arXiv:2304.02865v1 [quant-ph] 6 Apr 2023

通过薛定谔化对离散线性动力系统和线性代数中的简单迭代方法进行量子模拟

金石[1, 2, 3, 4] 和 Nana Liu[1,3,5,4, *]
[1] *Institute of Natural Sciences, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China*
[2] *School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China*
[3] *Ministry of Education Key Laboratory in Scientific and Engineering Computing, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China*
[4] *Shanghai Artificial Intelligence Laboratory, Shanghai, China*
[5] *University of Michigan-Shanghai Jiao Tong University Joint Institute, Shanghai 200240, China.*
(日期：2023年4月7日)

众所周知，与经典模拟相比，量子模拟能够更高效地模拟某些连续时间动力系统，其中薛定谔方程是最直接、最著名的例子。事实上，任何线性动力系统都可以通过一种称为薛定谔化¨的方法转化为薛定谔方程组。基于这样的观察：线性代数中的迭代方法，以及更一般的离散线性动力系统，都可以视为随时间连续演化的动力系统的离散时间近似，我们可以应用薛定谔化¨技术¨[1]。因此，量子模拟可以直接应用于某些最简单迭代方法的连续时间极限。这适用于一般的（显式）迭代方案或离散线性动力系统。具体而言，我们提出了量子 Jacobi 方法和量子幂方法，分别用于求解量子线性方程组，以及估算矩阵的最大特征向量和特征值。所提出的量子模拟既可在离散变量量子系统上实现，也可在连续变量与离散变量混合的量子系统上实现。该框架为利用量子模拟解决线性代数问题提供了一种有趣的替代方法。

I. 引言

用于模拟连续时间演化的量子动力学，是最早提出的量子设备任务之一 [2, 3]。除了模拟量子动力学外，量子设备在解决线性代数问题方面也可能发挥重要作用，包括线性方程组问题 [4–8] 以及识别最大特征向量和特征值 [9, 10]。事实上，线性方程组问题的量子类比已知是 BQP完全 [4] ——这也是量子计算机面临的最难任务。然而，这些本质上是离散的问题，通常不会从连续时间量子动力学的角度来看待。因此，一个引人入胜的问题是：如何以及能否更直接地从量子动力学系统的连续时间演化角度来看待线性代数问题。由此，这些量子系统或可被视为量子计算的替代性构件。

将离散性质的问题转化为连续时间演化的动力学问题，往往是一种有用的方法。例如，组合搜索问题可以转化为优化问题，并通过量子绝热计算在连续时间内求解 [11, 12] 。其做法是从一个哈密顿量的已知基态出发，使其绝热演化至另一个哈密顿量的基态，而后者的基态正是原问题的解。这也可以作为求解线性方程组问题的起点[8]。

我们通过考察线性代数中非常简单的迭代方法，采取不同于连续时间视角的路径。迭代方法，以及更一般的离散线性动力系统[13, 14], , 按离散时间步演化。然而，通过取连续时间极限，可以将迭代过程转化为动力系统。例如，这种方法已被用于建立梯度流与梯度下降算法之间的联系。在我们近期的工作[1] 中，我们展示了如何通过一种称为 Schr¨odinger 化的方法，将一般动力系统直接映射为量子动力系统——也就是说，将非 Schr¨odinger 方程转化为 Schr¨odinger 方程组。因此，迭代过程的连续极限随后便可在量子模拟器上进行模拟。

我们的形式主义允许在离散量子系统以及混合连续变量-离散变量（CV-DV）量子系统上实现 [15]。虽然大多数量子计算方案在完全离散的意义上运行，即仅操作量子比特，但这些系统的底层物理实际上本质上是连续变量的。

* nana.liu@quantumlah.org

例如，量子谐振子不是量子比特，而是量子模式或量子模。因此，自然可以利用它们的连续性，而混合连续变量与离散变量系统能够为量子计算提供另一条路径 [15–17]。

我们从一般的（显式）迭代方法，或更广义地说，从离散线性动力系统出发，并将其视为一组齐次线性微分方程的解。随后，可以采用 [1] 中提出的 Schr¨odingerisation 方法，通过量子模拟求解这些方程。长时间行为对应于迭代方法的收敛，并给出连续系统的稳态，这对应于迭代的极限。我们将分别介绍针对厄米算子和非厄米算子的量子模拟过程，并分析这种方法的成本。随后，我们将这一形式体系应用于计算线性代数中的雅可比方法和幂方法。

雅可比方法是求解线性方程组 [18] 最简单的迭代方法之一。它是一种定常迭代算法，其稳态解可求得线性方程组问题的解。该过程中的一个高成本步骤是每次迭代时进行矩阵乘法。我们展示了如何应用连续时间量子模拟来近似稳态解，并求解线性方程组问题的量子对应问题——制备振幅与经典解成正比的量子态。由于量子模拟用于取代每次迭代中的经典矩阵乘法，因此可以在量子模拟器上提高雅可比方法的效率。我们将其称为量子雅可比方法。给定量子态解后，仍可高效提取原问题的一些经典解。原则上，这一过程也可推广到其他迭代方法。

线性代数中的另一个重要问题是确定给定矩阵的最大特征值及其对应的特征向量。一种非常简单且有效的迭代方法是幂方法。与雅可比方法类似，每次迭代中代价高昂的步骤是矩阵乘法，我们用连续时间量子模拟来替代它。在这里，我们的量子模拟算法制备出一个量子态，其振幅构成的向量是对应于最大特征值的特征向量。我们将这一方案称为量子幂方法。随后可以利用得到的量子态高效地提取最大特征值。

在上一节中，我们讨论了与其他一些方法的比较。

II. 离散线性动力系统的量子迭代方法

任何线性代数中的迭代方法（或离散线性动力系统 [14]）的执行，都涉及量子态 y 在足够长的（离散）时间内演化，使量子态趋近于稳态，即迭代收敛。线性问题或线性动力系统的一般迭代方法具有如下形式

$$y_{k+1} = Gy_k + g, \qquad k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \tag{1}$$

其中 y_k、$g \in \mathbb{R}^d$ 和 G 是一个 $d \times d$ 矩阵。这里，k 表示迭代方法中的时间步。为简化形式，我们可以定义增广向量 $x_k = (y_k, 1)^T$，它按照以下方式演化，满足一个齐次系统：

$$x_{k+1} = Cx_k, \qquad C = \begin{pmatrix} G & g \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

其中 C 是一个 $(d+1) \times (d+1)$ 矩阵，且 $\mathbf{0}^T = (0, ..., 0)$ 是 d维的。我们可以将其改写为以下形式：

$$x_{k+1} - x_k = \begin{pmatrix} y_{k+1} - y_k \\ 0 \end{pmatrix} = (C - I)x_k. \tag{3}$$

从这种形式可以很容易地看出，例如，当$y_{k+1} \approx y_k$时，迭代方法会收敛或达到稳态，即 $y_{k+1} - y_k = (G - I)y_k + g \to 0$，这与确定 $C - I$ 的基态相一致。

由于 $x_{k+1} - x_k = (C - I)x_k = (C - I)C^k x_0 = C^k(Cx_0 - x_0) = C^k(x_1 - x_0)$，因此 $\|x_{k+1} - x_k\| \le \|C\|^k \|x_1 - x_0\|$。当 C的谱半径为 $r(C) < 1$时，对于任意从属范数 $\|\cdot\|$，都有 $\|C\| < 1$，因此量子态 x 的收敛速率 $\|C\|^k$随时间步 k [18]呈指数变化。我们可以将公式（3）转化为动力学方程：将 k 转化为连续时间 $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$，从而将迭代关系 $x_{k+1} - x_k = (C - I)x_k$ 转化为相应的线性常微分方程组（ ODE ）

$$\frac{dx}{dt} = (C - I)x, \qquad x(t = 0) = x_0. \tag{4}$$

注意，由于 $r(C) < 1$，因此 $C - I$ 具有负特征值。这意味着相应的常微分方程组是压缩的，因此初值问题是稳定的，并且解会在 t 中指数衰减至稳态。

为了利用量子模拟，我们的目标是转而制备量子态 $|x\rangle = (1/\|x\|)\sum_{i=0}^{d} x_i|i\rangle$ 其中 $\{x_i\}_{i=0}^{d}$ 是向量 x的各个分量，$\|x\|$ 是其 l_2范数，而 $\{|i\rangle\}_{i=0}^{d}$ 是一个正交归一基。这里，连续时间迭代过程的经典解 $x(t)$ 编码在量子态的振幅中。由于迭代过程现在是一个动力系统，我们可以通过关于 $|x\rangle \propto x$ 连续的动力学方法模拟其解 t。特别地，我们可以使用最近在 4中引入的 Schr¨odinger 化技术（即将非 Schr¨odinger 方程转化为一组 Schr¨odinger 方程），直接通过量子模拟来模拟方程（[1]）。

下面我们概述如何利用 Schr¨odinger 化来模拟 x 的演化，适用于厄米和非厄米 C。这使我们能够应用量子模拟直接模拟 x –以及 y–的演化，进而估算量子线性方程组问题的解，并确定给定矩阵的最大特征值及其对应特征向量。

A. Evolution of x for Hermitian C

我们首先考虑以下形式的演化方程

$$\frac{dx}{dt} = -Hx, \qquad x(0) = x_0, \tag{5}$$

其中 $H = -(C - I) = H^\dagger$，这意味着情形 $G = G^\dagger$ 和 $g = 0$ 出现在方程（1）中。要对方程（5）进行量子模拟，我们可以采用 Schr¨odinger 化技术 [1], , 该技术引入一个额外维度 p，并定义$w = \exp(-p)x$ ，其中 $p > 0$。这称为扭曲相位变换。然后求解 w 所有$p \in (-\infty, \infty)$ 所满足的

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{dt} = H\frac{\partial w}{dp} \\ w(0) = e^{-|p|}u_0. \end{cases} \tag{6}$$

我们指出，该系统是双曲型的——因此，初值问题（6）是适定的——前提是 H 在实数域上可对角化，即它只有实特征值，且具有完备特征向量组[19]。此外，若假设 H是正定的，那么在 H 于（6）中取 $p = 0$时，我们无需施加边界条件。

对 w 关于 p作傅里叶变换，记为 $\tilde{w}$，可得到一组薛定谔方程

$$\begin{cases} i\frac{d\tilde{w}}{dt} = \eta H\tilde{w}, \qquad \forall\eta \in (-\infty, \infty) \\ \tilde{w}(0) = (1/(\pi(1+\eta^2)))x_0. \end{cases} \tag{7}$$

例如，我们可以考虑混合离散变量—连续变量（CV-DV）态 $|\tilde{w}(0)\rangle_{CV-DV} = (1/\|f(\eta)\|)\int_{\infty}^{\infty} d\eta f(\eta)|\eta\rangle|x_0\rangle$, $f(\eta) \propto 1/(1+\eta^2)$, $|x_0\rangle = (1/\|x_0\|)\sum_{i=0}^{D-1} x_{0,i}|i\rangle$ 且 $\|\cdot\|$ 是 $(\cdot)$ 的 $l2$-范数。这里，态 $(1/\|f(\eta)\|)\int_{\infty}^{\infty} d\eta f(\eta)|\eta\rangle$ 是连续变量量子态，因为它是无限维态，这是由于 η 是一个连续自由度。这种系统称为量子模式或量子模。量子模也可用作信息载体，是使用量子比特 [20, 21]的一种替代方案。例如，我们可以令 η 由量子谐振子的 位置本征态 $|q\rangle$ 表示，其位置算符为 $\hat{}q$。动量算符 $\hat{}p$ 具有相应的本征态 $|p\rangle$ ，其中 $[\hat{}q, \hat{}p] = i$ ，而 $|p\rangle$ 是 $|q\rangle$的连续变量量子傅里叶变换。这意味着， $|p\rangle$ 的振幅是 $|q\rangle$振幅的连续傅里叶变换。与离散量子傅里叶变换不同，连续变量量子傅里叶变换尤其容易实现，例如在量子光学系统中，因为它仅仅是从位置基到动量基的变换。另一方面， $|x_0\rangle$ 是有限 D维量子态，可由离散的 $\log_2(D)$ 个量子比特实现。因此， $|\tilde{w}(t)\rangle_{CV-DV} = \exp(-iH \otimes \hat{}qt)|\tilde{w}(0)\rangle_{CV-DV}$的演化由混合 CV-DV 量子门 $\exp(-iH_{CV-DV}t)$ 控制，其中 $H_{CV-DV} = H \otimes \hat{}q$。这些量子门可视为量子计算的替代构建模块，有望在量子光学、囚禁离子系统和超导电路中实现[15–17, 22, 23]。这些量子门还可用于实现 DQC1、量子相位估计、Shor 因式分解算法[17] 以及传感的替代量子实现 [24]。

我们也可以通过将 $\eta = \eta_l$ 按大小为 $\Delta\eta$、 $l = -N/2+1$、.....、 $N/2$ 的增量离散化，在纯离散量子系统（量子比特）上进行量子模拟。随后，量子态 $|\tilde{w}(t)\rangle$ 的演化遵循 Schr¨odinger 方程。

$$\begin{cases} i\frac{d}{dt}|\tilde{w}(t)\rangle = (H \otimes D)|\tilde{w}(t)\rangle \\ |\tilde{w}(0)\rangle = \frac{\|x_0\|}{\|\tilde{w}(0)\|}\sum_{j=-N/2+1}^{N/2}(1/(\pi(1+\eta_j^2)))|j\rangle|x_0\rangle \end{cases} \tag{8}$$

其中 $|\tilde{w}(t)\rangle = (1/\|\tilde{w}(t)\|)\sum_{i=0}^{D-1}\sum_{l=-N/2+1}^{N/2}\tilde{w}_i(t,\eta_l)|i\rangle|l\rangle$，且 $D = \mathrm{diag}(-N/2+1, ..., N/2)$。

准备好 $|\tilde{w}(0)\rangle$ 后，需要对演化 $\exp(-i(H\otimes D)t)$ 进行量子模拟，以获得 $|\tilde{w}(t)\rangle$。随后，对 η 执行逆量子傅里叶变换，以获得量子态 $|w(t)\rangle = (1/\|w(t)\|)\sum_{i=0}^{D-1}\sum_{l=-N/2+1}^{N/2} w_i(t,p_l)|i\rangle|l\rangle$。然后，我们可以投影到 $p > 0$ 量子态上，其中 $p = p_k$ 也用 $k = -N/2+1$、...、$N/2$离散化。注意，对于某个 $p^* > 0$，投影到单个 $p = p^*$ 上也是一种可行方案，并能得到相同的最终结果 $|x(t)\rangle$。利用 $\hat{P} = I\otimes\sum_{l=0}^{N/2}|l\rangle\langle l|$，其中 $\hat{P}|w(t)\rangle = (\|x(t)\|\|\exp(-p)\|/\|w(t)\|)\exp(-p)\rangle|x(t)\rangle$，其中 $|\exp(-p)\rangle = (1/\|\exp(-p)\|)\sum_{l=0}^{N/2}\exp(-p_l)|l\rangle$，且 $\|\exp(-p)\| = \sum_{l=0}^{N/2}\exp(-2p_l)$。因此，可以从 $|w(t)\rangle$ 中以概率 $(\|x(t)\|\|\exp(-p)\|/\|w(t)\|)^2 \sim (\|x(t)\|/\|x_0\|)^2$提取 $|x(t)\rangle$。

从而使代价达到该概率也可以通过二次加速来提升的程度 [1]。

我们可以使用上述量子模拟方案，以高精度制备稳态解 x（因此也包括 y）的近似值 $|x(t=t_f)\rangle$。所需时间与式（7）和式（8）中的量子模拟问题所用时间 $t = t_f$ 相同。为估计该 t_f，我们首先将初始态 $|x_0\rangle = (1/\|x_0\|)\sum_{i=0}^{D-1}(x_0)_i|i\rangle$ 展开为 $|x_0\rangle = \frac{1}{\|x_0\|}\sum_{j=0}^{D-1}\alpha_j|E_j\rangle, \alpha_j\in\mathbb{C}$，其中归一化定义为 $\|\cdot\|^2 = \sum_{i=0}^{D-1}|(\cdot)_i|^2$。由于 H 是厄米的，它具有一组正交归一的特征向量 $\{|E_j\rangle\}_{j=0}^{D-1}$，对应的特征值为 $\{E_j\}_{j=0}^{D-1}$，其中 $E_0 < ... < E_{D-1}$。于是

$$|x(t)\rangle = \frac{\|x_0\|}{\|x(t)\|}e^{-Ht}|x_0\rangle = \frac{1}{\|x(t)\|}\sum_{j=0}^{D-1}\alpha_j e^{-E_j t}|E_j\rangle. \tag{9}$$

我们可以写成

$$\|x(t)\|^2 = \|e^{-Ht}u_0\|^2 = \left\|\sum_{j=0}^{D-1}\alpha_j e^{-E_j t}|E_j\rangle\right\|^2 = \sum_{j=0}^{D-1}|\alpha_j|^2 e^{-2E_j t} = e^{-2E_0 t}(|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 e^{-2t\Delta} + L) \tag{10}$$

其中谱隙为 $\Delta_C = E_1 - E_0 > 0$ 和 $L = \sum_{k=2}^{D-1}|\alpha_k|^2\exp(-2t(E_k - E_0))$。为了确定演化此类量子系统所需的时间，我们在 $|x(t)\rangle$ 与 H 的真实基态$|x_g\rangle = |E_0\rangle$ 之间的保真度大于或等于 $1-\delta$ 时称 $t = t_f$ $\delta > 0$，即，

$$\mathcal{F}(|E_0\rangle, |x(t_f)\rangle) = |\langle x(t_f)|E_0\rangle|^2 = \frac{|\alpha_0|^2 e^{-2E_0 t_f}}{\|x(t_f)\|^2} \geq 1-\delta. \tag{11}$$

结合方程（11）和（10），由于 $\delta \ll 1$，我们得到条件

$$t_f \geq \frac{1}{2\Delta_C}\ln\left(\frac{|\alpha_1|^2(1-\delta)}{|\alpha_0|^2\delta}\left(\frac{1}{1-L(1-\delta)/(|\alpha_0|^2\delta)}\right)\right). \tag{12}$$

当 L 较小时（相对于 $|\alpha_0|^2$），我们指的是 $L \ll \delta|\alpha_0|^2/(1-\delta)$ 和 $\delta \ll 1$，我们有 $t_f \gtrsim (1/(2\Delta))\ln(|\alpha_1|^2/(\delta|\alpha_0|^2))$。对于较大的 L，我们只需在 L 中纳入更多项以求得 t_f。如果前两个本征态 $|E_0\rangle$ 和 $|E_1\rangle$ 占主导，使得$|\alpha_1|^2 \approx 1-|\alpha_0|^2$，那么

$$t_f \gtrsim \frac{1}{2\Delta_C}\ln\left(\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{|\alpha_0|^2} - 1\right)\right). \tag{13}$$

该基态估计的总成本 $|x_g\rangle$ 包括：(a) 制备初始态 $|\tilde{w}(0)\rangle$（式（8））的成本，(b) 对系统进行量子模拟的成本（式（8）），以及 (c) 从 $|u(t_f)\rangle$ 投影回 $|\tilde{w}(t_f)\rangle$的成本。这里我们选择考虑 η 离散化的情况。

制备式（8）中的初始态 $|\tilde{w}(0)\rangle$，需要制备 $|u_0\rangle$ 以及量子态 $\propto\sum_{j=-N/2+1}^{N/2}(1/(\pi(1+\eta_j^2)))|j\rangle$；后者是量子态 $|w(0)\rangle \propto \sum_{l=-N/2+1}^{N/2}\exp(-|p_l|)|l\rangle$ 的量子傅里叶变换。尽管这两者都不是稀疏态——将其近似为稀疏态会带来超出预期的误差——且可能需要 $O(N)$ 量级的资源，但这一资源态适用于每一个问题，不同于 $|u_0\rangle$。因此，在制备 $|u_0\rangle$ 的同时，假定已提供这一量子态是合理的。一种简单的选择可以是 $|u_0\rangle = |1\rangle\otimes|x_0\rangle$。例如，如果 $|u_0\rangle$ 中的非零元素数量为 $\log N$，那么制备过程就是高效的 [25]。正如我们稍后将看到的，只需制备这一初始态的一个副本。

量子模拟步骤的成本会因所采用的模拟方法而有所不同。例如，使用数字量子模拟来模拟$\exp(-i(H\otimes D)t)$ 时，将该幺正算子分解为单量子比特和双量子比特

~ ~ ~量子门，这可能会带来复杂度成本（例如 [26]） $\mathcal{O}(s_H\|H\otimes D\|_{max}t)=\mathcal{O}(s_C\|C-I\|_{max}N\otimes\|t)=\mathcal{O}(s_C\|C\|_{max}t_f/\epsilon)$,~对于 $t=t_f$其成本为 $\mathcal{O}(s_C\|C_I\|_{max}/(\epsilon\Delta_H))$，其中 $s_{(\cdot)}$是 $(\cdot)$ 的稀疏度， $\|\cdot\|_{max}$表示其最大范数，而 $\epsilon\sim 1/N$ 是由 η的离散化所导致的解误差。此处 Δ_C 是 C的谱间隙。

在模拟量子模拟中，或许可以构造一个能自然实现 CV-DV ~门 exp$(-i(H\otimes\hat{}q)t)$ 的量子系统。不过，最短耗时仍为 $t_f=\mathcal{O}(1/\Delta_C)$ 量级。

要得到 $|x(t_f)\rangle$，我们需要对 $|\tilde{w}(t)\rangle$ 执行逆量子傅里叶变换，然后投影到正的 p 值或某个特定的正 $p=p^*$ 上。或者，我们也可以执行旋转并使用振幅放大，以复杂度代价 $\|x(0)\|/\|x(t_f)\|$ 得到 $|x(t_f)\rangle$。这意味着只需要量子态 $|\tilde{w}(t_f)\rangle$ 的一个副本。例如，假设我们取 $\|x(0)\|=1$、 $E_0\le 0$ 和 $\delta\ll 1$，那么由式 (11) 可知$\|x(0)\|/\|x(t_f)\|=\mathcal{O}(1/|\alpha_0|)$。

我们注意到，如果我们的目的不是制备基态本身，而只是恢复关于某个可观测量 O 的期望值，那么就没有必要通过离散量子傅里叶变换转换 $|\tilde{w}(t)\rangle\to|w(t)\rangle$，因为我们可以提取 $\langle\tilde{w}(t,\eta)|(I\otimes O)|\tilde{w}(t,\eta)\rangle=\langle w(t,p)|(I\otimes O)|w(t,p)\rangle\propto\langle x(t)|O|x(t)\rangle$。

在 $C\neq C^\dagger$ 的更一般情况下（即一般而言为 $G\neq G^\dagger$ and $g\neq 0$），可以通过定义 $2(d+1)\times 2(d+1)$厄米矩阵 H as $H=\begin{pmatrix}0 & (C-I)\\ C^\dagger-I & 0\end{pmatrix}$ 来执行扩张，然后我们求解$du/dt=-Hu$，其中 u 是一个$2(d+1)$ 维向量。在这种情况下，对于一般的 t， $u(t)$不会以简单的方式映射到 $x(t)$，稳态情况下除外。我们注意到，为使迭代方法收敛到唯一答案， $C-I$ 具有一个非简并基态 x_g。我们可以将 $C^\dagger-I$ 的基态/量子态记为 x'_g，一般情况下它们可能简并，也可能不简并。然而， H 的基态 u_g是简并的，并且属于三个不同的类别：$u_g=(0,x_g)^T$、 $u_g=(x'_g,x_g)^T$ 和 $u_g=(x'_g,0)^T$。如果 $u_g=(0,x_g)^T$ 或 $u_g=(x'_g,x_g)^T$，那么检索 x_g 就很直接，可以应用先前的协议。然而，如果基态 $u_g=(x'_g,0)^T$，那么这不允许我们检索 x_g。这意味着，对于$C\neq C^\dagger$，这种制备用于 C 的近似基态的扩张方法，仅在我们不会到达后一个基态这一假设下适用，并且需要对 $u_0=u(t=0)$ 进行适当初始化。对于可能不满足此类假设的 $C\neq C^\dagger$ 的更一般情况，我们采用另一种方法，并将在下一节中概述该方法。

B. x 的演化，对于非厄米 C

在更一般的情况下，即 $C\neq C^\dagger$，当 $G\neq G^\dagger$ 和/或 $b\neq 0$时，我们可以将薛定谔化方法¨直接应用于方程 [1] （4）。由于方程（4）的解为 x（t）$=$exp（（$C-I$）t）x_0，我们使用量子模拟程序来制备量子态

$$|x(t)\rangle=\frac{\|x_0\|}{\|x(t)\|}e^{(C-I)t}|x_0\rangle. \tag{14}$$

在这里，总可以将 $C-I=C_1+iC_2$ 分解为厄米矩阵 $C_1=(1/2)(C+C^\dagger-2I)=C_1^\dagger$ 和反厄米矩阵 iC_2，其中 $C_2=(1/2i)(C-C^\dagger)=C_2^\dagger$ 本身是厄米的。在C_1和C_2对易的特殊情况下，即 $[C_1,C_2]=0$，则 $|x(t)\rangle=$exp$(iC_2t)(\|x_0\|/\|x(t)\|)exp(C_1)|x_0\rangle$。由于 $C_1^\dagger=C_1$，我们可以结合 $H=-C_1$应用上一节中的方法。在这一步之后，可以使用量子模拟来实现酉运算exp(iC_2t)，从而得到 $|x(t)\rangle$。在对易子 $[C_1,C_2]$ 具有简单形式的其他情况下，例如$\propto I$，可以调用坎贝尔–贝克–豪斯多夫关系，因此第 II A 节中的方法仍可应用于稳态解的制备之外。

在最一般的情形 $[C_1,C_2]\neq 0$ 下，我们必须采用不同的方法，直接对 evolution$x(t)=$exp$((C-I)t)x_0$进行薛定谔化。这里我们将向量 $v(t,p)=$exp$(-p)x(t)$定义为 $p>0$。对于 $p\in(-\infty,\infty)$， v 满足

$$\begin{cases}\frac{\partial v}{dt}=-C_1\frac{\partial v}{dp}+iC_2v\\ v(0)=e^{-|p|}x_0.\end{cases} \tag{15}$$

这里，与上一节一样，我们假设 C_1 在实空间中是可对角化的，并且是负定的。

将 $\tilde{v}(t,\eta)=\mathcal{F}(v(t,p))$定义为 v 关于 p 的傅里叶变换，其中 $\eta\in\mathbb{R}$ 是 p 的傅里叶模，那么

$$\begin{cases}i\frac{d\tilde{v}}{dt}=-(\eta C_1+C_2)\tilde{v}, & \forall\eta\in(-\infty,\infty)\\ \tilde{v}(0)=\frac{1}{\pi(1+\eta^2)}x_0\end{cases}. \tag{16}$$

现在这是一个薛定谔方程组，每个 η对应的哈密顿量为 $-(\eta C_1 + C_2)$。这可以通过混合 CV-DV 哈密顿量 $H_{CV-DV} = -(C_1 \otimes \hat{q} + C_2 \otimes I)$来实现。当7式中的 $C = C^\dagger$，即 $C_2 = 0$时，这就化为方程（

与上一节类似，我们也可以将其完全转化为离散系统，使用离散傅里叶变换和离散的 η，得到如下演化

$$\begin{cases} i\frac{d|\tilde{v}(t)\rangle}{dt} = -(C_1 \otimes D + C_2 \otimes I)|\tilde{v}(t)\rangle = H_{tot}|\tilde{v}(t)\rangle \\ |\tilde{v}(0)\rangle = \frac{\|x_0\|}{\|\tilde{v}(0)\|}\sum_{j=-N/2+1}^{N/2}(1/(\pi(1+\eta_j^2))|x_0\rangle \end{cases} \tag{17}$$

其中 $|\tilde{v}(t)\rangle = (1/\|\tilde{v}(t)\|)\sum_{i=0}^{d}\sum_{l=-N/2+1}^{N/2}\tilde{v}_i(t,\eta_l)|i\rangle|l\rangle$ 且

$$H_{tot} = -C \otimes (D - iI)/2 - C^\dagger \otimes (D + iI)/2 + I \otimes D = H_{tot}^\dagger. \tag{18}$$

与上一节类似，根据 $|\tilde{v}(t)\rangle$，可以通过逆（离散）傅里叶变换并投影到正 p 态，或投影到单个 $p = p^*$，来恢复量子态 $|x(t)\rangle$。

由于 $x(t) = (y(t), 1)^T$，量子态 $|y(t)\rangle$ 可以很容易地从 $|x(t)\rangle$ 得到。该方法适用于任意 t，而不仅适用于非常大的 t，此时系统会趋近于 $C - I$ 的稳态。

在数字量子模拟中，制备 $|\tilde{v}(0)\rangle \to |\tilde{v}(t)\rangle$ 的成本为 $\mathcal{O}(s_C\|H\|_{tot}t)$ 量级，其中 $\|H_{tot}\| = \max(\|C\|_{max}\|D\|_{max}, \|D\|_{max})$ 且 $\|D\|_{max} = N \sim 1/\epsilon$。对于模拟量子模拟，模拟是相对于哈密顿量 $H_{tot} = -(C_1 \otimes D + C_2 \otimes I)$ 进行的，这在第 II A 节提到的囚禁离子系统中也可能具有应用潜力。此时初始态为 $|x_0\rangle$，最后一步从 $|\tilde{v}(t)\rangle$ 恢复 $|x(t)\rangle$ 的成本为 $\|x(0)\|/\|x(t)\|$ 量级，与第 II A 节相同。

该算法可用于一般的 t。这还包括将 $C - I$ 的基态制备至保真度 $1 - \delta$，对于足够大的 $t \geq t_f$而言。这里我们假设 $C - I$ 具有一个正交归一基 $\{|a_i\rangle_{i=0}^d\}$，其对应的特征值为$\{a_i\}_{i=0}^d$；由于 $r(C) < 1$，这些特征值均为负值。这里 $|a_0\rangle$ 是真正的基态。我们可以将初始态写为$|x_0\rangle = (1/\|x_0\|)\sum_{i=0}^{d}\sum_{i=0}^{d}\beta_i|a_i\rangle$。与式（13）类似，这里 $t_f \gtrsim (1/(2\Delta_C))\ln((1/(\delta|\beta_0|)))$，其中 Δ_C 是 C的谱隙。在这种情况下，与第IIA 节类似，从 $|\tilde{v}(t_f)\rangle$ 中提取 $|x(t_f)\rangle$ 的成本为 $\mathcal{O}(1/|\beta_0|)$。

III. 量子线性方程组的量子迭代求解器

线性代数方程组的形式为 $Ay = b$，其中 y、$b \in \mathbb{R}^d$ 和 A 是一个 $d \times d$ 矩阵。它的解析解为 $y = A^{-1}b$。求解量子线性方程组就是制备量子态$|y\rangle \propto A^{-1}|b\rangle$，其中经典向量的值编码在相应量子态的振幅中。现在我们使用迭代方法来制备这个量子态。

我们以雅可比方法为例。该迭代算法将 $A^{-1}b$ 近似为 y中演化的稳态解。设 $A = \Lambda + M$，其中 Λ 是一个对角矩阵，而 M 仅由非对角项组成。设向量 y_k 在步骤 k 处的演化为

$$y_{k+1} = Gy_k + g, \qquad G = -\Lambda^{-1}M, \quad g = \Lambda^{-1}b. \tag{19}$$

由于这涉及 Λ 的逆，因此该方法仅适用于 A 的对角线上没有零项的情况。很容易验证，在稳态下，$y_{k+1} = y_k$，

$$y_{k+1} - y_k = \Lambda^{-1}b - (\Lambda^{-1}M + I)y_k = 0 \tag{20}$$

这意味着 $\Lambda^{-1}b = (\Lambda^{-1}M + I)y_k$或 $Ay_k = b$。扩充 $y \to x = (y, 1)^T$ 后，线性方程组问题等价于求解动力系统 $dx/dt = (C - I)x, x(0) = x_0$的稳态解，其中

$$C = \begin{pmatrix} G & g \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Lambda^{-1}M & \Lambda^{-1}b \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

为了使迭代方法收敛，我们要求谱半径 $r(C) < 1$。为了满足这一条件，A 需要是对角占优的，即 A 的每个对角元素都满足 $|A_{ii}| \geq \sum_{j\neq i}|A_{ij}|$，这是雅可比方法收敛的充分条件 [18]。

在这种情况下，由于 $g \neq 0$ 一般而言，则 $C \neq C^\dagger$ 因此我们使用第 IIB 节中的基态制备方法来制备 $|y(t_f)\rangle \approx |y\rangle \propto A^{-1}|b\rangle$ 通过关于哈密顿量的《Quantum》模拟 H_{tot}，即式（18），即:

$$H_{tot} = -\begin{pmatrix} -\Lambda^{-1}M & \Lambda^{-1}b \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{D - iI}{2} - \begin{pmatrix} -(\Lambda^{-1}M)^\dagger & \mathbf{0}^T \\ (\Lambda^{-1}b)^\dagger & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{D + iI}{2} + I \otimes D. \tag{22}$$

我们可以从初始态 $|x_0\rangle$，其中 $x_0 = (y_0, 1)^T$ 开始。因此，稀疏初始态 x_0 对应于稀疏的 x_0。˜数字量子模拟步骤的成本为 $\mathcal{O}(s_{H_{tot}}\|C-I\|_{max}/(\epsilon\Delta_C))$。这里 $s_{H_{tot}}$ 与 s_C 同阶，即 $\sim \max\{s_{\Lambda^{-1}M}, s_{\Lambda^{-1}b}\} \sim \max\{s_M, s_b\} \sim \max\{s_A, s_b\}$。最大范数 $\|C-I\|_{max} \sim \max\{\|\Lambda^{-1}M\|_{max}, \|\Lambda^{-1}b\|_{max}\}$。要从 $|\tilde{w}(t_f)\rangle$ 中获取 $|y(t_f)\rangle$，我们需要付出 $\mathcal{O}(1/|\beta_0|)$ 的乘法成本，其中 $|\beta_0|$ 是初始态 $|x(0)\rangle$ 与真实解 $\propto A^{-1}|b\rangle$ 之间的重叠。如第 II B 节所指出的，$C_1 = (C + C^\dagger)/2$ 正定且在实空间中可对角化，是方程 (15) 中初值问题适定的充分假设，无需额外的边界条件。

该算法也可以通过对混合型 CV-DV 酉算子 $\exp(iH_{CV-DV}t_f)$ 进行量子模拟来实现，其中 $H_{CV-DV} = -C \otimes (\hat{}q - iI)/2 - C^\dagger \otimes (\hat{}q + iI)/2 + I \otimes \hat{}q$。

求解线性方程组的其他定常迭代方法

用于求解线性方程组的其他平稳迭代方法 [18] 也可以使用，原则上我们这里的形式体系也可以应用于这些方法。它们的区别在于将矩阵 A 拆分成不同的矩阵。一般来说，可以写成 $A = B + N$，其中假设 B 容易求逆，以便该方法能够运行。对于雅可比方法，$B = \Lambda$ 是 A 的对角元素。此外还有其他示例，例如理查森方法（$B = I/a$、$a \neq 0$）、阻尼雅可比方法（$B = \Lambda/a$、$a \neq 0$、1）、高斯–赛德尔方法（$B = \Lambda + L$，L 是 A 的严格下三角部分）、连续超松弛（SOR）方法（$B = \Lambda/a + L$、$a \neq 0$）以及对称连续超松弛（SSOR）方法（$B = （\Lambda + aL）\Lambda^{-1}（\Lambda + aU）/（a（2 - a））$、$a \neq 0$、2，$U$ 是 A 的严格上三角部分）。然而，许多其他方法，例如高斯–赛德尔方法，都要求能够高效地求出非平凡矩阵（如 L）的逆，而这在一般情况下可能无法通过经典方式实现。一种朴素的方法是在每次迭代中使用前一节所述的量子模拟线性系统求解器对 L 求逆，但更有意义的做法是寻求一种改进方法，使其不需要在每个迭代步骤中再进行另一次迭代。另一方面，与雅可比方法相比，这些其他方法在经典情况下并没有显著更快；对于量子计算而言，差异将更加微不足道，因此我们在此不再继续研究这些其他迭代方法的量子实现。

IV. 用 QUANTUMPOWER 方法近似最大特征值和特征向量

线性代数中的另一个迭代方法示例是幂方法，它用于确定矩阵 [18] 的最大特征值及其对应特征向量。假设有一个可对角化矩阵 C，其特征值 $1 > \lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_d$ 均为实数且为正，对应特征向量 $\{c_i\}_{i=1}^d$ 构成一组标准正交基。那么任意一个 d 维向量都可以写成 $x_0 = \sum_{i=1}^d \gamma_i c_i$。假设我们要寻找最大特征值 λ_1。那么可以按照 $x_k = Cx_{k-1} = C^k x_0$ 进行演化。然后

$$x_k = \gamma_1 \lambda_1^k c_1 + \sum_{i=2}^d \gamma_i \lambda_i^k c_k \tag{23}$$

$$= \lambda_1^k \left(\gamma_1 c_1 + \sum_{i=2}^d \gamma_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k c_i \right). \tag{24}$$

假设 $\lambda_2 < \lambda_1$，那么当 k 足够大时，比如 $k > K$，主导项为 $\lambda_1^k \gamma_1 c_1$，因此有 $x_K \approx \gamma_1 \lambda_1^K c_1$ 和 $x_{K+1} \approx \gamma_1 \lambda_1^{K+1} c_1$，二者的方向均与特征向量 c_1 一致。此外，可以从 λ_1 中提取最大特征值

$$\lambda_1 \approx \frac{x_K^T x_{K+1}}{x_K^T x_K} = \frac{x_K^T C x_K^T}{x_K^T x_K} = \langle x_K | C | x_K \rangle \tag{25}$$

其中 $|x_K\rangle = (1/\|x_K\|) \sum_{i=1}^d (x_K)_i |i\rangle$。注意，该 $|x_K\rangle$ 也近似于特征向量 $|c_1\rangle$，该向量对应于 C 的最大特征值 λ_1。

我们可以将其转化为制备该量子态的动力学问题 $|x_K\rangle \to |x(t = t_{max})\rangle \propto \exp((C - I)t_{max})|x_0\rangle$。由于 $r(C) < 1$，当 t 足够大时，$|x(t)\rangle$ 将趋近于最大本征态。当 $C = C^\dagger$ 时，我们可以使用薛定谔化¨方法（见第 IIA 节）。此处需要针对该哈密顿量进行量子模拟 $C \otimes D$。当 $C \neq C^\dagger$ 时，我们可以使用第 II B 节 中更一般的方法来实现非幺正。

演化 $\exp((C-I)t)$通过量子模拟。这里相对于哈密顿量的量子演化$H_{tot}=-C\otimes(D-iI)/2-C^\dagger\otimes(D+iI)/2+I\otimes D$。如第 II B 节所述，$C_1=(C+C^\dagger)/2$为正定的，并且在实空间中可对角化，是方程（15）中的初值问题适定且无需额外边界条件的充分假设。

现在我们必须确定 t_{max}，以便能够将 λ_1 近似到精度 ϵ

$$|\langle x(t_{max})|C|x(t_{max})\rangle-\lambda_1|<\epsilon, \tag{26}$$

其中 $|\langle x(t_{max})|C|x(t_{max})\rangle-\lambda_1|=|\mathrm{Tr}(C(|x(t_{max})\rangle\langle x(t_{max})|-|c_1\rangle\langle c_1|))|\leq\sqrt{\mathrm{Tr}(C^\dagger C)\sqrt{2-\mathcal{F}(|x(t_{max})\rangle,|c_1\rangle)}}<\epsilon$。这意味着只需确保量子保真度 $\mathcal{F}(|x(t_{max})\rangle,|c_1\rangle)=|\langle x(t_{max})|c_1\rangle|^2\geq 1-\delta$足够大，其中 $\delta=\epsilon^2/(2\mathrm{Tr}(C^\dagger C))\ll 1$。

分析过程可类似于哈密顿量基态估计的情形，只是这里我们希望与最大本征态有较大的重叠，而不是与最小本征态有较大的重叠。现在

$$|x(t)\rangle=\frac{\|x_0\|}{\|x(t)\|}e^{(C-I)t}|x_0\rangle=\frac{1}{\|x(t)\|}\sum_{j=1}^{d}e^{(\lambda_j-1)t}\gamma_j|c_j\rangle \tag{27}$$

其中 $\|x(t)\|^2=\sum_{j=1}^{d}|\gamma_j|^2e^{2(\lambda_j-1)t}=\exp(2(\lambda_1-1)t)(|\gamma_1|^2+|\gamma_2|^2\exp\left(-2\tilde{\Delta}_C t\right)+\tilde{L})$，其中 $\tilde{\Delta}_C=\lambda_1-\lambda_2$ 是 C 的最大特征值与次大特征值之差。这里 $\tilde{L}=\sum_{j=3}^{d}|\gamma_k|^2\exp(-2(\lambda_1-\lambda_k))$。那么$\mathcal{F}(|x(t_{max})\rangle,|c_1\rangle)=(|\gamma_1|/\|x(t_{max})\|)^2\exp(2(\lambda_1-1)t_{max})\geq 1-\delta$意味着

$$t_{max}\gtrsim\frac{1}{2\tilde{\Delta}_C}\ln\left(\frac{2\mathrm{Tr}(C^\dagger C)}{\epsilon^2}\left(\frac{1}{|\gamma_1|^2}-1\right)\right) \tag{28}$$

其中，我们假设本征态 $|c_1\rangle$、$|c_2\rangle$ 主导初始态 $|x_0\rangle$，即 $|\gamma_1|^2\approx 1-|\gamma_2|^2$。我们还假设 $\tilde{L}\ll\delta|\gamma_1|^2/(1-\delta)$。

一旦获得 $|x(t_f)\rangle$，我们就可以通过分别估计 $\langle x(t_f)|C_1|x(t_f)\rangle$ 和 $\langle x(t_f)|C_2|x(t_f)\rangle$ 来计算期望值 $\lambda_1\approx\langle x(t_f)|C|x(t_f)\rangle$，其中 $C_1=(C+C^\dagger)/2=C_1^\dagger$ 和 $C_2=(C-C^\dagger)/(2i)=C_2^\dagger$ 被确定为可观测量。这里的测量成本是标准的 $\mathcal{O}(1/\epsilon^2)$，也可以通过二次加速得到提升，例如 [27]。

此处我们并不希望获取 C 的基态，而是希望获取其最大特征向量。我们可以采用第 IIB 节中更一般的方法，并代入 $t=t_{max}$。然后，数字量子模拟以及随后对~最大本征态 $|c_1\rangle$ 的估计成本为 $\mathcal{O}(s_C\|C\|_{max}/(\Delta_C|\gamma_1|\epsilon))$。

也可以通过对混合 CV-DV 幺正算符 $\exp(iH_{CV-DV}t_{max})$ 进行量子模拟来实现该算法，其中 $H_{CV-DV}=-C\otimes(\hat{q}-iI)/2-C^\dagger\otimes(\hat{q}+iI)/2+I\otimes\hat{q}$。

最后，我们提及，可以使用逆幂法和移位幂法来求其他特征值[18]。与上一节提到的其他线性系统迭代方法一样，这些方法需要对 A 或 $A-\nu I$(对于 ν常数)等非平凡矩阵求逆。一种简单的做法是在每次迭代时使用上一节介绍的量子模拟线性系统求解器对这些矩阵求逆。然而，更有意义的是寻找一种改进方法，使其不必在每次迭代时都执行此类操作。

V. 讨论

我们可以先比较量子雅可比方法与其经典对应方法。经典雅可比方法的代价为 $\mathcal{O}(s_A dK)$ [18]，其中 $K=t_f/\Delta t$ 是算法中的离散迭代总步数，Δt 是将离散时间步长转换为连续时间 t_f的小时间步长。例如，我们可以取 $\Delta t\sim\epsilon$ 和 $\mathcal{O}(s_A dK)\sim\mathcal{O}(s_A dt_f/\epsilon)$。这里的代价 $s_A d$ 来自每次迭代中的矩阵乘法。量子算法并非通过更快的 t_f来加速经典算法。相反，任何潜在的量子加速都来自在每个时间步更高效的矩阵乘法。在数字量子模拟方案中，总代价为 $\mathcal{O}(s_A\|\Lambda^{-1}M\|_{max}t_f/(\epsilon|\alpha_0|))$，其中 t_f对于经典算法和量子算法都保持不变。因此，当初始态与真实解之间的重叠度 $|\alpha_0|$ 足够高时，例如 $\lesssim\mathcal{O}(1/\log(d))$ 而不是 $\sim 1/d$，量子方法的效率可能会高得多。不过，我们必须强调，我们的方案与 HHL [4], 一样，并不求解 $A^{-1}b$，而是求解相应的量子问题，即制备量子态 $\propto A^{-1}|b\rangle$。这意味着，如果要使通过量子雅可比方法提取经典解也比经典方法高效得多（达到指数级提升），那么从最终量子态中提取的经典解的数量也必须为 $\sim\log(d)$ 量级。

求解量子线性方程组最著名的算法是 HHL 算法[4]，，其代价为 $\tilde{\mathcal{O}}(s_A\kappa_A^2/\epsilon)$，其中 κ_A 是 $d\times d$ 矩阵 A的条件数。若 A 既是稀疏矩阵 $s\sim\mathcal{O}(1)$，又具有良好的条件数 $\kappa=\mathcal{O}(\text{poly}(\log d))$，那么与共轭梯度法 $\mathcal{O}(ds_A\sqrt{\kappa_A})$ 和高斯消去法 $\mathcal{O}(d^{2.376})$ 等经典方法相比（不计初始态制备的代价），其效率最高可提升指数级˜。改进方案还包括更精巧的方法，可改善对 ϵ的依赖，并将 κ_A 提升至 $\mathcal{O}(s_A\kappa_A\text{poly}(\log(s_A\kappa_A/\epsilon)))$[6]。在某些情况下，条件数的影响还可进一步降低至 $\sqrt{\kappa_A}$ [28]，也可以采用预处理 [29]。

量子雅可比方法在一些重要方面不同于上述方法。首先，通过连续时间量子模拟实现的方法较为简单，不需要借助量子相位估计，也不需要采用通过酉算子之和来近似非幺正算子或进行块编码的更复杂方法 [7]。不同于以往的方法，我们的协议可能只需要初始态的单个副本，而不是多个副本，因为它主要依赖酉演化，在最后一步可以使用类似 Grover的旋转来代替投影测量。雅可比方法也不再显式依赖于 κ_A，而是依赖于 A 的谱隙以及初始态与真实解之间的重叠，这为规范方法提供了一个互补的视角。

我们注意到，还有其他基态制备算法，原则上也可用于这些平稳迭代方法，但据我们所知，雅可比方法和幂方法尚未应用于此。这些算法包括基于量子相位估计的方法[30]，、依赖于块编码的更复杂方法[31, 32]，、酉算符的线性组合方法 [33] 以及量子绝热计算 [34]。此外，文献[35]中还提出了用于克雷洛夫子空间迭代方法（如Lanczos方法）的量子方法。这些方法都可以作为本文概述的量子雅可比方法的替代方案。

接下来，我们可以将量子幂方法与其经典对应方法进行比较，后者的代价为$\mathcal{O}(s_CdK)$，其中 K 是最终的离散迭代次数。与雅可比方法类似，它也可以相应地转换为 $\mathcal{O}(s_C\|C\|_{max}t_f/(|\gamma_1|\epsilon))$。因此，在矩阵 C为稀疏矩阵且 $|\gamma_1|\sim 1/\log(d)$时，其效率最高可比经典对应方法高出指数级。我们强调，用于制备特征向量的量子算法制备的是量子态，而不是经典特征向量，尽管仍然可以高效地获取经典向量中的少量条目，例如$\log(d)$个条目。然而，该量子态可用于高效地获取最大特征值，总代价为 $\tilde{\mathcal{O}}(s_C\|C\|_{max}t_f/(\epsilon^2|\gamma_1|))$。

此外，还有其他用于近似密度矩阵最大特征向量（对应于较大特征值）的量子算法，例如使用量子主成分分析 [9]。这基于密度矩阵指数化，而后者需要多个密度矩阵副本。它还依赖于低秩近似，而低秩近似可能会受到去量子化结果的影响 [36]。近期使用量子算法寻找最大特征值的工作同样基于幂方法 [10]，但依赖于将 HHL [4] 作为子程序。

我们在此关注不借助经典优化算法的量子模拟，而后者常被用于众多经典—量子混合方法中。本文不讨论相关文献。

虽然上述分析是针对离散情形进行的，但我们的方法同样可以在混合CV-DV量子模拟器上实现，为解决量子线性代数问题提供了另一种量子计算框架。在这种情况下，量子模拟是相对于混合 CV-DV 酉过程 $\exp(-iH_{CV-DV}t)$ 进行的，其中 $t=t_f,t_{max}$ 与完全离散方案中的保持不变。这里的$\log N$量子比特可以由表示 η 自由度的单个量子模替代。在混合情形下，量子傅里叶变换在量子模上执行，因此非常容易实现。这种演化有望在包括光子电路、超导电路和囚禁离子系统在内的混合系统上实现。

致谢

SJ部分获得了国家自然科学基金（NSFC）项目（编号：12031013）、上海市重大科技项目（2021SHZDZX0102）以及上海市教育委员会创新项目（编号：2021-01-07-00-02-E00087）的资助。NL感谢中国上海市科学技术计划项目（21JC1402900）的资助。

[1] S. Jin、N. Liu 和 Y. Yu，通过薛定谔化进行偏微分方程的量子模拟，arXiv：2212.13969（2022年）。[2] R. P. Feynman，使用计算机模拟物理学，载于 *Feynman and computation*（CRC出版社，2018年），第133–153页。

[3] A. J. Daley、I. Bloch、C. Kokail、S. Flannigan、N. Pearson、M. Troyer和P. Zoller，《量子模拟中的实用量子优势》，《自然》607，667（2022年）。[4] A. W. Harrow、A. Hassidim和S. Lloyd，《求解线性方程组的量子算法》，《物理评论快报》103，150502 2009( )。[5] B. D. Clader、B. C. Jacobs和C. R. Sprouse，《预处理量子线性系统算法》，《物理评论快报》110，250504（2013年）。[6] A. M. Childs、R. Kothari和R. D. Somma，《精度依赖性呈指数级改善的线性方程组量子算法》，《SIAM计算杂志》46，1920（2017年）。[7] A. Gily´en、Y. Su、G. H. Low和N. Wiebe，《量子奇异值变换及其他：量子矩阵运算的指数级改进》，载于 *Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*（2019年），第193–204页。[8] Y. Suba.sı、R. D. Somma和D. Orsucci，《受绝热量子计算启发的线性方程组量子算法》，《物理评论快报》122，060504（2019年）。[9] S. Lloyd、M. Mohseni和P. Rebentrost，《量子主成分分析》，《自然·物理》10，631（2014年）。[10] N. A. Nghiem和T.-C. Wei，《估算最大特征值的量子算法》，arXiv预印本 arXiv:2211.06179（2022年）。[11] E. Farhi、J. Goldstone、S. Gutmann和M. Sipser，《通过绝热演化进行量子计算》，arXiv预印本 quant- ph/0001106（2000年）。[12] D. Aharonov、W. Van Dam、J. Kempe、Z. Landau、S. Lloyd和O. Regev，《绝热量子计算等价于标准量子计算》，《SIAM评论》50，755（2008年）。[13] M. R. Kulenovic和O. Merino，
Discrete dynamical systems and difference equations with Mathematica（CRC出版社，2002年）。[14] O. Galor，
Discrete dynamical systems（Springer科学与商业媒体，2007年）。[15] U. L. Andersen、J. S. Neergaard-Nielsen、P. Van Loock和A. Furusawa，《离散变量与连续变量混合量子信息》，《自然·物理》11，713（2015年）。[16] S. Lloyd，《混合量子计算》，《连续变量量子信息》，37（2003年）。[17] N. Liu、J. Thompson、C. Weedbrook、S. Lloyd、V. Vedral、M. Gu和K. Modi，《单个量子模的量子计算能力》，《物理评论A辑》93，052304（2016年）。[18] G. H. Golub和C. F. Van Loan，
Matrix computations，第3版，《约翰斯·霍普金斯数学科学研究丛书》（约翰斯·霍普金斯大学出版社，马里兰州巴尔的摩，1996年），第xxx+698页。[19] P. D. Lax，
Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves，《数学科学会议委员会应用数学区域会议系列》第11号（工业与应用数学学会，宾夕法尼亚州费城，1973年），第v+48页。[20] S. L. Braunstein和P. Van Loock，《连续变量量子信息》，《现代物理评论》77，513（2005年）。[21] G. Adesso、S. Ragy和A. R. Lee，《连续变量量子信息：高斯态及其他》，《开放系统与信息动力学》21，1440001（2014年）。[22] P. Van Loock、W. Munro、K. Nemoto、T. Spiller、T. Ladd、S. L. Braunstein和G. Milburn，《量子光学中的混合量子计算》，《物理评论A辑》78，022303（2008年）。[23] R. Sutherland和R. Srinivas，《囚禁离子中的通用混合量子计算》，《物理评论A辑》104，032609（2021年）。[24] T. J. Elliott、M. Gu、J. Thompson和N. Liu，《作为量子系统无损探测器的连续变量量子模》，arXiv预印本 arXiv:1707.04250（2017年）。[25] X.-M. Zhang、T. Li和X. Yuan，《以最优电路深度制备量子态：实现与应用》，《物理评论快报》129，230504（2022年）。[26] D. W. Berry、A. M. Childs和R. Kothari，《所有参数依赖性近乎最优的哈密顿量模拟》，载于
2015 IEEE 56th annual symposium on foundations of computer science（IEEE，2015年），第792–809页。[27] P. Rall，《利用分块编码估算物理量的量子算法》，《物理评论A辑》102，022408（2020年）。[28] D. Orsucci和V. Dunjko，《关于求解一类条件数运行时间二次改进的正定量子线性系统》，《Quantum》5，573（2021年）。[29] Y. Tong、D. An、N. Wiebe和L. Lin，《快速求逆、预处理量子线性系统求解器、快速格林函数计算及矩阵函数快速求值》，《物理评论A辑》104，032422（2021年）。[30] Y. Ge、J. Tura和J. I. Cirac，《以更少量子比特加快基态制备并实现高精度基态能量估计》，《数学物理杂志》60，022202（2019年）。[31] L. Lin和Y. Tong，《近最优基态制备》，《Quantum》4，372（2020年）。[32] D. An、J.-P. Liu、D. Wang和Q. Zhao，《量子微分方程求解器理论：局限性与快速前向演化》，arXiv:2211.05246（2022年）。[33] D. An、J.-P. Liu和L. Lin，《用于非幺正动力学的哈密顿量模拟线性组合及最优态制备成本》，arXiv预印本 arXiv:2303.01029（2023年）。[34] W. Van Dam、M. Mosca和U. Vazirani，《绝热量子计算有多强大？》，载于 *Proceedings 42nd IEEE symposium on foundations of computer science* 2001 279 287（IEEE，），第–页。[35] W. Kirby、M. Motta和A. Mezzacapo，《量子计算机上的精确高效Lanczos方法》，arXiv预印本 arXiv:2208.00567（2022年）。

[36] E.Tang，《量子主成分分析》仅因其量子态制备假设而实现指数级加速，《物理评论快报》127，060503（2021年）。