arXiv:2304.02881v2 [math.AP] 4 May 2024

WESTERVELT–PENNES–CATTANEO模型：弛豫时间趋于零时的局部适定性与奇异极限

IMEN BENABBAS[†] 和 BELKACEM SAID-HOUARI[‡]

Abstract. 在本文中，我们研究了一种基于Westervelt方程与双曲型Pennes生物热方程耦合系统的非线性超声加热数学模型（Westervelt–Pennes–Cattaneo 模型）。利用能量方法结合不动点论证，我们证明了在Westervelt方程的压力数据满足小性假设的条件下，该模型是局部适定的且不会退化。此外，我们进行了奇异极限分析，并证明随着弛豫参数趋于零，Westervelt–Pennes–Fourier 模型可以被视为 Westervelt–Pennes–Cattaneo 模型的一个近似。这是通过推导关于弛豫参数的一致解界得到的。

1. Introduction

我们关注一个非线性热声学系统的分析，该系统用于建模超声波（例如高强度聚焦超声（HIFU））在热黏性流体中的传播。随着其在碎石术、热疗、超声清洗和声化学等医疗及工业领域中的各种应用， [8, 10, 11, 19, 32], HIFU的行为及描述它的数学模型正受到研究人员的广泛关注。例如，在医疗程-序中，聚焦超声被用于产生局部加热，从而摧毁目标区域。事实上，这项技术在治疗良性和恶性肿瘤方面正逐渐显示出其成效 [8, 19]。由于声波的高频特性，其传播过程中的非线性效应无法忽略；在非线性声学领域，Westervelt方程 [28]已被充分确立为考虑这一效应的方程。

本文研究一个耦合系统，其中包括描述压力的 Westervelt方程和描述温度的双曲型彭尼斯方程。具体而言，我们考虑如下系统。

$$\begin{cases} p_{tt} - c^2(\bar{\Theta})\Delta p - b\Delta p_t = K(\bar{\Theta})\left(p^2\right)_{tt}, & \text{in } \Omega\times(0,T),\\ \rho_{\mathrm{a}}C_{\mathrm{a}}\bar{\Theta}_t + \nabla\cdot q + \rho_{\mathrm{b}}C_{\mathrm{b}}W(\bar{\Theta}-\Theta_{\mathrm{a}}) = \mathcal{Q}(p_t), & \text{in } \Omega\times(0,T),\\ \tau q_t + q + \kappa_{\mathrm{a}}\nabla\bar{\Theta} = 0, & \text{in } \Omega\times(0,T). \end{cases} \tag{1.1}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35L70,35K05.*Key words and phrases.* 超声加热，Westervelt 方程，非线性声学，Pennes 生物热方程，Cannateo模型，HIFU。

[†]AMNEDP 实验室，USTHB 数学系（ibenabbas@usthb.dz）。
[‡]沙迦大学理学院数学系，邮政信箱：27272，阿拉伯联合酋长国沙迦（bhouari@sharjah.ac.ae）。

这里，声压和温度波动分别记为 p 和 Θ； c 是声速， $b>0$ 是声扩散率。函数 $K(\bar{\Theta})$可以依赖于 Θ ，其定义为

$$K(\bar{\Theta})=\frac{\beta_{\mathrm{acous}}}{\rho c^{2}(\bar{\Theta})},$$

其中， ρ 是质量密度， β_{acous} 是非线性参数。第二个方程中的源项 $\mathcal{Q}(p_t)$表示被组织吸收的声能。介质参数 ρ_{a}、 C_{a} 和 κ_{a} 分别表示组织的环境密度、环境热容和热导率。附加的项 $\rho_{\mathrm{b}}C_{\mathrm{b}}W(\Theta-\Theta_{\mathrm{a}})$表示血液循环导致的热损失，其中 ρ_{b}、 C_{b}分别为血液的密度和比热容，而 W 表示组织的体积灌注率，其单位为每毫升组织每秒所灌注的血液毫升数。

(1.1) 中的第二个和第三个方程构成了Pennes方程(1.3)的双曲型版本，其中热传导由卡泰内奥定律（或卡泰内奥–麦克斯韦定律）描述。我们为 (1.1) 补充初始条件

$$p|_{t=0}=p_0,\quad p_t|_{t=0}=p_1,\quad \bar{\Theta}|_{t=0}=\bar{\Theta}_0,\quad q|_{t=0}=q_0$$

以及狄利克雷边界条件

$$p|_{\partial\Omega}=0,\qquad \bar{\Theta}|_{\partial\Omega}=\Theta_{\mathrm{a}},$$

其中， Θ_{a} 表示环境温度，通常取人体的 $37^{\circ}C$；见 [5]。

当 c 和 K 为常数时，(1.1)中的第一个方程退化为压力 $p(x,t)$的Westervelt方程:

$$p_{tt}-c^{2}\Delta p-b\Delta p_t=K\left(p^{2}\right)_{tt}. \tag{1.2}$$

方程（1.2）广泛应用于声学，描述声波在流体介质中的传播。假设满足傅里叶热传导定律并考虑热黏性效应，即可从纳维–斯托克斯–傅里叶模型推导出该方程。更多详情请参见 [28], [6] 和 [17, 第 5] 章。近年来，人们在理解Westervelt方程的解及其行为方面取得了显著进展；参见 [4, 13, 14, 16, 20, 27] 及其中的参考文献。文献 [14, 20, 27] 研究了在不同类型的边界条件和各种函数空间框架下，解的局部适定性、整体适定性和渐近行为。特别是，文献 [20, 27], 中的作者利用 L^{p}空间中的最大正则性，在对初始数据仅作较弱正则性假设的条件下，证明了唯一解的存在性。当 $b>0$时，项$-b\Delta p_t$ 所表示的强阻尼使得这一做法可行，并赋予Westervelt方程抛物型特征。

结合（1.1）中的第二个方程和第三个方程，我们得到双曲型 Pennes 方程（见 [12, 方程 3] 和 [30, 方程 7]）

$$\begin{aligned}&\tau\rho_{\mathrm{a}}C_{\mathrm{a}}\bar{\Theta}_{tt}+(\rho_{\mathrm{a}}C_{\mathrm{a}}+\tau\rho_{\mathrm{b}}C_{\mathrm{b}}W)\bar{\Theta}_t+\rho_{\mathrm{b}}C_{\mathrm{b}}W(\bar{\Theta}-\Theta_{\mathrm{a}})-\kappa_{\mathrm{a}}\Delta\bar{\Theta}\\&=\mathcal{Q}(p_t)+\tau\partial_t\mathcal{Q}(p_t).\end{aligned} \tag{1.3}$$

(1.3) 中与 τ 前因子一同出现的项源于 Cattaneo 热传导定律 [3]的使用:

$$\tau q_t + q + \kappa_{\mathrm{a}} \nabla \bar{\Theta} = 0 \tag{1.4}$$

这是经典傅里叶定律的一个修正版:

$$q + \kappa_{\mathrm{a}} \nabla \bar{\Theta} = 0. \tag{1.5}$$

方程 (1.5)意味着介质中瞬时的热能沉积。也就是说，任何温度扰动都会导致介质中每一点的温度瞬时发生扰动。引入卡泰内奥定律是为了克服傅里叶定律中热信号无限传播速度这一缺陷。其思想是在热通量与温度梯度之间的关系中引入时间滞后，从而产生 (1.4) 中的项 τq_t ，其中 τ 是弛豫时间参数。

Cattaneo模型 (1.4) 的作用是将热方程变为阻尼波动方程，该方程描述了热波这一物理现象。这种现象被称为第二声效应，并且已在温度非常低的材料中通过实验观察到；在这种情况下，热量似乎以热波的形式传播，这也是该名称的由来（参见综述论文 [25]）。

对于 $\tau = 0$，方程 (1.3) 变为

$$\rho_{\mathrm{a}} C_{\mathrm{a}} \bar{\Theta}_t - \kappa_{\mathrm{a}} \Delta \bar{\Theta} + \rho_{\mathrm{b}} C_{\mathrm{b}} W (\bar{\Theta} - \Theta_{\mathrm{a}}) = \mathcal{Q}(p_t). \tag{1.6}$$

方程 (1.6) 是抛物型 Pennes 方程，它是一种广泛用于研究生物系统中热传递的生物热传递方程。该方程考虑了组织中的传导热传递，以及由血液灌注导致的对流传热。有关 (1.6) 的推导，请参见 [24] 。

在 [22] Nikoli´c 和 Said-Houari研究了 Westervelt–Pennes–傅里叶系统，该系统是方程 (1.1) 中的第一个方程与方程 (1.6) 之间的耦合。也就是说，他们研究了该系统

$$\begin{cases} p_{tt} - c^2(\bar{\Theta}) \Delta p - b \Delta p_t = k(\bar{\Theta}) \left(p^2\right)_{tt}, \\ \rho_{\mathrm{a}} C_{\mathrm{a}} \bar{\Theta}_t - \kappa_{\mathrm{a}} \Delta \bar{\Theta} + \rho_{\mathrm{b}} C_{\mathrm{b}} W (\bar{\Theta} - \Theta_{\mathrm{a}}) = \mathcal{Q}(p_t) \end{cases} \tag{1.7}$$

在 $\Omega \times (0, T)$ 中，满足 Dirichlet–Dirichlet 边界条件。他们结合能量方法与不动点论证，证明了 (1.7) 的局部适定性。 [22] 中的研究之后， [23], 中的作者证明了在初始数据满足小性假设的条件下，(1.7) 的解整体存在，并研究了当 t 趋于无穷时的渐近行为。Wilke 在 [29] 中利用抛物型系统的最大正则性估计，略微放宽了 [22] 中的正则性假设，而 ¯ 也考虑了 $b = b(\Theta)$ 的情形。

本文研究 Westervelt–Pennes–Cattaneo 系统 (1.1)，探讨时间弛豫参数τ 趋于零时的局部适定性与奇异极限。为陈述并证明我们的结果，同时简化记号，我们令

$$m = \rho_{\mathrm{a}} C_{\mathrm{a}} \qquad \text{and} \qquad \ell = \rho_{\mathrm{b}} C_{\mathrm{b}} W,$$

¯并对温度进行 $\Theta = \Theta - \Theta_a$ 变量替换。记

$$k(\Theta) = K(\Theta + \Theta_{\mathrm{a}}) = \frac{1}{\rho c^2 (\Theta + \Theta_{\mathrm{a}})} \beta_{\mathrm{acou}} \quad \text{and} \quad h(\Theta) = c^2(\Theta + \Theta_{\mathrm{a}}), \tag{1.8}$$

我们得到以下系统

$$\begin{cases} p_{tt} - h(\Theta)\Delta p - b\Delta p_t = k(\Theta)\left(p^2\right)_{tt}, & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ m\Theta_t + \nabla \cdot q + \ell\Theta = \mathcal{Q}(p_t), & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ \tau q_t + q + \kappa_{\mathrm{a}} \nabla\Theta = 0, & \text{in } \Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{1.9a}$$

并满足齐次边界条件

$$p|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \Theta|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.9b}$$

以及初始条件

$$p|_{t=0} = p_0, \quad p_t|_{t=0} = p_1, \quad \Theta|_{t=0} = \Theta_0 := \bar{\Theta}_0 - \Theta_{\mathrm{a}}, \quad q|_{t=0} = q_0. \tag{1.9c}$$

与此处相同，Westervelt方程中的介质参数 c 和 K 并非常数。为考虑超声波产生的热量会影响其传播速度和焦区位置这一事实，我们明确假设这些参数依赖于温度；这一现象称为热透镜效应 [5, 9]。具体而言，我们假设这种依赖关系为多项式形式，这与 [1] 中记载的实验观察结果一致。为简单起见，我们还假设函数 $\mathcal{Q}$ 具有如下形式

$$\mathcal{Q}(p_t) = \frac{2b}{\rho_{\mathrm{a}} C_{\mathrm{a}}^4} (p_t)^2,$$

alt尽管我们的证明适用于相当一般的 $\mathcal{Q}(p_t)$，只要其满足 [22]中的假设 2。

为建立适定性，我们对该系统的线性化进行能量分析，从而能够运用不动点论证，求得非线性问题 (1.9) 的唯一解。在此过程中，我们遇到了两个主要挑战。一方面，我们必须考虑压力与温度各自方程之间的耦合所造成的相互影响。在压力方程中，系数 $h(\Theta)$ 和 $k(\Theta)$ 对温度的依赖表明，必须使它们始终保持有界。也就是说，函数 Θ 需要属于 $L^\infty((0,T) \times \Omega)$。此外，注意到 (1.9) 中的第一个方程是拟线性的。要看出这一点，只需将右端写成 $k(\Theta)(p^2)_{tt} = 2k(\Theta)pp_{tt} + 2k(\Theta)(p_t)^2$。这会带来项 $(1 - 2k(\Theta)p)p_{tt}$ 发生退化的风险，通常通过对声压 [14] 施加小量约束来避免。因此，我们需要对压力和温度都采用高阶能量。得到这些能量的先验估计时，一个关键要素是 Sobolev 嵌入定理，尤其是连续嵌入 $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$。另一方面，要为热传导系统建立关于 τ 的一致能量界，需要谨慎处理。此外，考虑到实际情况下 τ 的取值很小，研究系统在 τ 趋于零时的行为颇有意义。为此，我们采用 [15, 21] 中的方法。另请参见 [2] 中的重要结果。尽管这些研究所考察的模型涉及单个方程，但其方法具有很强的构造性，也可用于当前的耦合问题。关键思路是首先推导关于 τ 一致的估计，从而论证在 τ 趋于零时取极限是合理的；然后利用 Sobolev 嵌入的紧性

以证明 (1.9) 的解收敛于对应 $\tau = 0$ 的系统的解。

本文安排如下。主要结果在第 2 节中陈述。第 3 节汇集了一些后文将用到的理论结果，并陈述系统 (1.9) 中系数的一般假设。第 4 节致力于双曲型彭尼斯方程（Cattaneo 系统）的能量分析，而第 5 节讨论线性化的 Westervelt 方程。在第 6 节中，我们证明非线性问题 (1.9) 的局部适定性。最后，在第 7 节中，我们进行奇异极限分析，并证明当时间弛豫消失时，Westervelt–Pennes–Cattaneo 模型的解收敛到 Westervelt–Pennes–傅里叶系统的解。

2. 主要结果

本节陈述本文的主要结果，并介绍证明思路。为便于理解这些主要结果，我们首先说明本文采用的函数空间框架。我们定义

$$\mathcal{X} := X_p \times X_\Theta \times X_q,$$

其中，空间 X_p、X_Θ 和 X_q 分别给出为

$$\begin{aligned} X_p = \Big\{ & p \in L^\infty(0,T;H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \\ & p_t \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \\ & p_{tt} \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \\ & p_{ttt} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \Big\}; \\ X_\Theta = \{ & \Theta \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \Theta_t \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ & \Theta_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\}; \\ X_q = \{ & q \in L^\infty(0,T;(H^1(\Omega))^d); q_t, q_{tt} \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^d)\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

我们的第一个结果确保了局部时间适定性，并且关于松弛参数 τ 是一致的。

假设 1. 设初始数据满足

$$\begin{aligned} (p_0, p_1) &\in \big[H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\big] \times \big[H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\big], \\ (\Theta_0, q_0) &\in \big[H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\big] \times (H^2(\Omega))^d, \end{aligned}$$

使得做爱片 t $1-2k(\Theta_0)p_0$ 不退化。我们还假设兼容条件 :

$$p_2, \Theta_1 \in H_0^1(\Omega), \quad \Theta_2, q_1, q_2 \in L^2(\Omega)$$

其中 $p_2 := \partial_t^2 p(0,x)$ $\Theta_k := \partial_t^k \Theta(0,x)$ $q_k := \partial_t^k q(0,x)$ $x \in \Omega$ $k = 1$、2根据方程(1.9a)从 p_0、p_1、Θ_0、q_0 中形式化且递归地定义。

定理 2.1. 设 $T > 0$ 和 $\bar\tau > 0$ 为一个固定的小常数。设 $\tau \in (0, \bar\tau]$ 并且假设 1 成立。存在 $\delta = \delta(T) > 0$，使得如果

$$\|p_0\|_{H^3} + \|p_1\|_{H^2} + \|p_2\|_{H^1} \le \delta$$

则系统 (1.9) 存在唯一解 $(p,\Theta,q) \in \mathcal{X}$。

下面概述定理 2.1 证明的主要步骤，并对上述结果作一些说明。

1. 我们对底层模型 (1.9) 进行线性化，使 Westervelt方程与用于热传递的 Cattaneo 系统解耦。这样，我们便可以将 (1.9) 中的第一个方程与第二、第三个方程分开处理。然而，线性化系统的解耦并不能使我们将温度阻尼波动方程所产生的阻尼作用转移到线性化的 Westervelt方程上。

我们采用 Galerkin 近似，证明线性化 Cattaneo 系统 (4.1) 存在唯一解，并得到关于 τ 的一致能量估计。接下来，受 [22], 启发，我们经常借助 Sobolev 嵌入定理进行能量分析，从而证明线性化 Westervelt方程在有限时间区间 $T > 0$ 上的适定性。此外，我们还推导出一些能量界，这些界将有助于分析非线性问题。

2. 有了所有必要的要素，我们可以通过将系统 (1.9) 的解定义为一个经过精心构造的映射的不动点，来处理非线性耦合问题 (1.9)。因此，结合已有的能量估计并运用 Banach 不动点定理，我们证明了该非线性问题的适定性，并表明在声压初始数据满足小性假设时，解不会发生退化。

3. 请注意，定理 2.1 中的小性条件仅施加于压力数据，而不施加于温度数据。这似乎是避免 Westervelt方程发生退化所必需的。

4. 使用相同的方法，我们也可以处理 $b = b(\Theta)$ 的情形。我们假设 b 为常数，这只是为了避免证明中的技术性问题。此外，条件 $b > 0$ 对我们的分析至关重要。研究 $b = 0$ 的情形是一个重要的开放问题。

在以下定理中，我们陈述Westervelt–Pennes–Cattaneo 模型的解在弛豫时间 τ 趋于零时收敛于 Westervelt–Pennes–Fourier 模型的解的结果，并由此在极限情况下得到 [22] 中的适定性结果。为便于将该极限与 Westervelt–Pennes–Fourier 模型的解联系起来，本部分使用波动方程(1.3)而不是Cattaneo 系统。记 $\Theta_1^\tau := \Theta_t^\tau(0,x)$。

定理 2.2。给定 $T > 0$ 和 $\tau \in (0,\bar{\tau}]$。初始数据(p_0^τ, p_1^τ)、$(\Theta_0^\tau, \Theta_1^\tau)$满足假设1 及定理2.1 的假设。则，解族$(p^\tau,\Theta^\tau)_{\tau\in(0,\bar{\tau}]}$弱收敛（见(7.4)、(7.2)）到 Westervelt–Pennes–傅里叶系统的解 $(p,\Theta) \in X_p \times X_\Theta$：

$$
\begin{cases}
(1-2k(\Theta)p)p_{tt} - h(\Theta)\Delta p - b\Delta p_t = 2k(\Theta)(p_t)^2, & in\ \Omega \quad \times(0,T),\\
m\Theta_t + \ell\Theta - \kappa_{\mathrm{a}}\Delta\Theta = \mathcal{Q}(p_t), & in\ \Omega \quad \times(0,T),\\
(p,p_t)|_{t=0} = (p_0,p_1), \quad \Theta|_{t=0} = \Theta_0,
\end{cases} \tag{2.2}
$$

满足齐次狄利克雷条件 (1.9b)。

需要特别指出，证明定理 2.2 的主要难点在于获得关于 τ 一致的能量估计。换言之，我们的目标是防止估计中的常数在 τ 趋于零时变得无穷大。这使得当参数 τ 趋于零时，可以进行极限过程。对于定理 2.1 中的适定性结果，并不要求关于 τ 的一致性，但这对证明定理 2.2 至关重要。最后，我们指出，由于这些估计依赖于时间 $T>0$，解的存在具有局部性。不过，我们可以尝试采用 [23] 中的方法来获得整体适定性。

3. Preliminaries and assumptions

本节将介绍一些记号，并汇总若干有助于证明的嵌入结果和不等式，这些内容将在后续证明中反复用到。

3.1. 记号。全文中，我们假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$，其中 $d \in \{1,2,3\}$，是一个有界的、 C^2 光滑区域。我们用 $T>0$ 表示最终传播时间。字母 C 表示一个与时间无关的通用正常数，在不同场合可以取不同的值。我们常写作 $f \lesssim g$，其中存在一个常数 $C>0$，它与所关注的参数无关，且满足 $f \le Cg$。书写范数时，我们常省略空间和时间区域；例如，$\|\cdot\|_{L^pL^q}$ 表示 $L^p(0,T;\, L^q(\Omega))$ 中的范数。

3.2. 不等式与嵌入结果。在接下来的分析中，我们将使用连续嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$、 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ 以及 $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$。特别地，利用 Poincar´e 不等式，我们得到对于 $v \in H_0^1(\Omega)$（见 [26,定理 7.18]）

$$\begin{aligned} &\text{if } d>2, \quad \|v\|_{L^p} \le C\|\nabla v\|_{L^2} \quad \text{for} \quad 2 \le p \le \frac{2d}{d-2}, \\ &\text{if } d=2, \quad \|v\|_{L^p} \le C\|\nabla v\|_{L^2} \quad \text{for} \quad 2 \le p < \infty. \end{aligned}$$

此外，考虑到算子 $(-\Delta)^{-1}: L^2(\Omega) \to H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 的有界性，我们得到不等式。

$$\|v\|_{L^\infty} \le C_1\|v\|_{H^2} \le C_2\|\Delta v\|_{L^2}.$$

我们还将用到一维嵌入 $H^1(0,T;\, L^2(\Omega)) \hookrightarrow C(0,T;\, L^2(\Omega))$。也就是说，我们有以下不等式

$$\max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{L^2} \le C(\|v\|_{L^2L^2} + \|v_t\|_{L^2L^2}) \tag{3.1}$$

其中常数 $C>0$ 仅取决于 T（参见，例如 [7, 定理2，第 286]页）。此外，如果 $v \in H^1(0,T,H_0^1(\Omega))$，则上述嵌入结合 Poincar´e 不等式可得

$$\max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{L^2} \le C(\|\nabla v\|_{L^2L^2} + \|v_t\|_{L^2L^2}). \tag{3.2}$$

我们回顾 Young 的 ε-不等式

$$xy \le \varepsilon x^n + C(\varepsilon)y^m, \quad \text{where} \quad x,y>0, \quad 1<m,n<\infty, \quad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1,$$

以及 $C(\varepsilon) = (\varepsilon n)^{-m/n} m^{-1}$。
此外，我们将使用 $u \in H^1(\Omega)$ 的 Ladyzhenskaya 不等式

$$\|u\|_{L^4} \leq C\|u\|_{L^2}^{1-d/4}\|u\|_{H^1}^{d/4}, \qquad 1 \leq d \leq 4. \tag{3.3}$$

我们陈述 Gronwall 不等式的一个版本，该版本将在证明中用到，且已在 [22]中给出。

引理 3.1. 设 $I = [0,t]$，并设 $\alpha, \beta \colon I \to \mathbb{R}$ 为局部可积函数。给定$u, v \colon I \to \mathbb{R}$，使得 v 非负且可积，并且 u 属于 $C^1(I)$。我们假设

$$u'(t) + v(t) \leq \alpha(t)u(t) + \beta(t), \ \textit{for } t \in I, \quad u(0) = u_0.$$

则有

$$u(t) + \int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s \leq u_0 e^{A(t)} + \int_0^t \beta(s) e^{A(t)-A(s)}\,\mathrm{d}s,$$

其中

$$A(t) = \int_0^t \alpha(s)\,\mathrm{d}s.$$

3.3. 假设。根据声速 $c = c(\Theta)$ 呈多项式增长这一特征，我们对函数 h 和 k 作如下假设。假设 $h \in C^2(\mathbb{R})$，且存在 $h_1 > 0$ 使得

$$h(s) \geq h_1, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{H1}$$

此外，我们假设存在 $\gamma_1 > 0$ 和 $C > 0$，使得

$$|h''(s)| \leq C(1 + |s|^{\gamma_1}), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{H2}$$

因此，利用泰勒公式，我们还可得

$$|h'(s)| \leq C(1 + |s|^{1+\gamma_1}), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{H3}$$

由于 函数 k 与声速之间满足公式 (1.8)，因此可得

$$|k(s)| \leq k_1 := \frac{\beta_{\text{acous}}}{\rho h_1}, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{K1}$$

此外，我们有

$$|k''(s)| \lesssim k_1^2|h''(s)| + k_1^3|h'(s)|^2 \lesssim k_1^2(1 + |s|^{\gamma_1}) + k_1^3(1 + |s|^{1+\gamma_1})^2,$$

由泰勒公式可知，存在 $\gamma_2 > 0$，使得

$$|k'(s)| \lesssim (1 + |s|^{1+\gamma_2}), \qquad |k''(s)| \lesssim (1 + |s|^{\gamma_2}), \quad \forall s \in \mathbb{R}.. \tag{K2}$$

4. The hyperbolic bioheat equation

在本节中，我们考虑双曲热方程。

$$\begin{cases} m\Theta_t + \nabla \cdot q + \ell\Theta = f, & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \tau q_t + q + \kappa_{\mathrm{a}} \nabla\Theta = 0, & \text{in } \Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{4.1}$$

以及相关的初始条件 (1.9c) 和边界条件 (1.9b)。我们的主要目标是在对初始数据 Θ_0 和 q_0 以及源项 f 作出最小假设的条件下证明先验估计。

为了陈述并证明我们的主要结果，我们将与（4.1）相关的总能量定义为

$$E^\tau[\Theta,q](t):=\sum_{k=0}^{2}E_k[\Theta,q](t),\quad t\geq 0 \tag{4.2}$$

其中，能量 E_k、 $k=0$、1、2 定义为

$$E_k[\Theta,q](t):=\frac{1}{2}\Big(m\kappa_{\mathrm{a}}\|\partial_t^k\Theta(t)\|_{L^2}^2+\tau\|\partial_t^k q(t)\|_{L^2}^2\Big). \tag{4.3}$$

我们还定义相应的耗散

$$D[\Theta,q](t):=\sum_{k=0}^{2}D_k[p,\Theta](t),\quad t\geq 0 \tag{4.4}$$

with

$$D_k[\Theta,q](t):=\ell\kappa_{\mathrm{a}}\|\partial_t^k\Theta(t)\|_{L^2}^2+\|\partial_t^k q(t)\|_{L^2}^2,\quad k=0,1,2. \tag{4.5}$$

由于 (1.9a) 中第一个方程的系数依赖于 Θ，我们应对 Θ 建立一些高阶估计，以便通过 Sobolev 嵌入定理控制 Θ 的 L^∞-范数。为此，我们仅用 Θ 引入如下能量

$$\mathcal{E}[\Theta](t):=\mathcal{E}_0[\Theta](t)+\mathcal{E}_1[\Theta](t),\quad t\geq 0$$

其中， $\mathcal{E}_0$ 和 $\mathcal{E}_1$ 定义如下

$$\begin{cases}\mathcal{E}_0[\Theta](t):=\dfrac{m\kappa_{\mathrm{a}}}{2}(\|\Theta(t)\|_{L^2}^2+\|\Theta_t(t)\|_{L^2}^2+\|\Theta_{tt}(t)\|_{L^2}^2),\\ \mathcal{E}_1[\Theta](t):=\dfrac{m+\tau\ell}{2}\|\nabla\Theta(t)\|_{L^2}^2+\kappa_{\mathrm{a}}\|\nabla\Theta_t(t)\|_{L^2}^2+\kappa_{\mathrm{a}}\|\Delta\Theta(t)\|_{L^2}^2.\end{cases} \tag{4.6}$$

$\mathcal{E}[\Theta]$（t）对应的耗散率为

$$\mathcal{D}[\Theta](t):=\mathcal{D}_0[\Theta](t)+\mathcal{D}_1[\Theta](t),$$

with

$$\begin{cases}\mathcal{D}_0[\Theta](t):=\ell\kappa_{\mathrm{a}}(\|\Theta(t)\|_{L^2}^2+\|\Theta_t(t)\|_{L^2}^2+\|\Theta_{tt}(t)\|_{L^2}^2),\\ \mathcal{D}_1[\Theta](t):=\ell\|\nabla\Theta(t)\|_{L^2}^2+\kappa_{\mathrm{a}}\|\nabla\Theta_t(t)\|_{L^2}^2+\kappa_{\mathrm{a}}\|\Delta\Theta(t)\|_{L^2}^2.\end{cases} \tag{4.7}$$

$\mathcal{E}[\Theta](t)$ 和 $\mathcal{D}[\Theta](t)$ 的定义源自Θ (1.3)中的阻尼波动方程，该方程可通过合并系统 (4.1) 中的两个方程得到。另见下文的方程 (4.16)。

下面的引理将使我们能够对 $\mathcal{E}[\Theta]$ 进行估计，并且估计结果关于 τ 一致，估计量以 $E^\tau[\Theta,q]$ 表示。

Le引理 4.1. 设 $\bar\tau>0$ 为一个固定的小数。则对所有 $t\geq 0$，有如下估计

$$\mathcal{E}[\Theta](t)\lesssim(1+\bar\tau+\bar\tau^2)\big(E^{\bar\tau}[\Theta,q](t)+\|f(t)\|_{L^2}^2+\|f_t(t)\|_{L^2}^2\big) \tag{4.8}$$

*ho*在 $\tau\in(0,\bar\tau]$ 中一致成立。(4.8) 中的隐常数与 τ 无关 .

证明。显然，对所有 $t \geq 0$，我们都有

$$\mathcal{E}_0[\Theta](t) \leq E^\tau[\Theta, q](t). \tag{4.9}$$

现在，如果我们想证明 $\mathcal{E}_1[\Theta](t)$ 也被 $E^\tau[\Theta, q](t)$ 所界，我们可以直接利用 (4.1) 中的第二个方程得到

$$\kappa_{\mathrm{a}}^2 \|\nabla\Theta\|_{L^2}^2 \leq 2\tau^2 \|q_t\|_{L^2}^2 + 2\|q\|_{L^2}^2 \leq C(\tau) E^\tau[\Theta, q].$$

然而，常数 $C(\tau) \to \infty$ 为 $\tau \to 0$。为避免这种情况，我们对系统 (4.1) 取时间导数$\partial_t^k, k = 0, 1$，从而得到

$$\begin{cases} m\partial_t^k \Theta_t + \nabla \cdot (\partial_t^k q) + \ell \partial_t^k \Theta = \partial_t^k f, & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \tau \partial_t^k q_t + \partial_t^k q + \kappa_{\mathrm{a}} \nabla(\partial_t^k \Theta) = 0, & \text{in } \Omega \times (0, T). \end{cases} \tag{4.10}$$

我们将（4.10）中的第二个方程乘以 $\nabla(\partial_t^k \Theta)$ $k = 0,1$，并在 Ω 上积分。利用散度定理以及 $\partial_t^k \Theta|_{\partial\Omega} = 0$ 这一事实，我们得到

$$\kappa_{\mathrm{a}} \|\nabla(\partial_t^k \Theta)\|_{L^2}^2 = -\tau \int_\Omega \partial_t^k q_t \cdot \nabla(\partial_t^k \Theta) \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla \cdot (\partial_t^k q) \partial_t^k \Theta \, \mathrm{d}x, \quad k = 0, 1. \tag{4.11}$$

注意，通过用 $\partial_t^k \Theta$ 进行测试并在 Ω上积分，我们可以从 (4.10) 中的第一个方程恢复右侧的最后一项。因此，我们得到

$$\int_\Omega \nabla \cdot (\partial_t^k q) \partial_t^k \Theta \, \mathrm{d}x = -m \int_\Omega \partial_t^k \Theta_t \partial_t^k \Theta \, \mathrm{d}x - \ell \|\partial_t^k \Theta\|_{L^2}^2 + \int_\Omega \partial_t^k f \partial_t^k \Theta \, \mathrm{d}x. \tag{4.12}$$

结合 (4.11) 和 (4.12)，我们有

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathrm{a}} \|\nabla(\partial_t^k \Theta)\|_{L^2}^2 = &-\tau \int_\Omega \partial_t^k q_t \cdot \nabla(\partial_t^k \Theta) \, \mathrm{d}x - m \int_\Omega \partial_t^k \Theta_t \partial_t^k \Theta \, \mathrm{d}x \\ &- \ell \|\partial_t^k \Theta\|_{L^2}^2 + \int_\Omega \partial_t^k f \partial_t^k \Theta \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

因此，利用柯西–施瓦茨不等式和杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_{\mathrm{a}}}{2} \|\nabla \partial_t^k \Theta\|_{L^2}^2 + \frac{\ell}{2} \|\partial_t^k \Theta\|_{L^2}^2 &\leq \frac{\tau^2}{2\kappa_{\mathrm{a}}} \|\partial_t^k q_t\|_{L^2}^2 + \frac{m^2}{\ell} \|\partial_t^k \Theta_t\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\ell} \|\partial_t^k f\|_{L^2}^2 \\ &\leq \Big(\frac{2m}{\ell \kappa_{\mathrm{a}}} + \frac{\tau}{\kappa_{\mathrm{a}}} \Big) E^\tau[\Theta, q] + \frac{1}{\ell} \|\partial_t^k f\|_{L^2}^2, \quad k = 0, 1. \end{aligned} \tag{4.13}$$

上述对 $k = 0$ 的估计还意味着

$$\frac{\tau \ell}{2} \|\nabla\Theta\|_{L^2}^2 \lesssim (\tau + \tau^2) E^\tau[\Theta, q] + \tau \|f\|_{L^2}^2. \tag{4.14}$$

接下来，我们着重估计 $\|\Delta\Theta\|_{L^2}$ 在 $\mathcal{E}_1[\Theta](t)$ 中的项。首先，对 (4.1) 中的第一个方程求时间导数，并对第二个方程应用散度算子，于是得到

$$\begin{cases} m\Theta_{tt} + \nabla \cdot q_t + \ell \Theta_t = f_t, \\ \tau \nabla \cdot q_t + \nabla \cdot q + \kappa_{\mathrm{a}} \Delta\Theta = 0. \end{cases} \tag{4.15}$$

需要指出的是，上述推导系统 (4.15) 的过程是形式上的。要使其严格成立，可以先对初始数据作光滑逼近，从而使相应的解具有所需的光滑性，进而允许我们取

极限并得出 (4.15) 仍然成立。

将这两个方程结合起来，并利用 (4.1) 中的第一个方程，我们得到

$$\tau m\Theta_{tt} + (m+\tau\ell)\Theta_t + \ell\Theta - \kappa_{\mathrm{a}}\Delta\Theta = f + \tau f_t. \tag{4.16}$$

由此可推得

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathrm{a}}^2\|\Delta\Theta\|_{L^2}^2 &\lesssim \ell^2\|\Theta\|_{L^2}^2 + (m+\tau\ell)^2\|\Theta_t\|_{L^2}^2 + \tau^2 m^2\|\Theta_{tt}\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 + \tau^2\|f_t\|_{L^2}^2\\ &\lesssim (1+\tau^2)\big(E^\tau[\Theta,q] + \|f\|_{L^2}^2 + \|f_t\|_{L^2}^2\big).\end{aligned} \tag{4.17}$$

综合估计式 (4.9)、(4.13)、(4.14)、(4.17)，并注意到 $\tau \in (0,\bar\tau]$，我们得到估计式 (4.8)。引理 4.1 得证。□

命题 4.1. 给定 $T>0$ 和 $f \in H^2(0,T;\, L^2(\Omega))$。假设初始数据 (Θ_0, q_0) 满足假设 1。那么，系统 (4.1) 存在唯一解 (Θ, q) $\in X_\Theta \times X_q$。此外，该解满足

$$\mathcal{E}[\Theta](t) + \int_0^t \mathcal{D}[\Theta](s)\,\mathrm{d}s \lesssim (1+\bar\tau+\bar\tau^2)\big(E^{\bar\tau}[\Theta,q](0) + \|f\|_{H^2L^2}^2\big) \tag{4.18}$$

and

$$\begin{aligned}&\|q(t)\|_{H^1}^2 + \sum_{k=0}^{2}\int_0^t \|\partial_t^k q(s)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s\\ &\lesssim \|q_0\|_{H^1}^2 + (1+\bar\tau+\bar\tau^2)\big(E^{\bar\tau}[\Theta,q](0) + \|f\|_{H^2L^2}^2\big)\end{aligned} \tag{4.19}$$

对所有 $0 \le t \le T$，其中 (4.18) 和 (4.19) 中的隐含常数关于 $\tau \in (0,\bar\tau]$ 一致。

我们采用 Faedo–Galerkin 方法证明上述结果。第一步，我们证明解的近似 (Θ, q) 满足一些一致的先验估计。具体而言，我们取 Dirichlet–Laplacian 的特征函数作为温度 Θ的近似。至于热通量 q，我们利用 $(H^2(\Omega))^d$ 可分这一事实，从而可得一个稠密序列，用以近似 q (见 [18])。第二步，由于这些估计是一致的，我们可以如 [7, 章 7]（另见 [18, 第 1]章）所述取极限，从而得到解的存在性。此外，注意到齐次问题 ($f=0, \Theta_0=0$和 $q_0=0$) 的唯一解为 $(\Theta, q) = (0, 0)$，即可推出唯一性。最后，由于范数的弱下半连续性和弱-$\star$ 下半连续性，可知估计 (4.18)、(4.19) 对解 (Θ, q) 也成立。由于该方法相当经典，以下我们将重点放在能量分析上，取极限的过程则参见 [7, 18] 。首先，我们证明以下中间估计。

引理 4.2. 设 $\tau \in (0,\bar\tau]$。假设 $f \in H^2(0,T;\, L^2(\Omega))$。那么，对于所有 $0 \le t \le T$，都有以下估计

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_k[\Theta,q](t) + D_k[\Theta,q](t) \lesssim \|\partial_t^k f(t)\|_{L^2}^2, \quad k=0,1,2. \tag{4.20}$$

其中隐藏常数与 τ 无关。

证明。对系统 (4.1) 应用 ∂_t^k、 $k=0$、1、2，得到

$$\begin{cases} m\partial_t^k\Theta_t + \nabla\cdot\partial_t^k q + \ell\partial_t^k\Theta = \partial_t^k f, & \text{in } \Omega\times(0,T),\\ \tau\partial_t^k q_t + \partial_t^k q + \kappa_{\mathrm{a}}\nabla\partial_t^k\Theta = 0, & \text{in } \Omega\times(0,T). \end{cases} \tag{4.21}$$

Mult将(4.21)中的第一个方程乘以 $\kappa_{\mathrm{a}}\partial_t^k\Theta$ 并在 Ω 上积分，可得

$$\frac{m\kappa_{\mathrm{a}}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial_t^k\Theta\|_{L^2}^2 + \kappa_{\mathrm{a}}\int_\Omega \partial_t^k\Theta\nabla\cdot\partial_t^k q\,\mathrm{d}x + \ell\kappa_{\mathrm{a}}\|\partial_t^k\Theta\|_{L^2}^2 = \kappa_{\mathrm{a}}\int_\Omega \partial_t^k f\partial_t^k\Theta\,\mathrm{d}x.$$

对左侧第二项应用散度定理，并利用 $\partial_t^k\Theta|_{\partial\Omega}$ =0（由 (1.9b) 可知），我们得到

$$\frac{m\kappa_{\mathrm{a}}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial_t^k\Theta\|_{L^2}^2 - \kappa_{\mathrm{a}}\int_\Omega \partial_t^k q\cdot\nabla\partial_t^k\Theta\,\mathrm{d}x + \ell\kappa_{\mathrm{a}}\|\partial_t^k\Theta\|_{L^2}^2 = \kappa_{\mathrm{a}}\int_\Omega \partial_t^k f\partial_t^k\Theta\,\mathrm{d}x. \tag{4.22}$$

接下来，m 将（4.21）中的第二个方程乘以 $\partial_t^k q$ 并在 Ω 上积分，可得

$$\frac{\tau}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\partial_t^k q\|_{L^2}^2 + \|\partial_t^k q\|_{L^2}^2 + \kappa_{\mathrm{a}}\int_\Omega \partial_t^k q\cdot\nabla\partial_t^k\Theta\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4.23}$$

结合(4.22)和(4.23)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_k[\Theta,q] + D_k[\Theta,q] = \kappa_{\mathrm{a}}\int_\Omega \partial_t^k f\partial_t^k\Theta\,\mathrm{d}x,$$

其中 $E_k[\Theta,q]$ 和 $D_k[\Theta,q]$ 分别由 (4.3)、(4.5) 给出。对右端应用柯西–施瓦茨不等式和杨不等式，即可得到所需估计 (4.20)。□

注 1. 设 $f\in H^2(0,T,L^2(\Omega))$。回顾 (4.2)–(4.5)，并利用 (4.20)，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E^\tau[\Theta,q](t) + cE^\tau[\Theta,q](t) \lesssim \|f(t)\|_{L^2}^2 + \|f_t(t)\|_{L^2}^2 + \|f_{tt}(t)\|_{L^2}^2 \tag{4.24}$$

with

$$c = \min\left\{\frac{\ell}{m}, \frac{2}{\tau}\right\}.$$

将 (4.24) 乘以 e^{ct}，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{ct}E^\tau[\Theta,q]\right)(t) \lesssim e^{ct}\left(\|f(t)\|_{L^2}^2 + \|f_t(t)\|_{L^2}^2 + \|f_{tt}(t)\|_{L^2}^2\right),\quad t\geq 0$$

因此，对时间积分可得

$$\begin{aligned} E^\tau[\Theta,q](t) &\lesssim e^{-ct}E^\tau[\Theta,q](0) + \int_0^t e^{-c(t-s)}(\|f(s)\|_{L^2}^2 + \|f_t(s)\|_{L^2}^2 + \|f_{tt}(s)\|_{L^2}^2)\,\mathrm{d}s\\ &\lesssim e^{-ct}E^\tau[\Theta,q](0) + \frac{1-e^{-ct}}{c}\|f\|_{H^2L^2}^2. \end{aligned} \tag{4.25}$$

由 (4.25) 可清楚看出， $E^\tau[\Theta,q](t)$ 呈指数衰减。

4.1. 命题 4.1 的证明。首先，我们对估计式 (4.20) 关于时间积分，对 $k=0$,1,2 求和，并回顾 (4.2) 和 (4.4)，得到

$$E^\tau[\Theta,q](t)+\int_0^t D[\Theta,q](s)\,\mathrm{d}s \lesssim E^\tau[\Theta,q](0)+\|f\|_{H^2L^2}^2, \tag{4.26}$$

这也意味着，回顾（4.6）和（4.7）可知

$$\mathcal{E}_0[\Theta](t)+\int_0^t \mathcal{D}_0[\Theta](s)\,\mathrm{d}s \lesssim E^\tau[\Theta,q](0)+\|f\|_{H^2L^2}^2. \tag{4.27}$$

另一方面，对 (4.1) 中的第二个方程应用散度算子，并用 $\Delta\Theta$ 检验所得方程，我们得到对所有 $t\geq 0$

$$\tau\int_\Omega \nabla\cdot q_t\Delta\Theta\,\mathrm{d}x+\int_\Omega \nabla\cdot q\Delta\Theta\,\mathrm{d}x+\kappa_{\mathrm{a}}\|\Delta\Theta\|_{L^2}^2=0. \tag{4.28}$$

Next，我们将（4.1）中的第一个方程乘以 $\Delta\Theta$ 并进行分部积分，得到

$$\int_\Omega \nabla\cdot q\Delta\Theta\,\mathrm{d}x=\frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\Theta\|_{L^2}^2+\ell\|\nabla\Theta\|_{L^2}^2+\int_\Omega f\Delta\Theta\,\mathrm{d}x. \tag{4.29}$$

进一步，对 (4.1) 中的第一个方程关于 t 求导，我们得到

$$m\Theta_{tt}+\nabla\cdot q_t+\ell\Theta_t=f_t.$$

对上述方程以 $\tau\Delta\Theta$ 为检验函数并在 Ω 上积分，可得

$$\tau\int_\Omega \nabla\cdot q_t\Delta\Theta\,\mathrm{d}x=-\tau m\int_\Omega \Theta_{tt}\Delta\Theta\,\mathrm{d}x+\frac{\tau\ell}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\Theta\|_{L^2}^2+\tau\int_\Omega f_t\Delta\Theta\,\mathrm{d}x. \tag{4.30}$$

将 (4.29) 和 (4.30) 代入 (4.28)，我们得出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(m+\tau\ell)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\Theta\|_{L^2}^2+\ell\|\nabla\Theta\|_{L^2}^2+\kappa_{\mathrm{a}}\|\Delta\Theta\|_{L^2}^2\\&=\tau m\int_\Omega \Theta_{tt}\Delta\Theta\,\mathrm{d}x-\int_\Omega f\Delta\Theta\,\mathrm{d}x-\tau\int_\Omega f_t\Delta\Theta\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此，应用柯西–施瓦茨不等式和杨不等式可得

$$\frac{1}{2}(m+\tau\ell)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\Theta\|_{L^2}^2+\ell\|\nabla\Theta\|_{L^2}^2+\frac{\kappa_{\mathrm{a}}}{4}\|\Delta\Theta\|_{L^2}^2\lesssim\tau^2\|\Theta_{tt}\|_{L^2}^2+\|f\|_{L^2}^2+\tau^2\|f_t\|_{L^2}^2.$$

对 t 进行积分，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(m+\tau\ell)\|\nabla\Theta(t)\|_{L^2}^2+\ell\int_0^t\|\nabla\Theta\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s+\frac{\kappa_{\mathrm{a}}}{4}\int_0^t\|\Delta\Theta\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s\\&\lesssim\frac{1}{2}(m+\tau\ell)\|\nabla\Theta_0\|_{L^2}^2+\tau^2\int_0^t\|\Theta_{tt}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s+\|f\|_{L^2L^2}^2+\tau^2\|f_t\|_{L^2L^2}^2.\end{aligned} \tag{4.31}$$

利用不等式 (4.8)，我们有对于所有 $\tau\in(0,\bar\tau]$

$$(1+\tau)\|\nabla\Theta(t)\|_{L^2}^2\lesssim(1+\bar\tau+\bar\tau^2)\big(E^{\bar\tau}[\Theta,q](t)+\|f(t)\|_{H^1L^2}^2\big).$$

此外，根据 (3.1)，我们有

$$\|\partial_t^k f(0)\|_{L^2}^2\leq C_T\big(\|\partial_t^k f\|_{L^2L^2}^2+\|\partial_t^k f_t\|_{L^2L^2}^2\big),\quad k=0,1.$$

于是，可得】【。

$$(1+\tau)\|\nabla\Theta_0\|_{L^2}^2\lesssim(1+\bar\tau+\bar\tau^2)\big(E^{\bar\tau}[\Theta,q](0)+\|f\|_{H^2L^2}^2\big). \tag{4.32}$$

此外，由估计式（4.26）可知

$$\tau^2 \int_0^t \|\Theta_{tt}\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}s \lesssim \bar{\tau}^2\big(E^{\bar{\tau}}[\Theta,q](0) + \|f\|_{H^2L^2}^2\big). \tag{4.33}$$

综合估计式 (4.31)、(4.32) 和 (4.33)，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(m+\tau\ell)\|\nabla\Theta(t)\|_{L^2}^2 + \ell\int_0^t \|\nabla\Theta\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}s + \frac{\kappa_{\mathrm{a}}}{4}\int_0^t \|\Delta\Theta\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}s \\ \lesssim (1+\bar{\tau}+\bar{\tau}^2)\big(E^{\bar{\tau}}[\Theta,q](0) + \|f\|_{H^2L^2}^2\big).\end{aligned} \tag{4.34}$$

接下来，根据关于 $k=1$ 的不等式 (4.13) 中的第一个不等式以及估计式 (4.26)，对所有 $t\geq 0$，我们有

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathrm{a}}\int_0^t \|\nabla\Theta_t(s)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}s &\lesssim \tau^2\int_0^t \|q_{tt}(s)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}s + \int_0^t \|\Theta_{tt}(s)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}s + \|f_t\|_{L^2L^2}^2 \\ &\lesssim (1+\bar{\tau}^2)(E^{\bar{\tau}}[\Theta,q](0) + \|f\|_{H^2L^2}^2).\end{aligned} \tag{4.35}$$

另一方面，由于一维嵌入 $H^1(0,T) \hookrightarrow L^\infty(0,T)$，我们有 $f, f_t \in L^\infty(0,T;\, L^2(\Omega))$（见不等式 (3.1)）。于是，估计式 (4.8) 与 (4.26) 一起给出：对所有 $t\geq 0$

$$\kappa_{\mathrm{a}}\|\nabla\Theta_t(t)\|_{L^2}^2 \lesssim (1+\bar{\tau}+\bar{\tau}^2)\big(E^{\bar{\tau}}[\Theta,q](0) + \|f\|_{H^2L^2}^2\big). \tag{4.36}$$

类似地，我们利用 (4.8)、(4.26) 以及 $f, f_t \in L^\infty(0,T;\, L^2(\Omega))$ 这一事实，得到

$$\kappa_{\mathrm{a}}\|\Delta\Theta(t)\|_{L^2}^2 \lesssim (1+\bar{\tau}+\bar{\tau}^2)\big(E^{\bar{\tau}}[\Theta,q](0) + \|f\|_{H^2L^2}^2\big). \tag{4.37}$$

综合估计式 (4.27)、(4.34)、(4.35)、(4.36) 和 (4.37)，我们得到估计式 (4.18)。

为建立估计 (4.19)，首先注意到，由 (4.26) 可立即得到对于$t\geq 0$

$$\int_0^t (\|q(s)\|_{L^2}^2 + \|q_t(s)\|_{L^2}^2 + \|q_{tt}(s)\|_{L^2}^2)\,\mathrm{d}s \lesssim E^{\tau}[\Theta,q](0) + \|f\|_{H^2L^2}^2. \tag{4.38}$$

因此，仍需证明 q 属于$(H^1(\Omega))^d$。由(4.1)中的第二个方程，我们得到

$$q(x,t) = q_0(x) - \frac{\kappa_{\mathrm{a}}}{\tau}\int_0^t \nabla\Theta e^{-(t-s)/\tau}\,\mathrm{d}s,$$

这意味着对于所有 $t\geq 0$

$$\|q(t)\|_{H^1} \leq \|q_0\|_{H^1} + \frac{\kappa_{\mathrm{a}}}{\tau}\int_0^t e^{-(t-s)/\tau}\|\nabla\Theta(s)\|_{H^1}\,\mathrm{d}s.$$

利用椭圆正则性，可以得到

$$\begin{aligned}\|q(t)\|_{H^1} &\leq \|q_0\|_{H^1} + \kappa_{\mathrm{a}}(1-e^{-t/\tau})\|\Delta\Theta\|_{L^\infty L^2} \\ &\lesssim \|q_0\|_{H^1} + \|\Delta\Theta\|_{L^\infty L^2}.\end{aligned}$$

这一最后的估计结合 (4.37) 得到

$$\|q(t)\|_{H^1}^2 \lesssim \|q_0\|_{H^1}^2 + (1+\bar{\tau}+\bar{\tau}^2)\big(E^{\bar{\tau}}[\Theta,q](0) + \|f\|_{H^2L^2}^2\big). \tag{4.39}$$

将估计式 (4.38) 和 (4.39) 相加，可得 (4.19)。此外，由 (4.18) 和 (4.19) 可推出 $(\Theta, q) \in X_\Theta \times X_q$。命题 4.1 得证。

5. The linearized Westervelt equation

本节考虑式 (1.9 中 Westervelt方程的线性化):

$$\alpha(x,t)p_{tt} - r(x,t)\Delta p - b\Delta p_t = g(x,t), \qquad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \tag{5.1}$$

并辅以 (1.9c) 中相应的初始条件以及齐次 Dirichlet 边界条件 (1.9b)。

我们将与 (5.1) 相关的能量定义如下

$$\begin{aligned}
E_1[p](t) &:= \frac{1}{2}\big(\|\sqrt{\alpha(t)}p_t(t)\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{r(t)}\nabla p(t)\|_{L^2}^2\big),\\
E_2[p](t) &:= \frac{1}{2}\big(\|\sqrt{\alpha(t)}p_{tt}(t)\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{r(t)}\nabla p_t(t)\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{b}\Delta p(t)\|_{L^2}^2\big),\\
E_3[p](t) &:= \frac{1}{2}\big(\|\sqrt{b}\nabla p_{tt}(t)\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{b}\nabla\Delta p(t)\|_{L^2}^2\big).
\end{aligned}$$

总声能为

$$\mathfrak{E}[p](t) := \sum_{k=1}^{3} E_k[p](t), \qquad t \geq 0. \tag{5.2}$$

我们将其相应的耗散率记为 $\mathfrak{D}[p]$ ，定义如下

$$\mathfrak{D}[p](t) := \mathfrak{D}_0[p](t) + b\|\nabla\Delta p_t(t)\|_{L^2}^2 + b\|\Delta p_{tt}(t)\|_{L^2}^2, \qquad t \geq 0$$

其中 $\mathfrak{D}_0[p]$ 由.....给出。

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_0[p](t) := {} & b\|\nabla p_t(t)\|_{L^2}^2 + b\|\nabla p_{tt}(t)\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{r(t)}\Delta p(t)\|_{L^2}^2 + b\|\Delta p_t(t)\|_{L^2}^2\\
& + \|\sqrt{r(t)}\nabla\Delta p(t)\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{\alpha(t)}p_{ttt}(t)\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

我们对系数α 和 r作出如下正则性和非退化性假设。

假设 2. 假设

(A) • $\alpha \in L^\infty(0,T;\ L^\infty(\Omega)) \cap L^2(0,T;\ W^{1,3}(\Omega))$,

• $\alpha_t \in L^2(0,T;\ L^3(\Omega)) \cap L^{\frac{4}{4-d}}(0,T;\ L^2(\Omega))$,

(R) 存在 $0 < \alpha_0 \leq \alpha_1$ 使得• $r \in L^\infty(0,T;\ L^\infty(\Omega)) \cap L^2(0,T;\ W^{1,3}(\Omega))$,

$$\alpha_0 \leq \alpha(x,t) \leq \alpha_1 \quad a.e.\ in \quad \Omega\times(0,T).$$

• $r_t \in L^2(0,T;\ L^3(\Omega)) \cap L^{\frac{4}{4-d}}(0,T;\ L^2(\Omega))$,

• 存在 $0 < r_0 \leq r_1$

$$r_0 \leq r(x,t) \leq r_1 \quad a.e.\ in \quad \Omega\times(0,T).$$

本节的主要结果如下。

命题5.1。给定 $T>0$和 $g \in H^1(0,T;\ L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;\ H_0^1(\Omega))$。令$(p_0,p_1)$ 满足假设 1。那么在假设 2 下，线性化压力方程 (5.1)

具有唯一解 $p \in X_p$，其对所有 $0 \le t \le T$ 都满足

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}[p](t) + b\|\Delta p_t(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \mathfrak{D}[p](s)\,\mathrm{d}s \lesssim \mathfrak{E}[p](0)\exp\Big(\int_0^t (1+\Lambda(s))\,\mathrm{d}s\Big)\\ + \int_0^t \mathfrak{F}(s)\exp\Big(\int_s^t (1+\Lambda(\sigma))\mathrm{d}\sigma\Big)\,\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{5.4}$$

其中

$$\begin{aligned}\Lambda(t) = \|\alpha_t(t)\|_{L^2}^2 + \|\alpha_t(t)\|_{L^2}^{\frac{4}{4-d}} + \|r_t(t)\|_{L^2}^{\frac{4}{4-d}} + \|\nabla r(t)\|_{L^2}^2 + \|r_t(t)\|_{L^3}^2\\ + \|\alpha_t(t)\|_{L^3}^2 + \|\nabla r(t)\|_{L^3}^2 + \|\nabla\alpha(t)\|_{L^3}^2,\end{aligned} \tag{5.5}$$

and

$$\mathfrak{F}(t) = \|\nabla g(t)\|_{L^2}^2 + \|g_t(t)\|_{L^2}^2. \tag{5.6}$$

我们采用 Faedo-Galerkin 方法证明命题 5.1，以 Dirichlet-Laplacian 的光滑特征函数作为解的空间近似，见 [7]。下文将对上述近似进行能量分析，从而得到一致的先验估计；关于取极限的过程，读者可参见 [7, 第 7] 章。

在开始证明命题 5.1 之前，我们先证明两个引理。

引理 5.1. 给定 $g \in L^2(\Omega)$，使得 $g_t \in L^2(\Omega)$。设假设 2 成立。那么对所有 $t \ge 0$，我们有如下能量估计

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(E_1[p](t) + E_2[p](t)\Big) + b\|\nabla p_t(t)\|_{L^2}^2\\ &\quad + b\|\nabla p_{tt}(t)\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{r(t)}\Delta p(t)\|_{L^2}^2 + b\|\Delta p_t(t)\|_{L^2}^2\\ &\lesssim (1+\Lambda_1(t))(E_1[p](t) + E_2[p](t)) + \|g(t)\|_{L^2}^2 + \|g_t(t)\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{5.7}$$

其中

$$\begin{aligned}\Lambda_1(t) = \|r_t(t)\|_{L^3}^2 + \|\nabla r(t)\|_{L^3}^2 + \|r_t(t)\|_{L^2}^{\frac{4}{4-d}} + \|\nabla r(t)\|_{L^2}^2\\ + \|\alpha_t(t)\|_{L^2}^{\frac{4}{4-d}} + \|\alpha_t(t)\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

证明。证明基于 [22]中的思想。将方程（5.1）乘以 p_t，在 Ω 上积分并使用分部积分法，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1[p](t) + b\int_\Omega |\nabla p_t|^2\,\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega g p_t\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega \alpha_t p_t^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla r\cdot\nabla p p_t\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega r_t|\nabla p|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{5.8}$$

我们的目标现在是估计 (5.8) 右端的各项。应用 Young 不等式和 Poincar´e 不等式，我们得到

$$\int_\Omega g p_t\,\mathrm{d}x \le C(\varepsilon)\|g\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\nabla p_t\|_{L^2}^2.$$

右端(5.8) 中接下来的两项可利用赫¨尔德、杨和庞加´莱不等式以及嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$进行估计。因此，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega \alpha_t p_t^2 \,\mathrm{d}x &\le \|\alpha_t\|_{L^2}\|p_t\|_{L^4}^2 \\ &\le C(\varepsilon)\|\alpha_t\|_{L^2}^2\|\sqrt{r}\nabla p_t\|_{L^2}^2 + \varepsilon\Big\|\frac{1}{\sqrt{r}}\Big\|_{L^\infty}^2\|\nabla p_t\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

取 ε 充分小，并利用假设 2，可以通过左端的耗散项吸收上述估计中的 ε–项。类似地，我们得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla r\cdot\nabla p p_t \,\mathrm{d}x &\le \|\nabla r\|_{L^2}\|\nabla p\|_{L^4}\|p_t\|_{L^4} \\ &\le C(\varepsilon)\|\nabla r\|_{L^2}^2\|\sqrt{r}\nabla p_t\|_{L^2}^2 + \varepsilon\Big\|\frac{1}{r}\Big\|_{L^\infty}^2\|\sqrt{r}\Delta p\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

其中我们还用到了椭圆估计

$$\|\nabla p\|_{H^1} \le \|p\|_{H^2} \le C\|\Delta p\|_{L^2}. \tag{5.9}$$

为估计（5.8）右端的最后一项，我们结合（5.9）使用 Ladyzhenskaya 不等式（3.3），得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega r_t|\nabla p|^2\,\mathrm{d}x &\le \|r_t\|_{L^2}\|\nabla p\|_{L^4}^2 \\ &\lesssim \|r_t\|_{L^2}\Big\|\frac{1}{r}\Big\|_{L^\infty}\|\sqrt{r}\nabla p\|_{L^2}^{2(1-\frac{d}{4})}\|\sqrt{r}\Delta p\|_{L^2}^{\frac{d}{2}} \\ &\le C(\varepsilon)\|r_t\|_{L^2}^{\frac{4}{4-d}}\|\sqrt{r}\nabla p\|_{L^2}^2 + \varepsilon\Big\|\frac{1}{r}\Big\|_{L^\infty}^{\frac{4}{d}}\|\sqrt{r}\Delta p\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

综上，对于所有 $t \ge 0$，上述估计给出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1[p](t) + b\|\nabla p_t(t)\|_{L^2}^2 \lesssim{}& \|r_t(t)\|_{L^2}^{\frac{4}{4-d}}E_1[p](t) \\ &+ (\|\alpha_t(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla r(t)\|_{L^2}^2)E_2[p](t) \\ &+ \|g(t)\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\sqrt{r(t)}\Delta p(t)\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{5.10}$$

为了得到能量 $E_2[p]$ 的估计，我们对（5.1）关于 t 求导，得到

$$\alpha p_{ttt} - r\Delta p_t - b\Delta p_{tt} = -\alpha_t p_{tt} + r_t\Delta p + g_t. \tag{5.11}$$

接下来，将 (5.11) 乘以 p_{tt} 并在 Ω 上积分。利用分部积分可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\sqrt{\alpha}p_{tt}\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{r}\nabla p_t\|_{L^2}^2\Big) + b\|\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2 \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega \alpha_t p_{tt}^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega r_t|\nabla p_t|^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla r\cdot\nabla p_t p_{tt}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega r_t\Delta p p_{tt}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega g_t p_{tt}\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{5.12}$$

首先，利用 Ladyzhenskaya 不等式、Young 不等式以及嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$，可得到 (5.12) 右端第一项的如下上界。即，

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_\Omega \alpha_t p_{tt}^2\,\mathrm{d}x &\le \frac{1}{2}\|\alpha_t\|_{L^2}\|p_{tt}\|_{L^4}^2\\ &\lesssim \Big\|\frac{1}{\alpha}\Big\|_{L^\infty}^{1-\frac{d}{4}}\|\alpha_t\|_{L^2}\|\sqrt{\alpha}p_{tt}\|_{L^2}^{2(1-\frac{d}{4})}\|\nabla p_{tt}\|_{L^2}^{\frac{d}{2}}\\ &\le C(\varepsilon)\|\alpha_t\|_{L^2}^{\frac{4}{4-d}}\|\sqrt{\alpha}p_{tt}\|_{L^2}^2+\varepsilon\Big\|\frac{1}{\alpha}\Big\|_{L^\infty}^{\frac{4}{d}-1}\|\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

我们可以将 ε 取得足够小，从而将上述估计中的最后一项吸收到(5.12)左侧的耗散项中。

类似地，我们可以对（5.12）右端的第二项推导出以下估计

$$\begin{aligned}\int_\Omega r_t|\nabla p_t|^2\,\mathrm{d}x &\le \|r_t\|_{L^2}\|\nabla p_t\|_{L^4}^2\\ &\lesssim \Big\|\frac{1}{r}\Big\|_{L^\infty}^{1-\frac{d}{4}}\|r_t\|_{L^2}\|\sqrt{r}\nabla p_t\|_{L^2}^{2(1-\frac{d}{4})}\|\Delta p_t\|_{L^2}^{\frac{d}{2}}\\ &\le C(\varepsilon)\|r_t\|_{L^2}^{\frac{4}{4-d}}\|\sqrt{r}\nabla p_t\|_{L^2}^2+\varepsilon\Big\|\frac{1}{r}\Big\|_{L^\infty}^{\frac{4}{d}-1}\|\Delta p_t\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

其中我们还使用了（5.9）中的椭圆正则性。此外，利用嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ 以及 Poincar´e 不等式，可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla r\cdot\nabla p_t p_{tt}\,\mathrm{d}x &\le \|\nabla r\|_{L^3}\|\nabla p_t\|_{L^2}\|p_{tt}\|_{L^6}\\ &\le C(\varepsilon)\|\nabla r\|_{L^3}^2\|\sqrt{r}\nabla p_t\|_{L^2}^2+\varepsilon\Big\|\frac{1}{\sqrt{r}}\Big\|_{L^\infty}^2\|\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

再次，我们使用相同的工具来估计（5.12）右侧剩余的两项。因此，我们可以证明

$$\begin{aligned}\int_\Omega r_t\Delta p p_{tt}\,\mathrm{d}x &\le \Big\|\frac{r_t}{b}\Big\|_{L^3}\|p_{tt}\|_{L^6}\|\sqrt{b}\Delta p\|_{L^2}\\ &\le C(\varepsilon)\|r_t\|_{L^3}^2\|\sqrt{b}\Delta p\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\int_\Omega g_t p_{tt}\,\mathrm{d}x \le C(\varepsilon)\|g_t\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2.$$

汇总上述估计并选取 ε 足够小，可得对所有 $t\ge 0$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\sqrt{\alpha(t)}p_{tt}(t)\|_{L^2}^2+\|\sqrt{r(t)}\nabla p_t(t)\|_{L^2}^2\Big)+\frac{b}{2}\|\nabla p_{tt}(t)\|_{L^2}^2\\ &\lesssim \Big(\|r_t(t)\|_{L^3}^2+\|r_t(t)\|_{L^2}^{\frac{4}{4-d}}+\|\alpha_t(t)\|_{L^2}^{\frac{4}{4-d}}+\|\nabla r(t)\|_{L^3}^2\Big)E_2[p](t)\\ &\quad+\varepsilon\Big\|\frac{1}{r}\Big\|_{L^\infty}^{\frac{4}{d}-1}\|\Delta p_t(t)\|_{L^2}^2+\|g_t(t)\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{5.13}$$

现在，我们着重建立 $\|\Delta p\|_{L^2}$ 和 $\|\Delta p_t\|_{L^2}$的估计。用 $-\Delta p$ 测试方程（5.1），并在 Ω 上积分，得到

$$\frac{b}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta p\|_{L^2}^2+\int_\Omega r|\Delta p|^2\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega g(\Delta p)\,\mathrm{d}x+\int_\Omega \alpha p_{tt}\Delta p\,\mathrm{d}x.$$

应用 H¨older、Young 和 Poincar´e 不等式，我们得到以下估计

$$\begin{aligned}&\frac{b}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta p\|_{L^2}^2+\|\sqrt{r}\Delta p\|_{L^2}^2\\&\le 2\|g\|_{L^2}^2+\frac{2}{b}\|\sqrt{b}\Delta p\|_{L^2}^2+C(\varepsilon)\|\sqrt{b}\Delta p\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\alpha\|_{L^\infty}^2\|\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{5.14}$$

将 (5.14) 与 (5.13) 相加，此时 (5.14) 右端的最后一项可由 (5.13) 的左端吸收。因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_2[p](t)+\frac{b}{3}\|\nabla p_{tt}(t)\|_{L^2}^2+\|\sqrt{r(t)}\Delta p(t)\|_{L^2}^2\\&\lesssim(1+\|r_t(t)\|_{L^3}^2+\|r_t(t)\|_{L^2}^{\frac{4}{4-d}}+\|\alpha_t(t)\|_{L^2}^{\frac{4}{4-d}}+\|\nabla r(t)\|_{L^3}^2)E_2[p](t)\\&\quad+\varepsilon\Big\|\frac{1}{r}\Big\|_{L^\infty}^{\frac{4}{d}-1}\|\Delta p_t(t)\|_{L^2}^2+\|g(t)\|_{L^2}^2+\|g_t(t)\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{5.15}$$

接下来，我们将方程 (5.1) 乘以 $-\Delta p_t$ ，并在 Ω 上积分，得到

$$b\|\Delta p_t\|_{L^2}^2=\int_\Omega \alpha p_{tt}\Delta p_t\,\mathrm{d}x-\int_\Omega r\Delta p\Delta p_t\,\mathrm{d}x+\int_\Omega g(-\Delta p_t)\,\mathrm{d}x.$$

利用 H¨older 不等式和 Young 不等式，并回顾假设 2，我们得到。 n

$$b\|\Delta p_t\|_{L^2}^2\le C(\varepsilon)\Big(\|\sqrt{\alpha}p_{tt}\|_{L^2}^2+\|r\|_{L^\infty}^2\|\sqrt{b}\Delta p\|_{L^2}^2+\|g\|_{L^2}^2\Big)+\varepsilon\|\Delta p_t\|_{L^2}^2.$$

取 ε 足够小，我们得到

$$\frac{b}{2}\|\Delta p_t(t)\|_{L^2}^2\lesssim E_2[p](t)+\|g(t)\|_{L^2}^2,\quad t\ge 0.\tag{5.16}$$

因此，将 (5.15) 和 (5.16) 合并可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_2[p](t)+\frac{b}{3}\|\nabla p_{tt}(t)\|_{L^2}^2+\|\sqrt{r(t)}\Delta p(t)\|_{L^2}^2+\frac{b}{3}\|\Delta p_t(t)\|_{L^2}^2\\&\lesssim\Big(1+\|r_t(t)\|_{L^3}^2+\|r_t(t)\|_{L^2}^{\frac{4}{4-d}}+\|\alpha_t(t)\|_{L^2}^{\frac{4}{4-d}}+\|\nabla r(t)\|_{L^3}^2\Big)E_2[p](t)\\&\quad+\|g(t)\|_{L^2}^2+\|g_t(t)\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{5.17}$$

最后，将估计式 (5.10)、(5.17) 相加，并在 (5.10)右端的最后一项中取 ε 足够小，我们得到 (5.7)。这就完成了引理 5.1 的证明。□

引理5.2。设 $g\in H_0^1$(Ω)和 $g_t\in L^2$(Ω)。那么，在假设 2 下，能量E_3 对于 $t\ge 0$ 满足估计

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_3[p](t)+\|\sqrt{r}\nabla\Delta p(t)\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\alpha}p_{ttt}(t)\|_{L^2}^2\\&\lesssim(1+\Lambda_2(t))E_3[p](t)+\|\sqrt{b}\Delta p_t(t)\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\nabla p_{tt}(t)\|_{L^2}^2\\&\quad+\|\nabla g(t)\|_{L^2}^2+\|g_t(t)\|_{L^2}^2\end{aligned}\tag{5.18}$$

其中

$$\Lambda_2(t) = \|r_t(t)\|_{L^3}^2 + \|\alpha_t(t)\|_{L^3}^2 + \|\nabla\alpha(t)\|_{L^3}^2 + \|\nabla r(t)\|_{L^3}^2.$$

证明。我们用 $\Delta^2 p$ 检验线性化的Westervelt方程(5.1)，并在Ω上积分。通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (r|\nabla\Delta p|^2 + b\nabla\Delta p_t\cdot\nabla\Delta p)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega (-\alpha\nabla p_{tt} - p_{tt}\nabla\alpha - \Delta p\nabla r - \nabla g)\cdot\nabla\Delta p\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用 H¨older 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\sqrt{b}\nabla\Delta p\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{r}\nabla\Delta p\|_{L^2}^2\\ &\le \|\alpha\|_{L^\infty}\|\nabla p_{tt}\|_{L^2}\|\nabla\Delta p\|_{L^2} + \|\nabla\alpha\|_{L^3}\|p_{tt}\|_{L^6}\|\nabla\Delta p\|_{L^2}\\ &\quad + \|\nabla r\|_{L^3}\|\Delta p\|_{L^6}\|\nabla\Delta p\|_{L^2} + \|\nabla g\|_{L^2}\|\nabla\Delta p\|_{L^2}.\end{aligned}$$

此外，利用假设 2、 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ 的嵌入并应用杨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\sqrt{b}\nabla\Delta p\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{r}\nabla\Delta p\|_{L^2}^2\\ &\le C(\varepsilon)\Big(1 + \|\nabla\alpha\|_{L^3}^2\Big)\|\sqrt{b}\nabla\Delta p\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2\\ &\quad + C(\varepsilon)\Big(\|\nabla r\|_{L^3}^2\|\sqrt{b}\nabla\Delta p\|_{L^2}^2 + \|\nabla g\|_{L^2}^2\Big) + \varepsilon\Big\|\frac{1}{\sqrt{r}}\Big\|_{L^\infty}^2\|\sqrt{r}\nabla\Delta p\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

我们可以将 ε 取为足够小，从而将右端的最后一项吸收到左端的耗散项中。因此，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\sqrt{b}\nabla\Delta p\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{r}\nabla\Delta p\|_{L^2}^2\\ &\lesssim (1 + \|\nabla\alpha\|_{L^3}^2 + \|\nabla r\|_{L^3}^2)\|\sqrt{b}\nabla\Delta p\|_{L^2}^2 + \|\nabla g\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{5.19}$$

接下来，我们将对时间求导后的方程（5.11）乘以 p_{ttt} ，并在 Ω 上积分，得到

$$\frac{b}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{\alpha}p_{ttt}\|_{L^2}^2 = \int_\Omega (-\alpha_t p_{tt} + r_t\Delta p + r\Delta p_t + g_t)p_{ttt}\,\mathrm{d}x. \tag{5.20}$$

我们现在的目标是估计（5.20）右端的各项。首先，利用 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}&\frac{b}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{\alpha}p_{ttt}\|_{L^2}^2\\ &\le \|\alpha_t\|_{L^3}\|p_{tt}\|_{L^6}\|p_{ttt}\|_{L^2} + \|r_t\|_{L^3}\|\Delta p\|_{L^6}\|p_{ttt}\|_{L^2}\\ &\quad + \|r\|_{L^\infty}\|\Delta p_t\|_{L^2}\|p_{ttt}\|_{L^2} + \|g_t\|_{L^2}\|p_{ttt}\|_{L^2}.\end{aligned}$$

此外，利用杨不等式以及嵌入 $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^6(\Omega)$，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{b}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\alpha}p_{ttt}\|_{L^2}^2\\&\leq C(\varepsilon)\Big(\|\alpha_t\|_{L^3}^2\|\sqrt{b}\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2+\|r_t\|_{L^3}^2\|\sqrt{b}\nabla\Delta p\|_{L^2}^2+\|\sqrt{b}\Delta p_t\|_{L^2}^2+\|g_t\|_{L^2}^2\Big)\\&\quad+\varepsilon\Big\|\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\Big\|_{L^\infty}^2\|\sqrt{\alpha}p_{ttt}\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

通过将 ε 选得足够小，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\sqrt{b}\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\alpha}p_{ttt}\|_{L^2}^2\\&\lesssim\|\alpha_t\|_{L^3}^2\|\sqrt{b}\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2+\|r_t\|_{L^3}^2\|\sqrt{b}\nabla\Delta p\|_{L^2}^2+\|\sqrt{b}\Delta p_t\|_{L^2}^2+\|g_t\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{5.21}$$

因此，综合估计式 (5.19) 和 (5.21)，可得 (5.18)。 □

命题 5.1 的证明。综合估计式 (5.7) 和 (5.18)，并利用 Poincar´e 不等式，可得对所有 $t\geq 0$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathfrak{E}[p](t)+\mathfrak{D}_0[p](t)\\&\lesssim(1+\Lambda_1(t)+\Lambda_2(t))\mathfrak{E}[p](t)+\|\sqrt{b}\Delta p_t(t)\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\nabla p_{tt}(t)\|_{L^2}^2\\&\quad+\|\nabla g(t)\|_{L^2}^2+\|g_t(t)\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

其中，$\mathfrak{E}[p]$ 和 $\mathfrak{D}_0[p]$ 分别由 (5.2) 和 (5.3) 定义。因此，当 ε 足够小时，依赖于 ε 的项可以吸收到 $\mathfrak{D}_0[p]$ 中。此外，回顾 (5.16) 并利用 Poincar´e 不等式，可得总声能的如下估计

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathfrak{E}[p](t)+\mathfrak{D}_0[p](t)\lesssim(1+\Lambda(t))\mathfrak{E}[p](t)+\mathfrak{F}(t),\tag{5.22}$$

其中，函数 Λ 和 $\mathfrak{F}$ 分别由 (5.5) 和 (5.6) 给出。

接下来, 我们将方程 (5.11) 乘以 $-\Delta p_{tt}$ 并在 Ω 上积分，则有

$$b\|\Delta p_{tt}\|_{L^2}^2=\int_\Omega(\alpha p_{ttt}+\alpha_t p_{tt}-r_t\Delta p-r\Delta p_t-g_t)\Delta p_{tt}\,\mathrm{d}x.$$

利用 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}b\|\Delta p_{tt}\|_{L^2}^2\leq{}&\|\sqrt{\alpha}\|_{L^\infty}\|\sqrt{\alpha}p_{ttt}\|_{L^2}\|\Delta p_{tt}\|_{L^2}+\|\alpha_t\|_{L^3}\|p_{tt}\|_{L^6}\|\Delta p_{tt}\|_{L^2}\\&+\|r_t\|_{L^3}\|\Delta p\|_{L^6}\|\Delta p_{tt}\|_{L^2}+\|r\|_{L^\infty}\|\Delta p_t\|_{L^2}\|\Delta p_{tt}\|_{L^2}\\&+\|g_t\|_{L^2}\|\Delta p_{tt}\|_{L^2}.\end{aligned}$$

应用杨不等式，并利用连续嵌入 $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^6(\Omega)$，可得

$$\begin{aligned}b\|\Delta p_{tt}\|_{L^2}^2\lesssim{}&C(\varepsilon)(\|\sqrt{\alpha}\|_{L^\infty}^2\|\sqrt{\alpha}p_{ttt}\|_{L^2}^2+\|\alpha_t\|_{L^3}^2\|\sqrt{b}\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2+\|r_t\|_{L^3}^2\|\sqrt{b}\nabla\Delta p\|_{L^2}^2\\&+\|r\|_{L^\infty}^2\|\sqrt{b}\Delta p_t\|_{L^2}^2+\|g_t\|_{L^2}^2)+\varepsilon\|\Delta p_{tt}\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

将 $\varepsilon > 0$ 取足够小，并注意到 (5.16) 和 假设 2，我们得到对所有 $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{b}{2}\|\Delta p_{tt}(t)\|^2 \lesssim \|\sqrt{\alpha} p_{ttt}(t)\|_{L^2}^2 + (\|\alpha_t(t)\|_{L^3}^2 + \|r_t(t)\|_{L^3}^2) E_3[p](t) \\ + E_2[p](t) + \|g(t)\|_{L^2}^2 + \|g_t(t)\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{5.23}$$

我们将 $\gamma \times$(5.23) 与估计式 (5.22) 相加，然后适当选取足够小的 $\gamma > 0$，使得 (5.23) 右侧的第一项可以由 (5.22) 中的耗散项 $\mathfrak{D}_0[p]$ 吸收，进而可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathfrak{E}[p](t) + \mathfrak{D}_0[p](t) + b\|\Delta p_{tt}(t)\|^2 \lesssim (1 + \Lambda(t))\mathfrak{E}[p](t) + \mathfrak{F}(t). \tag{5.24}$$

另一方面，将方程（5.1）乘以 $\Delta^2 p_t$ 并在 Ω 上积分，我们得到

$$b\|\nabla \Delta p_t\|_{L^2}^2 = \int_\Omega (\alpha \nabla p_{tt} + p_{tt}\nabla\alpha - \Delta p \nabla r - r\nabla\Delta p - \nabla g) \cdot \nabla \Delta p_t \,\mathrm{d}x.$$

应用 H¨older 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}b\|\nabla \Delta p_t\|_{L^2}^2 \leq \|\alpha\|_{L^\infty}\|\nabla p_{tt}\|_{L^2}\|\nabla\Delta p_t\|_{L^2} + \|\nabla\alpha\|_{L^3}\|p_{tt}\|_{L^6}\|\nabla\Delta p_t\|_{L^2} \\ + \|r\|_{L^\infty}\|\nabla\Delta p\|_{L^2}\|\nabla\Delta p_t\|_{L^2} + \|\nabla r\|_{L^3}\|\Delta p\|_{L^6}\|\nabla\Delta p_t\|_{L^2} \\ + \|\nabla g\|_{L^2}\|\nabla\Delta p_t\|_{L^2}.\end{aligned}$$

此外，嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ 结合杨不等式以及 Dirichlet–Laplacian 特征函数满足 $\Delta p|_{\partial\Omega} = 0$ 可得

$$\begin{aligned}b\|\nabla \Delta p_t\|_{L^2}^2 \lesssim C(\varepsilon)(\|\alpha\|_{L^\infty}^2\|\sqrt{b}\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2 + \|\nabla\alpha\|_{L^3}^2\|\sqrt{b}\nabla p_{tt}\|_{L^2}^2 + \|r\|_{L^\infty}^2\|\sqrt{b}\nabla\Delta p\|_{L^2}^2 \\ + \|\nabla r\|_{L^3}^2\|\sqrt{b}\nabla\Delta p\|_{L^2}^2 + \|\nabla g\|_{L^2}^2) + \varepsilon\|\nabla\Delta p_t\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

因此，选取足够小的 ε，并考虑假设 2，我们可以推断出

$$\frac{b}{2}\|\nabla\Delta p_t(t)\|_{L^2}^2 \lesssim (1 + \|\nabla\alpha\|_{L^3}^2 + \|\nabla r\|_{L^3}^2) E_3[p](t) + \|\nabla g(t)\|_{L^2}^2, \quad t \geq 0. \tag{5.25}$$

将估计式 (5.24) 和 (5.25) 相加，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathfrak{E}[p](t) + \mathfrak{D}[p](t) \lesssim (1 + \Lambda(t))\mathfrak{E}[p](t) + \mathfrak{F}(t).$$

因此，通过应用 Gronwall 不等式（参见引理 3.1），我们推得

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}[p](t) + \int_0^t \mathfrak{D}[p](s)\,\mathrm{d}s \lesssim \mathfrak{E}[p](0)\exp\Big(\int_0^t (1 + \Lambda(s))\,\mathrm{d}s\Big) \\ + \int_0^t \mathfrak{F}(s)\exp\Big(\int_s^t (1 + \Lambda(\sigma))\mathrm{d}\sigma\Big)\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{5.26}$$

此外，估计式（5.26）和（5.16）给出的是

$$
\begin{aligned}
b\|\Delta p_t(t)\|_{L^2}^2 &\lesssim \mathfrak{E}[p](t) + \|g(t)\|_{L^2}^2 \\
&\lesssim \mathfrak{E}[p](0)\exp\Big(\int_0^t (1+\Lambda(s))\,\mathrm{d}s\Big) \\
&\quad + \int_0^t \mathfrak{F}(s)\exp\Big(\int_s^t (1+\Lambda(\sigma))\mathrm{d}\sigma\Big)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{5.27}
$$

其中，我们采用不等式 (3.2) 对项 $\|g(t)\|_{L^2}^2$进行上界估计。然后，只需将 (5.26)和 (5.27) 相加，即可得到估计 (5.4)，该估计适用于狄利克雷拉普拉斯算子的光滑特征函数。标准的紧性方法允许我们取极限；从而证明了 $p \in X_p$ to(5.1) 的一个解的存在性。由范数的弱下半连续性和弱-$\star$ 下半连续性，我们得到 p满足相同的能量界 (5.4)。解 p 的唯一性得以保证，因为齐次问题的唯一解

$$
\alpha(x,t)p_{tt} - r(x,t)\Delta p - b\Delta p_t = 0, \quad p(x,0) = p_t(x,0) = 0, \quad p|_{\partial\Omega} = 0
$$

为零。事实上，由(5.4) 可得 $\mathfrak{E}[p](t) = 0$ 这立即得到 $p = 0$。通过注意到 p 属于 X_p 意味着（见 [18, 第 1 章，引理 2。1] 和 [7, 第 5 章，定理 2]），我们完成证明。

$$
p \in C(0,T;H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \qquad p_t \in C(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)).
$$

命题 5.1 的证明至此完成。 □

6. Uniform local well-posedness: Proof of Theorem 2.1

本节将证明定理 2.1。证明将使用巴拿赫不动点定理完成。为此，我们回顾（2.1），并将球 B 定义为

$$
\begin{aligned}
B = \Big\{ &(p^*,\Theta^*,q^*) \in \mathcal{X} : (p^*(0),p_t^*(0),\Theta^*(0),q^*(0)) = (p_0,p_1,\Theta_0,q_0) \\
&\|p^*\|_{L^\infty L^\infty} \le \gamma < \frac{1}{2k_1}, \quad \|p^*\|_{X_p} \le R_1, \quad \|(\Theta^*,q^*)\|_{X_\Theta\times X_q} \le R_2\Big\},
\end{aligned}
$$

其中 $\mathcal{X}:= X_p\times X_\Theta\times X_q$。注意，我们有两个不同的半径。其原因将在下面的证明中明确，因为我们需要对 $R_1 > 0$ 施加小量条件，但不需要对 $R_2 > 0$施加该条件。

为检验球 B is 是 $\mathcal{X}$的非空子集，可以取例如（见[22]） $\alpha = r = 1$ 和 $f = g = 0$ 于（5.1）和（4.1）中。然后，基于估计式（5.4）、（4.18）和（4.19），解(p,Θ,q) $\in \mathcal{X}$属于 B，只要我们选择 R_1、R_2和 γ 使得

$$
C_T\mathfrak{E}[p](0) \le R_1^2 \le \gamma^2 < \frac{1}{(2k_1)^2}, \quad C_T\big(\|q_0\|_{H^1}^2 + (1+\bar\tau+\bar\tau^2)E^{\bar\tau}[\Theta,q](0)\big) \le R_2^2.
$$

解空间 X_p、 X_Θ 和 X_q （在 (2.1) 中定义）赋予范数

$$\begin{aligned}\|p\|_{X_p} &:= \|p\|_{L^\infty H^3} + \|p_t\|_{L^\infty H^2} + \|\nabla\Delta p_t\|_{L^2L^2} + \|\nabla p_{tt}\|_{L^\infty L^2}\\ &\quad + \|\Delta p_{tt}\|_{L^2L^2} + \|p_{ttt}\|_{L^2L^2},\\ \|\Theta\|_{X_\Theta} &:= \|\Theta\|_{L^\infty H^2} + \|\Theta_t\|_{L^\infty H^1} + \|\Theta_{tt}\|_{L^\infty L^2},\\ \|q\|_{X_q} &:= \|q\|_{L^\infty H^1} + \sum_{k=1}^{2}\|\partial_t^k q\|_{L^2L^2}.\end{aligned}$$

然后，乘积空间 $\mathcal{X}$ 配备了范数。

$$\|(p,\Theta,q)\|_{\mathcal{X}}^2 = \|p\|_{X_p}^2 + \|\Theta\|_{X_\Theta}^2 + \|q\|_{X_q}^2.$$

这些范数显然与能量 $\mathcal{E}[\Theta]$ 和 $\mathfrak{E}[p]$ 等价。对于所有 $t \geq 0$，我们有

$$\sup_{t\in(0,T)}\mathcal{E}[\Theta](t) + \|q\|_{L^\infty H^1}^2 + \sum_{k=1}^{2}\int_0^T \|\partial_t^k q\|_{L^2}^2 \lesssim \|(\Theta,q)\|_{X_\Theta\times X_q}^2$$

and

$$\|(\Theta,q)\|_{X_\Theta\times X_q}^2 \lesssim \sup_{t\in(0,T)}\mathcal{E}[\Theta](t) + \|q\|_{L^\infty H^1}^2 + \sum_{k=1}^{2}\int_0^T \|\partial_t^k q\|_{L^2}^2.$$

其中 $\|(\Theta,q)\|_{X_\Theta\times X_q}^2 = \|\Theta\|_{X_\Theta}^2 + \|q\|_{X_q}^2$。此外，考虑到假设 2，尤其是函数 α 和 r 的有界性，我们得到

$$\begin{aligned}\|p\|_{X_p}^2 &\lesssim \sup_{t\in(0,T)}\mathfrak{E}[p](t) + \sup_{t\in(0,T)} b\|\Delta p_t(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\sqrt{\alpha}p_{ttt}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s\\ &\quad + \int_0^T b\|\nabla\Delta p_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s + \int_0^T b\|\Delta p_{tt}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s\\ &\lesssim \sup_{t\in(0,T)}\mathfrak{E}[p](t) + \sup_{t\in(0,T)} b\|\Delta p_t(t)\|_{L^2} + \int_0^T \mathfrak{D}[p](s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

逆不等式也成立

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in(0,T)}\mathfrak{E}[p](t) + \sup_{t\in(0,T)} b\|\Delta p_t(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\sqrt{\alpha}p_{ttt}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s\\ &\qquad + \int_0^T b\|\nabla\Delta p_t\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s + \int_0^T b\|\Delta p_{tt}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s \lesssim \|p\|_{X_p}^2.\end{aligned}$$

注意，范数 $\|(p,\Theta,q)\|_{\mathcal{X}}$ 与 τ 无关。这在研究极限 $\tau\to 0$ 时起着至关重要的作用。

我们考虑算子 $\mathcal{T}$，它将 $(p^*,\Theta^*,q^*) \in B \subset \mathcal{X}$ 映射为 $(p,\Theta,q) \in \mathcal{X}$ 耦合问题的解

$$\begin{cases}(1-2k(\Theta^*)p^*)p_{tt} - h(\Theta^*)\Delta p - b\Delta p_t = 2k(\Theta^*)(p_t^*)^2, & \text{in} \quad \Omega\times(0,T),\\ m\Theta_t + \nabla\cdot q + \ell\Theta = \mathcal{Q}(p_t^*), & \text{in} \quad \Omega\times(0,T),\\ \tau q_t + q + \kappa_{\mathrm{a}}\nabla\Theta = 0, & \text{in} \quad \Omega\times(0,T).\end{cases} \tag{6.1}$$

系统 (1.9) 存在唯一解，等价于映射 $\mathcal{T}$ 在 B 中存在唯一不动点，而这将由 Banach 不动点定理保证。因此，为了确保该定理适用，我们希望证明：当 R_2 足够大、R_1 足够小且 δ 足够小时，有：

(i)：映射 $\mathcal{T}\colon B \to B$ 有良好定义。(ii)：$\mathcal{T}$是
压缩映射。
这是通过沿用 [22, 第 4] 节中给出的分析思路实现的。相关结果见接下来的两个引理。

引理 6.1。给定 $\tau \in (0, \bar{\tau}]$。那么，对于足够小的 R_1 和 δ，算子 $\mathcal{T}$ 是自映射；也就是说 $\mathcal{T}(B) \subset B$。

证明。给定$(p^*, \Theta^*, q^*) \in B$。我们旨在证明 $(p, \Theta, q) = \mathcal{T}(p^*, \Theta^*, q^*)$方程 (6.1) 的解也属于 B。为此，我们在命题 4.1 和 5.1 的框架下写出系统 (6.1)。为此，令

$$\begin{aligned} \alpha(x,t) &= 1 - 2k(\Theta^*)p^*, \qquad r(x,t) = h(\Theta^*), \\ g(x,t) &= 2k(\Theta^*)(p_t^*)^2, \qquad f(x,t) = \mathcal{Q}(p_t^*) = \frac{2b}{\rho_{\mathrm{a}} C_{\mathrm{a}}^4}(p_t^*)^2 \end{aligned}$$

我们的目标是证明这些函数满足假设 2。我们首先检验非退化条件。事实上，我们有

$$\|2k(\Theta^*)p^*\|_{L^\infty L^\infty} \le 2k_1 \|p^*\|_{L^\infty L^\infty} \le 2k_1\gamma,$$

因此

$$0 < \alpha_0 = 1 - 2k_1\gamma \le \alpha(x,t) \le 1 + 2k_1\gamma = \alpha_1.$$

此外，由（H1）可得

$$0 < r_0 = h_1 \le h(\Theta^*),$$

这保证函数 r、α 不会退化。

接下来，我们聚焦于在(5.5) 中给出的函数 $\Lambda(t)$。利用H¨older不等式、k 的性质（见假设 (K2)）以及嵌入 $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$，我们有

$$\begin{aligned} \|\alpha_t\|_{L^2L^2} &= \|\partial_t(2k(\Theta^*)p^*)\|_{L^2L^2} \\ &\le 2\|k(\Theta^*)p_t^*\|_{L^2L^2} + 2\|k'(\Theta^*)\Theta_t^* p^*\|_{L^2L^2} \\ &\lesssim \|k(\Theta^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|p_t^*\|_{L^2L^2} + \|k'(\Theta^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\Theta_t^*\|_{L^2L^2}\|p^*\|_{L^\infty L^\infty} \\ &\lesssim k_1\|p_t^*\|_{L^2L^2} + (1 + \|\Theta^*\|_{L^\infty L^\infty}^{\gamma_2+1})\|\Theta_t^*\|_{L^2L^2}\|p^*\|_{L^\infty L^\infty} \\ &\le C_T(R_1 + (1 + R_2^{1+\gamma_2})R_1R_2). \end{aligned}$$

我们得到了上述最后一个不等式，这得益于嵌入 $L^\infty(0,T) \hookrightarrow L^2(0,T)$ 以及事实 $(p^*, \Theta^*, q^*) \in B$。

令 $\beta = \frac{4}{4-d}$。于是，我们得到

$$\begin{aligned}\|\alpha_t\|_{L^\beta L^2} &\le 2\|k(\Theta^*)p_t^*\|_{L^\beta L^2} + 2\|k'(\Theta^*)\Theta_t^* p^*\|_{L^\beta L^2}\\ &\lesssim \|k(\Theta^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|p_t^*\|_{L^\beta L^2} + \|k'(\Theta^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\Theta_t^*\|_{L^\beta L^2}\|p^*\|_{L^\infty L^\infty}\\ &\lesssim k_1\|p_t^*\|_{L^\beta L^2} + (1+\|\Theta^*\|_{L^\infty L^\infty}^{\gamma_2+1})\|\Theta_t^*\|_{L^\beta L^2}\|p^*\|_{L^\infty H^3}\\ &\le C_T(R_1 + (1+R_2^{1+\gamma_2})R_1R_2),\end{aligned}$$

其中我们使用了嵌入 $L^\infty(0,T) \hookrightarrow L^\beta(0,T)$。此外，利用嵌入$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega)$，我们可以估计 $\|\alpha_t\|_{L^2L^3}, \|\nabla\alpha\|_{L^2L^3}$如下

$$\begin{aligned}\|\alpha_t\|_{L^2L^3} &\le 2\|k(\Theta^*)p_t^*\|_{L^2L^3} + 2\|k'(\Theta^*)\Theta_t^* p^*\|_{L^2L^3}\\ &\lesssim \|k(\Theta^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|p_t^*\|_{L^2L^3} + \|k'(\Theta^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\Theta_t^*\|_{L^2L^3}\|p^*\|_{L^\infty L^\infty}\\ &\lesssim k_1\|p_t^*\|_{L^2H^1} + (1+\|\Theta^*\|_{L^\infty L^\infty}^{\gamma_2+1})\|\Theta_t^*\|_{L^2H^1}\|p^*\|_{L^\infty H^3},\end{aligned} \tag{6.2}$$

and

$$\begin{aligned}\|\nabla\alpha\|_{L^2L^3} &\le 2\|k(\Theta^*)\nabla p^*\|_{L^2L^3} + 2\|k'(\Theta^*)\nabla\Theta^* p^*\|_{L^2L^3}\\ &\lesssim \|k(\Theta^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\nabla p^*\|_{L^2L^3} + \|k'(\Theta^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\nabla\Theta^*\|_{L^2L^3}\|p^*\|_{L^\infty L^\infty}\\ &\lesssim k_1\|p^*\|_{L^2H^2} + (1+\|\Theta^*\|_{L^\infty L^\infty}^{\gamma_2+1})\|\Theta^*\|_{L^2H^2}\|p^*\|_{L^\infty H^3}.\end{aligned} \tag{6.3}$$

因此，由 (6.2) 和 (6.3) 可得

$$\|\alpha_t\|_{L^2L^3} + \|\nabla\alpha\|_{L^2L^3} \le C_T(R_1 + (1+R_2^{1+\gamma_2})R_1R_2).$$

类似地，我们可以推导出涉及函数 r 的 Λ 各项的估计。根据函数 h 的性质（见 (H3)）以及嵌入 $L^\infty(0,T) \hookrightarrow L^\beta(0,T)$，我们得到

$$\begin{aligned}\|r_t\|_{L^\beta L^2} &= \|h'(\Theta^*)\Theta_t^*\|_{L^\beta L^2} \le \|h'(\Theta^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\Theta_t^*\|_{L^\beta L^2}\\ &\le C_T(1+\|\Theta^*\|_{L^\infty L^\infty}^{\gamma_1+1})\|\Theta_t^*\|_{L^\infty L^2} \le C_T(1+R_2^{\gamma_1+1})R_2,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|\nabla r\|_{L^2L^2} &= \|h'(\Theta^*)\nabla\Theta^*\|_{L^2L^2} \le \|h'(\Theta^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\nabla\Theta^*\|_{L^2L^2}\\ &\lesssim (1+\|\Theta^*\|_{L^\infty L^\infty}^{\gamma_1+1})\|\Theta^*\|_{L^2H^2} \le C_T(1+R_2^{\gamma_1+1})R_2.\end{aligned}$$

再次，利用嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega)$，我们有

$$\begin{aligned}\|r_t\|_{L^2L^3} &= \|h'(\Theta^*)\Theta_t^*\|_{L^2L^3} \lesssim (1+\|\Theta^*\|_{L^\infty L^\infty}^{\gamma_1+1})\|\Theta_t^*\|_{L^2L^3}\\ &\lesssim (1+\|\Theta^*\|_{L^\infty L^\infty}^{\gamma_1+1})\|\Theta_t^*\|_{L^2H^1}.\end{aligned}$$

此外，椭圆正则性使我们能够得到

$$\begin{aligned}\|\nabla r\|_{L^2L^3} &= \|h'(\Theta^*)\nabla\Theta^*\|_{L^2L^3} \le \|h'(\Theta^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\nabla\Theta^*\|_{L^2L^3}\\ &\lesssim (1+\|\Theta^*\|_{L^\infty L^\infty}^{\gamma_1+1})\|\Theta^*\|_{L^2H^2}.\end{aligned}$$

因此，可以得出结论：

$$\|r_t\|_{L^2L^3} + \|\nabla r\|_{L^2L^3} \le C_T(1+R_2^{\gamma_1+1})R_2.$$

为方便起见，我们回顾一下 Λ 的定义。

$$\begin{aligned}\Lambda(t) = \|\alpha_t(t)\|_{L^2}^2 + \|\alpha_t(t)\|_{L^2}^{\frac{4}{4-d}} + \|r_t(t)\|_{L^2}^{\frac{4}{4-d}} + \|\nabla r(t)\|_{L^2}^2 + \|r_t(t)\|_{L^3}^2 \\ + \|\alpha_t(t)\|_{L^3}^2 + \|\nabla r(t)\|_{L^3}^2 + \|\nabla \alpha(t)\|_{L^3}^2,\end{aligned}$$

因此，综上所述，上述估计意味着

$$\|\Lambda\|_{L^1(0,t)} \leq C_1(T, R_1, R_2). \tag{6.4}$$

现在，我们将注意力转向源项 g。利用H¨older 不等式、嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$、 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ 以及 $\|(p_t^*)^2\|_{L^3} = \|p_t^*\|_{L^6}^2$ 这一事实，我们有

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^2H^1} + \|g_t\|_{L^2L^2} =& \|4k(\Theta^*)\nabla p_t^* p_t^* + 2k'(\Theta^*)\nabla\Theta^*(p_t^*)^2\|_{L^2L^2} \\ &+ \|4k(\Theta^*)p_t^* p_{tt}^* + 2k'(\Theta^*)\Theta_t^*(p_t^*)^2\|_{L^2L^2} \\ \lesssim& \|k(\Theta^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\nabla p_t^*\|_{L^2L^4}\|p_t^*\|_{L^\infty L^4} \\ &+ \|k'(\Theta^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\nabla\Theta^*\|_{L^2L^6}\|(p_t^*)^2\|_{L^\infty L^3} \\ &+ \|k(\Theta^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|p_t^*\|_{L^\infty L^4}\|p_{tt}^*\|_{L^2L^4} \\ &+ \|k'(\Theta^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\Theta_t^*\|_{L^2L^6}\|(p_t^*)^2\|_{L^\infty L^3} \\ \lesssim& \|p_t^*\|_{L^2H^2}\|p_t^*\|_{L^\infty H^1} + (1 + \|\Theta^*\|_{L^\infty L^\infty}^{\gamma_2+1})\|\Theta^*\|_{L^2H^2}\|p_t^*\|_{L^\infty H^1}^2 \\ &+ \|p_t^*\|_{L^\infty H^1}\|p_{tt}^*\|_{L^2H^1} + (1 + \|\Theta^*\|_{L^\infty L^\infty}^{\gamma_2+1})\|\Theta_t^*\|_{L^2H^1}\|p_t^*\|_{L^\infty H^1}^2,\end{aligned}$$

这给出

$$\|g\|_{L^2H^1} + \|g_t\|_{L^2L^2} \leq C_T R_1^2(1 + R_2 + R_2^{2+\gamma_2}).$$

因此，我们可以对（5.6）中定义的函数 $\mathfrak{F}$ 给出如下上界。

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{F}\|_{L^1(0,t)} = \int_0^t (\|\nabla g\|_{L^2}^2 + \|g_t\|_{L^2}^2)\,\mathrm{d}s &\leq \|g\|_{L^2H^1}^2 + \|g_t\|_{L^2L^2}^2 \\ &\leq C_T R_1^4(1 + R_2^2(1 + R_2^{2+2\gamma_2})).\end{aligned}$$

因此，可得

$$\|\mathfrak{F}\|_{L^1(0,t)} \leq R_1^4 C_2(T, R_2).$$

因此，根据命题 5.1，我们可以得到方程 (6.1) 中第一个方程的唯一解 $p \in X_p$ 的存在。此外，由于 $(p^*, \Theta^*, q^*) \in B$，我们有 $f = \mathcal{Q}(p^*) \in H^2(0,T; L^2(\Omega))$。然后，根据命题 4.1，方程 (6.1) 中第二个和第三个方程存在唯一解 $(\Theta, q) \in X_\Theta \times X_q$。也就是说，映射 $\mathcal{T}$ 是良定义的。

根据 (5.4) 以及 $\mathfrak{E}[p](0) \leq \delta$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\|p\|_{X_p}^2 &\lesssim \sup_{t\in(0,T)} \mathfrak{E}[p](t) + \sup_{t\in(0,T)} b\|\Delta p_t(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \mathfrak{D}[p](s)\,\mathrm{d}s \\ &\lesssim \delta\exp(T(1 + C_1(T, R_1, R_2))) + TR_1^4\exp(T(1 + C_1(T, R_1, R_2)))C_2(T, R_2).\end{aligned}$$

因此，通过将 δ 和 R_1 选得足够小，我们得到

$$\|p\|_{X_p} \leq R_1.$$

此外，注意到

$$\|p\|_{L^\infty L^\infty} \lesssim \|\Delta p\|_{L^\infty L^2} \lesssim \|p\|_{X_p},$$

我们通过适当减小 R_1，得到 $\|p\|_{L^\infty L^\infty}$ 的上界 $\gamma < \dfrac{1}{2k_1}$。

因此，尚需验证 $\|(\Theta, q)\|_{X_\Theta \times X_q} \le R_2$。首先，利用 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{H^2L^2} &\lesssim \|(p_t^*)^2\|^2_{L^2L^2} + \|2p_t^*p_{tt}^*\|^2_{L^2L^2} + \|2(p_{tt}^*)^2 + 2p_t^*p_{ttt}^*\|^2_{L^2L^2}\\ &\lesssim \|p_t^*\|^2_{L^\infty L^4}\|p_t^*\|^2_{L^2L^4} + \|p_t^*\|^2_{L^\infty L^4}\|p_{tt}^*\|^2_{L^2L^4}\\ &\quad + \|p_{tt}^*\|^2_{L^\infty L^4}\|p_{tt}^*\|^2_{L^2L^4} + \|p_t^*\|^2_{L^\infty L^\infty}\|p_{ttt}^*\|^2_{L^2L^2}.\end{aligned}$$

由嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ $L^\infty(0,T) \hookrightarrow L^2(0,T)$，我们得到

$$\|f\|^2_{H^2L^2} \le C_T\|p\|^4_{X_p} \le C_T R_1^4.$$

然后，根据命题 4.1，特别是估计式 (4.18) 和 (4.19)，我们得到

$$\|(\Theta, q)\|^2_{X_\Theta \times X_q} \lesssim C_T\Big(\|q_0\|^2_{H^1} + (1 + \bar\tau + \bar\tau^2)(E^{\bar\tau}[\Theta, q](0) + \|f\|^2_{H^2L^2})\Big).$$

我们强调，不等式中的常数 $C_T > 0$ 不依赖于参数 τ。因此，只需取 R_2 足够大，使得

$$C_T\Big(\|q_0\|^2_{H^1} + (1 + \bar\tau + \bar\tau^2)(E^{\bar\tau}[\Theta, q](0) + R_1^4)\Big) \le R_2^2,$$

从而得出系统 (6.1) 的解 (p, Θ, q) 始终处于 B 中。 □

引理 6.2。令 $\tau \in (0, \bar\tau]$。若 R_1 和 δ 足够小，则映射 $\mathcal{T}$ 在 B上是压缩映射。

证明。令 $(p_1^*, \Theta_1^*, q_1^*)$、$(p_2^*, \Theta_2^*, q_2^*) \in B$，并令 (p_1, Θ_1, q_1)、(p_2, Θ_2, q_2) 表示它们在算子 $\mathcal{T}$ 作用下的对应像；即，

$$\mathcal{T}(p_1^*, \Theta_1^*, q_1^*) = (p_1, \Theta_1, q_1) \quad \text{and} \quad \mathcal{T}(p_2^*, \Theta_2^*, q_2^*) = (p_2, \Theta_2, q_2).$$

由于 (p_1, Θ_1, q_1)、(p_2, Θ_2, q_2) 都是系统 (6.1) 的解，显然两者之差

$$\begin{aligned}&\hat p = p_1 - p_2, \quad \hat\Theta = \Theta_1 - \Theta_2, \quad \hat q = q_1 - q_2,\\ &\hat p^* = p_1^* - p_2^*, \quad \hat\Theta^* = \Theta_1^* - \Theta_2^*, \quad \hat q^* = q_1^* - q_2^*\end{aligned}$$

求解以下系统。

$$\begin{cases}(1 - 2k(\Theta_1^*)p_1^*)\hat p_{tt} - h(\Theta_1^*)\Delta\hat p - b\Delta\hat p_t = g_1,\\ m\hat\Theta_t + \nabla\cdot\hat q + \ell\hat\Theta = f_1, \qquad\qquad \text{in} \quad \Omega \times (0,T),\\ \tau\hat q_t + \hat q + \kappa_{\mathrm{a}}\nabla\hat\Theta = 0,\end{cases} \tag{6.5}$$

带有初始条件和边界条件

$$\begin{aligned}&\hat p(x,0) = \hat p_t(x,0) = \hat\Theta(x,0) = 0, \qquad \hat q(x,0) = 0, \quad \text{in} \quad \Omega.\\ &\hat p = \hat\Theta = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T).\end{aligned}$$

强迫项 f_1 和 g_1 给定为

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathcal{Q}(p_{1t}^*) - \mathcal{Q}(p_{2t}^*), \\ g_1 &= 2(k(\Theta_1^*)p_1^* - k(\Theta_2^*)p_2^*)p_{2tt} + (h(\Theta_1^*) - h(\Theta_2^*))\Delta p_2 + 2k(\Theta_1^*)(p_{1t}^*)^2 - 2k(\Theta_2^*)(p_{2t}^*)^2 \\ &= 2(k(\Theta_1^*) - k(\Theta_2^*))(p_2^* p_{2tt} + (p_{2t}^*)^2) + (h(\Theta_1^*) - h(\Theta_2^*))\Delta p_2 \\ &\quad + 2k(\Theta_1^*)\big((p_{1t}^* + p_{2t}^*)\hat{p}_t^* + \hat{p}^* p_{2tt}\big) \\ &:= g_{11} + g_{12} + g_{13}. \end{aligned}$$

我们先回顾在 [22] 中推导出的一些关于函数 k、h 及其导数的估计。我们有

$$k(\Theta_1^*) - k(\Theta_2^*) = (\Theta_1^* - \Theta_2^*)\int_0^1 k'(\Theta_2^* + \sigma(\Theta_1^* - \Theta_2^*))\mathrm{d}\sigma;$$

因此，利用 (K2) 以及 Sobolev 嵌入 $H^2 \hookrightarrow L^\infty$，可得

$$\begin{aligned} \|k(\Theta_1^*) - k(\Theta_2^*)\|_{L^\infty L^\infty} &= \Big\|(\Theta_1^* - \Theta_2^*)\int_0^1 k'(\Theta_2^* + \sigma(\Theta_1^* - \Theta_2^*))\mathrm{d}\sigma\Big\|_{L^\infty L^\infty} \\ &\lesssim \|\Theta_1^* - \Theta_2^*\|_{L^\infty L^\infty}\Big(1 + \|\Theta_2^* + \sigma(\Theta_1^* - \Theta_2^*)\|_{L^\infty L^\infty}^{1+\gamma_2}\Big) \\ &\lesssim \|(\hat{p}^*, \hat{\Theta}^*, \hat{q}^*)\|_{\mathcal{X}}\Big(1 + \|\Theta_1^*\|_{L^\infty L^\infty}^{1+\gamma_2} + \|\Theta_2^*\|_{L^\infty L^\infty}^{1+\gamma_2}\Big). \end{aligned} \tag{6.6a}$$

类似地，根据 (H2)、(H3) 和 (K2)，我们可以证明

$$\|k'(\Theta_1^*) - k'(\Theta_2^*)\|_{L^\infty L^\infty} \lesssim \|(\hat{p}^*, \hat{\Theta}^*, \hat{q}^*)\|_{\mathcal{X}}\Big(1 + \|\Theta_1^*\|_{L^\infty L^\infty}^{\gamma_2} + \|\Theta_2^*\|_{L^\infty L^\infty}^{\gamma_2}\Big); \tag{6.6b}$$

$$\|h(\Theta_1^*) - h(\Theta_2^*)\|_{L^\infty L^\infty} \lesssim \|(\hat{p}^*, \hat{\Theta}^*, \hat{q}^*)\|_{\mathcal{X}}\Big(1 + \|\Theta_1^*\|_{L^\infty L^\infty}^{1+\gamma_1} + \|\Theta_2^*\|_{L^\infty L^\infty}^{1+\gamma_1}\Big); \tag{6.7a}$$

$$\|h'(\Theta_1^*) - h'(\Theta_2^*)\|_{L^\infty L^\infty} \lesssim \|(\hat{p}^*, \hat{\Theta}^*, \hat{q}^*)\|_{\mathcal{X}}\Big(1 + \|\Theta_1^*\|_{L^\infty L^\infty}^{\gamma_1} + \|\Theta_2^*\|_{L^\infty L^\infty}^{\gamma_1}\Big). \tag{6.7b}$$

在此证明过程中，我们将反复用到这些估计。首先，我们着重估计 g_1的梯度的 L^2-范数。回想

$$g_{11} = 2(k(\Theta_1^*) - k(\Theta_2^*))(p_2^* p_{2tt} + (p_{2t}^*)^2).$$

这意味着

$$\begin{aligned} \nabla g_{11} &= 2\nabla(k(\Theta_1^*) - k(\Theta_2^*))(p_2^* p_{2tt} + (p_{2t}^*)^2) \\ &\quad + 2(k(\Theta_1^*) - k(\Theta_2^*))\nabla(p_2^* p_{2tt} + (p_{2t}^*)^2). \end{aligned}$$

由于源项 g_1 的表达式中不含热通量 q，我们可以像 [22, 第 4] 节那样估计 $\|\nabla g_{11}\|_{L^2L^2}$。算子 $\mathcal{T}$ 是自映射这一事实，以及该估计

$$\|\Theta_1^* - \Theta_2^*\|_{X_\Theta}^2 + \|p_1^* - p_2^*\|_{X_p}^2 \le \|(\hat{p}^*, \hat{\Theta}^*, \hat{q}^*)\|_{\mathcal{X}}^2,$$

使我们能够得到以下界估计。

$$\|\nabla g_{11}\|_{L^2L^2} \le C_T R_1^2(1 + R_2 + R_2^{1+\gamma_2})\|(\hat{p}^*, \hat{\Theta}^*, \hat{q}^*)\|_{\mathcal{X}}.$$

类似地，我们可以按照 [22] 中的论证来处理第二项的梯度

$$\nabla g_{12} = \nabla(h(\Theta_1^*) - h(\Theta_2^*))\Delta p_2 + h(\Theta_1^*) - h(\Theta_2^*))\nabla\Delta p_2.$$

事实上，利用函数 h 上的假设 (H3)，并结合 (6.7a) 和 (6.7b)，我们得到

$$\|\nabla g_{12}\|_{L^2L^2} \leq C_T R_1(1 + R_2 + R_2^{1+\gamma_1})\|(\hat{p}^*, \hat{\Theta}^*, \hat{q}^*)\|_{\mathcal{X}}.$$

因此，仍需估计 g_1 的最后一个分量的梯度

$$\nabla g_{13} = 2\big(\nabla(k(\Theta_1^*))\big((p_{1t}^* + p_{2t}^*)\hat{p}_t^* + \hat{p}^* p_{2tt}\big) + k(\Theta_1^*)\nabla\big((p_{1t}^* + p_{2t}^*)\hat{p}_t^* + \hat{p}^* p_{2tt}\big)\big).$$

同样，我们可以像 [22] 中那样来获得

$$\|\nabla g_{13}\|_{L^2L^2} \leq C_T R_1(1 + R_2 + R_2^{\gamma_2+2})\|(\hat{p}^*, \hat{\Theta}^*, \hat{q}^*)\|_{\mathcal{X}}.$$

汇总 g_1 各分量的估计，可得

$$\|\nabla g_1\|_{L^2L^2} \leq R_1 C(T, R_1, R_2)\|(\hat{p}^*, \hat{\Theta}^*, \hat{q}^*)\|_{\mathcal{X}}. \tag{6.8}$$

接下来，我们寻求对 g_1的时间导数的类似估计。对 g_{11} 关于 t 求导，我们有

$$\begin{aligned}
\partial_t g_{11} =& 2\Big(\partial_t(k(\Theta_1^*) - k(\Theta_2^*))(p_2^* p_{2tt} + (p_{2t}^*)^2) + (k(\Theta_1^*) - k(\Theta_2^*))\partial_t(p_2^* p_{2tt} + (p_{2t}^*)^2)\Big)\\
=& 2\Big(\big(k'(\Theta_1^*)\hat{\Theta}_t^* + (k'(\Theta_1^*) - k'(\Theta_2^*))\Theta_{2t}^*\big)(p_2^* p_{2tt} + (p_{2t}^*)^2)\\
&+ (k(\Theta_1^*) - k(\Theta_2^*))(p_{2t}^* p_{2tt} + p_2^* p_{2ttt} + 2p_{2t}^* p_{2tt}^*)\Big).
\end{aligned}$$

利用 H¨older 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\|\partial_t g_{11}\|_{L^2L^2} \lesssim& \big(\|k'(\Theta_1^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\hat{\Theta}_t^*\|_{L^2L^4} + \|k'(\Theta_1^*) - k'(\Theta_2^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\Theta_{2t}^*\|_{L^2L^4}\big)\\
&\times \big(\|p_2^*\|_{L^\infty L^\infty}\|p_{2tt}\|_{L^\infty L^4} + \|p_{2t}^*\|_{L^\infty L^\infty}\|p_{2t}^*\|_{L^\infty L^4}\big)\\
&+ \|k(\Theta_1^*) - k(\Theta_2^*)\|_{L^\infty L^\infty}\big(\|p_{2t}^*\|_{L^\infty L^4}\|p_{2tt}\|_{L^2L^4} + \|p_2^*\|_{L^\infty L^\infty}\|p_{2ttt}\|_{L^2L^2}\\
&+ \|p_{2t}^*\|_{L^\infty L^4}\|p_{2tt}^*\|_{L^2L^4}\big)
\end{aligned}$$

然后，考虑到 (K2)、(6.6a)、(6.6b)，并利用嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$，可得

$$\|\partial_t g_{11}\|_{L^2L^2} \leq C_T R_1^2(1 + R_2 + R_2^{1+\gamma_2})\|(\hat{p}^*, \hat{\Theta}^*, \hat{q}^*)\|_{\mathcal{X}}.$$

g_{12} 的时间导数为

$$\begin{aligned}
\partial_t g_{12} =& \partial_t(h(\Theta_1^*) - h(\Theta_2^*))\Delta p_2 + (h(\Theta_1^*) - h(\Theta_2^*))\Delta p_{2t},\\
=& \big(h'(\Theta_1^*)\hat{\Theta}_t^* + (h'(\Theta_1^*) - h'(\Theta_2^*))\Theta_{2t}^*\big)\Delta p_2 + (h(\Theta_1^*) - h(\Theta_2^*))\Delta p_{2t}.
\end{aligned}$$

因此，有

$$\begin{aligned}
\|\partial_t g_{11}\|_{L^2L^2} \lesssim& \big(\|h'(\Theta_1^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\hat{\Theta}_t^*\|_{L^2L^4} + \|h'(\Theta_1^*) - h'(\Theta_2^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\Theta_{2t}^*\|_{L^2L^4}\big)\|\Delta p_2\|_{L^\infty L^4}\\
&+ \|h(\Theta_1^*) - h(\Theta_2^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\Delta p_{2t}\|_{L^2L^2}.
\end{aligned}$$

由 (H3)、(6.7a) 和 (6.7b) 可知，上述估计意味着

$$\|\partial_t g_{12}\|_{L^2L^2} \leq C_T R_1(1 + R_2 + R_2^{1+\gamma_1})\|(\hat{p}^*, \hat{\Theta}^*, \hat{q}^*)\|_{\mathcal{X}}.$$

对最后一项 g_{13} 关于时间求导，可得

$$\begin{aligned}\partial_t g_{13} =& 2\big(k'(\Theta_1^*)\Theta_{1t}^*\big((p_{1t}^*+p_{2t}^*)\hat{p}_t^*+\hat{p}^* p_{2tt}\big)\\ &+k(\Theta_1^*)\big((p_{1tt}^*+p_{2tt}^*)\hat{p}_t^*+(p_{1t}^*+p_{2t}^*)\hat{p}_{tt}^*+\hat{p}_t^* p_{2tt}+\hat{p}^* p_{2ttt}\big)\big).\end{aligned}$$

应用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}&\|\partial_t g_{13}\|_{L^2L^2}\\ \lesssim&\|k'(\Theta_1^*)\|_{L^\infty L^\infty}\|\Theta_{1t}^*\|_{L^2L^4}\big(\|p_{1t}^*+p_{2t}^*\|_{L^\infty L^4}\|\hat{p}_t^*\|_{L^\infty L^\infty}+\|\hat{p}^*\|_{L^\infty L^\infty}\|p_{2tt}\|_{L^\infty L^4}\big)\\ &+\|k(\Theta_1^*)\|_{L^\infty L^\infty}\big(\|p_{1tt}^*+p_{2tt}^*\|_{L^2L^4}\|\hat{p}_t^*\|_{L^\infty L^4}+\|p_{1t}^*+p_{2t}^*\|_{L^\infty L^4}\|\hat{p}_{tt}^*\|_{L^2L^4}\\ &+\|\hat{p}_t^*\|_{L^\infty L^4}\|p_{2tt}\|_{L^2L^4}+\|\hat{p}^*\|_{L^\infty L^\infty}\|p_{2ttt}\|_{L^2L^2}\big).\end{aligned}$$

然后，根据假设 (K2) 以及映射 $\mathcal{T}$ 是自映射这一事实，我们得到

$$\|\partial_t g_{13}\|_{L^2L^2}\le C_T R_1(1+R_2+R_2^{2+\gamma_2})\|(\hat{p}^*,\hat{\Theta}^*,\hat{q}^*)\|_{\mathcal{X}}.$$

综合上述估计可得

$$\|\partial_t g_1\|_{L^2L^2}\le R_1 C(T,R_1,R_2)\|(\hat{p}^*,\hat{\Theta}^*,\hat{q}^*)\|_{\mathcal{X}}. \tag{6.9}$$

对于温度方程中的源项 f_1，我们可以如下处理

$$\begin{aligned}\|f_1\|_{H^2L^2} =& \|f_1\|_{L^2L^2}+\|f_{1t}\|_{L^2L^2}+\|f_{1tt}\|_{L^2L^2}\\ \lesssim&\|(p_{1t}^*)^2-(p_{2t}^*)^2\|_{L^2L^2}+\|(p_{1tt}^*-p_{2tt}^*)(p_{1t}^*)\|_{L^2L^2}+\|(p_{1t}^*-p_{2t}^*)(p_{2tt}^*)\|_{L^2L^2}\\ &+\|(p_{1ttt}^*-p_{2ttt}^*)p_{1t}^*\|_{L^2L^2}+\|(p_{1tt}^*-p_{2tt}^*)p_{1tt}^*\|_{L^2L^2}\\ &+\|(p_{1tt}^*-p_{2tt}^*)p_{2tt}^*\|_{L^2L^2}+\|(p_{1t}^*-p_{2t}^*)p_{2ttt}^*\|_{L^2L^2}.\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\|f_1\|_{H^2L^2}\lesssim&\|p_{1t}^*-p_{2t}^*\|_{L^\infty L^\infty}\|p_{1t}^*+p_{2t}^*\|_{L^2L^2}+\|p_{1tt}^*-p_{2tt}^*\|_{L^2L^4}\|p_{1t}^*\|_{L^\infty L^4}\\ &+\|p_{1t}^*-p_{2t}^*\|_{L^\infty L^4}\|p_{2tt}^*\|_{L^2L^4}+\|p_{1ttt}^*-p_{2ttt}^*\|_{L^2L^2}\|p_{1t}^*\|_{L^\infty L^\infty}\\ &+\|p_{1tt}^*-p_{2tt}^*\|_{L^\infty L^4}\|p_{1tt}^*\|_{L^2L^4}+\|p_{1tt}^*-p_{2tt}^*\|_{L^\infty L^4}\|p_{2tt}^*\|_{L^2L^4}\\ &+\|p_{1t}^*-p_{2t}^*\|_{L^\infty L^\infty}\|p_{2ttt}^*\|_{L^2L^2}.\end{aligned}$$

利用 $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$、$H^2(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ 的嵌入和椭圆正则性，我们推得

$$\|f_1\|_{H^2L^2}\le R_1 C_T\|(\hat{p}^*,\hat{\Theta}^*,\hat{q}^*)\|_{\mathcal{X}}. \tag{6.10}$$

由前面的引理 6.1 可知，系统 (6.5) 中第一个方程的系数

$$\alpha_1=1-2k(\Theta_1^*)p_1^*,\qquad r_1=h(\Theta_1^*)$$

满足命题 5.1 的要求。此外，令 $g=g_1$ 和 $f=f_1$，并考虑上述估计，我们可得命题 4.1 和命题 5.1 的结论成立。特别地，解满足能量估计 (4.18)、(4.19) 和 (5.4)，适用于

ˆ解 (ˆ$p, \Theta,$ ˆq)；即

$$\begin{aligned}\|(\hat{p},\hat{\Theta},\hat{q})\|_{\mathcal{X}}^2 =& \|\mathcal{T}(p_1^*,\Theta_1^*,q_1^*)-\mathcal{T}(p_2^*,\Theta_2^*,q_2^*)\|_{\mathcal{X}}^2\\ &\lesssim \sup_{t\in(0,T)}\mathfrak{E}[\hat{p}](t)+\sup_{t\in(0,T)} b\|\Delta\hat{p}_t(t)\|_{L^2}^2+\int_0^T\mathfrak{D}[\hat{p}](s)\,\mathrm{d}s\\ &\quad+\sup_{t\in(0,T)}\mathcal{E}[\hat{\Theta}](t)+\|\hat{q}\|_{L^\infty H^1}^2+\sum_{k=1}^{2}\int_0^T\|\partial_t^k\hat{q}(s)\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s\\ &\lesssim \exp\Big(\int_0^T(1+\Lambda(s))\,\mathrm{d}s\Big)\int_0^T(\|\nabla g_1\|_{L^2}^2+\|g_{1t}\|_{L^2}^2)\,\mathrm{d}s\\ &\quad+(1+\bar{\tau}+\bar{\tau}^2)\|f_1\|_{H^2L^2}^2.\end{aligned}$$

因此，由于估计式 (6.4)、(6.8)、(6.9) 和 (6.10)，我们得到

$$\begin{aligned}\|(\hat{p},\hat{\Theta},\hat{q})\|_{\mathcal{X}}^2 \lesssim R_1^2C(T,R_1,R_2)\exp(T+TC_1(T,R_1,R_2))\big\|(\hat{p}^*,\hat{\Theta}^*,\hat{q}^*)\big\|_{\mathcal{X}}^2\\ +(1+\bar{\tau}+\bar{\tau}^2)R_1^2C_T^2\|(\hat{p}^*,\hat{\Theta}^*,\hat{q}^*)\|_{\mathcal{X}}^2,\end{aligned}$$

其中， $C_1(T, R_1, R_2)$ 是 (6.4) 中的常数。由此，我们推断出

$$\|\mathcal{T}(p_1^*,\Theta_1^*,q_1^*)-\mathcal{T}(p_2^*,\Theta_2^*,q_2^*)\|_{\mathcal{X}}\lesssim R_1C(T,R_1,R_2,\bar{\tau})\|(\hat{p}^*,\hat{\Theta}^*,\hat{q}^*)\|_{\mathcal{X}}.$$

因此，只需将 R_1 取得足够小，即可确保映射 $\mathcal{T}$ 是严格压缩映射。□

7. Limiting behaviour as $\tau \searrow 0$: Proof of Theorem 2.2

本节旨在证明定理 2.2。更确切地说，我们证明，当 τ 趋于零时，Westervelt–Pennes–Cattaneo 系统 (1.9) 的解收敛于极限系统的解，即对应于 $\tau = 0$ 的 Westervelt–Pennes–傅里叶系统。为简化起见，并使其能够与 [22]，中分析的 Westervelt–Pennes–傅里叶问题建立联系，我们用在 (4.16) 中推导出的等价电报方程替代系统 (4.1)。设 (p^τ, Θ^τ) 是下述依赖于 τ 的问题的解

$$\text{(7.1)}\quad\begin{cases}(1-2k(\Theta^\tau)p^\tau)p_{tt}^\tau-h(\Theta^\tau)\Delta p^\tau-b\Delta p_t^\tau=2k(\Theta^\tau)(p_t^\tau)^2, & \text{in } \Omega\times(0,T),\\ \tau m\Theta_{tt}^\tau+(m+\tau\ell)\Theta_t^\tau+\ell\Theta^\tau-\kappa_{\mathrm{a}}\Delta\Theta^\tau=\mathcal{Q}(p_t^\tau)+\tau\partial_t\big(\mathcal{Q}(p_t^\tau)\big), & \text{in } \Omega\times(0,T),\end{cases}$$

满足 齐次狄利克雷边界条件 (1.9b) 和初始条件

$$(p^\tau,p_t^\tau)|_{t=0}=(p_0^\tau,p_1^\tau),\quad(\Theta^\tau,\Theta_t^\tau)|_{t=0}=(\Theta_0^\tau,\Theta_1^\tau)$$

其中 $\Theta_1^\tau=\frac{1}{m}\big(-\nabla\cdot q_0^\tau-\ell\Theta_0^\tau+\mathcal{Q}(p_1^\tau)\big)$。

下述证明基于 [15, 21] 中所采用的方法，用于考察Jordan–Moore–Gibson–Thompson型方程的弱极限。

7.1. 定理 2.2 的证明。根据定理 2.1，我们知道，如果初始数据 $p_0^\tau, p_1^\tau, \Theta_0^\tau, \Theta_1^\tau$ 满足

$$\begin{aligned}&\mathfrak{E}[p](0) \le \delta,\\ &\mathcal{E}[\Theta](0) \le C\Big(\|q_0\|_{H^1}^2 + (1+\bar\tau+\bar\tau^2)\big(E^{\bar\tau}[\Theta,q](0) + R_1^2\big)\Big) \le R_2^2,\end{aligned}$$

那么系统 (7.1) 存在一个满足以下条件的唯一解。

$$\|p^\tau\|_{X_p} \le R_1, \quad \|\Theta^\tau\|_{X_\Theta} \le R_2.$$

由于半径 R_1、R_2 和 δ 与 τ 无关，我们可以找到子列，使得

$$\begin{aligned}&(p_0^\tau, p_1^\tau) \rightharpoonup (p_0, p_1) && \text{weakly in} && [H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)] \times [H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)],\\ &(\Theta_0^\tau, \Theta_1^\tau) \rightharpoonup (\Theta_0, \Theta_1) && \text{weakly in} && [H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega).\end{aligned} \tag{7.2}$$

当 τ 趋于零时。此外，由于嵌入 $H^{s+1} \hookrightarrow H^s$的紧性， $s \in \mathbb{N}$，可知存在强收敛的子列，仍记为（p_0^τ， p_1^τ）、（Θ_0^τ， Θ_1^τ），使得

$$\begin{aligned}&(p_0^\tau, p_1^\tau) \to (p_0, p_1) && \text{in} && [H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)] \times [H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)],\\ &(\Theta_0^\tau, \Theta_1^\tau) \to (\Theta_0, \Theta_1) && \text{in} && H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).\end{aligned} \tag{7.3}$$

同样，由于解 (p^τ, Θ^τ) 关于 τ 一致有界，存在子列（仍以指标 τ 表示）在弱-$\star$ 拓扑下收敛。

$$\begin{aligned}&p^\tau \rightharpoonup p && \text{weakly-}\star && \text{in} && L^\infty(0,T;H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega));\\ &p_t^\tau \rightharpoonup p_t && \text{weakly-}\star && \text{in} && L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega));\\ &p_{tt}^\tau \rightharpoonup p_{tt} && \text{weakly-}\star && \text{in} && L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega));\\ &p_{ttt}^\tau \rightharpoonup p_{ttt} && \text{weakly} && \text{in} && L^2(0,T;L^2(\Omega));\\ &\Theta^\tau \rightharpoonup \Theta && \text{weakly-}\star && \text{in} && L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega));\\ &\Theta_t^\tau \rightharpoonup \Theta_t && \text{weakly-}\star && \text{in} && L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega));\\ &\Theta_{tt}^\tau \rightharpoonup \Theta_{tt} && \text{weakly-}\star && \text{in} && L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).\end{aligned} \tag{7.4}$$

接下来，我们寻求将（7.3）中得到的初始数据序列的极限与（7.4）中极限函数的初始状态联系起来。为此，我们调用Aubin–Lions 引理 [18, 引理1.2]，，由于嵌入 $H^{s+1} \hookrightarrow H^s$、$s \in \mathbb{N}$ 的紧性，我们可以在此应用该引理。于是，我们得到（取子列）

$$\begin{aligned}&p^\tau \to p && \text{strongly in} && C(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega));\\ &p_t^\tau \to p_t && \text{strongly in} && C(0,T;H_0^1(\Omega));\\ &p_{tt}^\tau \to p_{tt} && \text{strongly in} && L^2(0,T;L^2(\Omega));\\ &\Theta^\tau \to \Theta && \text{strongly in} && C(0,T;H_0^1(\Omega));\\ &\Theta_t^\tau \to \Theta_t && \text{strongly in} && C(0,T;L^2(\Omega)).\end{aligned} \tag{7.5}$$

这也由此导出初始数据的强收敛，如下所示

$$\begin{aligned}&(p^\tau, p_t^\tau)(0) \to (p, p_t)(0) && \text{in} && [H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega);\\ &(\Theta^\tau, \Theta_t^\tau)(0) \to (\Theta, \Theta_t)(0) && \text{in} && H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).\end{aligned} \tag{7.6}$$

因此，极限的唯一性连同 (7.3)、(7.6) 和 (7.2) 得出

$$(p,p_t)(0)=(p_0,p_1)\in[H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)]\times[H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)],$$
$$(\Theta,\Theta_t)(0)=(\Theta_0,\Theta_1)\in[H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)]\times H_0^1(\Omega).$$

这意味着 (7.4) 中极限函数的初始状态定义良好，并具有所需的光滑性。因此，现在我们可以专注于当 τ 趋于零时，系统 (7.1) 的极限过程。

令 $v\in L^1(0,T;\,L^2(\Omega))$。我们用 $(\hat{}p,\hat{}\Theta)$ 表示差值 $\hat{}p=p-p^\tau$, $\hat{}\Theta=\Theta-\Theta^\tau$。于是，我们有

(7.7)
$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega\big(m\Theta_t-\kappa_{\mathrm{a}}\Delta\Theta+\ell\Theta-\mathcal{Q}(p_t)\big)v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^T\int_\Omega\big(m\hat{\Theta}_t-\kappa_{\mathrm{a}}\Delta\hat{\Theta}+\ell\hat{\Theta}-\tau m\Theta_{tt}^\tau-\tau\ell\Theta_t^\tau+\mathcal{Q}(p_t^\tau)-\mathcal{Q}(p_t)+\tau\partial_t\mathcal{Q}(p_t^\tau)\big)v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由弱-$\star$ 收敛 (7.4)，我们得到

$$\int_0^T\int_\Omega\big(m\hat{\Theta}_t-\kappa_{\mathrm{a}}\Delta\hat{\Theta}+\ell\hat{\Theta}\big)v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\longrightarrow 0\quad\text{as }\tau\to0.$$

此外，回顾 $\mathcal{Q}(p_t)=\frac{2b}{\rho_{\mathrm{a}}C_{\mathrm{a}}^4}(p_t)^2$，并注意到 $(p^\tau,\Theta^\tau)\in X_p\times X_\Theta$ 所提供的正则性，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega\big(-\tau m\Theta_{tt}^\tau-\tau\ell\Theta_t^\tau+\frac{4b\tau}{\rho_{\mathrm{a}}C_{\mathrm{a}}^4}p_t^\tau p_{tt}^\tau\big)v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&\lesssim\tau\big(\|\Theta_{tt}^\tau\|_{L^\infty L^2}+\|\Theta_t^\tau\|_{L^\infty L^2}+\|p_t^\tau\|_{L^\infty L^4}\|p_{tt}^\tau\|_{L^\infty L^4}\big)\|v\|_{L^1L^2}\longrightarrow0\end{aligned}$$

当 τ 趋于零时。(7.7) 右端剩余的两项可如下处理

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega\big(\mathcal{Q}(p_t^\tau)-\mathcal{Q}(p_t)\big)v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t&=-\int_0^T\int_\Omega\frac{2b}{\rho_{\mathrm{a}}C_{\mathrm{a}}^4}(p_t^\tau+p_t)\hat{p}_tv\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&\lesssim\|(p_t^\tau+p_t)\|_{L^\infty L^4}\|\hat{p}_t\|_{L^\infty L^4}\|v\|_{L^1L^2}.\end{aligned}$$

于是，嵌入 $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$，结合 p_t^τ、p_t 的有界性以及收敛式 (7.5)，可得

$$\int_0^T\int_\Omega\big(\mathcal{Q}(p_t^\tau)-\mathcal{Q}(p_t)\big)v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\longrightarrow0\quad\text{as }\tau\to0.$$

因此，我们推断 (p,Θ) 在 $L^\infty(0,T;\,L^2(\Omega))$ 中满足方程

$$m\Theta_t-\kappa_{\mathrm{a}}\Delta\Theta+\ell\Theta=\mathcal{Q}(p_t).$$

接下来，我们断言对于所有 $v\in L^1(0,T;\,L^2(\Omega))$，均有

$$\int_0^T\int_\Omega\Big((1-2k(\Theta)p)p_{tt}-h(\Theta)\Delta p-b\Delta p_t-2k(\Theta)(p_t)^2\Big)v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\longrightarrow0\quad\text{as }\tau\to0.$$

为此，我们首先注意到

(7.8)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \Big((1-2k(\Theta)p)p_{tt} - h(\Theta)\Delta p - b\Delta p_t - 2k(\Theta)(p_t)^2\Big) v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \int_\Omega \Big((1-2k(\Theta)p)\hat{p}_{tt} + (1-2k(\Theta)p)p^\tau_{tt} - h(\Theta)\Delta\hat{p} - h(\Theta)\Delta p^\tau \\
&\quad - b\Delta\hat{p}_t - b\Delta p^\tau_t - 2k(\Theta)((p_t)^2 - (p^\tau_t)^2) - 2k(\Theta)(p^\tau_t)^2\Big) v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \int_\Omega \Big((1-2k(\Theta)p)\hat{p}_{tt} - h(\Theta)\Delta\hat{p} - b\Delta\hat{p}_t + (1-2k(\Theta^\tau)p^\tau)p^\tau_{tt} + 2\big(k(\Theta^\tau)p^\tau - k(\Theta)p\big)p^\tau_{tt} \\
&\quad - (h(\Theta)-h(\Theta^\tau))\Delta p^\tau - h(\Theta^\tau)\Delta p^\tau - b\Delta p^\tau_t - 2k(\Theta)(p_t+p^\tau_t)\hat{p}_t - 2k(\Theta)(p^\tau_t)^2\Big) v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \int_\Omega \Big((1-2k(\Theta)p)\hat{p}_{tt} - h(\Theta)\Delta\hat{p} - b\Delta\hat{p}_t - 2k(\Theta^\tau)\hat{p}p^\tau_{tt} + 2\big(k(\Theta^\tau) - k(\Theta)\big)pp^\tau_{tt} \\
&\quad - (h(\Theta)-h(\Theta^\tau))\Delta p^\tau - 2k(\Theta)(p_t+p^\tau_t)\hat{p}_t + 2\big(k(\Theta^\tau)-k(\Theta)\big)(p^\tau_t)^2\Big) v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

我们希望证明，右侧的积分在弛豫时间趋于零时也趋于零。再次，由 (7.4) 中 p^τ 到 p 的弱 -⋆ 收敛以及 $(p,\Theta) \in X_p \times X_\Theta$ 的有界性可知，

$$
\begin{aligned}
&h(\Theta)\Delta p^\tau \rightharpoonup h(\Theta)\Delta p && \text{weakly-}\star \quad \text{in } L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)); \\
&((1-2k(\Theta)p)p^\tau_{tt} \rightharpoonup ((1-2k(\Theta)p)p_{tt} && \text{weakly-}\star \quad \text{in } L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)).
\end{aligned}
$$

于是，我们可以得出

$$
\int_0^T \int_\Omega \Big((1-2k(\Theta)p)\hat{p}_{tt} - h(\Theta)\Delta\hat{p} - b\Delta\hat{p}_t\Big) v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0 \quad \text{as } \tau \to 0.
$$

此外，利用 (7.5)，我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \Big(- 2k(\Theta^\tau)\hat{p}p^\tau_{tt} - 2k(\Theta)(p_t+p^\tau_t)\hat{p}_t\Big) v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\lesssim \Big(\|k(\Theta^\tau)\|_{L^\infty L^\infty}\|\hat{p}\|_{L^\infty L^4}\|p^\tau_{tt}\|_{L^\infty L^4} + \|k(\Theta)\|_{L^\infty L^\infty}\|p_t+p^\tau_t\|_{L^\infty L^4}\|\hat{p}_t\|_{L^\infty L^4}\Big)\|v\|_{L^1L^2},
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\int_0^T \int_\Omega \Big(- 2k(\Theta^\tau)\hat{p}p^\tau_{tt} - 2k(\Theta)(p_t+p^\tau_t)\hat{p}_t\Big) v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0 \quad \text{as } \tau \to 0.
$$

为了处理涉及差值 $k(\Theta^\tau) - k(\Theta)$ 或 $h(\Theta^\tau) - h(\Theta)$ 的项，我们采用与 (6.6a)、(6.7a) 类似的估计。由于我们可以像在 (6.6a) 中那样证明

$$
\|k(\Theta^\tau) - k(\Theta)\|_{L^\infty L^4} \lesssim \|\Theta^\tau - \Theta\|_{L^\infty L^4}\Big(1 + \|\Theta^\tau\|^{1+\gamma_2}_{L^\infty L^4} + \|\Theta\|^{1+\gamma_2}_{L^\infty L^4}\Big),
$$

Θ、Θ^τ 在 X_Θ 中的有界性使我们能够得到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega 2\Big(\big(k(\Theta^\tau) - k(\Theta)\big)pp^\tau_{tt} + \big(k(\Theta^\tau)-k(\Theta)\big)(p^\tau_t)^2\Big) v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\le 2\Big(\|p\|_{L^\infty L^\infty}\|p^\tau_{tt}\|_{L^\infty L^4} + \|p^\tau_t\|^2_{L^\infty L^4}\Big)\|k(\Theta^\tau) - k(\Theta)\|_{L^\infty L^4}\|v\|_{L^1L^2} \to 0 \quad \text{as } \tau \to 0.
\end{aligned}
$$

同样，我们有

$$\int_0^T \int_\Omega \big(h(\Theta^\tau) - h(\Theta)\big)\Delta p^\tau v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \lesssim \|h(\Theta^\tau) - h(\Theta)\|_{L^\infty L^4} \|\Delta p^\tau\|_{L^\infty L^4} \|v\|_{L^1 L^2}. \tag{7.9}$$

于是得到以下估计

$$\|h(\Theta^\tau) - h(\Theta)\|_{L^\infty L^4} \lesssim \|\Theta^\tau - \Theta\|_{L^\infty L^4} \Big(1 + \|\Theta^\tau\|_{L^\infty L^4}^{1+\gamma_1} + \|\Theta\|_{L^\infty L^4}^{1+\gamma_1}\Big),$$

这使得当 τ 趋于零时，(7.9) 左侧的积分收敛到零。因此，当 τ 趋于零时，(7.8) 右侧的所有项都趋于零，由此我们推得极限 p 满足方程

$$(1 - 2k(\Theta)p)p_{tt} - h(\Theta)\Delta p - b\Delta p_t = 2k(\Theta)(p_t)^2,$$

该方程在 $L^\infty(0,T;\, L^2(\Omega))$中理解。

我们得出结论：存在一个子序列，按 (7.2)、(7.4) 的意义收敛，其极限 (p, Θ) 是极限系统 (2.2) 的一个解。此外，由于我们拥有的正则性高于适定性结果所提供的正则性，[22] 尤其是在时间导数方面 p_t、p_{tt}、Θ_t、Θ_{tt}，因此在 [22] 中得到的解的唯一性可以推广到当前的函数空间。由此，我们可以确认，整个序列 $(p^\tau, \Theta^\tau)_{\tau\in(0,\bar{\tau}]}$ 收敛到基于 [31, 命题 10.13]的抛物系统 (2.2) 的解。

References

[1] N. Bilaniuk and G. S. Wong, 纯水中的声速随温度变化的关系, 《美国声学学会杂志》, 93 (1993), 第 1609–1612 页。[2] M. Bongarti, S. Charoenphon, and I. Lasiecka, 非线性声学中产生的 Jordan-Moore-Gibson-Thompson方程的弛豫时间趋零动力学, 《演化方程杂志》, 21 (2021), 第 3553–3584 页。
[3] C. Cattaneo, 关于热传导, 《摩德纳大学数学与物理研讨会论文集》, 3 (1948), 第 83–101 页。[4] C. Clason and B. Kaltenbacher, 通过状态约束最优控制避免 Westervelt 方程中的退化, 《演化方程与控制理论》, 2 (2013), 第 281–300 页。
[5] C. W. Connor and K. Hynynen, 使用大焦斑进行聚焦超声手术中的生物声学热透镜效应与非线性传播：一项参数研究, 《医学与生物学物理》, 47 (2002), 第 1911 页。[6] D. G. Crighton, 非线性声学的模型方程, 《流体力学年度评论》, 11 (1979), 第 11–33 页。[7] L. C. Evans, 《偏微分方程》, 第 2 卷, 研究生数学丛书, AMS, 2010。[8] M. Hahn, R. Fugunt, B. Schoenfisch, E. Oberlechner, I. Gruber,U. Hoopmann, C. Roehm, G. Helms, F. Taran, A. Hartkopf, et al., 高强度聚焦超声（HIFU）治疗有症状乳腺纤维腺瘤, 《国际热疗杂志》, 35 (2018), 第 463–470 页。

[9] I. M. Hallaj, R. O. Cleveland, and K. Hynynen,聚焦超声手术中热声透镜效应的模拟，美国声学学会杂志，109（2001），第2245–2253页。
[10] Y.-H. Hsiao, S.-J. Kuo, H.-D. Tsai, M.-C. Chou, and G.-P. Yeh,高强度聚焦超声在癌症治疗中的临床应用，癌症杂志，7（2016），第225页。
[11] K.-Y. Jhang,用于材料微损伤无损评估的非线性超声技术：综述，《国际精密工程与制造杂志》，10（2009），第123–135页。[12] A. Kabiri and M. R. Talaee, 瞬时移动热源作用下灌注均匀生物组织中双曲型Pennes生物热方程的分析，《SN应用科学》，3（2021），第1–8页。[13] B. Kaltenbacher,非线性声学的数学理论，《演化方程与控制理论》，4（2015），第447–491页。
[14] B. Kaltenbacher and I. Lasiecka,Westervelt方程的整体存在性与指数衰减率，《离散与连续动力系统-S》，2（2009），第503页。
[15] B. Kaltenbacher and V. Nikoli'c,Jordan–Moore–Gibson–Thompson方程：具有二次梯度非线性的适定性及弛豫时间趋于零时的奇异极限，《应用科学中的数学模型与方法》，29（2019），第2523–2556页。
[16] B. Kaltenbacher and I. Shevchenko,具有高阶吸收边界条件的Westervelt方程的适定性，《数学分析与应用杂志》，479（2019），第1595–1617页。
[17] M. Kaltenbacher,机电一体化传感器与执行器的数值模拟，第3卷，施普林格，2014。[18] J.-L. Lions,非线性边值问题的若干求解方法，Dunod，1969。
[19] E. Maloney and J. H. Hwang,癌症治疗中新兴的高强度聚焦超声应用，《国际热疗杂志》，31（2015），第302–309页。[20] S. Meyer and M. Wilke, Westervelt方程解的最优正则性与长时间行为，《应用数学与优化》，64（2011），第257–271页。[21] V. Nikolić,奇异极限下的分数阶高阶非线性波动方程，arXiv预印本 arXiv:2302.05112，（2023）。[22] V. Nikolić and B. Said-Houari,非线性超声加热耦合Westervelt–Pennes模型的局部适定性，《非线性》，35（2022），第5749–5780页。[23] ——,非线性热声学的Westervelt–Pennes模型：整体可解性与渐近行为，《微分方程杂志》，336（2022），第628–653页。[24] H. H. Pennes,静息状态下人类前臂组织与动脉血温度的分析，《应用生理学杂志》，1（1948），第93–122页。[25] R. Racke,热弹性，载于《微分方程手册：演化方程》第V卷，《微分方程手册》，爱思唯尔/北荷兰出版社，阿姆斯特丹，2009，第

[26] S. Salsa,《偏微分方程的应用：从建模到理论》，施普林格，2008。
[27] G. Simonett and M. Wilke,具有零阶吸收边界条件的Westervelt方程的适定性与长期行为，《演化方程杂志》，17（2016），第551–571页。
[28] P. J. Westervelt,参数声学阵列，《美国声学学会杂志》，35（1963），第535–537页。[29] M. Wilke, L_p-L_q-具有非等温条件的拟线性Westervelt方程理论，《应用数学与优化》，88（2023），第13页。[30] F. Xu, K. Seffen, and T. Lu,皮肤生物热力学的非傅里叶分析，《国际传热与传质杂志》，51（2008），第2237–2259页。[31] E. Zeidler,《非线性泛函分析及其应用。I：不动点定理》，施普林格-维拉格，1986。[32] Y.-F. Zhou,高强度聚焦超声在临床肿瘤消融中的应用，《世界临床肿瘤学杂志》，2（2011），第8页。