbol{o}) d\Phi(y) \right], \tag{6.6}$$

其中，$g(u, v)$ 按照惯例是 $g(\boldsymbol{X}, u, v, \boldsymbol{\mu}, \Phi, \Psi)$ 的简写。

证明。设 h 如定理 6.14 中所述。由 (6.5)，左侧等于

$$\mathbb{E}\left[\int \int h(\boldsymbol{o}, z) g(z, y) d\Psi(y) d\Phi(z) \right] = \mathbb{E}\left[\int f(\boldsymbol{o}, y) d\Psi(y) \right],$$

其中，$f(u, v) := \int_{\boldsymbol{X}} h(u, z) g(z, v) d\Phi(z)$。由 (6.2)，最后一项等于

$$\lambda_\Psi \mathbb{E}_\Psi \left[\int f(y, \boldsymbol{o}) d\boldsymbol{\mu}(y) \right] = \lambda_\Psi \mathbb{E}_\Psi \left[\int \int h(y, z) g(z, \boldsymbol{o}) d\Phi(z) d\boldsymbol{\mu}(y) \right].$$

由于 $h^-(z) = 1$，最后一项等于 (6.6) 的右侧，命题得证。

□

交换公式还可以作如下解释。由定理 6.17，在 Φ 的 Palm 分布下，$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi, \Psi]$ 关于 Φ 是单模的。现在，可以将 Ψ 视为后者上的随机测度，并将 $\boldsymbol{\mu}$ 视为一种装饰。于是，交换公式 (6.6) 就转化为关于 Ψ 相对于 Φ 的精细 Campbell公式。更准确地说，可以推出以下结论。

推论6.19。在 Φ的Palm 分布下，并将 Φ 视为 $\boldsymbol{X}$ 上的基测度，Ψ 的强度将为 $\lambda_\Psi / \lambda_\Phi$，而 Ψ 的 Palm 分布将与 $\mathbb{P}_\Psi$ 完全相同。

6.3.3 Palm反演 =Palm

Palm反演是指从Palm 分布构造平稳分布。类似地，我们希望重构 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi]$ 的分布，从 Palm 分布 $\mathbb{P}_\Phi$ 出发。

根据定理 6.17，$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \Phi, \boldsymbol{\mu}]$ 在 $\mathbb{P}_\Phi$下是单模的。现在，$\boldsymbol{\mu}$ 可以被视为 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \Phi]$的 Palm 版本上的随机测度（按照第 6.1.1 小节的意义）。因此，讨论 $\boldsymbol{\mu}$的 Palm 分布，即 $\mathbb{P}'$，是有意义的。利用精细 Campbell公式（6.2）中 $\boldsymbol{\mu}$ 和 Φ 的对称性，可以直接推导出 $\mathbb{P}'$ 等于 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi]$ 的分布（见推论 6.19）。根据定理 6.14，还可以给出 $\mathbb{P}'$ 的显式构造。

上述讨论表明，本节中 Palm 理论的推广也统一了 Palm 和 Palm-逆变换。特别是，如果 Φ_0 是 Palm

$\mathbb{R}^d$中平稳点过程的版本，是通过考虑勒贝格测度相对于 Φ_0 的 Palm 分布得到的。事实上，对于 Palm反演，我们希望将原点移动到欧几里得空间中的一个典型点。

6.3.4 随机游走的平稳分布

在定理 5.2 中，我们考虑了在 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 上的随机游走，其中马尔可夫核几乎必然保持一种类型为 $b\boldsymbol{\mu}$ 的测度。若马尔可夫核具有一个相对于 $\boldsymbol{\mu}$并非绝对连续的平稳分布，则可将这一结果推广如下。

设 Φ 是单模随机测度度量空间 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$上的一个等变随机测度，其强度为正且有限。设 k 为一个马尔可夫核（它也可能依赖于 Φ ），并设$(\boldsymbol{x}_n)_n$ 是定理 5.2 中核为 k 的随机游走。仿照式（5.1）定义移位算子 $\mathcal{S}$。由于 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi, (\boldsymbol{x}_n)_n]$ 是单模的，因此可以在其上定义 Φ 的 Palm 分布，我们将其记为 Q。

命题6.20。在上述设定下，若对于 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi]$的几乎每个样本 $[X, o, \mu, \varphi]$，φ 是马尔可夫核的平稳（分别为可逆）测度，则 Φ 的 Palm 分布 Q 是移位算子 $\mathcal{S}$的平稳（分别为可逆）测度。

证明。由定理 6.17，所要证明的结论可归结为定理 5.2。 □

6.4 例子

我们已经提到，本节定义的 Palm 分布推广了平稳点过程和随机测度的情形（见例6.8）。以下是 Palm 分布的更多例子。

例6.21（条件化）。设 $\boldsymbol{S}$ 是一个因子子集（定义3.3），且 $\Phi := \boldsymbol{\mu}\big|_{\boldsymbol{S}}$。那么，$\Phi$ 的强度为 $\mathbb{P}[\boldsymbol{o} \in \boldsymbol{S}]$，其 Palm 分布通过对 $\boldsymbol{o} \in \boldsymbol{S}$ 进行条件化得到。

例6.22（偏置）。设 $b : \mathcal{M}_* \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ 是一个初始偏置，且 $\Phi := b\boldsymbol{\mu}$ 在（5.2）中定义。那么， Φ 的强度为 $\mathbb{E}[b(\boldsymbol{o})]$，而 Φ 的 Palm 分布就是用 $b(\boldsymbol{o})$ 对概率测度进行偏置（若 $0 < \mathbb{E}[b(\boldsymbol{o})] < \infty$）。特别地，定理（6.17）意味着，用 b 进行偏置后， $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, b\boldsymbol{\mu}]$ 将是单模的，这一点已在例2.6中证明。此事实可用于将某些结果归结为没有初始偏置的情形（例如，定理 5.2）。

例6.23（扩展单模图）。在文献中的许多例子里，人们通过向给定的单模图添加新的顶点和边来构造单模图，然后进行偏置和根变换（文献中的各种例子见 [30] ）。这里，我们将说明所有这些例子都是本文所发展的 Palm 分布的实例。例如，将单模平面图的对偶图单模化（ [3]中的例9.6），可归结为计数测度的 Palm 分布

在面集上（详情见下文）。
我们采用 [30] 第 5 节中提到的这类构造的最一般形式。简言之，假设 $[\boldsymbol{G},\boldsymbol{o}]$ 是一个非单模的随机根图，但质量传输原理在 $\boldsymbol{G}$ 的一个子集 $\boldsymbol{S}$ 上成立（见 [30] 的定义 10）。换句话说，$\boldsymbol{G}$ 是通过向 $[\boldsymbol{S},\boldsymbol{o}]$ 添加顶点和边得到的。令 $\boldsymbol{\mu}$ 和 Φ 分别为 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 的计数测度。在本节的设定中，$[\boldsymbol{G},\boldsymbol{o},\boldsymbol{\mu}]$ 是单模的（但 $[\boldsymbol{G},\boldsymbol{o}]$ 不是），而 Φ 可以被视为 $[\boldsymbol{G},\boldsymbol{o},\boldsymbol{\mu}]$ 上的等变随机测度。因此，可以使用定义 6.13 定义 Φ 的 Palm 分布（如果强度有限）。然后，定理 6.17 蕴含，在 Palm 分布下，$[\boldsymbol{G},\boldsymbol{o}]$ 是一个单模图，正如所期望的那样。在这一设定中，[30] 的定理 5 中的一般构造（涵盖文献中的类似例子）归结为定理 6.14 中给出的 Palm 分布的显式构造。

作为一个连续统的例子，可以看出，单模随机测度度量空间 $[\boldsymbol{X},\boldsymbol{o},\boldsymbol{\mu}]$ 与任意紧致测度度量空间的乘积可以构造成单模的（例2.5），这是Palm 分布的一个实例。更多解释请参见第7.3小节中定理 5.21 的证明。

最后一个例子如下，即泊松点过程。

定理 6.24（泊松过程的 Palm）。设 $c>0$ 和 Φ 是定义在 $\boldsymbol{X}$ 上的泊松点过程，其强度测度为 $c\boldsymbol{\mu}$（例 6.10）。那么，其 Palm 版本的分布与 $[\boldsymbol{X},\boldsymbol{o},\boldsymbol{\mu},\Phi+\delta_{\boldsymbol{o}}]$相同。

请注意，当 $\boldsymbol{\mu}$ 具有原子时，$\Phi+\delta_{\boldsymbol{o}}$ 与 $\Phi\cup\{\boldsymbol{o}\}$ 不同。该结果推广了普通泊松点过程的Mecke定理（参见 [38]的定理 3.3.5）。我们猜想这一性质刻画了泊松点过程（这推广了 Slivnyak 定理），但这里不对此进行讨论。

证明。由 (6.3) 可直接证明 $\lambda_{\Phi}=c$。我们断言，对于每个可测函数 $f:\mathcal{M}^2_{**}\to\mathbb{R}^{\geq 0}$，都有

$$\mathbb{E}\left[\sum_{y\in\Phi} f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{o},y,\boldsymbol{\mu},\Phi)\right]=c\mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{o},y,\boldsymbol{\mu},\Phi+\delta_y)d\boldsymbol{\mu}(y)\right], \tag{6.7}$$

该定理推广了Mecke定理（见 [38] 的定理 3.2.5）。假设这一点，令 $B\subseteq\mathcal{M}^2_*$ 为任意事件。由 (6.5)、(6.7)、质量传输原理以及事实 $h^{-}(\boldsymbol{o})=1$分别，

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\Phi}[B] &= \frac{1}{c}\mathbb{E}\left[\sum_{x\in\Phi} 1_B(\boldsymbol{X},z,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Phi})h(\boldsymbol{o},z)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} 1_B(\boldsymbol{X},z,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Phi}+\delta_z)h(\boldsymbol{o},z)d\boldsymbol{\mu}(z)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}} 1_B(\boldsymbol{X},\boldsymbol{o},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Phi}+\delta_{\boldsymbol{o}})h(z,\boldsymbol{o})d\boldsymbol{\mu}(z)\right]\\
&= \mathbb{P}\left[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{o},\boldsymbol{\mu},\Phi+\delta_{\boldsymbol{o}}]\in B\right]
\end{aligned}$$

并且定理得证。为证明 (6.7)，为简单起见，我们假设 (supp($\boldsymbol{\mu}$) $\boldsymbol{\mu}$) 几乎处处没有自同构（否则，可以添加额外的随机性，例如独立泊松雨，以打破这些自同构）。在这种情况下，只需在函数 f 是$f = g(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, y, \boldsymbol{\mu})1_{\{\Phi(S)=k\}}$ 形式时证明这一断言，其中 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $S := S(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}) := \{y \in \boldsymbol{X} : (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, y, \boldsymbol{\mu}) \in A\}$ 且 $A \subseteq \mathcal{M}_{**}$ 是可测的。(6.7) 的左侧为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(g\Phi)(\boldsymbol{X})1_{\{\Phi(S)=k\}}\right] &= \mathbb{E}\left[(g\Phi)(\boldsymbol{X}\setminus S)1_{\{\Phi(S)=k\}}\right] + \mathbb{E}\left[(g\Phi)(S)1_{\{\Phi(S)=k\}}\right] \\ &=: \mathbb{E}[a_1] + \mathbb{E}[a_2].\end{aligned}$$

在给定 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$的条件下，随机变量 $\Phi(S)$ 和$(g\Phi)(\boldsymbol{X} \setminus S)$相互独立。此外，根据 Mecke公式， $\mathbb{E}[(g\Phi)(\boldsymbol{X} \setminus S) \,|[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]] = c(g\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} \setminus S)$。因此，

$$\mathbb{E}[a_1] = c\mathbb{E}\left[(g\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}\setminus S)1_{\{\Phi(S)=k\}}\right] = c\mathbb{E}\left[\int_{\boldsymbol{X}\setminus S} f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, y, \boldsymbol{\mu}, \Phi + \delta_y)d\boldsymbol{\mu}(y)\right].$$

对于第二项，在以 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 和 $\Phi(S) = k$ 为条件时， $\Phi\big|_S$ 的分布是由 $\boldsymbol{\mu}\big|_S$ 成比例确定的 k 个随机点的集合。因此，$\mathbb{E}[a_2 \,|[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}], \Phi(S) = k] = k(g\boldsymbol{\mu})(S)/\boldsymbol{\mu}(S)1_{\{\Phi(S)=k\}}$。根据参数为 $c\boldsymbol{\mu}(S)$ 的泊松分布公式，可以得到 $\mathbb{E}[a_2 \,|[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]] = c(g\boldsymbol{\mu})(S)1_{\{\Phi(S)=k-1\}}$。因此，

$$\mathbb{E}[a_2] = c\mathbb{E}\left[(g\boldsymbol{\mu})(S)1_{\{\Phi(S)=k-1\}}\right] = c\mathbb{E}\left[\int_S f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, y, \boldsymbol{\mu}, \Phi + \delta_y)d\boldsymbol{\mu}(y)\right].$$

这就证明了 (6.7)，定理也随之得证。 □

7 Palm 理论的一些应用

在第 7.2 和第 7.3 小节中，我们利用第 6 节发展的 Palm 理论，证明等变析取和 amenability 定理（引理 6.3 和定理 5.21）。证明方法是利用泊松点过程构造一个可数博雷尔等价关系，然后利用 Palm 理论构造一个不变测度。接着，利用关于博雷尔等价关系的结果来证明这些结论。在此之前，我们将在第 7.1 小节研究平衡传输核的存在性，这将在第 7.3 小节中用到。

7.1 平衡传输核

设 Φ 和 Ψ 是单模随机测度度量空间 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 上的联合等变随机测度，且具有正的有限强度。从 Φ 到 Ψ 的平衡传输核是定义在 $\boldsymbol{X}$ 上的马尔可夫核（其含义见第3.3小节，但也可能依赖于 Φ 和 Ψ ），它将 Φ 传输到 Ψ；即，$\int_{\boldsymbol{X}} k(x, \cdot)d\Phi(x) = \Psi(\cdot)$ $\forall x \in \boldsymbol{X}$ 几乎处处成立。这将平稳随机测度 [33] 的不变传输概念以及公平镶嵌推广为

点过程 [25]。在欧几里得空间上，利用Thorisson [39], 的移位耦合结果， [33] 中给出了不变传输存在的充要条件。在 [30]中给出了单模图的类似结果。这里，我们将这些结果扩展到单模 rmm 空间。

若事件 $A \subseteq \mathcal{M}_*^3$ 不依赖于根，则称其为不变事件。用 I 表示不变 σ-代数。Φ 的样本强度定义为 $\mathbb{E}\left[h_\Phi^+(\boldsymbol{o}) \mid I\right]$，其中 h 是式 (6.3) 中的函数。

定理 7.1。若 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi, \Psi]$ 是遍历的，则存在平衡传输核等价于 Φ 和 Ψ 具有相同的强度。在非遍历情形下，条件是 Φ 和 Ψ 的样本强度几乎处处相等。

后者等价于这样的条件：对任意不变事件进行条件化后， Φ 和 Ψ 具有相同的强度。它还等价于 $\mathbb{P}_\Phi$ 和 $\mathbb{P}_\Psi$ 在 I 上一致。

该定理是对 [33] 的定理 5.1 的推广。为证明它，可以尝试推广 [39] 的移位耦合结果（如 [30] 对单模图所做的那样），但我们通过推广 [21] 的构造性证明给出另一种证明。后者是对点过程的 [23] 的推广，而 [23] 是盖尔-沙普利稳定婚姻算法的无限版本。

首先，请注意，存在平衡传输核等价于存在平衡传输密度；也就是说，存在一个可测函数K：$\mathcal{M}_{**}^3 \to \mathbb{R}^{\geq}$ 使得 $\forall x, y \in X$：$\int_{\boldsymbol{X}} K(x,\cdot) d\Psi = \int_{\boldsymbol{X}} K(\cdot, y) d\Phi = 1$ 在一个概率为 1 的不变事件上。为证明这一点，若对所有 x， $k(x,\cdot)$ 都相对于 Ψ 绝对连续，那么只需考虑等变地取拉东-尼科迪姆导数（如引理 3.9 中所示），并在一个零测事件上对其进行修改。在奇异情形下，只需将 k 与引理 3.10 给出的另一个保持 Ψ 的核复合，以使其平滑。

定理 7.1的证明略述。为简单起见，我们假设具有遍历性。假- 设存在平衡传输密度 K 。在 $\mathbb{P}_\Phi$ 下，令 $h := K$ 为 (6.3)中的对象，可以得到 Ψ 的强度等于 1。因此，第6 节推论6.19 中的交换公式意味着 $\lambda_\Phi = \lambda_\Psi$。对于逆向结论，将 [21] 的算法4.4扩展以构造密度 K （稳定约束密度）是直接的。在假设 $\lambda_\Phi = \lambda_\Psi$ 的情况下，可以使用第6节中发展出的 Palm 理论，并仿照 [21] 的定理4.8 的证明来证明 K 是平衡的。证明并不简短，但该扩展是直接的，为简洁起见略去。 □

定理 7.1 使我们能够证明以下结果，它推广了 [39] 的一个结果（见 [39] 第 1 节末尾）。

定理 7.2. 设 Φ 是单模 rmm 空间 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 上的等变随机测度。那么，以下条件等价：

(i) Φ 的 Palm 分布可通过对 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi]$进行随机重新选根得到。

(ii) $c\boldsymbol{\mu}$ 和 Φ 之间存在某个 c的平衡传输核。(iii) Φ 的样本强度是常数。

特别是，如果 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi]$ 是遍历的，则这些条件成立。

证明。(iii)⇔(ii) 的等价性由定理 7.1 推出。

(i)⇒(iii)。由 (i) 可以直接推出，对于每个不变事件 A，$\mathbb{P}_{\Phi}(A) = \mathbb{P}[A]$。这意味着 (iii)。

(ii)⇒(i)。令 K 为这样的平衡传输密度。在此情况下，对于 $h := \frac{1}{c}K$，定理 7.1表明，Palm 版本是根据核 $h(\boldsymbol{o}, \cdot)\Phi$ 重新定根得到的（并且由于 $h_{\Phi}^{+} = 1$，不存在偏置）。 □

例 7.3. 假设 Ψ 是强度测度为Φ的泊松点过程。那么，如果 $\Phi(\boldsymbol{X}) = \infty$ 几乎必然成立，例 6.10 中提到的遍历性意味着定理 7.1 的条件得到满足（如果 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi]$ 不是遍历的，则使用其遍历分解）。因此，存在一种平衡传输密度。此外，在 $\Phi = \boldsymbol{\mu}$ 的情况下，定理 7.2 和 6.24 意味着存在一种随机重新选根，它与在 Ψ的原点处添加一个点等价（在分布意义上）。这是额外人头方案 [25]的一种扩展。

7.2 等变析取的证明

本节将通过以下步骤证明引理 6.3。

引理 7.4。若 $\boldsymbol{\mu}$ 几乎必然是计数测度，且 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mu})$ 的每个自同构几乎必然固定 $\boldsymbol{\mu}$ 的每个原子，则引理 6.3 的结论成立。

在这种情况下，我们将利用可数博雷尔等价关系的相关结果，通过群作用的不变分解推出该结论。

证明。令 A 表示这样的事件：$\boldsymbol{\mu}$ 是计数测度，且 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mu})$ 的每个自同构都固定 $\boldsymbol{\mu}$ 的每个原子。考虑 $\mathcal{M}_*$上如下的可数等价关系：在 A 之外，或者若 o 不是 μ 的原子，则 $[X, o, \mu]$ 仅与自身等价。在 A 上，若 o_1 和 o_2 是 μ的原子，则令 $[X, o_1, \mu]$ 与 $[X, o_2, \mu]$等价。于是，这是 $\mathcal{M}_*$ 上的一个博雷尔等价关系，且每个等价类都是可数的。因此，根据 [17], 的定理 1，它由某个可数群 G 在 $\mathcal{M}_*$上的作用生成。注意，在 A上，映射 $y \mapsto [X, y, \mu]$ 将 μ 的原子双射到一个等价类。因此，在 A上，G 作用于 μ的原子集合。若 $g \in G$ 且 y 是 μ 的原子，则令 gy 表示此作用（在 A 之外，或者若 y 不是原子，则有 $gy = y$）。这一性质使我们能够如下将 G 的作用扩展到 $\mathcal{M}_*^2$（自同构方面的假设对于此目的至关重要）：给定 $[Y, p, \mu_1, \mu_2] \in \mathcal{M}_*^2$ 和 $g \in G$，令 $g[Y, p, \mu_1, \mu_2] := [Y, gp, \mu_1, \mu_2]$，其中 gp 通过忽略 μ_2 并采用上述定义来定义。

˜令 Q 和 Q 分别为 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 和 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2]$ 的分布。G 在 $\mathcal{M}_*$ 和 $\mathcal{M}_*^2$ 上的两个作用与投影 $\pi : \mathcal{M}_*^2 \to \mathcal{M}_*$相容，该投影通过遗忘第二个测度来定义。此外，由于

每个 $g \in G$ 都在 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\mu}_1$的原子集合上双射作用，因此分布Q 和 Q 在这些作用下不变（由定理 3.8 得出）。因此，我们可以使用 Kallenberg 不变析取定理（ [27]的定理 3.5）。这给出了一个从 $\mathcal{M}_*$ 到 $\mathcal{M}_*^2$ 的析取核 k，使得对于所有事件 $B \subseteq \mathcal{M}_*^2$,

$$\tilde{Q}(B) = \int_{\mathcal{M}_*} k([X, o, \mu], B) dQ([X, o, \mu]) \tag{7.1}$$

并且对所有 $g \in G$， $k(g[X, o, \mu], gB) = k([X, o, \mu], B)$。这意味着 $k([X, o, \mu], \cdot)$ 集中于 $\{[X, o, \mu, \varphi] : \varphi \in M(X)\}$，其中 $M(X)$ 是 X 上有界有限测度的集合。假设 $[X, o, \mu] \in A$，通过将自同构群作用于 $k([X, o, \mu], \cdot)$ 的一个随机元素（X, μ 的自同构群是紧群，因为原子是不动点），可以得到 $M(X)$ 上一个自同构不变的概率测度，我们称之为 $k'(o, \cdot)$。在 G 作用下的不变性意味着，对 μ 中所有原子 o_1 和 o_2， $k'(o_1, \cdot) = k'(o_2, \cdot)$。因此，对所有 $y \in X$，可令 $k'(y, \cdot) := k'(o, \cdot)$，其中 o 是 μ 中任意一个原子。现在，随机选取服从 $k'(y, \cdot)$ 分布的 $\Phi_{(X,y,\mu)}$，便得到一个满足定义 6.1 所有假设的等变随机测度。此外，~(7.1) 表明 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi]$ 服从分布 Q，结论得证。 □

引理 7.5。若存在一个因子点过程$\boldsymbol{S}$ （仅取决于 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$），且其强度有限，并且$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mu})$ 的每个自同构几乎必然固定 $\boldsymbol{S}$ 的每个元素，且 $\boldsymbol{S}$ 几乎必然非空，则引理 6.3 的结论成立。

~证明。令 Q 和 Q 分别为 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{S}]$ 和 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{S}]$的分布，它们分别作为 $\mathcal{M}_*^2$ 和 $\mathcal{M}_*^3$ 中的随机元素，其中在后者中， $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\mu}_1)$。这两个单模对象中 $\boldsymbol{S}$ 的 Palm分布分别给出概率~测度 Q_0 和 Q_0 。根据定理6.17，在 Q_0 下， $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{S}]$ 相对于 $\boldsymbol{S}$ 上的计数测度是单模的（定义 6.16），$[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{S}]$也同样如此。此外，容易证明~，在 Q_0下， $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{S}]$ 与 Q_0 具有相同的分布。现在，我们可以~使用引理 7.4找到 Q_0 相对于 Q_0 的等变析取（如果将 $\boldsymbol{S}$ 的计数测度视为基测度，并将 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\mu}_1$ 视为装饰，则同样的论证也成立）。这给出一个等变随机测度 Φ （其分布取决于 (X, μ, S)），使得

$$\tilde{Q}_0(B) = \int \mathbb{P}\left[[X, o, \mu, \Phi, S] \in B\right] dQ_0([X, o, \mu, S])$$

~对所有事件 B均成立。通过使用Palm反演来重构 Q 和 Q （小节-~节），可以直接推导出：如果将上述方程中的 Q_0 和 Q_0 分别替换为 Q 和 Q ，该方程仍然成立。这表明 Φ 是所需的等变随机测度，命题得证。

□

现在我们可以证明引理 6.3 了。

引理6.3的证明。首先假设 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) = \infty$ 几乎处处成立。我们首先添加一个带标记泊松点过程，以确保引理 7.5 的假设成立。

令 $\Psi = \Psi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mu})$为 $\boldsymbol{X}$ 上的泊松点过程，其强度测度为 $\boldsymbol{\mu}$，并为 Ψ 中的点赋予取自 $[0,1]$ 且按照均匀分布选取的独立同分布标记。通过对第5.1小节中讨论的GHP度量进行适当扩展，可以将 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Psi]$ 和 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \Psi]$ 视为配备附加结构的单模 rmm空间，其中在后者中，$\Psi = \Psi(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\mu}_1)$。在前者中，概率空间是由元组 $[X, o, \mu, \psi]$组成的集合 $\mathcal{M}'_*$，其中 (X, o, μ)是一个 rmm 空间，而 ψ 是 X上的标记测度；即，是 $X \times [0,1]$上的有界有限测度。

注意，Ψ 的支撑是一个因子点过程（取决于 $\boldsymbol{\mu}$ 和Ψ），并且该子集中的每个点几乎必然在$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mu}, \Psi)$的每个自同构下保持不变（这是由独立同分布的标记导致的）。此外，由于 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) = \infty$ 几乎必然成立，该支撑几乎必然非空。因此，我们可以使用与引理 7.5 类似的论证，得到一个等变随机测度 Φ，使得 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi, \Psi]$ 与 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \Psi]$具有相同的分布。

注意，$\Phi = \Phi(X, \mu, \psi)$是为确定性空间$(X, \mu, \psi)$定义的，而不是为$(X, \mu)$这种形式的空间定义的。为解决这个问题，可以如下对 Ψ 取期望。设(X, o, μ)是 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$的一个实现。给定$(X, \mu)$上的带标记泊松点过程的一个实现 ψ，令 $\alpha = \alpha_{(X,\mu,\psi)}$ 为 $\Phi = \Phi(X, \mu, \psi)$的分布。这里，$\alpha$ 是 $M(X)$上的一个概率测度。令 $\beta_{(X,\mu)} \coloneqq \mathbb{E}\left[\alpha_{(X,\mu,\Psi)}\right]$，其中期望是针对$\Psi$的随机性取的。显然，$\beta$ 在(X, μ)的自同构下是不变的。现在，在 X 上选取一个分布为 $\beta_{(X,\mu)}$的随机测度 Φ'，便得到一个等变随机测度，使得 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi']$ 与 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2]$ 具有相同的分布，正如所需。因此，断言得证。

最后，假设 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) < \infty$ 以正概率成立。给定事件 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) = \infty$，上述论证给出了等变析取。给定事件 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) < \infty$，情况更为简单。在此条件下，$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mu}]$ 和 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2]$ 作为随机非带根测度度量空间是有意义的，相应的概率空间是波兰空间（在适当的拓扑下，此处略去细节）。因此，只需考虑相对于 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\mu}_1]$的 $[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2]$ 的正则条件分布，然后对 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\mu}_1)$ 应用一个随机自同构，从而得到一个等变随机测度。这自动地与根无关，并具有所需的性质。

□

7.3 可和性定理的证明

在本小节中，我们证明了第5.6 小节中定义的不同可 amen 性概念是等价的（定理 5.21）。

设 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}]$ 是一个单模随机测度度量空间。首先，我们假设 $\boldsymbol{\mu}$ 几乎必然没有原子，并且 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X}) = \infty$ 几乎必然成立。如第7.2小节所述，设 Φ 是 $\boldsymbol{X}$ 上的泊松点过程，其强度测度为 $\boldsymbol{\mu}$ （例6.10），并配备取自 $[0,1]$ 、服从均匀分布的独立同分布标记。于是，Φ 是无限的，不存在多重点，并且 Φ 几乎必然没有非平凡自同构。设 $\mathbb{P}_\Phi$ 为 Φ 的 Palm 分布。根据定理6.17，在 $\mathbb{P}_\Phi$ 下，$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\mu}, \Phi]$ 关于 Φ 是单模的。

上述定义　　给出一个可数等价关系　　如下。该우우우우우

概率测度 $\mathbb{P}_\Phi$ 集中在由元组$[X,o,\mu,\varphi]$ 构成的子集 $\mathcal{M}_*''\subseteq\mathcal{M}_*'$ 上，其中 μ 没有原子，$\mu(X)=\infty$，φ 是 X的一个无限离散子集上的计数测度，$o\in\varphi$，并且 φ 中各点的标记互不相同。令 R 为 $\mathcal{M}_*'$ 上的等价关系，定义如下：在 $\mathcal{M}_*''$ 之外，每个元素只与自身等价。如果 $[X,o,\mu,\varphi]\in\mathcal{M}_*''$，那么它与所有 $y\in\varphi$的 $[X,y,\mu,\varphi]$ 等价。于是，R 是波兰空间 $\mathcal{M}_*'$上的可数等价关系。此外，$\mathbb{P}_\Phi$ 的幺模性等价于 $\mathbb{P}_\Phi$ 在 R 下的不变性（见第4.6小节，并注意没有自同构对于这一等价关系至关重要）。

引理 7.6. 若 $\boldsymbol{\mu}$ 的总质量为无穷且几乎必然不含原子，则局部均值存在、近似均值存在以及超有限这几个条件，分别等价于上文定义的可数测度等价关系 $(\mathcal{M}_*', R, \mathbb{P}_\Phi)$ 满足相应的条件。

证明。证明中的一个关键要素是 Voronoi 镶嵌：对于每个$[X,o,\mu,\varphi]\in\mathcal{M}_*''$，令 $\tau(o)$ 为 φ中距离 o最近的点。若最近点不唯一，则选择标记最小的那个。对于 $y\in\varphi$，$\tau^{-1}(y)$ 是 y的 Voronoi 胞。另一个要素是第 7.1 小节（例 7.3）中构造的平衡传输密度。它给出了一个等变函数$k(x,y)$，适用于 $x\in\boldsymbol{X}$和 $y\in\Phi$，使得 $\sum_{z\in\Phi}k(x,z)=1$且 $\int k(z,y)d\boldsymbol{\mu}(z)=1$几乎必然成立（对所有 x 和 y）。从现在起，我们始终假设 $[X,o,\mu,\varphi]\in\mathcal{M}_*''$，并且上述关于 k 的平衡性质成立。接下来的段落中，我们将证明引理中所述的每个等价关系。

局部均值。给定 $f\in L^\infty(X,\mu)$，通过 $f'(y)$ 定义 $f'\in L^\infty(\varphi)$：$=\int f(z)k(z,y)d\mu(z)$（k 的平衡性质在这里很重要）。反过来，给定 $g\in L^\infty(\varphi)$，通过 $g'(x)$ 定义 $g'\in L^\infty(X,\mu)$：$=\sum_{z\in\varphi}g(z)k(x,z)$。利用这一点，$L^\infty(\varphi)$ 上的每个均值都给出 $L^\infty(X,\mu)$ 上的一个均值，反之亦然。这就说明了该断言。

近似均值。假设 $(\lambda_n)_n$ 是一个近似均值。对于 $x,y\in\varphi$，定义 $\Lambda_n(x,y):=\int\lambda_n(x,z)k(z,y)d\mu(z)$。这为 φ给出了近似均值。等价地，$(\Lambda_n)_n$ 满足 [26] 的条件 (AI)（重要的是 φ没有非平凡自同构）。反过来，给定 $(R,\mathbb{P}_\Phi)$的近似均值 Λ_n，对于 $x,y\in X$，定义 $\lambda_n(x,y):=\sum_z\sum_t k(x,z)\Lambda_n(z,t)k(t,y)$。留给读者证明 λ_n 是一个近似均值。

超有限性。在引理 5.23 中，证明了 (HF2) $\Rightarrow$ (HF3) $\Rightarrow$(HF1)。假设 $(\Pi_n)_n$ 满足 (HF1)，并且在给定 $[\boldsymbol{X},\boldsymbol{o},\boldsymbol{\mu}]$ 的条件下，$(\Pi_n)_n$ 定义中的额外随机性与 Φ 独立（使用例 6.11）。因此，由于 Π_n 中的每个元素都具有有限质量，它在泊松点过程中的点数也几乎必然有限。所以，$(\Pi_n)_n$ 会在 Φ 上诱导出等变嵌套有限划分。如果没有额外随机性（也就是说，$(\Pi_n)_n$ 是一个因子），它还会诱导出 R 的一列嵌套的博雷尔等价子关系，而 R 是超有限的。否则，可以根据这些划分的额外随机性扩充 $\mathcal{M}_*'$，但这不会影响博雷尔等价关系的超有限性（利用 [26]，的定理 1 找到一个局部量，再对额外随机性取期望，以找到 $(R,\mathbb{P}_\Phi)$ 的局部均值）。

最后，假设 $(R, \mathbb{P}_\Phi)$ 是超有限的。这给出 φ 的等变嵌套有限划分 Π_n，使得 $\forall y \in \varphi, \forall r < \infty, \exists n\colon B_r(y) \cap \varphi \subseteq \Pi_n(y)$。如下定义 X 的划分 Π'_n：当且仅当 $\tau(x) \in \Pi_n(\tau(y))$ 时，$x \in \Pi'_n(y)$。序列 $(\Pi'_n)_n$ 满足 (HF2)，因为对每个 r，$\tau(B_r(o))$ 几乎必然是有限集（因为 $\tau(B_r(o)) \subseteq B_{2r+s}(o)$，其中 $s := d(o, \tau(o))$，这一点很容易验证）。证明至此完成。 □

定理 5.21 的证明。FøLner 条件已在引理 5.23 中讨论。这里我们证明其余条件的等价性。在事件 $\mu(X) < \infty$ 上，所有条件均成立。因此，只需假设 $\mu(X) = \infty$ 几乎处处成立。若 μ 几乎处处没有原子，则引理 7.6 表明，$[X, o, \mu]$ 的不同可 amen 性概念与上文定义的 $(\mathcal{M}'_*, R, \mathbb{P}_\Phi)$ 的相应概念等价。因此，这些条件的等价性可由 [26] 的定理 1 推出。

最后，若允许 μ 含有原子，我们按如下方式将 X 与 $[0,1]$ 相乘以消除这些原子。令 X' 为赋予和度量 $d((x_1,t_1),(x_2,t_2)) := d(x_1,x_2) + |t_1 - t_2|$ 的 $= X \times [0,1]$。令 $\mu' := \mu \times \text{Leb}$。于是，均匀地选取 $\{o\} \times [0,1]$ 中的 o' 后，$[X', o', \mu', X \times \{0\}]$ 是单模的，其中 $X \times \{0\}$ 被保留为 X' 的指定闭子集（例 2.5；事实上，根据定理 6.14，这是 μ' 的 Palm 版本）。注意，可以从 $(X', X \times \{0\})$ 恢复乘积结构。不同的 $[X, o, \mu]$ 可 amen 性概念与 $[X', o', \mu', X \times \{0\}]$ 的相应概念等价，这一点留给读者证明。由于 μ' 没有原子，证明的第一部分即推出所述结论。 □

致谢

本研究得到欧洲联盟 Horizon 2020 研究与创新计划下的 ERC NEMO 资助（资助协议编号：788851），资助对象为 INRIA。本研究的大部分工作是在作者隶属 IPM 期间完成的。本研究还部分获得了 IPM 资助（编号：98490118）。

参考文献

[1] D. Aldous. 连续随机树. I. 概率年刊，19(1):1–28，1991。

[2] D.Aldous。《连续随机树》II：概述。载于《随机分析》（达勒姆，1990），《伦敦数学会讲义系列》第167卷，第23–70页。剑桥大学出版社，剑桥，1991年。[3] D. Aldous和R. Lyons。单模随机网络上的过程。《电子概率学杂志》，12：第54号，1454–1508，2007年。[4] D.Aldous和J.M. Steele。客观方法：概率组合优化与局部弱收敛。载于《离散概率

结构，《数学科学百科全书》第110卷，第1–72页。施普林格出版社，柏林，2004年。[5] F. Baccelli、M.-O. Haji-Mirsadeghi和 A. Khezeli。单模随机图上的永恒家族树与动力学。载于《随机生成图中的单模性》，《当代数学》第719卷，第85–127页。美国数学学会，[普罗维登斯],罗得岛，[2018] ©2018。[6] F. Baccelli、M.-O.Haji-Mirsadeghi 和 A.Khezeli。单模豪斯多夫维数与闵可夫斯基维数。《电子概率学杂志》，26：论文编号155，64页，2021年。[7] I.Benjamini、R.Lyons、Y.Peres 和O. Schramm。图上的群不变渗流。《几何与泛函分析》，9(1)：29–66，1999年。[8] I.Benjamini 和O. Schramm。有限平面图的分布极限的回返性。《电子概率学杂志》，6：第23号，13页，2001年。[9] C. J.Bishop 和 Y. Peres。《概率与分析中的分形》，《剑桥高等数学研究》第162卷。剑桥大学出版社，剑桥，2017年。[10] ThomasBudzinski。双曲布朗平面。《概率论及相关领域》，171(1-2)：503–541，2018年。[11] G.Cannizzaro 和M. Hairer。布朗网络作为随机 $\mathbb{R}$-树。arXiv预印本 arXiv:2102.04068，2021年。[12] A.Connes、J.Feldman 和 B. Weiss。一个可和等价关系由单个变换生成。《遍历理论与动力系统》，1(4)：431–450（1982），1981年。[13] M. Deijfen、A.E.Holroyd和 J. B.Martin。友善的青蛙、稳定婚姻与不变性的魔力。《美国数学月刊》，124(5)：387–402，2017年。[14] T.Duquesne和 J. F. Le Gall。随机树、L´ évy过程与空间分枝过程。《Ast´erisque》，(281)：vi+147，2002年。[15] T.Duquesne和 J. F.Le Gall。L´évy树的概率与分形方面。《概率论及相关领域》，131(4)：553–603，2005年。[16] R.H. Farrell。不变测度的表示。《伊利诺伊数学杂志》，6：447–467，1962年。[17] J.Feldman和C. C. Moore。遍历等价关系、上同调与冯·诺伊曼代数。I。《美国数学学会汇刊》，234(2)：289–324，1977年。[18] L. R. G. Fontes、M. Isopi、C. M.Newman 和K. Ravishankar。布朗运动网络：刻画与收敛。《概率年刊》，32(4)：2857–2883，2004年。

.[19] H. Freudenthal. 关于拓扑空间和群的端点。Math. Z., 33(1):692–713, 1931.[20] O. H¨aggstr¨om. 树上依赖于自同构不变的渗流中的无限簇。概率年刊, 25(3):1423–1436, 1997.[21] M. O. Haji-Mirsadeghi and A. Khezeli. 平稳随机测度之间的稳定传输。Electron. J. Probab., 21:Paper No. 51, 25, 2016.[22] H. Hatami, L. Lov´asz, and B. Szegedy. 局部—整体收敛图序列的极限。Geom. Funct. Anal., 24(1):269–296, 2014.[23] C. Hoffman, A. E. Holroyd, and Y. Peres. 泊松与勒贝格测度之间的稳定婚配。概率年刊, 34(4):1241–1272, 2006.[24] A. E. Holroyd and Y. Peres. 由点过程构造的树与匹配。Electron. Comm. Probab., 8:17–27, 2003.[25] A. E. Holroyd and Y. Peres. 额外的头与不变分配。概率年刊, 33(1):31–52, 2005.[26] V. A. Kaimanovich. 可 amen 性、超有限性与等周不等式。C. R. Acad. Sci. Paris S ´er. I Math., 325(9):999–1004, 1997.[27] O. Kallenberg. 不变测度与分解, 以及它们在 Palm 核和相关核中的应用。Probab. Theory Related Fields, 139(1-2):285–310, 2007.[28] A. S. Kechris. 可数博雷尔等价关系理论。[29] A. Khezeli. 推广 Gromov–Hausdorff 度量的统一框架。预印本。[30] A. Khezeli. 随机带根图和网络的移位耦合。即将发表于《Contemporary Mathematics》关于随机生成图中的单模性的特刊，2018。[31] A. Khezeli. 有界紧度量空间的 Gromov–Hausdorff（-Prokhorov）拓扑的度量化。Stochastic Process. Appl., 2019.[32] Ali Khezeli and Samuel Mellick. 关于平衡分配和因子点过程的存在性。arXiv 预印本 arXiv:2303.05137, 2023.[33] G. Last and H. Thorisson. 平稳随机测度的不变传输与质量平稳性。概率年刊, 37(2):790–813, 2009.[34] J. F. Le Gall. 布朗几何。Jpn. J. Math., 14(2):135–174, 2019.[35] L. Lov´asz. 紧图化。Acta Math. Hungar., 161(1):185–196, 2020.[36] R. Lyons and O. Schramm. 渗流簇的不可区分性。概率年刊, 27(4):1809–1836, 1999.

[37] J. Mecke. 局部紧阿贝尔群上的平稳随机测度。Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 9:36–58, 1967.[38] R. Schneider and W. Weil. 随机几何与积分几何。Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, Berlin, 2008.[39] H. Thorisson. 随机元素的变换与随机场的移位。概率年刊, 24(4):2057–2064, 1996.[40] A. Tim´ar. 一般点过程的树因子与格因子。Electron. Comm. Probab., 9:53–59, 2004.[41] R. van der Hofstad. 无限正则超布朗运动与缩放极限。Comm. Math. Phys., 265(3):547–583, 2006.