arXiv:2304.02871v1 [math.NT] 6 Apr 2023

关于双向广义斐波那契数列的线性空间

Martin Bunder

数学与应用统计学院，伍伦贡大学，澳大利亚，martin.bunder@uow.edu.au

Joseph Tonien

澳大利亚伍伦贡大学计算与信息技术学院，joseph.tonien@uow.edu.au

摘要

本文研究满足k阶递推方程 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + \cdots + F_{n-k}$的所有双向广义斐波那契数列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 所构成的线性空间。我们给出两种显式公式：一种基于广义二项式系数，另一种基于广义多项式系数。

AMS 分类号：11B37、11B39、47B37

关键词：广义斐波那契数列、广义二项式、广义多项式。

1 引言

斐波那契数列 $F_0 = 0$、 $F_1 = 1$、 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$已被以多种方式推广。其中一种推广 [12, 5, 17] 是将递推方程改为 $F_n = \alpha F_{n-1} + \beta F_{n-2}$，从而使特征方程仍保持为二阶。另一种常见的推广是将

递推方程扩展到更高阶。对于固定整数 $k \geq 2$，如果一个数列满足以下递推方程，则称其为 k 阶斐波那契数列

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + \cdots + F_{n-k}. \tag{1}$$

对于 k 的某些特定取值，这类数列有一个特殊名称。当 $k =$ 分别为 3、4、5 时，它们分别称为三阶斐波那契数列、四阶斐波那契数列和五阶斐波那契数列。

一个 k 阶斐波那契数列由一组 k 个连续项的值唯一确定。例如，若已知 F_0、F_1、.....、F_{k-1} 的值，则利用递推方程 (1)，可以求出所有其他项的值F_n，其中 $n \geq k$，负指标 $n < 0$ 的项也不例外。下面给出一个五阶斐波那契数列的例子：

$$\begin{aligned} &\ldots, F_{-4} = -2, F_{-3} = 7, F_{-2} = -3, F_{-1} = -4, \\ F_0 = \mathbf{3}, F_1 = \mathbf{1}, F_2 = \mathbf{4}, F_3 = \mathbf{1}, F_4 = \mathbf{5}, F_5 = 14, F_6 = 25, \ldots \quad &. \end{aligned}$$

由于原始斐波那契数列中有 $F_0 = 0$ 和 $F_1 = 1$，因此常见的初始条件有两种设定方式：(i) $F_0 = F_1 = \cdots = F_{k-2} = 0$、$F_{k-1} = 1$，如 [18, 9, 19, 13, 4, 6] 所示；或 (ii) $F_0 = 0$、$F_1 = \cdots = F_{k-2} = F_{k-1} = 1$，如 [14, 21, 3] 所示。另一种初始条件 $F_0 = F_1 = \cdots = F_{k-1} = 1$ 见于 Ferguson [8]，它源于对多相归并排序的研究。针对这三种初始条件，已有多种斐波那契数列公式，可归为三类：比内公式 [7, 13], 二项式系数 [8, 1]和多项式系数 [18, 13]。需要指出的是，这些 F_n 公式仅适用于整数指标 $n \geq 0$。比内型公式本质上是代数公式，在推广到负指标 $n < 0$ 时仍然成立。然而，涉及二项式系数和多项式系数的公式仅适用于非负指标，推广到负指标并非易事。

虽然大多数作者只考虑满足 F_n 且 $n \geq 0$ 的序列，但本文将研究双边序列。也就是说，这类序列 $\{F_n\}$ 的指标 $n \in \mathbb{Z}$，换言之，我们允许 n 为负整数。我们不再寻找满足特定初始条件的斐波那契数列的显式公式，而是旨在为具有任意初始条件（$F_0, F_1, \ldots, F_{k-1}$）的一般斐波那契数列求出显式公式。为此，我们考虑所有阶数为 k 的斐波那契数列所构成的集合。它构成一个 k 维线性空间。我们将研究这个线性空间的标准基，记作 $B^{(0)}, B^{(1)}, \ldots, B^{(k-1)}$。对于 $0 \leq j \leq k-1$，每个 $B^{(j)}$ 都是一个斐波那契数列，其初始值除 $B_j^{(j)} = 1$ 外均为零。我们将求出基序列 $B^{(0)}, B^{(1)}, \ldots, B^{(k-1)}$ 的显式公式，因此，任何斐波那契数列 F 都可以由线性组合 $F = F_0 B^{(0)} + F_1 B^{(1)} + \cdots + F_{k-1} B^{(k-1)}$ 确定。

我们的目标是分别为双向斐波那契数列求出用二项式系数和多项式系数表示的显式公式，

由于经典二项式系数和多项式系数只与非负整数相关，要将它们用于双向数列，我们需要把二项式记号和多项式系数记法扩展到包含负整数。为此，我们将二项式记号 $\binom{n}{i}$ 扩展到 n 和 i的负值，并将其写作 $\left\langle \binom{n}{i} \right\rangle$。在满足条件 $\left\langle \binom{n}{n} \right\rangle = 1$和 $\left\langle \binom{n-1}{i} \right\rangle + \left\langle \binom{n-1}{i-1} \right\rangle = \left\langle \binom{n}{i} \right\rangle$的情况下，后者称为帕斯卡递推方程，广义二项式记号的值便可唯一确定。在定理7中，我们将证明

$$\begin{aligned} B_n^{(j)} = &- \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \left\langle \binom{n-ik}{i-1} \right\rangle 2^{n+1-i(k+1)} \\ &+ \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \left\langle \binom{n-j-1-ik}{i-1} \right\rangle 2^{n-j-i(k+1)} \text{ for all } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

我们将多项式系数记法 $\binom{n}{i_1\ i_2\ \ldots,,,i_t}$ 推广到 n 和$i_1, \ldots, i_t$的负值，并将其记作 $\left\langle \binom{n}{i_1\ i_2\ ,,\ldots,i_t} \right\rangle$。推广方法如下。

利用广义二项式记号，我们将传统的多项式系数记法推广

$$\binom{n}{i_1, i_2, \ldots, i_k} = \binom{n}{i_2 + \cdots + i_t} \binom{i_2 + \cdots + i_t}{i_3 + \cdots + i_t} \cdots \binom{i_{t-2} + i_{t-1} + i_t}{i_{t-1} + i_t} \binom{i_{t-1} + i_t}{i_t},$$

to

$$\left\langle \binom{n}{i_1, i_2, \ldots, i_t} \right\rangle = \left\langle \binom{n}{i_2 + \cdots + i_t} \right\rangle \left\langle \binom{i_2 + \cdots + i_t}{i_3 + \cdots + i_t} \right\rangle \cdots \left\langle \binom{i_{t-2} + i_{t-1} + i_t}{i_{t-1} + i_t} \right\rangle \left\langle \binom{i_{t-1} + i_t}{i_t} \right\rangle.$$

利用这种广义多项式记法，我们将在定理12中证明

$$B_n^{(j)} = \sum_{n-k-j \le a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k \le n-k} \left\langle \binom{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{a_1, a_2, \ldots, a_k} \right\rangle, \text{ for all } n \in \mathbb{Z}.$$

本文其余部分安排如下。第 2 节一般性地研究 k 阶斐波那契数列的线性空间，尤其关注该空间的线性自同构。第 3 节推导基于广义二项式记号的公式。第 4 节推导基于广义多项式系数记法的公式。最后，第 5 节讨论广义斐波那契数列与铺砖问题之间的关系。

2 k 阶斐波那契线性空间

定义 1。设 $k \geq 2$ 为一个固定整数。若数列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足以下递推方程，则称其为 k 阶斐波那契数列

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + \cdots + F_{n-k},\ for\ all\ n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

我们可以看到，给定 k 值（F_0、F_1、.....、F_{k-1}），然后利用斐波那契递推方程（2），F_n 的所有其他值 $n \in \mathbb{Z}$ 都能被唯一确定。我们将（F_0、F_1、.....、F_{k-1}）称为该数列的初始值。所有阶数为 k 的斐波那契数列构成一个 k维向量空间（或者在域 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$上）。我们将使用斐波那契$^{(k)}$ 来表示所有阶数为 k的斐波那契数列组成的这个向量空间。现在我们定义斐波那契向量空间斐波那契$^{(k)}$的标准基。

定义2.设 $k \geq 2$ 为一个固定整数。对于每个整数 $0 \leq j \leq k-1$，序列 $B^{(j)} \in$ Fibonacci$^{(k)}$ 由初始值定义

$$B_n^{(j)} = \begin{cases} 0, & if\ 0 \leq n \leq k-1\ and\ n \neq j \\ 1, & if\ n = j. \end{cases}$$

上述特殊序列 $B^{(0)}, B^{(1)}, \ldots, B^{(k-1)}$ 构成空间 Fibonacci$^{(k)}$ 的标准基。这个 Fibonacci 向量空间中的任意元素都是标准基的线性组合，并且我们有以下定理。

定理1. 设 $k \geq 2$ 为一个固定整数。设 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 为一个 k 阶斐波那契数列。那么

$$F_n = \sum_{j=0}^{k-1} B_n^{(j)} F_j\ for\ all\ n \in \mathbb{Z}.$$

根据定理1，我们可以看出，要为任意斐波那契数列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$确定显式公式，只需推导出 k 基序列 $B^{(0)}$、$B^{(1)}$、...、$B^{(k-1)}$的公式。

2.1 斐波那契空间上的线性算子

这里列出一些作用于双边序列的标准线性算子。

- 恒等算子 I。
- 左移算子L：L$(X) = Y$ 当且仅当 $Y_n = X_{n+1}$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$。

• 右移算子 R：$\mathrm{R}(X) = Y$ 当且仅当 $Y_n = X_{n-1}$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$。左移和右移互为逆运算：$\mathrm{LR} = \mathrm{RL} = \mathrm{I}$。

• 前向差分算子 Δ：$\Delta(X) = Y$ 当且仅当 $Y_n = X_{n+1} - X_n$ 对所有$n \in \mathbb{Z}$成立。这里 $\Delta = \mathrm{L} - \mathrm{I}$。

• 后向差分算子 ∇：$\nabla(X) = Y$ 当且仅当 $Y_n = X_n - X_{n-1}$ 对所有$n \in \mathbb{Z}$成立。这里 $\nabla = \mathrm{I} - \mathrm{R} = \mathrm{I} - \mathrm{L}^{-1}$，$\mathrm{L}\nabla = \Delta$ 和 $\mathrm{R}\Delta = \nabla$。

我们有以下关于上述算子的定理。

定理 2。当限制在 Fibonacci$^{(k)}$ 空间上时，所有算子 I、L、R、 Δ 和 ∇ 都是 Fibonacci$^{(k)}$ $\to$Fibonacci$^{(k)}$ 上的线性自同构，并满足以下关系：

(i) $\mathrm{L}^k = \mathrm{I} + \mathrm{L} + \mathrm{L}^2 + \cdots + \mathrm{L}^{k-1}$.(ii)$\mathrm{R} = \mathrm{L}^{-1} = -\mathrm{I} - \mathrm{L} - \mathrm{L}^2 - \cdots - \mathrm{L}^{k-2} + \mathrm{L}^{k-1}$

(iii) $\mathrm{R}^k = \mathrm{I} - \mathrm{R} - \mathrm{R}^2 - \cdots - \mathrm{R}^{k-1}$.

(iv)$\mathrm{L} = \mathrm{R}^{-1} = \mathrm{I} + \mathrm{R} + \mathrm{R}^2 + \cdots + \mathrm{R}^{k-1}$.

(v) $\mathrm{L}^{k+1} = 2\mathrm{L}^k - \mathrm{I}$.

(vi) $\mathrm{R}^{k+1} = 2\mathrm{R} - \mathrm{I}$.

(vii) $\Delta(\mathtt{I} + (k-1)\mathtt{R} + (k-2)\mathtt{R}^2 + (k-3)\mathtt{R}^3 + \cdots + 2\mathtt{R}^{k-2} + \mathtt{R}^{k-1}) = (k-1)\mathtt{I}$.

(viii) $\nabla(k\mathrm{I} + (k-1)\mathrm{R} + (k-2)\mathrm{R}^2 + \cdots + 2\mathrm{R}^{k-2} + \mathrm{R}^{k-1}) = (k-1)\mathrm{I}$.

(ix) $\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i+1} \frac{k-1-2i}{k+1} \Delta^i = 0$.

(x) $(k-1)\mathtt{I} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i+1} (-1)^i \nabla^i = 0$.

证明。容易看出，所有这些算子 I、L、R、 Δ 和 ∇ 都是线性的。每个算子都会将一个斐波那契数列映射为另一个斐波那契数列。I、L、R 的双射性显而易见，而 Δ 和 ∇ 的双射性则分别由 (vii) 和 (viii) 得出。

(i) 对于任意 $X \in$斐波那契$^{(k)}$，令 $(\mathrm{I} + \mathrm{L} + \mathrm{L}^2 + \cdots + \mathrm{L}^{k-1})(X) = Y$则 $Y_n = X_n + X_{n+1} + X_{n+2} + \cdots + X_{n+k-1} = X_{n+k}$，因此，$Y = \mathrm{L}^k(X)$。这证明了，限制在线性空间 斐波那契$^{(k)}$上，$\mathrm{I} + \mathrm{L} + \mathrm{L}^2 + \cdots + \mathrm{L}^{k-1} = \mathrm{L}^k$。

(ii) 对于任意 $X \in$斐波那契$^{(k)}$，令 $(-\mathrm{I} - \mathrm{L} - \mathrm{L}^2 - \cdots - \mathrm{L}^{k-2} + \mathrm{L}^{k-1})(X) = Y$则 $Y_n = -X_n - X_{n+1} - X_{n+2} - \cdots - X_{n+k-2} + X_{n+k-1} = X_{n-1}$。因此，$Y = \mathrm{R}(X)$，从而，$-\mathrm{I} - \mathrm{L} - \mathrm{L}^2 - \cdots - \mathrm{L}^{k-2} + \mathrm{L}^{k-1} = \mathrm{R} = \mathrm{L}^{-1}$。

(iii) 对于任意 $X \in$ 斐波那契$^{(k)}$，令 $(\mathrm{I} - \mathrm{R} - \mathrm{R}^2 - \cdots - \mathrm{R}^{k-1})(X) = Y$ 则 $Y_n = X_n - X_{n-1} - X_{n-2} - \cdots - X_{n-k+1} = X_{n-k}$。因此，$Y = \mathrm{R}^k(X)$，从而，$\mathrm{I} - \mathrm{R} - \mathrm{R}^2 - \cdots - \mathrm{R}^{k-1} = \mathrm{R}^k$.

(iv)对任意 $X \in$斐波那契$^{(k)}$，令 $(\mathrm{I} + \mathrm{R} + \mathrm{R}^2 + \cdots + \mathrm{R}^{k-1})(X) = Y$则 $Y_n = X_n + X_{n-1} + X_{n-2} + \cdots + X_{n-k+1} = X_{n+1}$。因此，$Y = \mathrm{L}(X)$，从而，$\mathrm{I} + \mathrm{R} + \mathrm{R}^2 + \cdots + \mathrm{R}^{k-1} = \mathrm{L} = \mathrm{R}^{-1}$。

(v) 由 (i) 得，$\mathrm{L}^{k+1} = \mathrm{L}\,\mathrm{L}^k = \mathrm{L}(\mathrm{I} + \mathrm{L} + \mathrm{L}^2 + \cdots + \mathrm{L}^{k-1}) = \mathrm{L} + \mathrm{L}^2 + \cdots + \mathrm{L}^{k-1} + \mathrm{L}^k = (\mathrm{I} + \mathrm{L} + \mathrm{L}^2 + \cdots + \mathrm{L}^{k-1}) + \mathrm{L}^k - \mathrm{I} = \mathrm{L}^k + \mathrm{L}^k - \mathrm{I} = 2\mathrm{L}^k - \mathrm{I}$.

(vi) 由 (iii) 可知，$\mathrm{R}^{k+1} = \mathrm{R}\mathrm{R}^k = \mathrm{R}(\mathrm{I} - \mathrm{R} - \mathrm{R}^2 - \cdots - \mathrm{R}^{k-1}) = \mathrm{R} - \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}^3 - \cdots - \mathrm{R}^{k-1} - \mathrm{R}^k = \mathrm{R} - \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}^3 - \cdots - \mathrm{R}^{k-1} - (\mathrm{I} - \mathrm{R} - \mathrm{R}^2 - \cdots - \mathrm{R}^{k-1}) = 2\mathrm{R} - \mathrm{I}$。

(vii) 我们有

$$\begin{aligned}
&\Delta(\mathtt{I} + (k-1)\mathtt{R} + (k-2)\mathtt{R}^2 + (k-3)\mathtt{R}^3 + \cdots + 2\mathtt{R}^{k-2} + \mathtt{R}^{k-1}) \\
&= (\mathtt{L} - \mathtt{I})(\mathtt{I} + (k-1)\mathtt{R} + (k-2)\mathtt{R}^2 + (k-3)\mathtt{R}^3 + \cdots + 2\mathtt{R}^{k-2} + \mathtt{R}^{k-1}) \\
&= \mathtt{L} + (k-2)\mathtt{I} - \mathtt{R} - \mathtt{R}^2 - \cdots - \mathtt{R}^{k-2} - \mathtt{R}^{k-1} \\
&= (k-1)\mathtt{I} \quad \text{by (iv)}.
\end{aligned}$$

(viii) 我们有

$$\begin{aligned}
&\nabla(k\mathtt{I} + (k-1)\mathtt{R} + (k-2)\mathtt{R}^2 + \cdots + 2\mathtt{R}^{k-2} + \mathtt{R}^{k-1}) \\
&= (\mathtt{I} - \mathtt{R})(k\mathtt{I} + (k-1)\mathtt{R} + (k-2)\mathtt{R}^2 + \cdots + 2\mathtt{R}^{k-2} + \mathtt{R}^{k-1}) \\
&= k\mathtt{I} - \mathtt{R} - \mathtt{R}^2 - \cdots - \mathtt{R}^{k-1} - \mathtt{R}^k \\
&= (k-1)\mathtt{I} \quad \text{by (iii)}.
\end{aligned}$$

(ix) 将 $\mathrm{L} = \mathrm{I} + \Delta$ 代入 (i)，可得

$$(\mathtt{I} + \Delta)^k = \mathtt{I} + (\mathtt{I} + \Delta) + (\mathtt{I} + \Delta)^2 + \cdots + (\mathtt{I} + \Delta)^{k-1}$$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \Delta^i = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i}^{k-1} \binom{j}{i} \Delta^i = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i+1} \Delta^i.$$

因此，

$$\Delta^k = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\binom{k}{i+1} - \binom{k}{i} \right) \Delta^i = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i+1} \frac{k-1-2i}{k+1} \Delta^i.$$

(x) 将 $\mathrm{R} = \mathrm{I} - \nabla$ 代入 (iii)，得到

$$(\mathtt{I} - \nabla)^k = \mathtt{I} - (\mathtt{I} - \nabla) - (\mathtt{I} - \nabla)^2 - \cdots - (\mathtt{I} - \nabla)^{k-1}.$$

So

$$\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-\nabla)^i = -\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(-\nabla)^i = -(k-1)\mathtt{I} - \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i}^{k-1}\binom{j}{i}(-\nabla)^i$$
$$= -(k-1)\mathtt{I} - \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i+1}(-\nabla)^i.$$

因此,

$$(-\nabla)^k = -(k-1)\mathtt{I} - \sum_{i=1}^{k-1}\left(\binom{k}{i+1} + \binom{k}{i}\right)(-\nabla)^i$$
$$= -(k-1)\mathtt{I} - \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k+1}{i+1}(-\nabla)^i$$

and

$$\sum_{i=1}^{k}\binom{k+1}{i+1}(-\nabla)^i = -(k-1)\mathtt{I}. \quad \blacksquare$$

定理 3. 记 $S = B^{(0)} + B^{(1)} + \cdots + B^{(k-1)} \in$斐波那契$^{(k)}$。我们有

(i) 对所有 $1 \le j \le k-1$, $B^{(j)} - B^{(j-1)} = \mathrm{R}^j(B^{(0)})$。
(ii) 对所有 $0 \le j \le k-1$, $B^{(j)} = \sum_{i=0}^{j}\mathrm{R}^i(B^{(0)})$。

(iii) $B^{(0)} = \mathrm{R}(B^{(k-1)})$ 和 $B^{(k-1)} = \mathrm{L}(B^{(0)})$。

(iv) 对所有 $0 \le j \le k-1$, $B^{(j)} = \sum_{i=0}^{j}\mathrm{R}^{i+1}(B^{(k-1)})$。
(v) $S = (k\mathrm{I} + (k-1)\,\mathrm{R} + (k-2)\,\mathrm{R}^2 + \cdots + \mathrm{R}^{k-1})(B^{(0)})$。

(vi) $\nabla(S) = (k-1)B^{(0)}$.

(vii) $(\mathtt{I} - \mathtt{R}^{j+1})(S) = (k-1)B^{(j)}$ *for all* $0 \le j \le k-1$.

证明。 (i) $B^{(j)} - B^{(j-1)}$ 和 $\mathrm{R}^j(B^{(0)})$ 都是 Fibonacci$^{(k)}$ 的成员，且它们的初始值相同，因此， $B^{(j)} - B^{(j-1)} = \mathrm{R}^j(B^{(0)})$。

（ii）由（i）可得。

（iii）由（ii）， $B^{(k-1)} = \sum_{i=0}^{k-1}\mathrm{R}^i(B^{(0)})$，且由于 $\mathrm{L} = \mathrm{R}^{-1} = \mathrm{I} + \mathrm{R} + \mathrm{R}^2 + \cdots + \mathrm{R}^{k-1}$（定理 2(iv)），我们得到 $B^{(k-1)} = \mathrm{L}(B^{(0)})$，因此 $B^{(0)} = \mathrm{R}(B^{(k-1)})$。

(iv) 由 (ii) 和 (iii) 可得。

(v) 由 (ii) 可得。

(vi) 由 (v) 和定理 2(viii) 可得。

(vii) 我们有

$$\begin{aligned}(k-1)B^{(j)} &= (k-1)\sum_{i=0}^{j} \mathtt{R}^i(B^{(0)}) \quad \text{by (ii)} \\ &= \sum_{i=0}^{j} \mathtt{R}^i(\nabla(S)) \quad \text{by (vi)} \\ &= \sum_{i=0}^{j} (\mathtt{R}^i(1-\mathtt{R}))(S) = (1-\mathtt{R}^{j+1})(S).\end{aligned}$$

证明 (vii) 的另一种直接方法是注意到，$(k-1)B^{(j)}$ 和 $(1-\mathtt{R}^{j+1})(S)$ 都属于 Fibonacci$^{(k)}$，且它们的初始值相等。■

3 基于二项式的显式公式

本节将推导双边 Fibonacci 基序列 $B^{(0)}, B^{(1)}, \ldots, B^{(k-1)}$ 的显式公式，并用二项式系数表示。由于传统的二项式记号与非负整数相关联，为了将其用于双边序列，我们需要把二项式记号扩展到包含负整数。为此，我们将二项式记号 $\binom{n}{i}$ 扩展到 n 和 i 的负值。

通过满足以下两个条件，二项式记号 $\binom{n}{i}$ 可推广为适用于所有整数 n 和 i 的 $\left\langle\binom{n}{i}\right\rangle$：

- $\left\langle\binom{n}{n}\right\rangle = 1$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$；并且
- 帕斯卡递推关系

$$\left\langle\binom{n-1}{i}\right\rangle + \left\langle\binom{n-1}{i-1}\right\rangle = \left\langle\binom{n}{i}\right\rangle. \tag{3}$$

满足这两个条件后，$\left\langle \binom{n}{i} \right\rangle$ 便唯一确定为

$$\left\langle \binom{n}{i} \right\rangle = \begin{cases} \frac{n^{\underline{n-i}}}{(n-i)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(i+1)}{(n-i)!}, & \text{if } n \geq i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

$$= \begin{cases} \binom{n}{i}, & \text{if } n \geq i \geq 0 \\ (-1)^{i+n}\binom{-i-1}{-n-1}, & \text{if } -1 \geq n \geq i\,. \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}$$

关于二项式记号的各种推广，详细讨论请参见 [15, 16] 。下表展示了 $\left\langle \binom{n}{i} \right\rangle$ 的一些取值:

$\left\langle \binom{n}{i} \right\rangle$		i												
		-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
	6	0	0	0	0	0	0	1	6	15	20	15	6	1
	5	0	0	0	0	0	0	1	5	10	10	5	1	0
	4	0	0	0	0	0	0	1	4	6	4	1	0	0
	3	0	0	0	0	0	0	1	3	3	1	0	0	0
n	2	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	-1	-1	1	-1	1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
	-2	5	-4	3	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	-3	-10	6	-3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-4	10	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-5	-5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

在以下定理中，我们定义一个辅助数列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ，它将在后文中发挥作用。注意，该数列不是线性空间 Fibonacci$^{(k)}$ 的成员。该定理的证明是帕斯卡递推关系 (3) 的推论。

定理 4。设 $k \geq 2$ 和定义为如下的序列 $\{A_n\}$

$$A_n = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \left\langle \binom{n-ik}{i-1} \right\rangle 2^{n+1-i(k+1)} \text{ for all } n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

然后 $A_0 = A_1 = A_2 = \cdots = A_{k-1} = 0$, $A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + \cdots + A_{n-k} - 1$和 $A_n = 2A_{n-1} - A_{n-k-1}$.

证明。注意到 A_n 的公式中的上述求和只有有限个非零项。这是因为 $\left\langle \binom{n-ik}{i-1} \right\rangle = 0$, 除了当 $n \geq 0$ 时 $1 \leq i \leq \frac{n+1}{k+1}$，以及对于 $n \leq -1$ 的 $\frac{n+1}{k} \leq i \leq \frac{n+1}{k+1}$ 。由此可得 $A_0 = A_1 = A_2 =$ $\cdots = A_{k-1} = 0$ 和 $A_k = -1$。

我们有

$$\begin{aligned}2A_{n-1}-A_{n-k-1}=&2\sum(-1)^i\left\langle\binom{n-1-ik}{i-1}\right\rangle 2^{n-i(k+1)}\\&-\sum(-1)^i\left\langle\binom{n-k-1-ik}{i-1}\right\rangle 2^{n-k-i(k+1)}\\=&\sum(-1)^i\left\langle\binom{n-1-ik}{i-1}\right\rangle 2^{n+1-i(k+1)}\\&+\sum(-1)^{i+1}\left\langle\binom{n-1-(i+1)k}{i-1}\right\rangle 2^{n+1-(i+1)(k+1)}.\end{aligned}$$

在最后一个求和式中，令 $i:=i+1$，我们得到

$$\begin{aligned}2A_{n-1}-A_{n-k-1}=&\sum(-1)^i\left\langle\binom{n-1-ik}{i-1}\right\rangle 2^{n+1-i(k+1)}\\&+\sum(-1)^i\left\langle\binom{n-1-ik}{i-2}\right\rangle 2^{n+1-i(k+1)}\end{aligned}$$

根据帕斯卡递推式 (3)，

$$\begin{aligned}2A_{n-1}-A_{n-k-1}=&\sum(-1)^i\left\langle\binom{n-ik}{i-1}\right\rangle 2^{n+1-i(k+1)}\\=&A_n.\end{aligned}$$

因此，$(\mathrm{R}^{k+1}-2\mathrm{R}+\mathrm{I})(A)=0$。

由于 $\mathrm{R}^{k+1}-2\mathrm{R}+\mathrm{I}=(\mathrm{R}-\mathrm{I})(\mathrm{R}^k+\mathrm{R}^{k-1}+\cdots+\mathrm{R}-\mathrm{I})$，可知 $(\mathrm{R}^k+\mathrm{R}^{k-1}+\cdots+\mathrm{R}-\mathrm{I})(A)$ 是一个常数序列，因此 $A_{n-1}+A_{n-2}+\cdots+A_{n-k}-A_n=A_0+A_1+\cdots+A_{k-1}-A_k=1$。■

回顾定理 3 中定义的序列 $S=B^{(0)}+B^{(1)}+\cdots+B^{(k-1)}\in\text{Fibonacci}^{(k)}$。下面的定理给出了序列$S$的显式公式。

定理 5. 设 $k\geq 2$。k 阶斐波那契数列 S（由前 k 项（$1,1,\ldots,1$）确定）满足以下公式

$$S_n=1-(k-1)\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\left\langle\binom{n-ik}{i-1}\right\rangle 2^{n+1-i(k+1)}\ \textit{for all}\ n\in\mathbb{Z}.\qquad(7)$$

证明。令 S'_n 表示(7) 右侧的数列，则 $S'_n=1-(k-1)A_n$，其中 $\{A_n\}$ 是定理 4中定义的辅助数列。由定理 4可知 $S'_0=S'_1=\cdots=S'_{k-1}=1$、$S'_k=k$ 和 $S'_n=2S'_{n-1}-S'_{n-k-1}$。根据定理 2(vi)，数列 S 也满足相同的递推方程 $S_n=2S_{n-1}-S_{n-k-1}$。由于对于所有 $0\leq i\leq k$，$S_i=S'_i$，因此对于所有 $i\in\mathbb{Z}$，$S_i=S'_i$。■

定理6。令 $k \geq 2$。 k 阶斐波那契数列 S （由前 k 项（1, 1, . . ., 1）确定）满足以下公式

$$S_n = 1 - (k-1) \sum_{1 \leq i \leq \frac{n+1}{k+1}} (-1)^i \binom{n-ik}{i-1} 2^{n+1-i(k+1)} \text{ for all } n \geq 0, \quad (8)$$

$$S_n = 1 - (k-1) \sum_{\frac{n+1}{k} \leq i \leq \frac{n+1}{k+1}} (-1)^i \left\langle \binom{n-ik}{i-1} \right\rangle 2^{n+1-i(k+1)} \text{ for all } n \leq -1. \quad (9)$$

证明。由于 $\left\langle \binom{n-ik}{i-1} \right\rangle = 0$ 除了 $1 \leq i \leq \frac{n+1}{k+1}$ 当 $n \geq 0$ 且 $\frac{n+1}{k} \leq i \leq \frac{n+1}{k+1}$ 对于 $n \leq -1$，该定理由定理 5 得出。■

定理7。设 $k \geq 2$, $0 \leq j \leq k-1$。 k阶斐波那契数列 $B^{(j)}$满足以下公式。

$$\begin{aligned} B_n^{(j)} = &- \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \left\langle \binom{n-ik}{i-1} \right\rangle 2^{n+1-i(k+1)} \\ &+ \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \left\langle \binom{n-j-1-ik}{i-1} \right\rangle 2^{n-j-i(k+1)} \text{ for all } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

证明。根据定理 3(vii)， $B^{(j)} = \frac{1}{k-1}(\mathrm{I} - \mathrm{R}^{j+1})(S)$，因此，利用定理 5 中 S_n 的公式 (7)，我们得到所需的 $B_n^{(j)}$ 公式。■

定理6中 S_n 的公式 (8) 等价于 Ferguson [8] 中的一个公式（V_n的公式 (3)，$a(n+1)+b$）。Benjamin 等人 [1] 证明了定理7在 $j = k-1$ 且指标为正数时的情形。

4 基于多项式的显式公式

在本节中，我们将推导以多项式系数表示的双边斐波那契基序列 $B^{(0)}, B^{(1)}, \ldots, B^{(k-1)}$ 的显式公式。由于传统的多项式系数记法与非负整数相关联，为了将其用于我们的双边序列，我们需要将多项式系数记法扩展到包含负整数。为此，我们将多项式系数记法 $\binom{n}{i_1\ i_2\ ,\ldots,i_t}$ 扩展到负值 n 和 $i_1, i_2, \ldots, i_t$。

多项式定义为

$$(i_1, i_2, \ldots, i_t) = \binom{i_1 + i_2 + \cdots + i_t}{i_1, i_2, \ldots, i_t} = \frac{(i_1 + i_2 + \cdots + i_t)!}{i_1! i_2! \ldots i_t!}.$$

我们观察到

$$(i_1, i_2, \ldots, i_t) = \binom{i_1 + \cdots + i_t}{i_2 + \cdots + i_t} \binom{i_2 + \cdots + i_t}{i_3 + \cdots + i_t} \cdots \binom{i_{t-2} + i_{t-1} + i_t}{i_{t-1} + i_t} \binom{i_{t-1} + i_t}{i_t}.$$

我们将使用此公式将多项式系数记法扩展到负整数。

定义 3. 设 $t \geq 2$ 是一个整数。对于任意整数 $i_1, i_2, \ldots, i_t$，广义多项式 $\langle (i_1, i_2, \ldots, i_t) \rangle$ 定义为

$$\begin{aligned}
&\langle (i_1, i_2, \ldots, i_t) \rangle = \left\langle \binom{i_1 + i_2 + \cdots + i_t}{i_1, i_2, \ldots, i_t} \right\rangle \\
&= \left\langle \binom{i_1 + \cdots + i_t}{i_2 + \cdots + i_t} \right\rangle \left\langle \binom{i_2 + \cdots + i_t}{i_3 + \cdots + i_t} \right\rangle \cdots \left\langle \binom{i_{t-2} + i_{t-1} + i_t}{i_{t-1} + i_t} \right\rangle \left\langle \binom{i_{t-1} + i_t}{i_t} \right\rangle.
\end{aligned}$$

利用广义二项式系数的以下公式

$$\left\langle \binom{n}{i} \right\rangle = \begin{cases} \frac{n^{\underline{n-i}}}{(n-i)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(i+1)}{(n-i)!}, & \text{if } n \geq i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

我们得到广义多项式的以下公式

$$\begin{aligned}
&\langle (i_1, i_2, \ldots, i_t) \rangle = \left\langle \binom{i_1 + i_2 + \cdots + i_t}{i_1, i_2, \ldots, i_t} \right\rangle \\
&= \begin{cases} \dfrac{(i_1 + \cdots + i_t)^{\underline{i_1}} (i_2 + \cdots + i_t)^{\underline{i_2}} \ldots (i_{t-1} + i_t)^{\underline{i_{t-1}}}}{i_1! i_2! \ldots i_{t-1}!}, & \text{if } i_1, i_2, \ldots, i_{t-1} \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.
\end{aligned}$$

当 $t = 2$ 时，帕斯卡递推关系变为

$$\langle (i_1, i_2) \rangle = \langle (i_1 - 1, i_2) \rangle + \langle (i_1, i_2 - 1) \rangle.$$

对于一般的 $t \geq 2$，多项式系数满足以下广义帕斯卡递推关系：

$$\begin{aligned}
&\langle (i_1, i_2, \ldots, i_t) \rangle \\
&= \langle (i_1 - 1, i_2, \ldots, i_t) \rangle + \langle (i_1, i_2 - 1, \ldots, i_t) \rangle + \cdots + \langle (i_1, i_2, \ldots, i_t - 1) \rangle. \quad (10)
\end{aligned}$$

由于$\left\langle \binom{n}{i} \right\rangle$ 仅在 $n \geq i \geq 0$ 或 $-1 \geq n \geq i$时非零，广义多项式 $\langle (i_1, i_2, \ldots, i_t) \rangle$ 仅在 $i_1 + \cdots + i_t \geq i_2 + \cdots + i_t \geq$时非零

$\cdots \geq i_{t-1} + i_t \geq i_t \geq 0$或 $-1 \geq i_1 + \cdots + i_t \geq i_2 + \cdots + i_t \geq \cdots \geq i_{t-1} + i_t \geq i_t$。
利用$\left\langle \binom{n}{i} \right\rangle$的公式（5），我们可以分别推导出这两种情况下广义多项式的公式。

情况1. 如果 $i_1+\cdots+i_t \geq i_2+\cdots+i_t \geq \cdots \geq i_{t-1}+i_t \geq i_t \geq 0$，即 $i_1, i_2, \ldots, i_t \geq 0$，那么

$$\langle (i_1, i_2, \ldots, i_t) \rangle = \left\langle \binom{i_1+i_2+\cdots+i_t}{i_1, i_2, \ldots, i_t} \right\rangle = \binom{i_1+i_2+\cdots+i_t}{i_1, i_2, \ldots, i_t} = (i_1, i_2, \ldots, i_t).$$

情况 2. 如果 $-1 \geq i_1+\cdots+i_t \geq i_2+\cdots+i_t \geq \cdots \geq i_{t-1}+i_t \geq i_t$，那么

$$\begin{aligned}\langle (i_1, i_2, \ldots, i_t) \rangle &= \left\langle \binom{i_1+i_2+\cdots+i_t}{i_1, i_2, \ldots, i_t} \right\rangle \\ &= (-1)^{i_1+\cdots+i_{t-1}} \binom{-i_t-1}{i_1, i_2, \ldots, i_{t-1}, -i_1-\cdots-i_t-1} \\ &= (-1)^{i_1+\cdots+i_{t-1}} (i_1, i_2, \ldots, i_{t-1}, -i_1-\cdots-i_t-1).\end{aligned}$$

因此，我们得到以下定理，它将广义多项式系数与经典多项式系数联系起来。

定理 8. 对于任意整数 $t \geq 2$ 和 i_1、i_2、…、$i_t \in \mathbb{Z}$，有

$$\begin{aligned}&\langle (i_1, i_2, \ldots, i_t) \rangle \\ &= \begin{cases} (i_1, i_2, \ldots, i_t), & \text{if } i_1, i_2, \ldots, i_t \geq 0 \\ (-1)^{i_1+\cdots+i_{t-1}} (i_1, i_2, \ldots, i_{t-1}, -i_1-\cdots-i_t-1) & \text{if } i_1, i_2, \ldots, i_{t-1} \geq 0 \text{ and } i_1+\cdots+i_t \leq -1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}\end{aligned}$$

在以下定理中，我们定义一个辅助数列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$。注意，X 是斐波那契$^{(k)}$线性空间中的一个元素。

定理 9. 令 $k \geq 2$、$c \in \mathbb{Z}$ 为任意常数，并且

$$\begin{aligned}X_n &= \sum_{a_1+2a_2+\cdots+ka_k=n+c} \langle (a_1, a_2, \ldots, a_k) \rangle \\ &= \sum_{s_1+s_2+\cdots+s_k=n+c} \left\langle \binom{s_1}{s_2} \right\rangle \left\langle \binom{s_2}{s_3} \right\rangle \cdots \left\langle \binom{s_{k-1}}{s_k} \right\rangle.\end{aligned}$$

那么 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一个 k 阶斐波那契数列。

证明。通过使用变量$s_1 = a_1+\cdots+a_k$、$s_2 = a_2+\cdots+a_k$、……、$s_{k-1} = a_{k-1}+a_k$和 $s_k = a_k$，右端的两个公式是等价的。

注意，求和仅包含有限个非零项。这是因为 $\langle (a_1, a_2, \ldots, a_k) \rangle$ 仅当 $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k \geq 0$或$-1 \geq s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k$时才非零，而可供选择的数量仅为有限个

$s_1, s_2, \ldots, s_k$ 具有相同的符号，其和 $s_1 + s_2 + \cdots + s_k = n + c$ 是固定的。

根据帕斯卡递推关系 (10),

$$\begin{aligned} X_n = & \sum_{a_1+2a_2+\cdots+ka_k=n+c} \langle (a_1 - 1, a_2, \ldots, a_k) \rangle \\ & + \sum_{a_1+2a_2+\cdots+ka_k=n+c} \langle (a_1, a_2 - 1, \ldots, a_k) \rangle \\ & + \cdots + \sum_{a_1+2a_2+\cdots+ka_k=n+c} \langle (a_1, a_2, \ldots, a_k - 1) \rangle. \end{aligned}$$

设 $a_1' = a_1 - 1, a_2' = a_2 - 1, \ldots, a_k' = a_k - 1$。我们有

$$\begin{aligned} X_n = & \sum_{a_1'+2a_2+\cdots+ka_k=n+c-1} \langle (a_1', a_2, \ldots, a_k) \rangle \\ & + \sum_{a_1+2a_2'+\cdots+ka_k=n+c-2} \langle (a_1, a_2', \ldots, a_k) \rangle \\ & + \cdots + \sum_{a_1+2a_2+\cdots+ka_k'=n+c-k} \langle (a_1, a_2, \ldots, a_k') \rangle \\ & = X_{n-1} + X_{n-2} + \cdots + X_{n-k}, \end{aligned}$$

因此，$\{X_n\}$ 是一个 k 阶斐波那契数列。■

定理 10. 设 $k \geq 2$。那么

$$B_n^{(0)} = \sum_{a_1+2a_2+\cdots+ka_k=n-k} \langle (a_1, a_2, \ldots, a_k) \rangle, \ \textit{for all } n \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

证明。令 B' 表示右端项，则根据定理 9，B' 是一个斐波那契数列。我们只需证明它的初始值与 $B^{(0)}$的初始值相同。

同样，如定理 9 的证明中所做的那样，我们使用变量 $s_1 = a_1 + \cdots + a_k, s_2 = a_2 + \cdots + a_k, \ldots, s_{k-1} = a_{k-1} + a_k$ 和 $s_k = a_k$，于是 $s_1 + s_2 + \cdots + s_k = n - k$。当 $n = 0$, $s_1 + s_2 + \cdots + s_k = -k < 0$ 时，$\langle (a_1, a_2, \ldots, a_k) \rangle$ 非零的唯一可能是 $-1 \geq s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k$。唯一的可能性是 $s_1 = s_2 = \cdots = s_k = -1$，由此得到 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1} = 0, a_k = -1$ 和 $B_0' = \langle (0, \ldots, 0, -1) \rangle = 1$。

当 $1 \leq n \leq k-1$、$-(k-1) \leq s_1 + s_2 + \cdots + s_k = n - k < 0$ 时。不存在满足此条件的 $-1 \geq s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k$，因此求和为空，并且对于 $1 \leq n \leq k-1$, $B_n' = 0$。■

定理 11。设 $k \geq 2$。那么

$$B_n^{(k-1)} = \sum_{a_1+2a_2+\cdots+ka_k=n-k+1} \langle (a_1, a_2, \ldots, a_k) \rangle, \ \textit{for all } n \in \mathbb{Z}.$$

证明。根据定理 3(iii)， $B^{(k-1)} = \mathrm{L}(B^{(0)})$，因此使用定理10 中关于 $B_n^{(0)}$的公式，我们得到所需的 $B_n^{(k-1)}$公式。■

Miles [18] 证明了定理 11 中的公式适用于自然数 $n \geq k-1$。我们的定理 11 将其推广到 $n < k-1$ 和负整数 n。

Rabinowitz [20] 研究的 Tribonacci 数列 $\{T_n\}_{n\geq 0}$ 是一个阶数为 $k = 3$ 、初始值为 $T_0 = 0$、 $T_1 = 1$、 $T_2 = 1$的斐波那契数列。解出T_{-1}，可得 $T_{-1} = 0$，因此 $T = \mathrm{L}(B^{(2)})$。Rabinowitz [20] 证明了定理 11 中的公式适用于 $k = 3$ 和 $n \geq 2$。我们的定理 11 将其推广到所有阶数为$k \geq 2$ 的情形以及所有指标 $n \in \mathbb{Z}$。

下一个定理给出了所有阶数为 k的基斐波那契数列的显式公式。

定理12。设 $k \geq 2$。对于任意 $0 \leq j \leq k-1$,

$$B_n^{(j)} = \sum_{n-k-j \leq a_1+2a_2+\cdots+ka_k \leq n-k} \langle (a_1, a_2, \ldots, a_k) \rangle, \ for\ all\ n \in \mathbb{Z}.$$

证明。根据定理 3(ii)， $B^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} \mathrm{R}^i(B^{(0)})$，因此利用定理10中关于 $B_n^{(0)}$ 的公式，我们得到所需的 $B_n^{(j)}$ 公式。■

定理 11 和定理12得出了序列$B^{(k-1)}$的两个不同公式。若能给出这两个公式相等的组合证明，将会很有意思。

5 关于铺砖问题的注记

众所周知，经典的斐波那契数列 $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ 与铺砖问题有着密切的关系。数值 F_n 统计了使用方形砖块 1×1 和多米诺骨牌1×2铺满一个 $1 \times n$-棋盘的方法数。这是因为对于 $n \geq 2$，考察第一块砖：如果第一块砖是方形砖块，那么铺满剩余长度为 $n-1$的条带有 F_{n-1} 种方法；如果第一块砖是多米诺骨牌，那么铺满剩余长度为 $n-2$的条带有 F_{n-2} 种方法。这就是递推方程 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ 的由来。

如果允许使用长度至多为 k 的瓦片，那么结果就是一个序列 $\{C_n\}_{n\geq 0}$。我们有 $C_0 = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = C_0 + C_1$, $C_3 = C_0 + C_1 + C_2$,. .. , $C_{k-1} = C_0 + C_1 + \cdots + C_{k-2}$，且对于 $n \geq k$， $C_n = C_{n-1} + C_{n-2} + \cdots + C_{n-k}$。当然，如果将指标扩展到负整数，并设 $C_{-1} = C_{-2} = \cdots = C_{-(k-2)} = 0$，那么我们就得到斐波那契递推公式 $C_n = C_{n-1} + C_{n-2} + \cdots + C_{n-k}$

对所有 $n \geq 2$都成立。这个序列 C 只是基序列$B^{(k-1)}$的左移。事实上， $C = \mathrm{R}^{k-2}(B^{(k-1)})$。Gabai、Philippou、Muwafi、Benjamin、Heberle、Quinn 和 Su 等许多学者 [19, 9, 1, 2] 都研究过这个铺砖问题。在这里，我们决定用字母 C 表示这个序列，因为它与一个组合问题有关。

参考文献

[1] A. T. Benjamin和 C.R.Heberle，关于 r-斐波那契数的计数，《斐波那契季刊》52(2)，121–128，2014。[2] A. T.Benjamin、J.J.Quinn和F. E. Su，分阶段铺砌与广义斐波那契恒等式，《斐波那契季刊》38(3)，282–289，2000。[3] M. Bunder 和 J. Tonien，广义斐波那契数及其2-adic 阶，《整数》20，#A105，2020。[4] A. P.Chaves和 D.Marques，与连续 k-广义斐波那契数平方和相关的丢番图方程，《斐波那契季刊》52(1)，70–74，2014。[5] T. W.Cusick，关于与一个广义斐波那契数列相关的某个整数，《斐波那契季刊》6(2)，117–126，1968。[6] M.Ddamulira、C. A.Gomez和F.Luca，关于Pillai的一个涉及k–广义斐波那契数和2 的幂的问题，《数学月刊》187，635–664，2018。[7] T.P. Dence，广义斐波那契数列的比值，《斐波那契季刊》25(2)，137–143，1987。[8] D.E.Ferguson，广义斐波那契数的一个表达式，《斐波那契季刊》4(3)，270–272，1966。[9] H.Gabai，广义斐波那契 k-数列，《斐波那契季刊》8(1)，31–38，1970。[10] F.T.Howard和 C.Cooper，关于 r-斐波那契数的一些恒等式，《斐波那契季刊》49(3)，231–242，2011。[11] D. Kessler 和J.Schiff，关于 Ferguson的 k-广义斐波那契数公式的一个组合证明及推广，《斐波那契季刊》42(3)，266–273，2004。[12] I. I.Kolodner，关于与广义斐波那契数列相关的一个生成函数，《斐波那契季刊》3(4)，272–278，1965。

[13] G-Y. Lee、S-G. Lee、J-S. Kim 和 H-K. Shin，k-广义斐波那契数的比内公式及其表示，《斐波那契季刊》，39(2)，158–164，2001[14] T. Lengyel 和 D. Marques，某些广义斐波那契数的 2-adic 阶，《Integers》17(2017)，# A5。[15] D. E. Loeb，含有负个元素的集合，《数学进展》，91(1)，64–74，1992。[16] D. E. Loeb，二项式系数的推广，《离散数学》，105(1–3)，143–156，1992。[17] R. S. Melham，涉及广义斐波那契数和卢卡斯数的有限和的若干类，《斐波那契季刊》42(1)，47–54，2004。[18] E. P. Miles Jr，广义斐波那契数及其相关矩阵，《美国数学月刊》，67(8)，745–752，1960。[19] A. N. Philippou 和 A. A. Muwafi，等待连续 k次成功与 k阶斐波那契数列，《斐波那契季刊》20(1)，28–32，1982。[20] S. Rabinowitz，三阶线性递推的算法操作，《斐波那契季刊》34(5)，447–464，1996。[21] B. Sobolewski，广义斐波那契数列的 2-adic 赋值及其在某些丢番图方程中的应用，《数论杂志》，180，730–742，2017。