arXiv:2304.02882v1 [math.CA] 6 Apr 2023

由曲线决定的两点模式

BENJAMIN B. BRUCE 和 MALABIKA PRAMANIK

ABSTRACT. 设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 是一条包含原点的光滑曲线。对于余维充分小的$\mathbb{R}^d$ 的每个博雷尔子集，是否都具有类似 S´ark¨ozy 的性质：相对于 Γ，包含两个相差一个 $\Gamma \setminus \{0\}$的元素? Kuca、Orponen 和 Sahlsten [26]对这一问题给出了肯定回答：对于一条曲率处处非零的特定曲线——标准抛物线（t, t^2）——在 $\mathbb{R}^2$中，结论成立。本文采用“函数型”这一解析概念来研究大豪斯多夫维数集合中模式的包含问题；函数型是曲率的一种推广，在调和分析中无处不在。具体而言，对于每条在原点处具有有限型的曲线 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$，我们证明存在一个维数阈值 $\varepsilon > 0$，使得每个豪斯多夫维数大于 $d - \varepsilon$ 的 $\mathbb{R}^d$ 博雷尔子集，都包含一对形如 $\{x, x + \gamma\}$ 且满足 $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$的点。我们得到的阈值 ε 虽非最优，但证明了它对所有给定“型”的曲线都是一致的。我们还证明，若 Γ 可由多项式参数化，或是某个光滑函数的图像，则关于 Γ 的有限型假设是必要的。因此，我们的结果表明，具有给定豪斯多夫维数的集合与其中必然包含的两点模式“类型”之间存在对应关系。

1. INTRODUCTION

豪斯多夫维数是几何测度论中普遍使用的一种大小概念。本文旨在将豪斯多夫维数确立为集合中所包含的两点“曲线”模式的判别指标，并对曲率作出适当的解释。

让我们从必要的术语开始。

- 在 $\mathbb{R}^d$ 中，光滑曲线指无穷次可微函数 $\Phi\colon \mathtt{I} \to \mathbb{R}^d$ 的像，其中 $\mathtt{I} \subset \mathbb{R}$ 是任意非退化紧区间。在本文中，我们约定 $\mathtt{I}$ 端点处的导数均为单侧导数。此外，从现在起，我们假设所有紧区间 $\mathtt{I}$ 均为非退化区间，即长度为正。对于任意光滑曲线 Γ，都存在许多函数 Φ 和区间 $\mathtt{I}$，使得 $\Gamma = \Phi(\mathtt{I})$。

- 一条光滑曲线 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 将被称为不可避免的，如果存在常数 $\varepsilon > 0$使得 $(\Gamma \setminus \{0\}) \cap (K - K) \neq \emptyset$ 对于每个满足$\dim_{\mathrm{H}} K > d - \varepsilon$的博雷尔集 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 都成立；如果不存在这样的 ε，那么 Γ 就是可避免的。这里以及下文中，$\dim_{\mathrm{H}}$ 表示豪斯多夫维数；参见 [33, 第 4 章，第 4.3] 节。

不可避免曲线必然包含原点。事实上，假设 Γ 是一条不包含原点的光滑曲线。由于 Γ 是紧的，我们有 $\operatorname{dist}(0, \Gamma) > 0$。因此

日期：2023年4月7日。2010 年数学主题分类。28A80（主要），11B25、11B30、42B99、28A78（次要）。关键词和短语：分形、多项式构形、曲率、有限型函数、豪斯多夫维数、测度的傅里叶变换。两位作者均获得 NSERC Discovery Grant GR010263 的部分资助。1

即 $\Gamma \cap (K-K) = \emptyset$ 对于任何集合 K，其直径严格小于 $\mathrm{dist}(0,\Gamma)$，包括欧几里得球在内；欧几里得球不仅具有完整的豪斯多夫维数，还具有正的勒贝格测度。等价地说，如果 Γ 是不可避免曲线，那么具有较大豪斯多夫维数但直径任意小的集合将包含形如 $\{x, x+\gamma\}$ 且满足 $\gamma \in \Gamma$的点对，从而迫使原点成为 Γ的极限点（因而也是其元素）。因此，不可避免性是曲线的一个局部性质，反映了它在原点附近的行为。

Furstenberg [14] 和 S´ark¨ozy [39, 40] 的一项经典结果$A-A$ 表明，任何上密度为正的集合 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 的差集都不可能是无平方的。不可避免性的概念将这一概念推广到维数为 $d \geq 2$ 的欧几里得空间：若 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$不可避免，则任何“大”集合 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 的差集 $K-K$ 都必须包含 Γ的一个非平凡元素。Kuca、Orponen 和 Sahlsten [26] 近期的研究表明，标准抛物线 $\{(t,t^2) : t \in [-1,1]\}$ in $\mathbb{R}^2$ 是不可避免的，由此自然引出一个问题：还有哪些曲线具有这一性质？本文通过给出两类结果来探讨这个问题。我们证明，若一条光滑曲线在原点处属于“有限型”，则它是不可避免的。我们还考察了两类不同的光滑曲线，即光滑图像曲线和多项式曲线，并证明在这两类曲线中，有限型假设对于不可避免性既是必要条件，也是充分条件。

为了陈述我们的结果，让我们回顾一下（例如参见 [43, 第八章，第3节。2]）光滑函数 Φ 在点 $\mathtt{t} \in \mathtt{I}$ 处的经典“ 类型 ”概念： $\mathtt{I} \to \mathbb{R}^d$

1. 我们称 Φ 在 $\mathtt{t}$ 处是有限型：对于每个非零向量 $u \in \mathbb{R}^d$ ，存在一个整数 $n \geq 1$ 使得 $u \cdot \Phi^{(n)}(\mathtt{t}) \neq 0$。如果存在一个非零向量 $u \in \mathbb{R}^d$，对于该向量不存在这样的 n ，那么 Φ 在 $\mathtt{t}$处是无限型。

2. 我们称..... Φ 在 $\mathtt{t}$ 处是有限型消失，当且仅当 Φ 在 $\mathtt{t}$ 处是有限型，且 $\Phi(\mathtt{t}) = 0$。

3. 我们称 Φ 在 $\mathtt{t}$ 处为 $\mathtt{N}$ 型，如果 $\mathtt{N}$ 是具有以下性质的最小整数：对于每个 $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$，都存在 $n \in \{1, \ldots, \mathtt{N}\}$，使得 $u \cdot \Phi^{(n)}(\mathtt{t}) \neq 0$。

   一个简单的紧致性论证表明， Φ 在 $\mathtt{t}$ 处是有限型的（按定义 1 的意义），当且仅当存在某个 $\mathtt{N}$，使得 Φ 在 $\mathtt{t}$ 处是 $\mathtt{N}$ 型的。由于总能找到一个非零向量 $u \in \mathbb{R}^d$，使得对每个 $\ell \in \{1, \ldots, d-1\}$都有 $u \cdot \Phi^{(\ell)}(\mathtt{t}) = 0$，因此 $\mathtt{N}$ 可能取到的最小值为 d。 $\mathtt{N} = d = 2$ 这一情形对应于 Φ 的像在 Φ（$\mathtt{t}$）处具有非零曲率的情况。更一般地， $\mathtt{N} = d$ 等价于“挠率”非零： $\det(\Phi'(\mathtt{t})\ \Phi''(\mathtt{t}) \ldots, \Phi^{(d)}(\mathtt{t})) \neq 0$。

4. 我们称 Φ 在 $\mathtt{t}$ 处消失为 $\mathtt{N}$ 型，如果 Φ 在 $\mathtt{t}$ 处是 $\mathtt{N}$ 型，且 $\Phi(\mathtt{t}) = 0$。

如上所述，若 $\mathtt{t}$ 是 $\mathtt{I}$的端点，则定义 1 和 3 中的导数应理解为单侧导数。

类型的概念可以从函数转移到曲线。为简便起见，我们在原点处阐述定义，但请注意，该定义很容易扩展到曲线上的任何其他点。设$\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 为一条包含原点的光滑曲线。

5. 如果存在一个紧区间 $\mathtt{I} \subset \mathbb{R}$、一点 $\mathtt{t} \in \mathtt{I}$以及一个光滑函数 $\Phi\colon \mathtt{I} \to \mathbb{R}^d$ ，该函数在 $\mathtt{t}$ 处为有限型消失，并且 Γ 包含像 $\Phi(\mathtt{I})$，我们称 Γ 在原点处是有限型的；否则，称 Γ在原点处是无限型的。

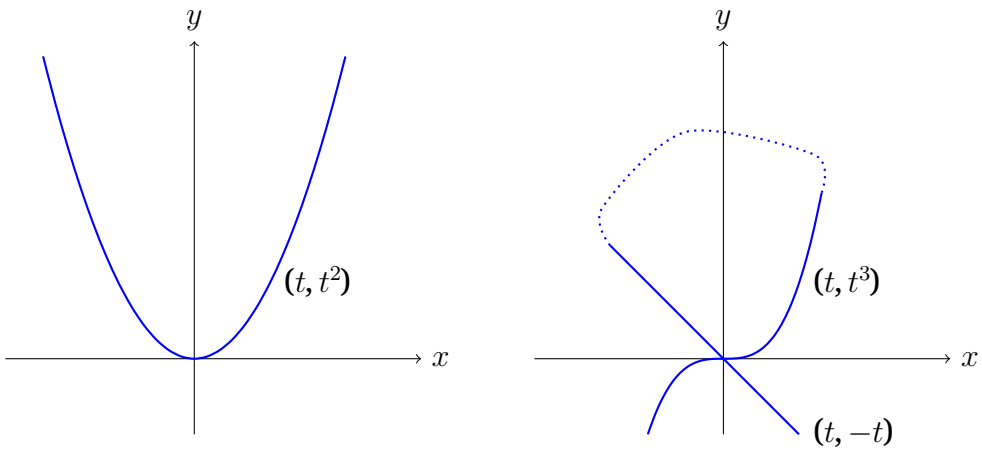


FIGURE 1. 有限型曲线。

6.我们称 Γ 在原点处为 $\mathtt{N}$ 型，如果 $\mathtt{N}$是具有以下性质的最小整数：存在一个紧区间 $\mathtt{I} \subset \mathbb{R}$、一个点 $\mathtt{t} \in \mathtt{I}$以及一个光滑函数$\Phi$： $\mathtt{I} \to \mathbb{R}^d$，该函数在 $\mathtt{t}$ 处以 $\mathtt{N}$ 型消失，使得 Γ 包含像 $\Phi(\mathtt{I})$。

在定义 5 和 6 中，我们可以要求 $\mathtt{t} = 0$，因为 Φ 在 $\mathtt{t}$处具有 $\mathtt{N}$ 型的消失等价于 $\Phi(\cdot - \mathtt{t})$ 在 0 处具有 $\mathtt{N}$ 型的消失。
请务必注意曲线 Γ 与表示 Γ 的众多函数的类型之间的区别。例如：

- 假设 η： $[0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个光滑递增函数，在 $t = 0$ 处以无限型消失；也就是说，$\eta(t) = \exp(-1/t^2)$。那么这两个函数
$$\Phi_0(t) = (\eta(t), \eta(t)^2) \qquad \text{and} \qquad \Phi(t) = (t^2, t^4)$$
二者都表示原点邻域内的标准抛物线。然而，Φ在 $t = 0$ 处是有限型消失，而 Φ_0 则不是。
- 如果一条曲线多次经过原点，那么其类型由它在那里最“良好”的行为决定。令 η: $[0,1] \to \mathbb{R}$ 为一个在 $t = 0$ 附近恒等于 0、在 $t = 1$附近恒等于1的光滑函数。假设 $\Gamma = \operatorname{im}\ \Phi$，其中 Φ： $[0,1] \to \mathbb{R}^2$由下式给出
$$\Phi(t) := (t(t-1), (t-1)^3\eta(t)).$$
则 $\Phi^{-1}(0) = \{0, 1\}$，且 Φ 在 $t = 0$ 处为无限型，在 $t = 1$处为有限型（$\mathtt{N} = 3$）。尽管 Φ 在 $t = 0$处的表现如此，根据定义 5，曲线 Γ 在原点处为有限型。

1.1.结果陈述。我们在全文中假设环境维数 $d \geq 2$ 固定。所有常数都允许依赖于 d。以下是我们的主要结果。

定理1.1。令 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 为原点处的一条有限型光滑曲线。则 Γ 是不可避免的。

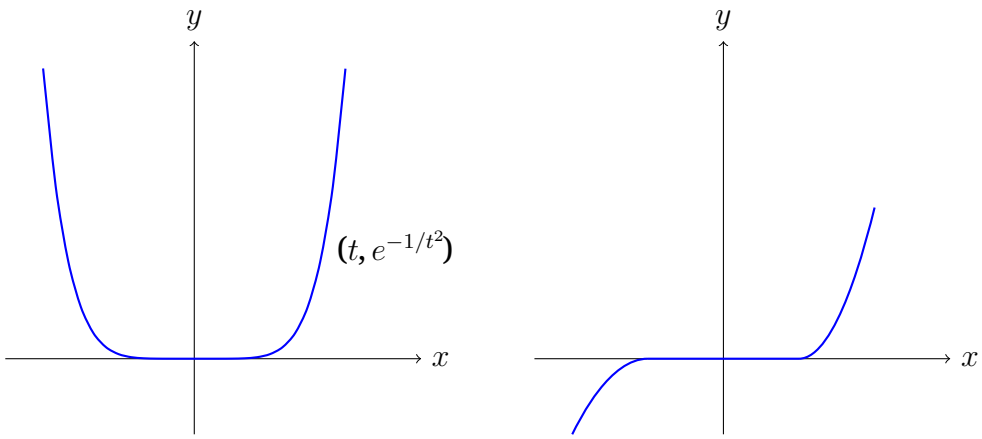


FIGURE 2. 无限型曲线。

定理 1.1 的一个更强的定量版本见下文的定理 1.5，其中表明，对于固定类型的曲线类，维数阈值是一致的。

由定理 1.1 可知，全维集合必定包含每一种有限型两点模式。

推论 1.2. 设 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 为一个 Borel 集，且 $\dim_{\mathrm{H}} K = d$。那么 $(\Gamma \setminus \{0\}) \cap (K - K) \neq \emptyset$ 对每条在原点处为有限型的光滑曲线 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 都成立。

对于某些类别的光滑曲线，即图像曲线和多项式曲线，在原点处为有限型这一假设对于不可避免性既充分又必要。

定理 1.3。设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 是一条包含原点且为某个光滑函数图像的曲线，即具有如下形式

$$\Gamma = \{(t, \Psi(t)) : t \in \mathtt{I}\} \tag{1.1}$$

其中 $\mathtt{I}$ 是某个紧区间，满足 $0 \in \mathtt{I}$，且 Ψ 是某个光滑函数：$\mathtt{I} \to \mathbb{R}^{d-1}$，满足 $\Psi(0) = 0$。那么，当且仅当 Γ 在原点处是有限型时，Γ 是不可避免的。

定理 1.4。设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 是一条包含原点的多项式曲线，即对于某个紧区间 $\mathtt{I}$ 和某个 d 元组 $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_d)$，有 $\Gamma = \Phi(\mathtt{I})$，其中各分量是单变量多项式 Φ_i，满足 $\Phi(\mathtt{t}) = 0$，且 $\mathtt{t} \in \mathtt{I}$。那么以下条件等价：

1. Γ 是不可避免的。
2. Γ 在原点处是有限型的。
3. Γ 不包含于 $\mathbb{R}^d$ 中的任何超平面。
4. 存在线性无关多项式 $\Phi_1, \ldots, \Phi_d$ 以及一个紧区间 $\mathtt{I}$ 使得 $\Gamma = \{(\Phi_1(t) \ldots, \Phi_d(t)) : t \in \mathtt{I}\}$。
5. 如果 Φ_1、…、Φ_d 和 $\mathtt{I}$ 是任意选取的多项式和紧区间，且 $\Gamma = \{(\Phi_1(t) \ldots, \Phi_d(t)) : t \in \mathtt{I}\}$，那么 Φ_1、…、Φ_d 线性无关。

现在我们将注意力转向定理 1.1 中定性陈述的定量表述。对于每一条在原点处为有限型的光滑曲线 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$，定理 1.1 给出一个常数 $\varepsilon > 0$，它可能依赖于 Γ，使得每个豪斯多夫维数超过 $d - \varepsilon$ 的博雷尔集都包含一对形如 $\{x, x+\gamma\}$ 的点，且满足 $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$。自然会问，这个 ε 可能如何依赖于 Γ。我们的定理 1.1 证明并未给出给定 Γ 时 ε 的最优阈值；然而，仔细审视论证后发现，可以选择一个 ε，使其仅依赖于环境维数 d 以及曲线在原点处的型 Γ。因此，这个 ε 对于所有在原点处与 Γ 同型的曲线都适用。我们将其记录为一个定理：

定理 1.5. 对每个 $\mathtt{N} \geq d$，都存在一个常数 $\varepsilon_{\mathtt{N}} > 0$，使得 $(\Gamma \setminus \{0\}) \cap (K - K) \neq \emptyset$ 对于每条在原点处类型为 $\mathtt{N}$ 的光滑曲线 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$，以及每个满足 $\dim_{\mathrm{H}} K > d - \varepsilon_{\mathtt{N}}$ 的博雷尔集 $K \subseteq \mathbb{R}^d$，均成立。

应当结合大量关于大集合中多点模式的文献来看待这些结果。这类问题已在各种离散和连续情形中得到研究；参见 [1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 31, 32, 35, 36, 37, 38, 41, 42, 45, 46]。众所周知，仅有较高的豪斯多夫维数并不能保证某些线性模式的存在，例如实数轴上的三项等差数列，甚至线性“平行四边形”；参见 [21]。因此，许多模式存在性结果（线性的和非线性的）都会采用更强的傅里叶分析假设，例如傅里叶维数的下界，或存在一个同时满足球条件并呈现傅里叶衰减的测度。例如，参见 [27, 7, 19, 13]。一般而言，对于非线性模式，这些更强的假设是否必不可少尚不清楚。鉴于非线性与傅里叶衰减之间的（启发式）联系，人们或许会希望在非线性情形中避免傅里叶分析假设。定理1.1和定理1.5证实，对于由曲线决定的两点模式，确实可以做到这一点。

关于更一般构形的近期结果也与这一观点一致。Greenleaf、Iosevich 和 Taylor [16, 17] 证明，高豪斯多夫维数的集合中存在大量非线性模式。例如，[16] 证明，对于属于一大类光滑映射的每个 $\Phi\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$，都存在一个阈值 $s_0 > 0$，使得若 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 的豪斯多夫维数大于 s_0，那么构形集 $\Delta_\Phi(K) := \{\Phi(x,y) : x, y \in K\}$在 $\mathbb{R}^k$中有非空内点。特别是，他们的结果确保了由曲线决定的模式大量存在。一个特例给出如下结论：若 $K \subseteq \mathbb{R}^2$ 且 $\dim_{\mathrm{H}} K > 3/2$，则集合 $\{x_2 - y_2 - (x_1 - y_1)^2 \colon x, y \in K\}$ 有非空内点；参见 [16, Cor. 2.8]。这一结果表明，高豪斯多夫维数的集合包含由一“连续统”抛物线决定的两点模式。是否必须存在某个特定的抛物线模式，则是一个截然不同的问题。如上所述，Kuca、Orponen 和 Sahlsten [26], 对此给出了答案：若 $K \subseteq \mathbb{R}^2$ 的豪斯多夫维数足够接近 2，那么 K 包含一对形如 $\{x, x + (t, t^2)\}$ 且满足 $t \neq 0$的点。

本文表明，在豪斯多夫维数较高的集合中，还可以找到许多其他特定的非线性两点模式（定理1.1和定理1.5）。此外，本文还刻画了这类模式，前提是它们由对应于某些函数类的曲线所确定（定理 1.3 和 1.4）。这些结果表明，集合之间存在一种对应关系。

指定的豪斯多夫维数，以及其中必须包含的两点模式类别。以下类似的陈述似乎是合理的：

对于每个 $s_0 \in (0,d)$，都存在一个由光滑曲线组成的类 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(s_0)$，其中曲线位于 $\mathbb{R}^d$，使得 (i) 对每个 $\Gamma \in \mathcal{C}$ 以及每个满足 $\dim_{\mathrm{H}} K > s_0$ 的博雷尔集 $K \subseteq \mathbb{R}^d$，都有 $(\Gamma \setminus \{0\}) \cap (K-K) \neq \emptyset$；并且 (ii) 对每个 $s < s_0$ 和每个 $\Gamma \in \mathcal{C}$，都存在一个满足 $\dim_{\mathrm{H}} K > s$ 的博雷尔集 $K \subseteq \mathbb{R}^d$，使得 $(\Gamma \setminus \{0\}) \cap (K-K) = \emptyset$。

我们设想，这样的类 $\mathcal{C}(s_0)$ 可能由有界型曲线构成，其中界限依定量方式取决于 s_0。

1.2. 证明结构。本文余下部分安排如下：在第 2 节中，我们证明定理 1.5，从而证明定理 1.1；这一证明以三个关键命题为条件，它们突显了所需的主要技术工具：

- 给定测度 μ 和 π，我们在命题 2.2 中引入一个一般的两点构型积分 $\mathcal{I}[\mu;\ \pi]$ 如果该积分非零，则表明$\operatorname{supp}\ \mu$ –$\operatorname{supp}\mu$ 与 $\operatorname{supp}\ \pi$ 的交集非空。

- 给定一条有限型曲线 Γ，在测度 μ 满足有限能量与谱隙的假设下，并且 π 是支撑于 $\Gamma \setminus \{0\}$ 上的自然测度时，上述构型积分在命题 2.3 中得到了估计。

- 给定一个 K 具有足够大豪斯多夫维数的集合，命题 2.4 确保存在一个测度 μ，满足应用命题 2.3 所需的能量与谱隙条件，且定义在 K 上。

这三个命题分别在第6、7和8节中得到证明，从而完成定理1.5和1.1的证明。这三个命题都扩展了 [26] 中针对标准抛物线所发展出的类似性质的陈述。然而，当前版本在以下方面具有独特之处：

- [26] 中的证明高度依赖标准抛物线的各向异性膨胀不变性。一般曲线并不具备这一性质，而本文的一项主要贡献就是提供了必要的变通方法。

- 维数阈值 ε和模式 $\gamma \in (K-K) \cap (\Gamma \setminus \{0\})$ 对底层参数的依赖关系（定理 1.5 所需）得到了明确说明。

在第 3 节中，我们概述一个已知结果的证明，该结果关于图像具有较高豪斯多夫维数的 H¨older 连续函数。这个结果对于定理 1.3 和 1.4 的证明至关重要，这两个定理分别见第 4 节和第 5 节。在第 9 节中，我们说明如何在适当的度量空间中利用豪斯多夫维数重新诠释我们的方法。若干技术性结果列于附录。

2. Finite type patterns are unavoidable

2.1. 标准化。原点处的有限型曲线可以表示为许多函数的像。本小节的目标是找到一种最便于后续使用的参数化。

让我们固定一条曲线 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$，类型为 $\mathtt{N}$，位于原点处。然后，根据第 3 页的定义 6，存在一个紧区间 $\mathtt{I} \subset \mathbb{R}$、一个点 $\mathtt{t} \in \mathtt{I}$以及一个光滑函数 $\Phi\colon\ \mathtt{I} \to \mathbb{R}^d$，满足

在 t 处的 N 型消失，使得 $\Gamma \supseteq \Phi(I)$。如上所述，不失一般性，我们可以假设 $t = 0$，从而 $0 \in I$。我们还可以假设

$$I = [0, 1]. \tag{2.1}$$

为证明这一点，我们需要找到一个函数 $\Phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$，使其在$\widetilde{}$原点处具有 N 型消失性，并满足 $\Gamma \supseteq \Phi([0,1])$。利用 Φ构造这样的函数有许多种方法；其中一种如下：令 $I =: [a, b]$，从而 $a \le 0 \le b$，且至少一个不等式为严格不等式，并定义

$$\widetilde{\Phi}(t) := \begin{cases} \Phi(at) & \text{if } a < 0, \\ \Phi(bt) & \text{if } a = 0 \end{cases} \qquad \text{for } t \in [0,1].$$

将 Φ替换为 Φ，我们得到（2.1）。

对于每个 $i \in \{1, \dots, d\}$，令 $\Phi_i\colon I \to \mathbb{R}$ 表示 i^{th} 分量的 Φ，从而 $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_d)$。函数 Φ_i 可以表示为

$$\Phi_i(t) = t^{n_i} \phi_i(t) \tag{2.2}$$

对于某些正整数 n_1、…、$n_d \in \{1, \dots, N\}$ 以及某些光滑函数 $\phi_i\colon I \to \mathbb{R}$满足 $\phi_i(0) \neq 0$。我们将对 n_i 和 ϕ_i作出以下假设:

$$1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_d = N, \tag{2.3}$$

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) = \cdots = \phi_d(0) = 1. \tag{2.4}$$

这些假设也需要加以论证，以下的引理 2.1在一定程度上提供了这一论证。在该引理中，我们证明了存在一个可逆线性映射 $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，使得复-合 $L \circ \Phi$ 具有性质 (2.3)和(2.4)。不难验证，L(Γ) 是不可避免的，且其维数阈值为 ε，当且仅当 Γ 是不可避免的，且具有相同的阈值。因此，以$L \circ \Phi$替换 Φ 后，不失一般性，我们可以假设Φ 满足所需的性质 (2.3) 和 (2.4)。引理 2.1 的证明推迟至附录。

引理 2.1. 设 $\Theta\colon I \to \mathbb{R}^d$ 是一个在原点处具有类型 N 的消失的光滑函数。那么存在一个可逆线性映射 $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，使得 $\Phi := L \circ \Theta$ 满足 (2.2)，相应的整数 n_i 和函数 ϕ_i 分别满足 (2.3) 和 (2.4)。

如果 $\Phi\colon I \to \mathbb{R}^d$ 满足 (2.1)–(2.4)，那么我们称 Φ 处于标准形式。引理 2.1（以及其前面的讨论）表明，原点处的任何有限型曲线，经过一个无关紧要的可逆线性变换后，都是处于标准形式的函数的像。

在定理 1.5（或其中所使用的任何命题）的证明中出现的常数，如果只依赖于 d 和 N，则称其为容许的。特别地，该定理给出的维数阈值ε_N 应当是容许的。因此，指出证明中出现的常数是否容许将十分重要。

2.2. 几个关键命题。现在我们来表述一些主要步骤，由此将很容易推出定理 1.5，进而推出定理 1.1。每个步骤（包括其中的定义）都是对 [26] 中类似思路的定量化改编。这些命题将分别在第 6、7、8 节中证明。

2.2.1.构型积分的不消失性。研究构型时，一个反复出现的特征是构造一个适当的积分，其正性表明所需构型的存在。下面我们描述与我们的问题相关的积分。

命题 2.2. 固定一个施瓦茨函数 ψ: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$，并令 $\psi_\delta := \delta^{-d}\psi(\delta^{-1}\cdot)$ 表示 $\delta > 0$。设 μ 是 $\mathbb{R}^d$ 上任意一个紧支撑博雷尔概率测度，且 π 是 $\mathbb{R}^d$ 上任意一个有限博雷尔测度。假设。

$$\mathcal{I}[\mu, \pi] := \liminf_{\delta \searrow 0} \left| \int (\mu * \psi_\delta) * \pi \, d\mu \right| > 0. \tag{2.5}$$

那么 $\operatorname{supp}\ \pi \cap (\operatorname{supp}\mu - \operatorname{supp}\ \mu) \neq \emptyset$。

在我们对定理 1.5 的证明中，我们将对分别支撑在（仿射映像） K 和 $\Gamma \setminus \{0\}$ 上的测度 μ 和 π 应用命题 2.2。这最终将得到所需的结论，即 $(\Gamma \setminus \{0\}) \cap (K - K) \neq \emptyset$。

尽管命题 2.2对施瓦茨函数 ψ的任意选择都成立，但我们将固定一个方便的ψ，其具有可简化后续论证某些部分的性质。具体而言，我们现在取 ψ 为归一化高斯函数

$$\psi(x) := e^{-\pi|x|^2} \tag{2.6}$$

（它也是自身的傅里叶变换），并特别记录以下性质：

$$\psi \geq 0, \qquad \psi(0) = \|\psi\|_\infty = \|\widehat{\psi}\|_\infty = 1, \qquad |\widehat{\psi}(\xi) - \widehat{\psi}(0)| \leq \pi|\xi|^2. \tag{2.7}$$

这里，$\widehat{\ }$ ψ 表示 ψ的傅里叶变换。对于任意博雷尔测度 μ，定义

$$\mu_\delta := \mu * \psi_\delta, \tag{2.8}$$

其中 $\psi_\delta := \delta^{-d}\psi(\delta^{-1}\cdot)$，如上。

2.2.2. 能量与谱隙在识别模式中的作用。命题 2.2 相当一般，因为它不要求 μ 或 π 具备任何特殊性质。我们的下一个目标是确保，对于原点处给定的一条有限型曲线 Γ，通过适当选择 μ 和 π，使得 π（本质上）支撑在 $\Gamma \setminus \{0\}$上，从而 (2.5) 成立。我们还需要描述这一选择中涉及的可容许常数和不可容许常数。

为此，设 Φ: $[0,1] \to \mathbb{R}^d$ 是原点处以 $\mathtt{N}$ 型消失的任意标准形式函数。对于每个 $i \in \{1, \ldots, d\}$，假设 (2.2)–(2.4) 表明，

$$\Phi_i^{(\mathtt{n}_i)}(0) = \mathtt{n}_i!\phi_i(0) = \mathtt{n}_i! \in [1, \mathtt{N}!]$$

and

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\Phi_i^{(\ell)}(t)}{t^{\mathtt{n}_i - \ell}} = \frac{\mathtt{n}_i!}{(\mathtt{n}_i - \ell)!} \in [1, \mathtt{N}!] \quad \text{for } 0 \leq \ell < \mathtt{n}_i.$$

这里，$\Phi_i^{(\ell)}$ 表示 Φ_i的 ℓ^{th} 阶导数，约定 $\Phi_i^{(0)} \equiv \Phi_i$。利用 Φ 在原点附近的光滑性，可以找到一个依赖于 Φ（因此不允许使用）的大整数 $\mathtt{J}_0 = \mathtt{J}_0(\Phi)$，使得

$$|\Phi_i^{(\ell)}(t)| \leq 2\mathtt{N}!|t|^{\mathtt{n}_i - \ell} \quad \text{for all } t \in [0, 2^{-\mathtt{J}_0}] \text{ and } 0 \leq \ell < \mathtt{n}_i, \tag{2.9}$$

and

$$\frac{1}{2} \le |\Phi_i^{(\mathtt{n}_i)}(t)| \le 2\mathtt{N}! \quad \text{for all } t \in [0, 2^{-\mathtt{J}_0}]. \tag{2.10}$$

性质 (2.2) 和 (2.10) 中的下界共同意味着

$$\Phi(t) \neq 0 \quad \text{for all } t \in (0, 2^{-\mathtt{J}_0}]. \tag{2.11}$$

因此，原点是 Φ 在 $[0, 2^{-\mathtt{J}_0}]$上的唯一孤立零点。

让我们定义重缩放函数

$$\Phi^j := (2^{\mathtt{n}_1 j}\Phi_1(2^{-j}\cdot), \dots, 2^{\mathtt{n}_d j}\Phi_d(2^{-j}\cdot)), \qquad j \ge 0, \tag{2.12}$$

其在 Φ（当 $j = 0$ 时）与单项式曲线 $t \mapsto (t^{\mathtt{n}_1}, \dots, t^{\mathtt{n}_d})$（当$j = \infty$时）之间进行插值。对于每个 $j \ge \mathtt{J}_0$和 $c \in (0, 1]$,，令 $\pi = \pi[\Phi;\ j, c]$ 表示由该公式定义的奇异测度

$$\int f d\pi := \int_c^1 f(\Phi^j(s))ds \tag{2.13}$$

并支撑于 $\Phi^j([c, 1]) \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$。

对于 $\sigma \in (0, d)$，令 $I_\sigma(\mu)$ 表示博雷尔测度 μ 的 σ 维能量:

$$I_\sigma(\mu) := \iint |x - y|^{-\sigma} d\mu(x)d\mu(y) = \gamma(d, \sigma) \int |\widehat{\mu}(\xi)|^2 |\xi|^{\sigma - d} d\xi; \tag{2.14}$$

这里，$\gamma(d, \sigma)$ 是一个正的常数（见 [34, §3.4–3.5]），而 $\widehat{\mu}$ 表示 μ 的傅里叶变换。对于每个正整数 N，设

$$\sigma_N := d - \frac{1}{2N} \qquad \text{and} \qquad \gamma_N := \gamma(d, \sigma_N). \tag{2.15}$$

命题 2.3。对于每个 $\mathtt{N} \ge d$，存在一个可容许常数 $\mathtt{L}_\mathtt{N} \ge 1$，具有以下性质：令 Φ: $[0, 1] \to \mathbb{R}^d$ 为任意一个在原点处以类型 $\mathtt{N}$ 消失的标准形式函数。于是存在一个（不可容许的）整数 $\mathtt{J} = \mathtt{J}(\Phi) \ge \mathtt{J}_0(\Phi)$，使得如果

- $\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}$ 是常数的选取中满足条件的任意一组

$$\mathtt{A}^d \ge 4\mathtt{L}_\mathtt{N}^2, \qquad \mathtt{B} \ge (\mathtt{L}_\mathtt{N}\mathtt{A}^{4d}\mathtt{C})^{2\mathtt{N}}, \qquad \mathtt{C} \ge 1, \tag{2.16}$$

  and

- μ 是满足能量与谱隙条件的任意博雷尔概率测度，定义在 $[0, 1]^d$ 上。

$$I_{\sigma_\mathtt{N}}(\mu) \le \mathtt{C} \qquad \textit{and} \qquad \int_{|\xi| \in [\mathtt{A}, \mathtt{B}]} |\widehat{\mu}(\xi)|^2 d\xi \le \mathtt{A}^{-4d}, \tag{2.17}$$

then

$$\mathcal{J}[\mu, \pi[\Phi; j, \mathtt{A}^{-6d}]] \ge \mathtt{A}^{-4d} \quad \textit{for all } j \ge \mathtt{J}. \tag{2.18}$$

此处， $\mathtt{J}_0$ 指的是(2.9)–(2.11)中出现的整数， $\sigma_{\mathbb{N}}$ 是(2.15)中定义的指标， $\mathfrak{I}$指的是(2.5)中的配置积分，而 π 是(2.13)中引入的测度。

除了 $\sigma_{\mathbb{N}}$ 在 (2.15) 中足够接近 d 之外，选择 $\sigma_{\mathbb{N}}$ 并没有什么特别之处。我们本可以从区间 $(d-1/\mathbb{N}, d)$ 中任取一个值作为 $\sigma_{\mathbb{N}}$，命题 2.3 仍然成立。类似地，在选择 (2.17) 中谱隙条件所涉及的指数 $4d$ 时，也有一定的灵活性。我们可以将 $4d$ 替换为任何严格大于 $d+2$ 的数，只要同时对条件 (2.16) 和结论 (2.18) 作些微调整即可。选择 $4d$ 只是为了使整个证明中的指数看起来更简洁。

2.2.3. 有限能量与谱隙测度的构造。给定一条由函数 Φ 表示的有限型曲线 Γ，结论 (2.18) 和命题 2.2 大致意味着 $(\Gamma \setminus \{0\}) \cap (\operatorname{supp}\mu - \operatorname{supp}\ \mu) \neq \emptyset$。给定一个豪斯多夫维数较大的任意博雷尔集 $K \subseteq \mathbb{R}^d$，接下来要确定能否找到一个满足命题 2.3 假设、且支撑包含于 K 的概率测度 μ。下一条命题的目标正是解决这一问题。简言之，它指出这样的测度可以找到，但不在 K 本身中，而是在其某个仿射副本中 K。

在陈述命题之前，我们先介绍必要的记号和术语。固定一个正整数的 d-元组 $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_d)$。与 (2.3) 中不同， $\vec{n}$ 的各项无需互不相同或按序排列。定义

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*[\vec{n}] := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_j, \quad \text{where} \quad \mathcal{D}_j = \mathcal{D}_j[\vec{n}] := \Big\{ a + \prod_{i=1}^{d} [0, 2^{-n_i j}) \colon a \in \prod_{i=1}^{d} 2^{-n_i j}\mathbb{Z} \Big\}. \tag{2.19}$$

因此， $\mathcal{D}^*$ 由 $\mathbb{R}^d$ 中所有维度为 $2^{-n_1 j} \times \cdots \times 2^{-n_d j}$ 的二进制盒组成，其中 j 为某个整数。我们还令

$$\mathcal{D}^*_J = \mathcal{D}^*_J[\vec{n}] := \bigcup_{j\geq J} \mathcal{D}_j \tag{2.20}$$

对任意整数 J。现在，固定一个盒 $Q \in \mathcal{D}_j$ 并记 $Q = a + \prod_{i=1}^{d}[0, 2^{-n_i j})$。我们将 Q 的“长度”记为

$$\ell(Q) := 2^{-j} \tag{2.21}$$

并定义放大函数

$$\mathbf{T}_Q(x) := (2^{n_1 j}(x_1 - a_1), \ldots, 2^{n_d j}(x_d - a_d)) \tag{2.22}$$

该函数将 Q 映射到 $[0,1)^d$。给定一个有限博雷尔测度 ν，满足 $\nu(Q) > 0$，则相对于 Q，ν 的放大定义为

$$\nu^Q := \|\nu|_Q\|^{-1} \mathbf{T}_Q(\nu|_Q), \tag{2.23}$$

其中，$\mathrm{T}_Q(\nu|_Q)$ 表示 $\nu|_Q$ 经T_Q 的推前。因此， ν^Q 始终是一个支撑于$\mathrm{T}_Q(\{$支撑$\}\ \nu \cap Q)$ 的闭包上的概率测度，它是 $[0,1]^d$ 的子集：

$$\nu^Q(E) = \frac{\nu(\mathbf{T}_Q^{-1}(E) \cap Q)}{\nu(Q)} \quad \text{for any Borel set } E \subseteq \mathbb{R}^d. \tag{2.24}$$

命题2.4.对于每个 $\mathtt{N} \geq d$，存在满足 (2.16) 的可容许常数 $\mathtt{A}$、$\mathtt{B}$、$\mathtt{C}$ 以及一个可容许常数 $\varepsilon = \varepsilon(\mathtt{A},\mathtt{B},\mathtt{C}) > 0$，具有以下性质：令 $\Phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$为标准形式下在原点处按 $\mathtt{N}$ 型消失的任意光滑函数，并令$K \subseteq \mathbb{R}^d$ 为满足 $\dim_{\mathrm{H}} K > d - \varepsilon$ 的任意 Borel 集。那么存在

- 一个二进盒 $\mathtt{Q} \in \mathcal{D}^*_{\mathtt{J}}[\vec{\mathtt{n}}]$，满足命题 2.3 中的 $\mathtt{J} = \mathtt{J}(\Phi)$，以及式 (2.3) 中的 $\vec{\mathtt{n}} = (\mathtt{n}_1, \ldots, \mathtt{n}_d)$，并且
- 一个有限博雷尔测度 ν，满足 $\operatorname{supp}\nu \subseteq K \cap \overline{\mathtt{Q}}$ 和 $\nu(\mathtt{Q}) > 0$

使得 放大 $\mu := \nu^{\mathtt{Q}}$ 满足式 (2.17) 中的能量与谱隙条件 .

这里，$\overline{E}$ 表示 E 的拓扑闭包。

2.3. 假设命题 2.2–2.4 成立时定理 1.5 和 1.1 的证明。证明由这三个命题按相反顺序串接而成。设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 是一条在原点处以 $\mathtt{N}$ 阶消失的光滑曲线。设 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个满足 $\dim_{\mathrm{H}} K > d - \varepsilon$ 的博雷尔集，其中 ε 如命题 2.4 所述。我们可以假设 $\Gamma \supseteq \Phi([0,1])$，其中 $\Phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$ 具有标准形式，且在原点处以 $\mathtt{N}$ 阶消失。

设 $\mathtt{Q}$ 和 μ 如应用于 Φ 和 K 时命题 2.4 的结论所述。因此，特别地，μ 是一个支撑在 $\mathtt{T}_{\mathtt{Q}}(K \cap \overline{\mathtt{Q}}) \subseteq [0,1]^d$ 上的概率测度，并满足某些常数 $\mathtt{A}$、$\mathtt{B}$、$\mathtt{C}$ 的条件 (2.17)，这些常数满足 (2.16)。设 $\mathtt{j} \geq \mathtt{J}(\Phi)$ 满足 $\mathtt{Q} \in \mathcal{D}_{\mathtt{j}}$。由命题 2.3 可得 $\mathcal{I}[\mu, \pi[\Phi;\ \mathtt{j},\ \mathtt{A}^{-6d}]] > 0$，因此，根据命题 2.2，存在某个 $x \in$ 支撑 $\pi[\Phi;\ \mathtt{j},\ \mathtt{A}^{-6d}] \cap$（支撑 $\mu -$ 支撑 μ）。

测度 $\pi[\Phi; \mathtt{j}, \mathtt{A}^{-6d}]$ 支撑在 $\Phi^{\mathtt{j}}([\mathtt{A}^{-6d}, 1])$ 上，其中 $\Phi^{\mathtt{j}}$ 如 (2.12) 中所述，而 μ 支撑在 $\mathtt{T}_{\mathtt{Q}}(K)$ 上。将 $x = \Phi^{\mathtt{j}}(s)$ 写作某个 $s \in [\mathtt{A}^{-6d}, 1]$，并令 $\gamma := \Phi(2^{-\mathtt{j}}s)$，由 (2.11) 和 (2.22) 可得 $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$ 和 $\gamma \in K - K$。□

注 2.5. 上述论证的关键在于曲线 Γ与二进盒集合 $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*[\vec{\mathtt{n}}]$ 之间的关系。我们想解释一下这些盒是如何选取的。为简单起见，我们考虑 $\Gamma = \operatorname{im}\Phi$ 的例子，其中

$$\Phi(t) = (t^2, t^3 + t^4), \qquad t \in [0,1],$$

因此 $\vec{\mathtt{n}} = (2, 3)$。粗略地说，命题 2.3 和 2.2 表明，如果 K 支撑一个具有谱隙的测度，那么 $K - K$ 会按所需方式与 $\Gamma \setminus \{0\}$ 相交。命题 2.4 给出了一个矩形 $\mathtt{Q} \in \mathcal{D}^*$，使得在针对 $\mathtt{Q}$ 的重缩放映射下，K 的仿射像 $\mathtt{T}_{\mathtt{Q}}(K)$ 支撑一个具有此性质的测度。在理想情况下，我们会选择 $\mathcal{D}^*$ 中的二进矩形的尺寸，使得 Γ在逆缩放映射 $\mathtt{T}_{\mathtt{Q}}^{-1}$（的线性部分）下保持不变。这样，我们就可以将所需图样从 $\mathtt{T}_{\mathtt{Q}}(K)$ 拉回到 K。然而，本例中的曲线 Γ 并不具有这样的缩放关系。相反，它具有一种基于其首项行为的近似缩放关系：重缩放函数

$$\Phi^j(t) := (2^{2j}\Phi_1(2^{-j}t), 2^{3j}\Phi_2(2^{-j}t)) = (t^2, t^3 + 2^{-j}t^4)$$

产出 一列曲线 $\Gamma_j := \operatorname{im}\Phi^j$，它们趋近于“主阶”曲线

$$\Gamma_\infty := \{(t^2, t^3) \colon t \in [0,1]\}$$

作为 $j \to \infty$，且该极限曲线在变换 $(x_1, x_2) \mapsto (2^{2j}x_1, 2^{3j}x_2)$ 下保持不变，对任意 j 均成立。我们将 $\mathcal{D}_j$ 中的矩形定义为尺寸为 $2^{-2j} \times 2^{-3j}$，使得它们的重缩放映射（的线性部分）与此变换一致。由于命题 2.3 实际上对（足够大的） j 是一致的，我们可以证明 $\mathtt{T}_{\mathtt{Q}}(K) - \mathtt{T}_{\mathtt{Q}}(K)$ 包含一个非零点 $\Phi^{\mathtt{j}}(s)$，其中 $\mathtt{j}$ 满足 $\mathtt{Q} \in \mathcal{D}_{\mathtt{j}}$。如所需，重缩放 $K \to \mathtt{T}_{\mathtt{Q}}(K)$ 与 $\Phi \to \Phi^{\mathtt{j}}$ 是相容的，也就是说，现在 $K - K$ 必须包含非零点 $\Phi(2^{-\mathtt{j}}s) \in \Gamma$。

3. High-dimensional graphs

定理 1.3 和 1.4 的证明需要构造不可避免性的反例。为此，我们将利用高维单参数图的存在性。

命题 3.1. 对每个 $s \in [1, d)$，都存在一个 Hölder 连续函数 $F_s\colon [0,1] \to \mathbb{R}^{d-1}$，使得

$$\|F_s\|_{C^{0,\alpha}} < \infty \quad \textit{for all} \quad 0 < \alpha < \min\Big\{\frac{1}{s}, \frac{d-s}{d-1}\Big\}, \tag{3.1}$$

and

$$\dim_{\mathrm{H}}(\operatorname{graph} F_s) = s, \quad \textit{where} \quad \operatorname{graph} F_s := \{(t, F_s(t))\colon t \in [0,1]\}; \tag{3.2}$$

此处，$\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}}$ 表示 Hölder 范数

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t,t'\in[0,1]\colon t\neq t'} \frac{|f(t) - f(t')|}{|t-t'|^{\alpha}}.$$

这一经典结果最初由 Besicovitch 和 Ursell 提出 [3]，适用于 $d = 2$；如今文献中已有许多变体，例如参见 [28, 23, 29, 30, 44, 47]。Kahane [20], 证明了上述形式的结果，并通过随机论证表明，这类函数 F_s 实际上大量存在。下面简要概述他的论证，并指引读者参阅文中相关章节，以获取完整证明。

在 [20, 第 18] 章中，对于 n、$d \geq 1$，Kahane 引入了一个取值于 $\mathbb{R}^d$ 的（n，d，γ）高斯过程 $\{X_t\colon\ t \in \mathbb{R}^n\}$，使得

$$\mathbb{E}(|X_t - X_{t'}|^2) = d|t - t'|^{\gamma}.$$

当 $0 < \gamma \leq 2$时，在 [20, 第 18 章 §2] 中证明了这种过程存在一个几乎处处连续的版本，即对于几乎每个ω，$t \mapsto X(t;\omega)$都是 t 的连续函数。更准确地说，证明了 $X(\cdot;\omega)$的连续模 ω_X 满足

$$\omega_X(h) = \sup_{|t-t'|\leq h} |X(t) - X(t')| = O\big(\sqrt{|h|^{\gamma}\log(1/|h|)}\big) \qquad \text{almost surely} \tag{3.3}$$

在 $\mathbb{R}^n$的每个紧子集上。此结论见 [20, 第 18], 章中的方程（3），由 [20, 第 14]章的内容可得。条件（3.3）意味着（几乎必然）

$$X(t) \text{ is Hölder continuous with exponent } \gamma/2 - \varepsilon \text{ for every } \varepsilon \in (0, \gamma/2). \tag{3.4}$$

在 [20, 第 18 章 §7 定理 7], 中，Kahane 证明：

对于任意紧集 $E \subset \mathbb{R}^n$，该关系

$$\dim_{\mathrm{H}}\big(\operatorname{graph} X|_E\big) = \min\Big\{\frac{2}{\gamma}\dim_{\mathrm{H}} E,\ \dim_{\mathrm{H}} E + \Big(1 - \frac{\gamma}{2}\Big)d\Big\}$$

几乎必然成立。

这里，图 $X|_E$ 表示集合 $\{(t, X(t)) : t \in E\}$。现在，我们可以如下从 Kahane 定理得到命题 3.1：令 $n = 1$ 和 $E = [0, 1]$，并将 d 替换为 $(d - 1)$，将 $X(t)$ 替换为 $F_s(t)$，得到

$$\dim_{\mathrm{H}}(\operatorname{graph} F_s) = \dim_{\mathrm{H}}(\operatorname{graph} X|_{[0,1]}) = \min\Big\{\frac{2}{\gamma}, d - \frac{\gamma}{2}(d-1)\Big\}, \tag{3.5}$$

如果我们选择

$$\gamma = \min\Big\{\frac{2}{s}, \frac{2(d-s)}{d-1}\Big\} = \begin{cases} \frac{2}{s} & \text{if } 1 \le s \le d-1, \\ \frac{2(d-s)}{d-1} & \text{if } d-1 < s < d, \end{cases}$$

那么(3.4) 推出该命题的第一个结论，而 (3.5) 和一点算术运算证实了第二个结论。□

4. Graphs of infinite type are avoidable

本节的目标是证明定理 1.3。事实上，我们将证明一个稍强的陈述（下文的命题 4.1），即对于不一定是图、但属于类图曲线的曲线，定理的一个类似结论。此外，我们还对有限型的类图曲线表述一个定量的部分避开结果（命题 4.2）；证明在附录中略述。

我们来定义相关概念。我们称光滑曲线 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 是图状的，如果存在一个可逆线性变换 $\mathbf{L} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$和一个光滑函数 $\Phi\colon \mathtt{I} \to \mathbb{R}^d$使得

(i) $\mathtt{I} \subset \mathbb{R}$ 是一个非退化的紧区间，

(ii) $\Phi =: (\Phi_1, \underline{\Phi})$的形式为 $\Phi_1(t) = t^{\mathtt{m}}\phi(t)$，其中 $\mathtt{m} \ge 1$ 为某个整数，且 ϕ 为某个光滑函数：$\mathtt{I} \to \mathbb{R}$ 使得 $\inf\{|\phi(t)| : t \in \mathtt{I}\} > 0$，

(iii) $\mathbf{L}(\Gamma) = \Phi(\mathtt{I})$.

在上述情形中，如果 $\mathbf{L}$ 是恒等映射，$\mathtt{m} = 1$ 和 $\phi \equiv 1$，那么 $\Gamma = \{(t, \underline{\Phi}(t)) : t \in \mathtt{I}\}$ 是一个普通图。

命题4.1.设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 是一条包含原点的光滑类图曲线。那么Γ 不可避免，当且仅当 Γ 在原点处是有限型。特别地，定理 1.3 成立。

4.1. 命题 4.1 的证明。定理 1.1 给出了该命题的一个方向，即如果 Γ 在原点处是有限型的，那么 Γ 是不可避免的。为证明另一个方向，我们假设 Γ 在原点处是无限型的，并旨在证明Γ 是可避免的。固定 $\mathbf{L}$ 和 Φ：满足图状曲线定义中条件(i)–(iii)的 $\mathtt{I} \to \mathbb{R}^d$ 。由于不可避免性和类型在可逆线性变换的作用下均保持不变，我们可以假设 $\mathbf{L}$ 是恒等变换。Γ 包含原点这一假设，连同条件 (ii) 和 (iii)，意味着 $0 \in \mathtt{I}$，并且

$\Phi(0) = 0$。此外，Φ 必须在原点处为无限型，因为我们已假设 Γ 也是如此。因此，存在一个单位向量 $\mathtt{u} \in \mathbb{R}^d$ 使得

$$\mathtt{u} \cdot \Phi^{(n)}(0) = 0 \quad \text{for every } n \geq 0. \tag{4.1}$$

令 $\mathbf{U}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为将 $\mathtt{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ 映射到 $\mathtt{u}$ 的酉矩阵。定义 $z := \mathbf{U}^{-1} \circ \Phi$，并将 $z = (z_1, \underline{z})$ 记作，其中 $z_1\colon \mathtt{I} \to \mathbb{R}$ 且 $\underline{z}\colon \mathtt{I} \to \mathbb{R}^{d-1}$。于是 (4.1) 推出

$$z_1^{(n)}(0) = [\mathtt{e}_1 \cdot (\mathbf{U}^{-1} \circ \Phi)]^{(n)}(0) = \mathtt{u} \cdot \Phi^{(n)}(0) = 0 \quad \text{for every } n \geq 0. \tag{4.2}$$

由此可知，对每个 n，都存在 $\mathtt{C}_n > 0$ 使得

$$|z_1(t)| \leq \mathtt{C}_n |t|^n \quad \text{for all } t \in \mathtt{I}. \tag{4.3}$$

由条件 (ii)，我们有 $\Phi^{(\mathtt{m})}(0) \neq 0$，因此

$$z^{(\mathtt{m})}(0) = \mathbf{U}^{-1} \circ \Phi^{(\mathtt{m})}(0) \neq 0. \tag{4.4}$$

性质 (4.2) 和 (4.4) 合起来推出 $\underline{z}^{(\mathtt{m})}(0) \neq 0$。由此可知，存在常数 $\mathtt{c}_0 > 0$ 和 $\delta > 0$ 使得

$$|\underline{z}(t)| \geq \mathtt{c}_0 |t|^{\mathtt{m}} \quad \text{for all } t \in \mathtt{I} \cap [-\delta, \delta]. \tag{4.5}$$

现在，固定 $s \in [1, d)$ 并考虑 (3.2) 中定义的 F_s 的图。给定任意 $r > 0$，我们可以找到一个直径为 r 的立方体 $Q_r \subset \mathbb{R}^d$，使得

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mathbf{U}(\operatorname{graph} F_s) \cap Q_r) = \dim_{\mathrm{H}}(\mathbf{U}(\operatorname{graph} F_s)) = \dim_{\mathrm{H}}(\operatorname{graph} F_s) = s.$$

取 $\mathtt{r}$ 使得

$$0 < \mathtt{r} < \mathtt{c}_1 \min\left\{\delta, \left(\frac{\mathtt{c}_0}{\|F_s\|_{C^{0,\alpha}} \mathtt{C}_{\mathtt{n}}^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\mathtt{n}\alpha - \mathtt{m}}}\right\}^{\mathtt{m}},$$

其中

- $\mathtt{c}_1 := \inf\{|\phi(t)|\colon\ t \in \mathtt{I}\} > 0$,
- α 是满足 (3.1) 的任意指数,
- $\|F_s\|_{C^{0,\alpha}}$ 是 F_s 的 H¨older 范数，如 (3.1) 中所示,
- $\mathtt{n}$ 是满足 $\mathtt{n}\alpha > \mathtt{m}$ 的任意整数。

Let

$$K := \mathbf{U}(\operatorname{graph} F_s) \cap Q_{\mathtt{r}}.$$

我们声称，$(\Gamma \setminus \{0\}) \cap (K - K) = \emptyset$。为导出矛盾，假设存在某个 $\gamma \in (\Gamma \setminus \{0\}) \cap (K - K)$。由于 γ 是 Γ 的一个元素，我们可以将其表示为 $\gamma = \Phi(\mathtt{t})$，其中某个 $\mathtt{t} \in \mathtt{I}$。这个 $\mathtt{t}$ 满足

$$\mathtt{c}_1 |\mathtt{t}|^{\mathtt{m}} \leq |\Phi_1(\mathtt{t})| \leq |\Phi(\mathtt{t})| = |\gamma| \leq \operatorname{diam} K \leq \operatorname{diam} Q_{\mathtt{r}} = \mathtt{r},$$

利用这一点 $\gamma \in K - K$。因此，

$$|\mathtt{t}| < \min\left\{\delta, \left(\frac{\mathtt{c}_0}{\|F_s\|_{C^{0,\alpha}} \mathtt{C}_{\mathtt{n}}^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\mathtt{n}\alpha - \mathtt{m}}}\right\} \tag{4.6}$$

由于我们对 $\mathtt{r}$ 的选择。利用 K 的图结构，我们还可以将 γ 表示为 $\gamma = \mathrm{U}(t-t', F_s(t) - F_s(t'))$，其中 t、$t' \in [0,1]$。由此得到关系

$$z(\mathtt{t}) = (t-t', F_s(t) - F_s(t')).$$

由 (4.6)、(4.5)、(4.3) 以及 F_s 的 H¨older 连续性可得

$$\begin{aligned}\mathtt{c}_0|\mathtt{t}|^{\mathtt{m}} \le |\underline{z}(\mathtt{t})| = |F_s(t) - F_s(t')| &\le \|F_s\|_{C^{0,\alpha}}|t-t'|^{\alpha} \\ &= \|F_s\|_{C^{0,\alpha}}|z_1(\mathtt{t})|^{\alpha} \le \|F_s\|_{C^{0,\alpha}}\mathtt{C}_{\mathtt{n}}^{\alpha}|\mathtt{t}|^{\mathtt{n}\alpha}.\end{aligned}$$

此不等式只有在 $\mathtt{t} = 0$ 时才与 (4.6) 相容。因此 $\gamma = \Phi(0) = 0$，这与 $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$ 的假设矛盾。由于 $\dim_{\mathrm{H}} K = s$ 和 $s \in [1, d)$ 是任意的，我们得出 Γ 是可避开的。□

4.2. 定量部分避开结果。对命题 4.1 的证明稍作修改，即可得到有限型类图曲线的定量部分避开结果。为了表述这一结果，我们需要另一个定义。设 Γ 是一条类图曲线。存在许多种 $\mathtt{L}$、$\mathtt{I}$ 和 $\Phi(t) = (t^{\mathtt{m}}\phi(t)\ \underline{\Phi}(t))$ 的选取，使得满足类图曲线定义中的条件 (i)–(iii)。这些参数化中出现的最小整数 $\mathtt{m}$ 称为 Γ 的子型。我们在附录中略述如下命题的证明：

命题 4.2。设 Γ 是一个在原点处类型为 $\mathtt{N}$ 且子类型为 $\mathtt{m}$的图状曲线。那么对于每个 $s < \min\left\{\frac{\mathtt{N}}{\mathtt{m}}, d - (d-1)_{\mathtt{N}}{}^{\mathtt{m}}\right\}$，存在一个博~~雷尔~~集 $K \subseteq \mathbb{R}^d$，满足 $\dim_{\mathrm{H}} K \ge s$，使得 $(\Gamma \setminus \{0\}) \cap (K - K) = \emptyset$。

取 Γ 为子类型 $\mathtt{m} = 1$的曲线，该结果意味着定理 1.5 中的常数 $\varepsilon_{\mathtt{N}}$ 不能超过$\frac{d-1}{\mathtt{N}}$。

5. Polynomial patterns of infinite type are avoidable

本节中，我们证明定理1.4，该定理断言以下五个陈述彼此等价。我们只证明陈述1 和2的等价性，即 Γ 不可避免，当且仅当 Γ 在原点处为有限型。陈述 2–5 等价是显然的；这留给读者完成。

5.1. 定理 1.4 的证明。固定一条包含原点的多项式曲线 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ 以及一个多项式函数 Φ: $\mathtt{I} \to \mathbb{R}^d$，使得 $\Gamma = \Phi(\mathtt{I})$。不妨设 $\Phi(0) = 0$。如命题 4.1 的证明所述，陈述 1 和 2 之间的等价关系中的一个方向已由定理 1.1 给出，即 2 蕴含 1。因此，我们假设 Γ在原点处是无限型的，并着手证明 Γ 是可避免的；这将说明 1 蕴含 2。为此，我们注意到参数化 Φ 在原点处必定是无限型的，并且由于 Φ 是一个多项式函数，这等价于存在一个单位向量 $\mathtt{u} \in \mathbb{R}^d$ 使得 $\mathtt{u} \cdot \Phi \equiv 0$。令 $\mathrm{U}\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为将 $\mathtt{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ 映射到 $\mathtt{u}$的酉矩阵。固定 $s \in [1, d)$，并令

$$K := \mathbf{U}(\operatorname{graph} F_s),$$

其中，$\operatorname{graph} F_s$ 如 (3.2) 所示。我们声称 $(\Gamma \setminus \{0\}) \cap (K - K) = \emptyset$。为导出矛盾，假设存在 $\gamma \in (\Gamma \setminus \{0\}) \cap (K - K)$，并令 $z = \mathrm{U}^{-1}(\gamma)$。将 $\gamma = \Phi(\mathtt{t})$ 写作

某个 $\mathtt{t} \in \mathtt{I}$，我们有

$$z_1 = \mathtt{e}_1 \cdot z = \mathbf{U}^{-1}\mathtt{u} \cdot z = \mathtt{u} \cdot \mathbf{U}z = \mathtt{u} \cdot \Phi(\mathtt{t}) = 0. \tag{5.1}$$

由于 K 的图结构，我们还有

$$z = \mathbf{U}^{-1}(\gamma) = (t - t', F_s(t) - F_s(t')) \tag{5.2}$$

对于某些 t、$t' \in [0,1]$。结合起来，(5.1) 和 (5.2) 表明 $z = 0$，因此 $\gamma = 0$，这就产生了矛盾。由于 $\dim_{\mathrm{H}} K = s$ 和 $s \in [1, d)$ 是任意的，我们得出结论：Γ 是可避免的。□

5.2. 检验（不可）避免性的条件。如第 1 节所述，不可避免的光滑曲线必须包含原点。将这一观察与定理 1.4 中的陈述 4 和 5 结合起来，我们得到一个简单的判据，用于检验给定的多项式组 $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_d)$ 是否在紧区间 $\mathtt{I}$ 上定义了一条不可避免曲线：Φ 在 $\mathtt{I}$ 上的像不可避免，当且仅当 Φ_1、…、Φ_d 线性无关，且在 $\mathtt{I}$ 中有公共零点。以下示例通过 $d = 3$ 对此加以说明：

- $\Gamma = \{(t^2 - 1, t^3 + 5t - 6, 2t^3 - t^2 - 1)\colon\ t \in [0,1]\}$ 是不可避免的。参数化多项式线性无关，并在 $t = 1$ 处取值为零。
- $\Gamma = \{(t-2, t^2-2t, t^2+t-6)\colon\ t \in [0,1]\}$ 是可避免的。参数化多项式线性相关。
- $\Gamma = \{(t+1, t^2-1, t^3+2t+1)\colon\ t \in [0,1]\}$ 是可避免的。参数化多项式没有公共零点。

一般而言，可以通过例如使用欧几里得算法计算多项式的最大公因式，然后使用斯图姆定理确定该因式是否具有实零点，来检查多项式之间是否存在一个共同零点。

6. Configuration integral: Proof of Proposition 2.2

在本节中，我们证明命题 2.2。令 $\mathcal{I}_0 := \mathcal{I}[\mu, \pi]/2 > 0$，其中 $\mathcal{I}[\mu, \pi]$ 如 (2.5) 所示。那么存在 $\delta_0 > 0$ 使得

$$\Big| \int (\mu * \psi_\delta) * \pi \, d\mu \Big| \geq \mathcal{I}_0 \quad \text{for all } \delta \in (0, \delta_0]. \tag{6.1}$$

由于 μ 是一个概率测度，性质 (6.1) 意味着，对于每个 $\delta \in$ (0,{v3)，都存在一点 $x_\delta \in$ s upp μ 使得

$$|(\mu * \psi_\delta) * \pi(x_\delta)| \geq \mathcal{I}_0.$$

集合 $\pi_\delta := \pi * \psi_\delta$。由于 $(\mu * \psi_\delta) * \pi = \mu * \pi_\delta$，根据卷积的性质，我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 \leq |\mu * \pi_\delta(x_\delta)| &= \Big| \int \pi_\delta(x_\delta - y) d\mu(y) \Big| \\ &= \int_{E_1} |\pi_\delta(x_\delta - y)| d\mu(y) + \int_{E_2} |\pi_\delta(x_\delta - y)| d\mu(y), \end{aligned} \tag{6.2}$$

其中

$$\begin{aligned} E_1 = E_1(\delta) &:= \big\{y\colon\ \operatorname{dist}(x_\delta - y, \operatorname{supp} \pi) > \sqrt{\delta}\big\}, \\ E_2 = E_2(\delta) &:= \big\{y\colon\ \operatorname{dist}(x_\delta - y, \operatorname{supp} \pi) \leq \sqrt{\delta}\big\}. \end{aligned}$$

我们断言，当 $\delta \to 0$ 时，对 E_1 的积分趋于零。事实上，固定 $z := x_\delta - y$，使得 dist(z, supp π) $> \sqrt{\delta}$。那么对每个整数 N，都存在 $C_N < \infty$，使得

$$|\pi_\delta(z)| \le \delta^{-d} \int |\psi(\delta^{-1}(z-w))| d\pi(w) \le C_N \delta^{-d} \int (\delta^{-1}|z-w|)^{-N} d\pi(w) \le C_N \|\pi\| \delta^{\frac{N}{2}-d};$$

这里，我们利用了 ψ的快速衰减。注意到 $\|\pi\| < \infty$ 并取 $N > 2(d+1)$ 和δ 充分小，可得 $|\pi_\delta(z)| \le \delta$。被积函数的这个逐点界意味着

$$\int_{E_1} |\pi_\delta(x_\delta - y)| d\mu(y) \le \delta. \tag{6.3}$$

现在，假设 $\delta < \mathfrak{I}_0/2$ 并将 (6.3) 代入 (6.2)，我们得到

$$\int_{E_2} |\pi_\delta(x_\delta - y)| d\mu(y) \ge \frac{\mathfrak{I}_0}{2} > 0.$$

因此，对每个充分小的 δ，存在 $y_\delta \in \operatorname{supp} \mu$，使得

$$\operatorname{dist}(x_\delta - y_\delta, \operatorname{supp} \pi) \le \sqrt{\delta}. \tag{6.4}$$

由于 supp(μ) $\times$ supp(μ) 是 $\mathbb{R}^{2d}$中的一个紧集，存在一列 δ的取值，使得 (x_δ, y_δ) 收敛到点 (x, y) $\in$supp(μ) $\times$supp(μ)。由 (6.4) 可知，必有$x - y \in \operatorname{supp} \pi$，命题的结论随之得出。□

7. Energy and spectral gap: Proof of Proposition 2.3

本节的目标是证明命题 2.3。要完成此证明，关键在于更深入地理解测度 $\pi = \pi[\Phi;\ j, c]$ 的性质。这些测度是为处于标准形式的函数 $\Phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$ 定义的，我们尤其关注它们对相应参数 j 和 c 的依赖关系。我们特别关注 π 在欧几里得球上赋予的质量的增长率，以及其傅里叶变换 $\widehat{\pi}$ 的衰减。前三个小节汇总了主要工具。利用这些工具，我们将在小节 7.4 中完成命题 2.3 的证明。

7.1. 常数的选取。

设 $\Phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$ 是一个处于标准形式的光滑函数，它在原点处具有类型 $\mathtt{N}$ 的消失。小节 2.2.2 中导出式 (2.9) 和 (2.10) 的讨论确定了两个常数 $\mathtt{K_N} := 2\mathtt{N}!$ 和 $\mathtt{J}_0 = \mathtt{J}_0(\Phi)$，其中只有前者是可容许的。这两个常数对后续分析十分重要：命题 2.3 中出现的可容许常数 $\mathtt{L_N}$ 和不可容许常数 $\mathtt{J}$ 将分别依赖于 $\mathtt{K_N}$ 和 $\mathtt{J}_0$。在本节余下部分中，$\mathtt{L_N}$ 始终表示一个可容许常数，$\mathtt{J}$ 始终表示一个不可容许常数，不过它们的具体取值可能因出现位置不同而变化。特别地，$\mathtt{L_N}$ 始终是 $\mathtt{K_N}$ 的一个较大倍数。这个乘法因子可以依赖于 d、$\mathtt{N}$，以及式 (2.6) 中引入、用于定义 μ_δ 的施瓦茨函数 ψ。

7.2. π的球条件。

引理 7.1. 固定任意 $\mathtt{L_N} \ge 2d\mathtt{K_N}$，其中 $\mathtt{K_N}$ 是小节 7.1 中定义的常数。那么，对于原点处（类型为 $\mathtt{N}$）标准形式的每个 Φ，我们有

$$\inf\Big\{\pi(B(0;r))\colon \pi = \pi[\Phi; j, c],\ j \ge \mathtt{J}_0(\Phi),\ c \in \Big(0, \frac{r}{\mathtt{L_N}}\Big]\Big\} \ge \frac{r}{\mathtt{L_N}} \quad \textit{for every } r \in (0,1]. \tag{7.1}$$

证明. T 条件 (2.9) 与 $\ell = 0$ 结合，对于所有 $j \geq \mathtt{J}_0$ 和 $s \in [0,1]$ 给出界限。 d

$$|\Phi^j(s)| \leq \sum_{i=1}^{d} 2^{\mathtt{n}_i j} |\Phi_i(2^{-j}s)| \leq \sum_{i=1}^{d} 2^{\mathtt{n}_i j} \mathtt{K}_{\mathtt{N}} (2^{-j}s)^{\mathtt{n}_i} \leq \mathtt{K}_{\mathtt{N}} \sum_{i=1}^{d} s^{\mathtt{n}_i} \leq \mathtt{K}_{\mathtt{N}} d s \leq \frac{\mathtt{L}_{\mathtt{N}}}{2} s. \tag{7.2}$$

上面公式中的第四个不等式使用了关系 $\mathtt{n}_i \geq 1$，这是 (2.3) 的推论。这个上界使我们能够如下估计 $\pi(B(0;r))$。对于 $r \in (0,1]$ 和 $c \in (0, r/\mathtt{L}_{\mathtt{N}}]$，我们有

$$\begin{aligned} \pi(B(0;r)) = \int_c^1 \mathbf{1}_{B(0;r)}(\Phi^j(s)) ds &= |\{s \in [c,1] \colon |\Phi^j(s)| \leq r\}| \\ &\geq \left| \left\{ s \in [c,1] \colon \frac{\mathtt{L}_{\mathtt{N}}}{2} s \leq r \right\} \right| \quad (\text{from (7.2)}) \\ &\geq \frac{2r}{\mathtt{L}_{\mathtt{N}}} - c \geq \frac{r}{\mathtt{L}_{\mathtt{N}}}, \end{aligned}$$

其中， $|E|$ 表示 E的勒贝格测度。这就得到了所需的结论 (7.1)。 □

π 上的球条件允许对涉及π的某些测度卷积进行大小估计。特别是，下面的推论将有助于证明命题 2.3，因为它给出了构型积分 $\mathcal{I}$的被积函数的逐点界。回顾定义 $\mu_h = \mu * \psi_h$（见 (2.8)），其中 ψ 如 (2.6) 所示。

推论 7.2. 设 $\mathtt{a} > 0$ 为一个绝对常数。存在一个可容许常数 $\mathtt{L}_{\mathtt{N}} > 0$，它仅依赖于 $\mathtt{N}$、 $\mathtt{a}$ 以及在 (2.6) 中选取的辅助函数 ψ ，并具有如下性质：设 μ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的博雷尔测度， $x_0 \in \mathbb{R}^d$ 是一点，使得

$$\inf_{r \in (0,1]} \frac{\mu(B(x_0;r))}{r^d} \geq \mathtt{a}. \tag{7.3}$$

那么，对于每个处于标准形式（在原点处为 $\mathtt{N}$ 型）的 Φ ，我们有

$$\mu_h * \pi(x_0) \geq \mathtt{L}_{\mathtt{N}}^{-1} h \quad \textit{for all } \pi = \pi[\Phi; j, h^2] \textit{ with } j \geq \mathtt{J}_0 \textit{ and } h \in (0, \mathtt{L}_{\mathtt{N}}^{-1}]. \tag{7.4}$$

证明。固定一个满足 (7.3) 的博雷尔测度 μ 和一点 x_0。根据 (2.7)，函数 ψ 满足 $\psi(0) = 1$。因此，存在一个绝对常数 $\mathtt{b} > 0$，使得对 $|x| \leq \mathtt{b}$ 有 $\psi(x) \geq 1/2$。由于 ψ 非负，故

$$\mu_h(y) = h^{-d} \int \psi(h^{-1}(y-z)) d\mu(z) \geq \frac{1}{2h^d} \mu(B(y; \mathtt{b}h)).$$

若 y 是满足 $|x_0 - y| \leq \mathtt{b}h/2$ 的任意一点，则 $B(x_0; \mathtt{b}h/2) \subseteq B(y; \mathtt{b}h)$。将这一包含关系代入上述估计，得到

$$\mu_h(y) \geq \frac{1}{2h^d} \mu(B(x_0; \mathtt{b}h/2)) \geq \mathtt{c} \quad \text{for all } y \in B(x_0; \mathtt{b}h/2),$$

其中 $\mathtt{c} \colon = \mathtt{a}\mathtt{b}^d 2^{-d-1} > 0$。假设 $h > 0$ 足够小，使得 $h^2 \leq (\mathtt{b}h/2)/(2d\mathtt{K}_{\mathtt{N}})$，即 $h \leq \mathtt{b}/(4d\mathtt{K}_{\mathtt{N}})$。那么，引理 7.1适用，其中的量 c、 r和 $\mathtt{L}_{\mathtt{N}}$ 分别被h^2、 $\mathtt{b}h/2$和 $2d\mathtt{K}_{\mathtt{N}}$所替换。如果 π 的形式为 $\pi = \pi[\Phi;\ j$、$h^2]$，则由（7.1）可得

$$\mu_h * \pi(x_0) = \int \mu_h(x_0 - y) d\pi(y) \geq \int_{B(0; \mathtt{b}h/2)} \mu_h(x_0 - y) d\pi(y)$$

$$\geq \mathtt{c}\pi(B(0;\mathtt{b}h/2)) \geq \frac{\mathtt{bc}}{4d\mathtt{K_N}}h \geq \mathtt{L_N}^{-1}h,$$

只要满足 $\mathtt{L_N} \geq 4d\mathtt{K_N}/(\mathtt{bc})$。还假设 $\mathtt{L_N} \geq 4d\mathtt{K_N}/\mathtt{b}$，则上述界对任意 $h \in (0, \mathtt{L_N}^{-1}]$ 都成立。这就证明了 (7.4)。□

7.3. 驻相法的统一方法。我们的下一个任务是研究 $\widehat{\pi}(\xi)$ 的行为。下文的引理 7.4 给出了这一信息，我们将使用基本的驻相法技巧来证明该引理。下面这个初等引理将简化论证。

引理 7.3。固定任意常数 $\mathtt{a} \in (0,1]$ 以及任意一组非负实数 $\{x_1, \dots, x_n\}$，且它们不全为零。那么存在 $k \in \{1, \dots, n\}$ 使得 $x_k \neq 0$ 并且

$$\frac{x_i}{x_k} \leq \mathtt{a}^{-n} \quad \textit{if } 1 \leq i \leq k, \qquad \frac{x_i}{x_k} \leq \mathtt{a} \quad \textit{if } k < i \leq n.$$

证明。我们对 n 进行归纳。基础情形 $n = 1$ 显然成立。假设 $n \geq 2$，并且该引理在用 $n-1$ 替代 n时成立。对 $\{x_1, \dots x_{n-1}\}$应用归纳假设，取一个指标 $k_0 \in \{1, \dots, n-1\}$，使得 $x_{k_0} \neq 0$ 且若 $1 \leq i \leq k_0$则 $x_i/x_{k_0} \leq \mathtt{a}^{-n+1}$，若 $k_0 < i \leq n-1$则$x_i/x_{k_0} \leq \mathtt{a}$。若 $x_n/x_{k_0} \leq \mathtt{a}$，则取$k = k_0$即可得到引理的结论。假设 $x_n/x_{k_0} \geq \mathtt{a}$。那么对于 $i < n$，有

$$\frac{x_i}{x_n} = \frac{x_i}{x_{k_0}} \cdot \frac{x_{k_0}}{x_n} \leq \mathtt{a}^{-n+1}\mathtt{a}^{-1} = \mathtt{a}^{-n},$$

且引理的结论对 $k = n$ 成立。 □

引理7.4.存在一个可容许常数 $\mathtt{L_N}$，具有如下性质：对于每个函数 Φ：$[0,1] \to \mathbb{R}^d$，处于标准形式且在原点处为 $\mathtt{N}$型消失，都存在一个取决于 Φ 的（不可容许）指标 $\mathtt{J} \geq \mathtt{J}_0(\Phi)$，使得

$$\sup\{|\widehat{\pi}(\xi)| : \pi = \pi[\Phi; j, c],\, j \geq \mathtt{J}, c \in (0,1]\} \leq \mathtt{L_N}(1+|\xi|)^{-1/\mathtt{N}} \quad \textit{for all } \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{7.5}$$

证明。固定形如 $\pi = \pi[\Phi$的 π； j、 $c]$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$。由 (2.13) 可得

$$\widehat{\pi}(\xi) = \int e(x \cdot \xi) d\pi(x) = \int_c^1 e(\xi \cdot \Phi^j(s)) ds, \quad \text{where } e(t) := e^{-2\pi i t}. \tag{7.6}$$

表示 $\widehat{\pi}(\xi)$ 的积分是调和分析中广泛研究的标量振荡积分。我们的目标是对振荡积分应用著名的驻相法（参见 [43, 第八章]），从而得到所需的界（7.5）。在此过程中，务必跟踪隐含常数，以确保其关于参数 j和 c 的一致性；具体步骤如下。

我们按照以下顺序选取一个小常数 $\mathtt{a} \in (0,1]$ 取决于 $\mathtt{K_N}$），以及一个大整数 $\mathtt{J} \geq \mathtt{J}_0$（取决于 $\mathtt{a}$ 和 Φ），并使其满足这些约束条件。

$$d\mathtt{K_N}\mathtt{a} \leq \frac{1}{8}, \qquad d\mathtt{a}^{-d}\|\Phi\|_{C^{\mathtt{N}}} 2^{-\mathtt{J}} \leq \frac{1}{8}. \tag{7.7}$$

这里，$\|\cdot\|_{C^n}$ 指的是空间 n 次连续可微函数 $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}^d$ 上的标准范数，即

$$\|f\|_{C^n} := \sum_{\ell=0}^{n} \sup_{t\in[0,1]} |f^{(\ell)}(t)|.$$

现在我们假设 $j \geq \mathtt{J}$。根据引理7.3，存在一个指标 $k\in\{1,\dots,d\}$，其取决于 $\mathtt{a}$ 和 ξ，使得

$$\xi_k \neq 0, \qquad \frac{|\xi_i|}{|\xi_k|} \leq \mathtt{a}^{-d} \quad \text{if } 1\leq i\leq k, \qquad \frac{|\xi_i|}{|\xi_k|} \leq \mathtt{a} \quad \text{if } k<i\leq d. \tag{7.8}$$

我们通过公式定义函数 $\varphi=\varphi_k$

$$\varphi(s) := \frac{\xi}{\xi_k}\cdot\Phi^j(s) = \xi_k^{-1}\sum_{i=1}^{d} 2^{\mathtt{n}_i j}\xi_i\Phi_i(2^{-j}s) \quad \text{for } s\in[c,1], \tag{7.9}$$

从而 (7.6) 化为

$$\widehat{\pi}(\xi) = \int_c^1 e(\xi_k\varphi(s))ds. \tag{7.10}$$

我们声称，由于我们在 (7.7) 中对 $\mathtt{a}$ 和 $\mathtt{J}$的选择，振荡积分 (7.10) 中相位函数 φ 的 $\mathtt{n}_k^{\text{th}}$ 阶导数有一个绝对正下界。为验证这一点，我们首先注意到

$$\varphi^{(\mathtt{n}_k)}(s) = \xi_k^{-1}\sum_{i=1}^{d} 2^{(\mathtt{n}_i-\mathtt{n}_k)j}\xi_i\Phi_i^{(\mathtt{n}_k)}(2^{-j}s) = \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III},$$

其中

$$\mathrm{I} := \Phi_k^{(\mathtt{n}_k)}(2^{-j}s), \quad \mathrm{II} := \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\xi_i}{\xi_k}2^{(\mathtt{n}_i-\mathtt{n}_k)j}\Phi_i^{(\mathtt{n}_k)}(2^{-j}s), \quad \mathrm{III} := \sum_{i=k+1}^{d}\frac{\xi_i}{\xi_k}2^{(\mathtt{n}_i-\mathtt{n}_k)j}\Phi_i^{(\mathtt{n}_k)}(2^{-j}s).$$

这里，任何空和都视为零。注意到 $2^{-j}s\in(0,2^{-\mathtt{J}_0}]$，我们利用 (2.10) 中的左侧不等式对 I 作下界估计，得到 $|\mathrm{I}|\geq\frac{1}{2}$。指数 $\mathtt{n}_i$ 的严格单调性 (2.3)、指标 k 的选取 (7.8) 以及条件 (2.9) 可用于对 II 和 III 作上界估计。综合这些性质可得

$$|\mathrm{II}| \leq \sum_{i=1}^{k-1}\mathtt{a}^{-d}2^{-j}|\Phi_i^{(\mathtt{n}_k)}(2^{-j}s)| \leq d\mathtt{a}^{-d}2^{-\mathtt{J}}\|\Phi\|_{C^{\mathtt{N}}} \leq \frac{1}{8},$$

$$|\mathrm{III}| \leq \sum_{i=k+1}^{d}\mathtt{a}2^{(\mathtt{n}_i-\mathtt{n}_k)j}\mathtt{K}_{\mathtt{N}}(2^{-j}s)^{(\mathtt{n}_i-\mathtt{n}_k)} \leq d\mathtt{a}\mathtt{K}_{\mathtt{N}} \leq \frac{1}{8},$$

其中两个不等式的最后一步均由 (7.7) 得出。因此，我们得到

$$|\varphi^{(\mathtt{n}_k)}(s)| \geq |\mathrm{I}| - |\mathrm{II}| - |\mathrm{III}| \geq \frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{for all } s\in[c,1]. \tag{7.11}$$

这个下界对于应用驻相法至关重要，而该方法分两种情况进行。

情况 1：首先假设 $\mathtt{n}_k \geq 2$。利用范德科普特引理（参见 [43, 第 VIII 章 §1.2，命题 2]），可以找到一个绝对常数（因此也是可采纳的常数） $c_{\mathtt{n}_k} \geq 1$，使得

$$|\widehat{\pi}(\xi)| = \Big| \int_c^1 e^{-2\pi i \xi_k \varphi(s)} ds \Big| \leq c_{\mathtt{n}_k} |\xi_k|^{-1/\mathtt{n}_k}. \tag{7.12}$$

性质（7.8）意味着

$$|\xi| \leq |\xi_1| + \cdots + |\xi_d| \leq (k\mathtt{a}^{-d} + (d-k)\mathtt{a})|\xi_k| \leq d\mathtt{a}^{-d}|\xi_k|.$$

将此代入(7.12)，并同时考虑平凡估计 $|\widehat{\pi}(\xi)| \leq \|\pi\| \leq 1$，我们得到

$$\begin{aligned} |\widehat{\pi}(\xi)| \leq \min\Big\{1, c_{\mathtt{n}_k}\Big(\frac{\mathtt{a}^d}{d}|\xi|\Big)^{-1/\mathtt{n}_k}\Big\} &\leq 2c_{\mathtt{n}_k}\Big(\frac{\mathtt{a}^d}{d}\Big)^{-1/\mathtt{n}_k}(1+|\xi|)^{-1/\mathtt{n}_k} \\ &\leq 2c_{\mathtt{n}_k} d\mathtt{a}^{-d}(1+|\xi|)^{-1/\mathtt{N}} \leq \mathtt{L}_{\mathtt{N}}(1+|\xi|)^{-1/\mathtt{N}} \end{aligned} \tag{7.13}$$

其中 $\mathtt{L}_{\mathtt{N}} = 2d\mathtt{a}^{-d}$ 最大值$\{c_2, \ldots, c_{\mathtt{N}}\}$。

情形2：接下来假设 $\mathtt{n}_k = 1$。鉴于 (2.3)，这意味着 $k = 1$。因此，该性质意味着 (7.8)

$$|\xi| \leq |\xi_1| + \cdots + |\xi_d| \leq (1 + (d-1)\mathtt{a})|\xi_1| \leq d|\xi_1|. \tag{7.14}$$

由（7.9）、（2.9）、（2.10）和（7.7），我们有

$$\begin{aligned} |\varphi''(s)| = \Big|\sum_{i=1}^d 2^{(\mathtt{n}_i-2)j}\frac{\xi_i}{\xi_1}\Phi_i''(2^{-j}s)\Big| &\leq 2^{-j}\|\Phi\|_{C^{\mathtt{N}}} + \sum_{i=2}^d 2^{(\mathtt{n}_i-2)j}\mathtt{a}\mathtt{K}_{\mathtt{N}}(2^{-j}s)^{\mathtt{n}_i-2} \\ &\leq 2^{-\mathtt{J}}\|\Phi\|_{C^{\mathtt{N}}} + d\mathtt{a}\mathtt{K}_{\mathtt{N}} \leq 2d\mathtt{K}_{\mathtt{N}} \leq \mathtt{L}_{\mathtt{N}} \end{aligned} \tag{7.15}$$

对于 $\mathtt{L}_{\mathtt{N}}$的一个合适选择。结合 $|\varphi'|$ 上的下界 (7.11) 和 $|\varphi''|$ 上的上界 (7.15)，通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned} |\widehat{\pi}(\xi)| = \Big|\int_c^1 e(\xi_1\varphi(s))ds\Big| &= \Big|\int_c^1 \frac{1}{2\pi\xi_1\varphi'(s)}\cdot\frac{d}{ds}[e(\xi_1\varphi(s))]ds\Big| \\ &= \frac{1}{2\pi|\xi_1|}\Big|\frac{e(\xi_1\varphi(s))}{\varphi'(s)}\Big]_c^1 + \int_c^1 \frac{\varphi''(s)}{(\varphi'(s))^2}e(\xi_1\varphi(s))ds\Big| \leq \frac{\mathtt{L}_{\mathtt{N}}}{|\xi_1|} \end{aligned}$$

对于某个（更大的） $\mathtt{L}_{\mathtt{N}}$取值。我们还有平凡界 $|\widehat{\pi}(\xi)| \leq \|\pi\| \leq 1$。这些估计连同（7.14）表明，

$$|\widehat{\pi}(\xi)| \leq \min\Big\{1, \frac{d\mathtt{L}_{\mathtt{N}}}{|\xi|}\Big\} \leq \mathtt{L}_{\mathtt{N}}(1+|\xi|)^{-1} \leq \mathtt{L}_{\mathtt{N}}(1+|\xi|)^{-1/\mathtt{N}}, \tag{7.16}$$

其中，这里允许 $\mathtt{L}_{\mathtt{N}}$ 的值在前两次出现之间发生变化。结合两种情形的结论（7.13）和（7.16），即可完成（7.5）的证明。□

7.4. 命题 2.3 的证明。我们先定义可容许常数 $\mathtt{L}_{\mathtt{N}}$。令 $\mathtt{M}_1$为推论 7.2 中的可容许常数（在该推论中记作 $\mathtt{L}_{\mathtt{N}}$），应用时取

$$\mathtt{a} = \frac{1}{2}\cdot 15^{-d}|B(0;1)|; \tag{7.17}$$

此处， $|\cdot|$ 指勒贝格测度。令 $\mathtt{M}_2$ 为引理7.4 中的可容许常数（在该引理中也记作 $\mathtt{L}_\mathtt{N}$）。我们设

$$\mathtt{L}_\mathtt{N} := \max\{\mathtt{M}_1, \mathtt{M}_2, 2\pi|B(0;1)| + 2 + 2\gamma_\mathtt{N}^{-1}\},$$

其中 $\gamma_\mathtt{N}$ 是（2.15）中定义的常数。

接下来我们固定一个处于标准形式的函数 $\Phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$，它在原点处按类型 $\mathtt{N}$ 消失，并定义不可容许整数 $\mathtt{J}(\Phi)$。为此，我们可以直接使用引理7.4中的整数 $\mathtt{J}$。

现在，令 $\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}$ 为满足(2.16) 的任意常数的选取，并令 μ 为任意博雷尔概率测度 μ 定义在 $[0,1]^d$ 上且满足(2.17)。我们需要证明 (2.18)成立。为此，固定 $\pi = \pi[\Phi;\ j, \mathtt{A}^{-6d}]$ 满足 $j \geq \mathtt{J}$，并固定 $\delta \in (0, \mathtt{A}^{-3d}]$。

$$\int \mu_\delta * \pi \, d\mu = \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2,$$

其中

$$\mathbb{I}_1 := \int \mu_{\mathtt{A}^{-3d}} * \pi \, d\mu, \qquad \mathbb{I}_2 := \int (\mu_\delta - \mu_{\mathtt{A}^{-3d}}) * \pi \, d\mu.$$

我们声称

$$\mathbb{I}_1 \geq \frac{1}{2}\mathtt{L}_\mathtt{N}^{-1}\mathtt{A}^{-3d} \quad \text{and} \quad |\mathbb{I}_2| \leq \mathtt{L}_\mathtt{N}\mathtt{A}^{-4d}. \tag{7.18}$$

这一点，与我们对 (2.16) 中 $\mathtt{A}$ 和 $\mathtt{L}_\mathtt{N} \geq 1$ 的假设结合起来，将推出 (2.18).

我们从 $\mathbb{I}_1$ 开始。利用 (7.17) 中定义的常数 $\mathtt{a}$，令

$$\mathcal{G} = \{x \in \operatorname{supp}\mu\colon (7.3) \text{ holds with } x_0 = x\}.$$

在推论 7.2 中令 $h = \mathtt{A}^{-3d}$，得到逐点下界

$$\mu_{\mathtt{A}^{-3d}} * \pi(x) \geq \mathtt{L}_\mathtt{N}^{-1}\mathtt{A}^{-3d} \quad \text{for every } x \in \mathcal{G},$$

因此

$$\mathbb{I}_1 \geq \int_\mathcal{G} \mu_{\mathtt{A}^{-3d}} * \pi \, d\mu \geq \mathtt{L}_\mathtt{N}^{-1}\mathtt{A}^{-3d}\mu(\mathcal{G}).$$

因此，为了得到 (7.18) 中所述的 $\mathbb{I}_1$ 的下界，只需证明 $\mu(\mathcal{G}) \geq 1/2$。对每个 $x \in \mathcal{G}^c := [0,1]^d \setminus \mathcal{G}$，根据定义，存在一个半径为 $r_x \in (0,1]$、中心为 x 的球 B_x，使得

$$\mu(B_x) \leq \mathtt{a} r_x^d \leq \mathtt{c}|B_x|, \quad \text{where } \mathtt{c} := \frac{\mathtt{a}}{|B(0;1)|} = \frac{1}{2}\cdot 15^{-d}. \tag{7.19}$$

球 $\{B_x\colon x \in \mathcal{G}^c\}$ 显然覆盖 $\mathcal{G}^c$，且位于 $[-1,2]^d$内。维塔利覆盖引理，[11, 引理 1.9], 给出了一个可数集 $X \subseteq \mathcal{G}^c$，使得子集族 $\{B_x\colon x \in X\}$仍覆盖 $\mathcal{G}^c$，而它们的放大版本$\{\frac{1}{5}B_x\colon x \in X\}$则两两不相交。此处， mB_x 表示一个与 B_x 中心相同、半径为其 m 倍的球。这就得出

$$\begin{aligned} 1 - \mu(\mathcal{G}) = \mu([0,1]^d \setminus \mathcal{G}) &\leq \sum_{x\in X} \mu(B_x) \leq \mathtt{c}\sum_{x\in X}|B_x| \\ &= 5^d\mathtt{c}\sum_{x\in X}\left|\frac{1}{5}B_x\right| = 5^d\mathtt{c}\left|\bigcup_{x\in X}\frac{1}{5}B_x\right| \leq 5^d\mathtt{c}|[-1,2]^d| = 15^d\mathtt{c} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因此， $\mu(\mathcal{G}) \geq 1/2$，从而完成对 $\mathbb{I}_1$ 的估计。

现在我们转向 $\mathbb{I}_2$。由Plancherel定理，得到

$$|\mathbb{I}_2| \leq \int |\widehat{\mu}(\xi)|^2 |\widehat{\psi}(\delta\xi) - \widehat{\psi}(\mathtt{A}^{-3d}\xi)||\widehat{\pi}(\xi)| d\xi.$$

我们将积分区域分为三部分来估计该积分：低频$\{|\xi| \leq \mathtt{A}\}$、中频 $\{\mathtt{A} \leq |\xi| \leq \mathtt{B}\}$和高频 $\{|\xi| \geq \mathtt{B}\}$。先考虑低频部分，利用平凡界 $\|\widehat{\mu}\|_\infty \leq 1$ 和 $\|\widehat{\pi}\|_\infty \leq 1$ ，以及(2.7)，得到

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\leq \mathtt{A}} |\widehat{\mu}(\xi)|^2 |\widehat{\psi}(\delta\xi) - \widehat{\psi}(\mathtt{A}^{-3d}\xi)||\widehat{\pi}(\xi)| d\xi &\leq \int_{|\xi|\leq \mathtt{A}} \pi[(\delta|\xi|)^2 + (\mathtt{A}^{-3d}|\xi|)^2] d\xi \\ &\leq 2\pi |B(0;\mathtt{A})| (\mathtt{A}^{-3d}\mathtt{A})^2 \leq 2\pi |B(0;1)| \mathtt{A}^{-4d}.\end{aligned}$$

我们利用(2.17)中的谱隙假设来控制中频部分，即

$$\int_{|\xi|\in[\mathtt{A},\mathtt{B}]} |\widehat{\mu}(\xi)|^2 |\widehat{\psi}(\delta\xi) - \widehat{\psi}(\mathtt{A}^{-3d}\xi)||\widehat{\pi}(\xi)| d\xi \leq 2 \int_{|\xi|\in[\mathtt{A},\mathtt{B}]} |\widehat{\mu}(\xi)|^2 d\xi \leq 2\mathtt{A}^{-4d};$$

这里，我们还用到了 $\|\psi\|_\infty = 1$（由(2.7)得出）。接下来需要估计高频部分。为此，我们使用引理7.4、定义(2.14)和(2.15)、(2.17)中的能量条件，以及(2.16)中关于 $\mathtt{B}$ 的假设。于是得到

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\geq \mathtt{B}} |\widehat{\mu}(\xi)|^2 |\widehat{\psi}(\delta\xi) - \widehat{\psi}(\mathtt{A}^{-3d}\xi)||\widehat{\pi}(\xi)| d\xi &\leq 2\mathtt{L}_\mathtt{N} \int_{|\xi|\geq \mathtt{B}} |\widehat{\mu}(\xi)|^2 |\xi|^{-\frac{1}{\mathtt{N}}} d\xi \\ &\leq 2\mathtt{L}_\mathtt{N} \mathtt{B}^{-\frac{1}{2\mathtt{N}}} \gamma_\mathtt{N}^{-1} I_{\sigma_\mathtt{N}}(\mu) \leq 2\mathtt{L}_\mathtt{N} \mathtt{B}^{-\frac{1}{2\mathtt{N}}} \gamma_\mathtt{N}^{-1} \mathtt{C} \leq 2\gamma_\mathtt{N}^{-1} \mathtt{A}^{-4d}.\end{aligned}$$

现在，对三个部分的界求和，并回顾我们对 $\mathtt{L}_\mathtt{N}$ 的选择，便可得出 $|\mathbb{I}_2| \leq \mathtt{L}_\mathtt{N}\mathtt{A}^{-4d}$，如所述。至此证明完成。□

8. Constructing a suitable measure: Proof of Proposition 2.4

本节的目标是证明命题 2.4，该命题确立了某个测度的存在性。在开始构造这一测度之前，我们先暂停一下，汇集一些必要的工具。

8.1. 测度论预备知识。设 $\vec{n} = (n_1, \dots, n_d)$是一个具有正整数项的向量，并回顾(2.19)中给出的 $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*[\vec{n}]$ 的定义。这里，我们不假设 $\vec{n}$ 的各项互不相同或已排序。本小节的目的是利用集合 $\mathcal{D}^*$ 定义“豪斯多夫内容”的各向异性二进制版本，并建立它与豪斯多夫维数的标准概念之间的联系。尽管我们选择从第一性原理出发，但利用度量空间中豪斯多夫维数的更广泛框架，也可以很好地理解这些联系；参见 [33, 第 4] 章。这一观点将在第 9 节中描述。本小节中陈述的引理对于专家而言或许并不令人意外。然而，它们并未以我们所需的形式出现在标准教材中，因此我们在附录中给出其证明。

我们的豪斯多夫内容版本定义如下：设 $E \subseteq \mathbb{R}^d$ 和 $s \geq 0$。则

$$\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(E) := \inf\Big\{ \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \ell(Q)^s \colon \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{D}^* \text{ and } E \subseteq \bigcup \mathcal{Q} \Big\},$$

其中 $\ell(Q)$ 如 (2.21) 中所述。我们尤其关注能够保证 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(E)$为正的 E 和 s 所满足的条件。令

$$\mathtt{N} = \mathtt{N}[\vec{n}] := \max\{n_1, \dots, n_d\} \qquad \text{and} \qquad \mathtt{S} = \mathtt{S}[\vec{n}] := n_1 + \dots + n_d. \tag{8.1}$$

以下引理回答了这一问题，并确立了 $\dim_{\mathrm{H}} E$ 与 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(E)$ 之间的基本联系。

Lemma8.1. 如果 $E \subseteq \mathbb{R}^d$ 和 $0 \le s < \mathtt{S} -$ （$d -$ 维$_{\mathrm{H}} E$）$\mathtt{N}$，那么 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}$（$E$）$> 0$。

我们还需要 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}$的一个受限版本，即

$$\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*_J}(E) := \inf\Big\{ \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \ell(Q)^s \colon \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{D}^*_J \text{ and } E \subseteq \bigcup \mathcal{Q} \Big\},$$

其中，$\mathcal{D}^*_J$ 如式 (2.20) 所示。根据定义，显然 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(E) \le \mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*_J}(E)$。下一个引理指出，当 E 包含在 $\mathcal{D}^*_J$中的某个元素内时，这个不等式可以反向。此结果有助于定位命题陈述中提及的二进盒 $\mathtt{Q}$ 。

引理 8.2. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是对于某个 J 而言的 $\mathcal{D}^*_J$ 中某个元素的子集。则 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(E) = \mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*_J}(E)$ 对所有 $s \ge 0$ 成立。

接下来，我们记录一个适用于 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}$ 的Frostman 引理版本。我们将使用它来构造命题陈述中所引用的测度 ν 。

引理 8.3. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是一个紧集，并且 $s \ge 0$。那么存在一个支撑于 E 上的博雷尔测度 ϑ ，使得 $\|\vartheta\| \ge \mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(E)$ 且 $\vartheta(Q) \le \ell(Q)^s$ 对每个 $Q \in \mathcal{D}^*$ 都成立。

我们的最后一个引理建立了 $\mathcal{D}^*$ 的 Frostman条件与能量积分有限性之间的联系。这将帮助我们验证，放大测度 $\mu := \nu^{\mathtt{Q}}$ 满足（2.17）中的能量条件。

引理 8.4。存在一个递减函数 $\mathtt{E}\colon (0,\infty) \to [1,\infty)$，它仅依赖于 d，并具有以下性质：对于任意常数 $L \ge 0$ 以及任意指数 σ, s，若满足 $\sigma \in (0,d)$ 和 $s > \sigma + \mathtt{S} - d$，则有

$$\sup\Big\{ I_\sigma(\vartheta) \colon \operatorname{supp}\vartheta \subseteq [0,1]^d,\ \|\vartheta\| \le 1,\ \sup_{Q\in\mathcal{D}^*} \frac{\vartheta(Q)}{\ell(Q)^s} \le L \Big\} \le L\mathtt{E}(s-\sigma-\mathtt{S}+d).$$

8.2. 命题 2.4 的证明。现在我们开始证明命题 2.4，首先选取常数 $\mathtt{A}$、$\mathtt{B}$、$\mathtt{C}$ 和 ε。

8.2.1. 常数的选取。我们首先设定

$$\mathtt{C} := 4\mathtt{E}\Big(\frac{1}{4\mathtt{N}}\Big), \tag{8.2}$$

其中 $\mathtt{E}$ 是引理 8.4中的函数。令 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为一个固定的非负鼓包函数，其支撑在 $[0,1)^d$ 中，并且满足 $\int \varphi = 1$ 和 $\|\varphi\|_\infty \le 2$。该函数将用于构造测度 ν ，并验证其放大 μ 满足能量

以及(2.17) 中的谱隙条件。 A 和 B 的值将取决于 φ。我们如下定义它们：令 A 选取得足够大，使得

$$\mathtt{A}^d \geq 4\mathtt{L}_{\mathtt{N}}^2 \qquad \text{and} \qquad \int_{|\xi|\geq \mathtt{A}} |\widehat{\varphi}(\xi)|d\xi \leq \frac{1}{2}\mathtt{A}^{-4d}, \tag{8.3}$$

其中， $\mathtt{L}_{\mathtt{N}}$ 是（2.16）中出现的常数。令 B 相对于A、 C和 $\mathtt{L}_{\mathtt{N}}$足够大，具体如（2.16）中所规定。至此，我们完成了对常数 A、 B、 C的选取。

还需定义 ε。为此，我们再引入一个足够大的可容许常数 T。具体而言，我们取 T 为满足

$$4\pi\sqrt{d}\mathtt{B}|B(0;\mathtt{B})|2^{-\mathtt{T}} \leq \frac{1}{2}\mathtt{A}^{-4d}. \tag{8.4}$$

现在我们定义

$$\varepsilon := \min\Big\{\frac{\log_2(1+2^{-d\mathtt{N}\mathtt{T}-2})}{\mathtt{N}\mathtt{T}}, \frac{1}{4\mathtt{N}^2}\Big\}. \tag{8.5}$$

8.2.2. 定位二进盒 Q。在此处，我们固定

- 一个函数 Φ: $[0,1] \to \mathbb{R}^d$ 采用标准形式，并在原点处具有 N 型消失，且
- 一个博雷尔集 $K \subseteq \mathbb{R}^d$，其维数为$_{\mathrm{H}}K > d - \varepsilon$。

令 J := J(Φ) 如命题 2.3中所述，并令 $\vec{\mathtt{n}} := (\mathtt{n}_1, .., \mathtt{n}_d)$ 为在 (2.3)中与 Φ 相关联的整数向量。在本节余下部分，只要某个对象依赖于一个整数向量，就应使用 $\vec{\mathtt{n}}$。例如， $\mathcal{D}^* := \mathcal{D}^*[\vec{\mathtt{n}}]$ 以及 $\mathcal{D}^*_J := \mathcal{D}^*_J[\vec{\mathtt{n}}]$。

我们的下一个目标是找到一个盒 $\mathtt{Q} \in \mathcal{D}^*_{\mathtt{J}}$，使得 $K \cap \overline{\mathtt{Q}}$ 能够支撑一个测度，该测度的放大满足（2.17）中的能量与谱隙条件。今后，我们将假设K 是紧的。对博雷尔集直接应用Frostman引理（例如 [34,定理2.7]）表明， K 包含一个豪斯多夫维数严格超过 $d-\varepsilon$的紧子集。因此，这一假设是允许的。

利用引理 8.1 以及关于 K的维数假设，我们选取一些

$$s \in (\mathtt{S} - \mathtt{N}\varepsilon, \mathtt{S}] \tag{8.6}$$

使得 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(K) > 0$。由此可得， $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*_{\mathtt{J}}}(K) > 0$ 也成立，并且显然还有 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*_{\mathtt{J}}}(K) < \infty$。我们声称，对每个 $\delta > 0$，都存在 $Q \in \mathcal{D}^*_{\mathtt{J}}$ 使得

$$\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*_{\mathtt{J}}}(K \cap Q) \geq (1-\delta)\ell(Q)^s. \tag{8.7}$$

为此， 注意，对每个 $c > 0$，都存在 $\mathcal{Q}_c \subseteq \mathcal{D}^*_{\mathtt{J}}$ 使得 $\mathcal{Q}_c$ 覆盖 K，并且

$$\sum_{Q\in\mathcal{Q}_c} \ell(Q)^s \leq \mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*_{\mathtt{J}}}(K) + c.$$

若存在某个 $\delta > 0$，使得没有任何 $Q \in \mathcal{D}^*_{\mathtt{J}}$ 满足 (8.7)，那么我们就有

$$\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*_{\mathtt{J}}}(K) \leq \sum_{Q\in\mathcal{Q}_c} \mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*_{\mathtt{J}}}(K\cap Q) \leq (1-\delta)\sum_{Q\in\mathcal{Q}_c} \ell(Q)^s \leq (1-\delta)(\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*_{\mathtt{J}}}(K) + c),$$

并且令 c 足够小就会产生矛盾。这证明了该断言。根据引理 8.1，条件 (8.7) 等价于以下陈述：

$$\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(K\cap Q) \geq (1-\delta)\ell(Q)^s. \tag{8.8}$$

我们现在将 $\mathtt{Q}$ 定义为满足 (8.8) 且带有 $\delta := 2^{-\mathtt{ST}-2}$ 的任意 $Q \in \mathcal{D}^*_{\mathtt{J}}$。

8.2.3. 构造测度 ν。令 ch($\mathtt{Q}$) 表示 $\mathcal{D}^*$ 中 $\mathtt{Q}$ 的 $\mathtt{T}^{\text{th}}$ 代后代集合；也就是说，

$$\mathrm{ch}(\mathtt{Q}) := \{q \in \mathcal{D}^* \colon q \subseteq \mathtt{Q},\ \ell(q) = 2^{-\mathtt{T}}\ell(\mathtt{Q})\}.$$

为便于阅读，从现在起我们用小写字母 q 表示 ch($\mathtt{Q}$) 的元素，而大写字母 Q 将继续表示 $\mathcal{D}^*$ 的一般元素。我们断言，

$$\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(K \cap q) \geq \frac{1}{2}\ell(q)^s \quad \text{for every } q \in \mathrm{ch}(\mathtt{Q}). \tag{8.9}$$

要看出这一点，令

$$\mathcal{G} := \left\{q \in \mathrm{ch}(\mathtt{Q}) \colon \mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(K \cap q) \geq \frac{1}{2}\ell(q)^s\right\}$$

并反设 $\mathcal{G} \subsetneq$ ch($\mathtt{Q}$)。那么，根据我们对 $\mathtt{Q}$ 的选择、不等式$\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(K \cap q) \leq \ell(q)^s$、我们在 (8.6) 中对 s 的选择，以及 (8.5) 中 ε 的定义，我们有

$$\begin{aligned}
1 - 2^{-\mathtt{ST}-2} &\leq \frac{\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(K \cap \mathtt{Q})}{\ell(\mathtt{Q})^s} \\
&\leq \sum_{q \in \mathcal{G}} \frac{\ell(q)^s}{\ell(\mathtt{Q})^s} + \frac{1}{2}\sum_{q \in \mathrm{ch}(\mathtt{Q}) \setminus \mathcal{G}} \frac{\ell(q)^s}{\ell(\mathtt{Q})^s} \\
&= \sum_{q \in \mathrm{ch}(\mathtt{Q})} \frac{\ell(q)^s}{\ell(\mathtt{Q})^s} - \frac{1}{2}\sum_{q \in \mathrm{ch}(\mathtt{Q}) \setminus \mathcal{G}} \frac{\ell(q)^s}{\ell(\mathtt{Q})^s} \\
&\leq 2^{\mathtt{S}\mathtt{T}} 2^{-\mathtt{T}s} - \frac{1}{2}\cdot 2^{-\mathtt{T}s} < 2^{\varepsilon \mathtt{N}\mathtt{T}} - 2^{-\mathtt{S}\mathtt{T}-1} \leq 1 + 2^{-\mathtt{S}\mathtt{T}-2} - 2^{-\mathtt{S}\mathtt{T}-1}.
\end{aligned}$$

这就产生了矛盾（注意严格不等式），因此该断言得证。

结合下界 (8.9) 和引理 8.3，对于每个 $q \in$ ch($\mathtt{Q}$)，我们得到一个支撑在 $K \cap \overline{q}$ 上的博雷尔测度 ϑ_q，使得

$$\|\vartheta_q\| \geq \frac{1}{2}\ell(q)^s \qquad \text{and} \qquad \vartheta_q(Q) \leq \ell(Q)^s \quad \text{for every } Q \in \mathcal{D}^*. \tag{8.10}$$

测度 ν 将定义为测度 ϑ_q的加权和。具体而言，设 φ 为上文引入的鼓包函数，并设 $\mathbf{T}_{\mathtt{Q}}$ 为 (2.22) 中定义的重缩放映射，它将 $\mathtt{Q}$ 映射到 $[0,1)^d$。设

$$w(q) := \int_{\mathbf{T}_{\mathtt{Q}}(q)} \varphi \qquad \text{and} \qquad \overline{\vartheta}_q := \frac{w(q)\ell(\mathtt{Q})^s}{\|\vartheta_q\|}\vartheta_q$$

对于每个 $q \in$ch($\mathtt{Q}$)。有了这些定义，我们取 ν 为

$$\nu := \sum_{q \in \mathrm{ch}(\mathtt{Q})} \overline{\vartheta}_q.$$

显然， ν 支撑在$K \cap \overline{\mathtt{Q}}$ 上，且总质量为

$$\|\nu\| = \sum_{q \in \mathrm{ch}(\mathtt{Q})} \|\overline{\vartheta}_q\| = \sum_{q \in \mathrm{ch}(\mathtt{Q})} w(q)\ell(\mathtt{Q})^s = \ell(\mathtt{Q})^s \int \varphi = \ell(\mathtt{Q})^s > 0. \tag{8.11}$$

我们的下一个目标是分析 ν 关于 $\mathtt{Q}$的放大。为了使这个测度定义良好，它必须满足 $\nu(\mathtt{Q}) > 0$。根据（8.11），只有当 $\operatorname{supp}\nu$ 完全位于 $\mathtt{Q}$的边界内时，这种情况才可能发生。我们声称

$$\vartheta_q(\partial q) = 0 \quad \text{for every } q \in \operatorname{ch}(\mathtt{Q}); \tag{8.12}$$

这里，∂E 表示 E的边界。这个结论意味着 $\nu(\partial\mathtt{Q}) = 0$，从而确认 $\nu(\mathtt{Q}) > 0$，并且说明就实际而言，测度 ϑ_q （以及 $\overline{\vartheta}_q$）的支撑两两不相交。为证明（8.12），固定 $q \in \operatorname{ch}(\mathtt{Q})$，并令 J 满足 $q \in \mathcal{D}_J$。对每个 $j \geq J$，令

$$\mathcal{Q}_j(q) := \{Q \in \mathcal{D}_j \colon Q \cap q \neq \emptyset\}.$$

由（8.10）中的 Frostman 型条件，我们有

$$\vartheta_q(\partial q) \leq \#\mathcal{Q}_j(q) 2^{-js}. \tag{8.13}$$

我们可以如下估计 $\#\mathcal{Q}_j(q)$：对于每个 $i \in \{1, \dots, d\}$，q的边界包含两个$(d-1)$维面，其边长为 $2^{-n_1 J}$、……、$[2^{-n_i J}]$、……、$2^{-n_d J}$，其中括号中的项被省略。这些面合起来涵盖了 ∂q 的所有面。与 i 对应的两个面恰好相交

$$\frac{\prod_{k\neq i} 2^{-n_k J}}{\prod_{k\neq i} 2^{-n_k j}} = 2^{(\mathtt{S}-n_i)(j-J)}$$

$\mathcal{D}_j$中的盒。因此，

$$\#\mathcal{Q}_j(q) \leq 2\sum_{i=1}^{d} 2^{(\mathtt{S}-n_i)(j-J)} \leq 2d2^{(\mathtt{S}-1)(j-J)}. \tag{8.14}$$

结合 (8.13) 和 (8.14)，得到

$$\vartheta_q(\partial q) \leq 2d2^{-(\mathtt{S}-1)J} 2^{j(\mathtt{S}-1-s)}.$$

根据我们在 (8.6) 中对 s 的选取以及在 (8.5) 中对 ε 的选取（具体而言，$\mathtt{N}\varepsilon \leq 1$），有 $\mathtt{S} - 1 - s < 0$。因此，令 $j \to \infty$，便得到 (8.12)。

8.2.4. 能量条件的验证。接下来要证明放大 $\mu := \nu^{\mathtt{Q}}$ 满足 (2.17) 中的能量与谱隙条件。我们先证明前者，即 $I_{\sigma_{\mathtt{N}}}(\mu) \leq \mathtt{C}$，其中 $\sigma_{\mathtt{N}}$ 和 $\mathtt{C}$ 分别如 (2.15) 和 (8.2) 中所定义。根据我们在 (8.6) 中对 s 的选取以及在 (8.5) 中对 ε 的选取，有

$$s - \sigma_{\mathtt{N}} - \mathtt{S} + d \geq -\mathtt{N}\varepsilon + \frac{1}{2\mathtt{N}} \geq -\frac{1}{4\mathtt{N}} + \frac{1}{2\mathtt{N}} = \frac{1}{4\mathtt{N}}.$$

因此，根据引理 8.4，只需证明 μ 满足 Frostman 条件

$$\mu(Q) \leq 4\ell(Q)^s \quad \text{for every } Q \in \mathcal{D}^*. \tag{8.15}$$

对于每个 $q \in$ch(Q)，我们使用 (8.6) 和 (8.10) 中的第一个性质，得到 tha t

$$\begin{aligned} w(q)\ell(\mathtt{Q})^s \leq \|\varphi\|_\infty |\mathbf{T}_{\mathtt{Q}}(q)| \ell(\mathtt{Q})^s &\leq 2\Big(\frac{\ell(q)}{\ell(\mathtt{Q})}\Big)^{\mathtt{S}} \ell(\mathtt{Q})^s \\ &= 2\Big(\frac{\ell(q)}{\ell(\mathtt{Q})}\Big)^{\mathtt{S}-s} \ell(q)^s \leq 2\ell(q)^s \leq 4\|\vartheta_q\|. \end{aligned} \tag{8.16}$$

因此，根据 (8.10) 中的第二个性质，每个 $\overline{\vartheta}_q$ 都满足

$$\overline{\vartheta}_q(Q) \le 4\vartheta_q(Q) \le 4\ell(Q)^s \quad \text{for every } Q \in \mathcal{D}^*.$$

We 声称该性质意味着条件 (8.15)，其中用 ν 代替 μ，即 .

$$\nu(Q) \le 4\ell(Q)^s \quad \text{for every } Q \in \mathcal{D}^*. \tag{8.17}$$

为说明这一点，固定 $Q \in \mathcal{D}^*$，并考虑以下三种情况:

- 若 $\ell(Q) \le 2^{-\mathtt{T}}\ell(\mathtt{Q})$，则 Q 至多与 ch(Q) 中的一个盒相交；因此
$$\nu(Q) \le \max_{q\in\mathrm{ch}(\mathtt{Q})} \overline{\vartheta}_q(Q) \le 4\ell(Q)^s.$$
- 若 $\ell(Q) \ge \ell(\mathtt{Q})$，则 (8.11) 蕴含
$$\nu(Q) \le \|\nu\| = \ell(\mathtt{Q})^s \le \ell(Q)^s.$$
- 若 $2^{-\mathtt{T}}\ell(\mathtt{Q}) \le \ell(Q) \le \ell(\mathtt{Q})$，则利用 (8.16) 的第一行以及 (8.6)，可得
$$\begin{aligned}\nu(Q) &\le \#\{q \in \mathrm{ch}(\mathtt{Q})\colon q \cap Q \ne \emptyset\} \max_{q\in\mathrm{ch}(\mathtt{Q})} \|\overline{\vartheta}_q\| \\ &= \Big(\frac{\ell(Q)}{2^{-\mathtt{T}}\ell(\mathtt{Q})}\Big)^{\mathtt{S}} \max_{q\in\mathrm{ch}(\mathtt{Q})} w(q)\ell(\mathtt{Q})^s \\ &\le \Big(\frac{\ell(Q)}{2^{-\mathtt{T}}\ell(\mathtt{Q})}\Big)^{\mathtt{S}} 2^{-\mathtt{S}\mathtt{T}+1}\ell(\mathtt{Q})^s = 2\Big(\frac{\ell(Q)}{\ell(\mathtt{Q})}\Big)^{\mathtt{S}-s}\ell(Q)^s \le 2\ell(Q)^s.\end{aligned}$$

综合起来，这些结论蕴含（8.17）。现在，为了验证（8.15），我们还需要关于二进盒的一个简单事实，即

$$\mathbf{T}_Q(Q') \in \mathcal{D}^* \quad \text{with} \quad \ell(\mathbf{T}_Q(Q')) = \frac{\ell(Q')}{\ell(Q)}$$

且（等价地）

$$\mathbf{T}_Q^{-1}(Q') \in \mathcal{D}^* \quad \text{with} \quad \ell(\mathbf{T}_Q^{-1}(Q')) = \ell(Q)\ell(Q') \qquad \text{for all } Q, Q' \in \mathcal{D}^*.$$

将这一观察与（2.23）和（2.24）中放大的定义，以及（8.11）和（8.17）结合起来，我们得到

$$\mu(Q) = \frac{\nu(\mathbf{T}_{\mathtt{Q}}^{-1}(Q))}{\|\nu\|} \le \ell(\mathtt{Q})^{-s} 4\ell(\mathbf{T}_{\mathtt{Q}}^{-1}(Q))^s = 4\ell(Q)^s$$

对每个 $Q \in \mathcal{D}^*$，这证实了（8.15）。

8.2.5. 谱隙条件的验证。最后，我们需要证明 μ 满足 (2.17) 中的谱隙条件。令 $\mathcal{D}_{\mathtt{T},\,0}$ 表示 $\mathcal{D}^*$ 中 $[0,1)^d$ 的 $\mathtt{T}^{\mathrm{th}}$ 代后代集合；也就是说，

$$\mathcal{D}_{\mathtt{T},0} := \{Q \in \mathcal{D}_{\mathtt{T}}\colon Q \subseteq [0,1)^d\} = \{\mathbf{T}_{\mathtt{Q}}(q)\colon q \in \mathrm{ch}(\mathtt{Q})\}.$$

我们有

$$\mu(Q) = \frac{\nu(\mathbf{T}_{\mathtt{Q}}^{-1}(Q))}{\|\nu\|} = \ell(\mathtt{Q})^{-s}\|\overline{\vartheta}_{\mathbf{T}_{\mathtt{Q}}^{-1}(Q)}\| = w(\mathbf{T}_{\mathtt{Q}}^{-1}(Q)) = \int_Q \varphi \quad \text{for every } Q \in \mathcal{D}_{\mathtt{T},0}. \tag{8.18}$$

我们将通过以下公式把 φ视为一种测度

$$\int f d\varphi := \int f\varphi;$$

因此，(8.18) 变为 $\mu(Q) = \varphi(Q)$。令 c_Q 表示盒 Q 的中心。若 $Q \in \mathcal{D}_{\mathtt{T},0}$，则

$$\int_Q e^{-2\pi i c_Q\cdot\xi} d\mu(x) = \int_Q e^{-2\pi i c_Q\cdot\xi} d\varphi(x)$$

对任意 $\xi \in \mathbb{R}^d$。固定 ξ 后，函数 $x \mapsto e^{-2\pi i x\cdot\xi}$ 是利普希茨函数，其常数至多为 $2\pi|\xi|$。由于当 $x \in Q$ 时 $|x - c_Q| \le \sqrt{d}\ell(Q)$，因此

$$\begin{aligned}
|\widehat{\mu}(\xi) - \widehat{\varphi}(\xi)| &= \Big|\int e^{-2\pi i x\cdot\xi} d\mu(x) - \int e^{-2\pi i x\cdot\xi} d\varphi(x)\Big| \\
&\le \sum_{Q\in\mathcal{D}_{\mathtt{T},0}} \Big|\int_Q e^{-2\pi i x\cdot\xi} d\mu(x) - \int_Q e^{-2\pi i x\cdot\xi} d\varphi(x)\Big| \\
&\le \sum_{Q\in\mathcal{D}_{\mathtt{T},0}} \Big(\int_Q |e^{-2\pi i x\cdot\xi} - e^{-2\pi i c_Q\cdot\xi}| d\mu(x) + \int_Q |e^{-2\pi i x\cdot\xi} - e^{-2\pi i c_Q\cdot\xi}| d\varphi(x)\Big) \\
&\le \sum_{Q\in\mathcal{D}_{\mathtt{T},0}} 2\pi|\xi|\sqrt{d}2^{-\mathtt{T}}(\mu(Q) + \varphi(Q)) = 4\pi\sqrt{d}|\xi|2^{-\mathtt{T}}.
\end{aligned}$$

现在，利用 $\|\widehat{\mu}\| \le 1$，以及我们对 (8.3) 和 (8.4) 中 $\mathtt{A}$ 和 $\mathtt{T}$ 的假设，可得

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\in[\mathtt{A},\mathtt{B}]} |\widehat{\mu}(\xi)|^2 d\xi \le \int_{|\xi|\in[\mathtt{A},\mathtt{B}]} |\widehat{\mu}(\xi)| d\xi &\le \int_{|\xi|\in[\mathtt{A},\mathtt{B}]} |\widehat{\mu}(\xi) - \widehat{\varphi}(\xi)| d\xi + \int_{|\xi|\in[\mathtt{A},\mathtt{B}]} |\widehat{\varphi}(\xi)| d\xi \\
&\le 4\pi\sqrt{d}2^{-\mathtt{T}} \int_{|\xi|\in[\mathtt{A},\mathtt{B}]} |\xi| d\xi + \frac{1}{2}\mathtt{A}^{-4d} \\
&\le 4\pi\sqrt{d}2^{-\mathtt{T}}\mathtt{B}|B(0;\mathtt{B})| + \frac{1}{2}\mathtt{A}^{-4d} \le \mathtt{A}^{-4d},
\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

9. Anisotropic boxes and Hausdorff dimension in metric spaces

在上一节中，我们定义了与$\mathcal{D}^*$ 中的各向异性二进盒的集合 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}$ 相关联的“豪斯多夫内容”。其使用方式如下：从一个豪斯多夫维数非常高的集合 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 出发，我们找到了一个盒 $\mathtt{Q} \in \mathcal{D}^*$，使得 K 在某一代的 $\mathtt{Q}$ 的每个后代中都具有非平凡的（各向异性）豪斯多夫内容。这使我们能够使用Frostman引理的一个版本，在$K \cap \overline{\mathtt{Q}}$ 上构造一个测度，其放大满足（2.17）中的两个条件。在本节中，我们将 $\mathcal{D}^*$ 和 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}$ 重新解释为度量空间中的豪斯多夫维数；参见 [33, 第 4]章。这种联系最早在 [26],中被陈述，不过当时的情形不够一般。

设 $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ 是一个固定的正整数向量，并设 $\rho = \rho[\vec{n}]$ 为$\mathbb{R}^d$ 上的度量，定义为

$$\rho(x, y) := \max_{1\le i\le d} (2|x_i - y_i|)^{1/n_i}.$$

以 x 为中心、半径为 r 的闭 ρ球呈现为

$$B_\rho(x;r) := \{y\colon \rho(x,y) \le r\} = x + \prod_{i=1}^{d} \Big[-\frac{r^{n_i}}{2}, \frac{r^{n_i}}{2} \Big].$$

$\mathcal{D}^*[\vec{n}]$ 中的元素因此可以视为 ρ球。更精确地说，如果 $Q \in \mathcal{D}^*$，且 c_Q 是 Q的中心，那么

$$\overline{Q} = c_Q + \prod_{i=1}^{d} \Big[-\frac{\ell(Q)^{n_i}}{2}, \frac{\ell(Q)^{n_i}}{2} \Big] = B_\rho(c_Q, \ell(Q)).$$

> s维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^s = \mathcal{H}^s[\rho]$ 在度量空间 $(\mathbb{R}^d, \rho)$ 上按通常方式定义，即

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(E),$$

其中

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) := \inf \Big\{ \sum_{U\in\mathcal{U}} \operatorname{diam}(U)^s \colon \mathcal{U} \text{ is a countable cover of } E,\ \sup_{U\in\mathcal{U}} \operatorname{diam} U \le \delta \Big\}.$$

当然，此处 $\operatorname{diam} U$指的是 U的 ρ-直径。如果 U是一个 ρ球，那么它等于 $2^{1/\text{最小}_i\, n_i}$倍的半径。上一节定义的量 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}$ 和 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*_j}$ 可分别视为 $\mathcal{H}^s_\infty$ 和 $\mathcal{H}^s_{2^{-j}}$的离散版本。

引理 8.1 给出了 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}$ 与标准（欧几里得）豪斯多夫维数之间的联系；也就是说，如果 s 相对于 $\dim_{\mathrm{H}} E$不太大，那么 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(E) > 0$。通过考察 $(\mathbb{R}^d, \rho)$ 中的豪斯多夫维数，我们可以得到更完整的图景。它同样按通常方式定义：

$$\dim_{\mathrm{H}^*} E := \inf\{s\colon \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s\colon \mathcal{H}^s(E) = \infty\}.$$

如果 $\mathtt{N}$ 和 $\mathtt{S}$ 如（8.1）所定义，则有以下关系

$$\mathtt{S} - (d - \dim_{\mathrm{H}} E)\mathtt{N} \le \dim_{\mathrm{H}^*} E \le \mathtt{S} \tag{9.1}$$

对所有集合 $E \subseteq \mathbb{R}^d$均成立。（9.1）的证明与引理 8.1（见附录）的证明类似；特别地，第一个不等式可通过证明对所有$s < \mathtt{S} -$ （$d -$维$_{\mathrm{H}} E$）$\mathtt{N}$均有 $\mathcal{H}^s_\infty(E) > 0$ 来得到。值得注意的是，当 $\vec{n} = (1, 1, \ldots, 1)$ 时，相应的度量 ρ 是欧几里得上确界范数的倍数，其定义的球恰好是欧几里得立方体。因此，（$\mathbb{R}^d$，ρ）中的豪斯多夫维数定义与通常的定义一致，而（9.1）则简化为 $\dim_{\mathrm{H}} E \le d$这一陈述。

10. Appendix

10.1. 有限型函数的标准化。

引理 2.1 的证明。设 $\Theta\colon \mathtt{I} \to \mathbb{R}^d$ 是一个在原点处以 $\mathtt{N}$ 型消失的光滑函数。这意味着，$\mathtt{N}$ 是满足以下性质的最小整数：

对于每个 $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$，都存在 $n \in \{1, \ldots, \mathtt{N}\}$，使得 $u \cdot \Theta^{(n)}(0) \neq 0$。 (10.1)

由于 $\Theta(0) = 0$，因此存在唯一的由正整数组成的 d 元组 $\vec{\mathtt{m}} = (\mathtt{m}_1, \ldots, \mathtt{m}_d)$ 使得

$$\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_d) \quad \text{with} \quad \Theta_i(t) = t^{\mathtt{m}_i}\theta_i(t) \tag{10.2}$$

对于某些光滑函数 $\theta_i\colon\ \mathtt{I}\to\mathbb{R}^d$ 满足 $\theta_i(0)\neq 0$。我们将把 $\vec{\mathtt{m}}$ 称为 Θ的消失模式。我们的目标是构造一个可逆线性映射 L: $\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$，使得 L $\circ\,\Theta$ 的消失模式 $\vec{\mathtt{n}}$ 满足 $\mathtt{n}_1<\mathtt{n}_2<\cdots<\mathtt{n}_d=\mathtt{N}$。有了这一点之后，我们可以对 L $\circ\,\Theta$ 应用对角映射，以达到条件 $\phi_1(0)=\cdots=\phi_d(0)=1$；这样的映射不会改变消失模式。这便证明了条件 (2.3) 和 (2.4)。定义（10.1）保证函数的类型在可逆线性变换下保持不变；也就是说，对于任意可逆线性变换 L，L$\circ\Theta$ 在原点处仍具有类型 N 的消失模式。鉴于此，我们将依次说明一系列这样的变换，并在每一步将变换后的函数重新记为 Θ，直至得到满足 (2.2)、(2.3) 和 (2.4) 的函数 Θ。引理 2.1 陈述中的映射 L 是用于得到这个最终 Θ的各映射的复合。

我们的首要任务是构造一个映射 L，使得 N 出现在 L$\circ\Theta$ 的消失模式中。由（10.1）可知，存在 $\mathbb{R}^d$ 中的非零向量 $\mathtt{u}=(\mathtt{u}_1,\dots,\mathtt{u}_d)$，使得

$$\mathtt{u}\cdot\Theta^{(n)}(0)=0\quad\text{for } 1\le n\le \mathtt{N}-1\qquad\text{and}\qquad \mathtt{u}\cdot\Theta^{(\mathtt{N})}(0)\neq 0.$$

我们可以假设 e 不妨设 $\mathtt{u}_d\neq 0$。令 L 为所给出的线性映射

$$\mathbf{L}(x):=(x_1,\dots,x_{d-1},\mathtt{u}\cdot x)\quad\text{for } x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d.$$

~ ~则 L $\circ\,\Theta=:(\Theta_1,\dots,\Theta_d)$ 满足

$$\widetilde{\Theta}_i(t)=\begin{cases}\Theta_i(t)=t^{\mathtt{m}_i}\theta_i(t) & \text{if } 1\le i<d,\\ \mathtt{u}\cdot\Theta(t)=t^{\mathtt{N}}\widetilde{\theta}_d(t) & \text{if } i=d\end{cases}$$

~ ~对于某个光滑函数 θ_d，使得 $\theta_d(0)\neq 0$。因此， N 出现在 L的消失模式中，并且必然是其中的最大项。我们将 L $\circ\,\Theta$ 重新标记为 Θ，并假设它具有形式 (10.2)，其中$\max_i \mathtt{m}_i=\mathtt{N}$。此后所应用的一系列变换中，$\max_i \mathtt{m}_i$ 的值绝不会减小。

接下来需要确保，在进一步作线性变换 L 后，Θ 的消失模式中的各项能够满足 (2.3) 中的严格单调性。如果这些项已经互不相同，那么构造 L 就很简单；我们可以取一个合适的置换映射作为 L。然而，一般而言，消失模式中可能有重复项，必须消除这些重合。为此，我们提出如下断言：

设 Θ 是一个消失模式为 $\vec{\mathtt{m}}$的函数。若存在指标 i_0、$i_1\in\{1,\dots,d\}$，使得$i_0<i_1$，且满足 $\mathtt{m}_{i_0}=\mathtt{m}_{i_1}$，则存在一个可逆线性映射 L，使得 L $\circ\,\Theta$ 的消失模式为 $\vec{\mathtt{m}}+\ell\mathtt{e}_{i_1}$，其中 $\ell\ge 1$。

（这里，$\mathtt{e}_1,\dots,\mathtt{e}_d$ 表示 $\mathbb{R}^d$的标准基向量。）换句话说，如果 Θ 的消失模式中有重复值，那么就存在一个线性映射 L，使得 L$\circ\Theta$ 的消失模式与之相同，只是其中一个重复项增加了。暂且假设这一断言成立。通过迭代应用该断言，我们可以消除 Θ消失模式中的所有重复值，具体如下。首先，令 $i_0=1$。对于每个 $j>1$，我们检查 $\mathtt{m}_1=\mathtt{m}_j$是否成立。如果不成立，则无需进行任何操作。如果等式成立，我们就将该断言应用于 $i_1=j$（以及 $i_0=1$），得到一个函数，其消失模式的第一项和第 j^{th} 项互不相同；其他项则保持不变。经过 $d-1$ 次这样的检查，指标依次为 $j=2$、3、.....、d，我们得到一个函数，其消失模式的第一项 $\mathtt{m}_1$ 不会与后面的各项重复。至此完成。

第一步。接下来，我们用 $i_0 = 2$ 和 $j > 2$重复这个过程。这将产生一个函数，其消失模式中，前两个条目都不会出现在后面的条目中。如此继续，经过 $d-1$ 步后，我们得到一个消失模式中没有重复值的函数。最后，我们应用一个置换映射，将该模式重新排列为递增顺序，如上所示。因此，我们构造出了 L，它是支撑我们应用该断言的线性映射与最终置换的复合。

接下来只需证明该断言。固定指标 $i_0 < i_1$，使其满足 $\mathtt{m}_{i_0} = \mathtt{m}_{i_1}$，如其中所述。假设 Θ 具有形式 (10.2)，我们定义线性映射 L 如下：

$$\mathbf{L}(x) := y, \quad \text{where} \quad y_i := \begin{cases} x_i & \text{if } i \neq i_1, \\ x_i - \frac{\theta_{i_1}(0)}{\theta_{i_0}(0)} x_{i_0} & \text{if } i = i_1. \end{cases}$$

Th$\widetilde{}$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$变换后的函数 $\mathtt{L} \circ \Theta =: (\Theta_1, \dots, \Theta_d)$ 满足 $\Theta_i(t) = t^{\mathtt{m}_i}\theta_i(t)$，其中

$$\widetilde{\theta}_i := \begin{cases} \theta_i & \text{if } i \neq i_1, \\ \theta_{i_1} - \frac{\theta_{i_1}(0)}{\theta_{i_0}(0)} \theta_{i_0} & \text{if } i = i_1. \end{cases}$$

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$一方面，$\theta_{i_1}(0) = 0$。另一方面，对于某个非零向量 $\mathtt{u} \in \mathbb{R}^d$，有 $t^{\mathtt{m}_{i_1}}\theta_{i_1}(t) = \Theta_{i_1}(t) = \mathtt{u} \cdot \Theta(t)$，而有限型假设 (10.1) 表明存在一个整数 $\mathtt{n} \in \{1, \dots, \mathtt{N}\}$，使得对于某个满足 $\theta_{\mathtt{u}}(0) \neq 0$ 的光滑函数 $\theta_{\mathtt{u}}$，有 $\mathtt{u} \cdot \Theta(t) = t^{\mathtt{n}}\theta_{\mathtt{u}}(t)$。$\widetilde{}$令 $t^{\mathtt{m}_{i_1}}\theta_{i_1}(t)$ 和 $t^{\mathtt{n}}\theta_{\mathtt{u}}(t)$ 相等，并在原点处求 $\mathtt{n}$ 次导数，可得 $\mathtt{n} > \mathtt{m}_{i_1}$。令 $\ell := \mathtt{n} - \mathtt{m}_{i_1}$，由此可知 $\mathbf{L} \circ \Theta$ 具有消失模式 $\vec{\mathtt{m}} + \ell \mathtt{e}_{i_1}$，因此断言得证。□

10.2. 类图曲线的部分避开。

命题4.2 的证明。该证明与命题 4.1的证明非常相似，因此我们将省略一些细节。固定 L 和 $\Phi\colon \mathtt{I} \to \mathbb{R}^d$ 满足图状曲线定义中的条件(i)–(iii)，其中条件 (ii)中的 $\mathtt{m}$ 是 Γ的子类型。不失一般性，我们可以假设 L 是恒等映射。由于 Γ 包含原点，我们必然有$0 \in \mathtt{I}$ 以及 $\Phi(0) = 0$。此外，由于 Γ 在原点处属于 $\mathtt{N}$ 类型，因此可知 Φ 在零点处的类型至少为 $\mathtt{N}$。因此，存在一个单位向量 $\mathtt{u} \in \mathbb{R}^d$，使得对于每个 $n \in \{0, 1, \dots, \mathtt{N}-1\}$，都有 $\mathtt{u} \cdot \Phi^{(n)}(0) = 0$。令 z如命题4.1 的证明中所定义。性质 (4.3) 对于这个 z 仍然成立，但现在仅对 $n \in \{0, 1, \dots, \mathtt{N}\}$ 成立。性质 (4.4) 和 (4.5) 无需任何更改仍然有效。

Let

$$\overline{s} := \min\left\{\frac{\mathtt{N}}{\mathtt{m}}, d - \frac{(d-1)\mathtt{m}}{\mathtt{N}}\right\}.$$

引理 2.1 以及第 4.2 小节中给出的子类型定义意味着 $\mathtt{N} \geq \mathtt{m} + d - 1$。特别地，我们有 $\mathtt{N} > \mathtt{m}$，因此 $\overline{s} \in (1, d)$。只需证明该命题对所有充分接近 $\overline{s}$ 的 s 成立。鉴于此，我们固定 $s \in [1, \overline{s})$。

我们的下一个目标是定义 K，其方式与命题 4.1 的证明相同；请参见该证明中的四个项目符号。在那里，我们任意选择了一个满足 (3.1) 的 H¨older 连续性指数 α，以及一个满足 $\mathtt{n}\alpha > \mathtt{m}$ 的任意整数 $\mathtt{n}$。这里，我们希望更谨慎地选择 α 和 $\mathtt{n}$，使得 $\mathtt{n} \leq \mathtt{N}$。（这确保稍后可以应用 (4.3)。）事实上，取 $\mathtt{n} = \mathtt{N}$ 即可，其中

合适的 α。为说明这一点，我们考虑两种情况： $s \le d-1$ 和 $s > d-1$。假设我们处于第一种情况。那么 (3.1) 中的最小值等于 $1/s$。由于 $s < \overline{s} \le \mathtt{N}/\mathtt{m}$，存在一个 $\alpha \in (0, 1/s)$，使得 $\mathtt{N}\alpha > \mathtt{m}$。如果我们处于第二种情况，那么 (3.1) 中的最小值为 $\frac{d-s}{d-1}$，而 $s < \overline{s} \le d - \frac{(d-1)_{\mathtt{N}}}{\mathtt{m}}$ 意味着，对于某个 $\alpha \in (0, \frac{d-s}{d-1})$，有 $\mathtt{N}\alpha > \mathtt{m}$。固定 α 和 $\mathtt{n} = \mathtt{N}$ 后， K 的定义与命题 4.1 的证明完全相同。由此得到 $\dim_{\mathrm{H}} K = s$，并且特别使用了命题 3.1 中的函数 F_s。

最后，为了完成证明，我们假设存在某个 $\gamma \in (\Gamma \setminus \{0\}) \cap (K - K)$，并试图导出矛盾。我们可以不加修改地按照命题 4.1 的证明进行，尤其是利用性质 (4.5)、 F_s 的 α-Hölder 连续性，以及带有 $n = \mathtt{N}$ 的性质 (4.3)。□

10.3. 各向异性盒与豪斯多夫维数。

10.3.1. 引理 8.1 的证明。对于 $t \ge 0$，令 $\mathcal{H}^t$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上标准的 t 维豪斯多夫测度，其定义为

$$\mathcal{H}^t(A) := \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}^t_\delta(A),$$

其中

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) := \inf\Big\{ \sum_{U \in \mathcal{U}} \operatorname{diam}(U)^t \colon \mathcal{U} \text{ is a countable cover of } A,\ \sup_{U \in \mathcal{U}} \operatorname{diam} U \le \delta \Big\}.$$

对于任意集合 $A \subset \mathbb{R}^d$，根据定义有

$$\dim_{\mathrm{H}} A = \inf\{t \colon \mathcal{H}^t(A) = 0\} = \sup\{t \colon \mathcal{H}^t(A) = \infty\}; \tag{10.3}$$

参见 [34, §2.2]。现在，固定 $E \subseteq \mathbb{R}^d$ 和 $s \in [0, \mathtt{S} - (d - \text{维数}_{\mathrm{H}} E)\mathtt{N})$，如引理陈述中所述。(8.1) 中 $\mathtt{S}$ 和 $\mathtt{N}$ 的定义意味着 $\mathtt{S} \le d\mathtt{N}$。由此可得

$$s = \mathtt{S} - (d - \alpha)\mathtt{N}$$

对于某个 $\alpha \in [0, \dim_{\mathrm{H}} E)$。由（10.3），我们有 $\mathcal{H}^\alpha(E) = \infty$，因此存在某个 $\delta \in (0, 1]$ 使得 $\mathcal{H}^\alpha_\delta(E) > 0$。令 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{D}^*$ 为 E 的任意覆盖。如果存在某个 $Q_0 \in \mathcal{Q}$ 使得 $\ell(Q_0)^{\mathtt{N}} \ge \delta/\sqrt{d}$，那么

$$\sum_{Q \in \mathcal{Q}} \ell(Q)^s \ge \ell(Q_0)^s \ge \Big(\frac{\delta}{\sqrt{d}}\Big)^{s/\mathtt{N}}.$$

假设每个 $Q \in \mathcal{Q}$ 都满足 $\ell(Q)^{\mathtt{N}} \le \delta/\sqrt{d}$。每个 Q 都有一个覆盖 $\mathcal{C}(Q)$，恰好由 $\ell(Q)^{\mathtt{S}-d\mathtt{N}}$ 个边长为 $\ell(Q)^{\mathtt{N}}$ 的立方体组成。特别是，该集合

$$\mathcal{C}(\mathcal{Q}) := \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathcal{C}(Q)$$

是由直径不超过 δ 的集合构成的 E 的可数覆盖。由此可得

$$\sum_{Q \in \mathcal{Q}} \ell(Q)^s = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \ell(Q)^{\mathtt{S}-d\mathtt{N}} \ell(Q)^{\alpha\mathtt{N}} = \sum_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{Q})} \operatorname{diam}(C)^\alpha \ge \mathcal{H}^\alpha_\delta(E).$$

由于 $\mathcal{Q}$ 是任意的，我们可以得出结论：

$$\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(E) \ge \min\Big\{ \Big(\frac{\delta}{\sqrt{d}}\Big)^{s/\mathtt{N}}, \mathcal{H}^\alpha_\delta(E) \Big\} > 0,$$

证明完毕。 □

10.3.2. 引理 8.2 的证明。固定集合 $E \subseteq \mathbb{R}^d$，使得对某个 J， E 包含于$\mathcal{D}_J^*$ 的某个元素中。令 Q_E 为 $\mathcal{D}_J$ 中满足 $E \subseteq Q_E$ 的唯一元素，并令 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{D}^*$ 为 E 的任意覆盖。另一方面，若 $\mathcal{Q} \not\subseteq \mathcal{D}_J^*$，则存在某个 $Q_0 \in \mathcal{Q}$ 使得$\ell(Q_0) \geq 2^{-J}$，并且

$$\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \ell(Q)^s \geq \ell(Q_0)^s \geq 2^{-Js} = \ell(Q_E)^s \geq \mathcal{H}^s_{\mathcal{D}_J^*}(E).$$

另一方面，若 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{D}_J^*$，则

$$\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \ell(Q)^s \geq \mathcal{H}^s_{\mathcal{D}_J^*}(E)$$

根据定义。由于 $\mathcal{Q}$ 是任意的，我们可以得出 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(E) \geq \mathcal{H}_{\mathcal{D}_J^*}(E)$，因此$\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(E) = \mathcal{H}_{\mathcal{D}_J^*}(E)$ □

10.3.3. 引理 8.3 的证明。我们的论证沿用 Frostman 引理的标准版本的证明， [33, 定理 8.8], ，并作了少量调整。在那里，核心思路是构造一列测度 $\{\vartheta^j\}_j$，其中 ϑ^j 满足直径至少为 2^{-j} 的球上的球条件，然后取其弱极限。这里的主要区别在于，Frostman 证明中使用的二进立方体被 $\mathcal{D}^*$ 中的各向异性盒所取代。

取一个紧集 $E \subset \mathbb{R}^d$ 和 $s \geq 0$。经过平移，我们可以假设 E 包含在 $\mathcal{D}_J$的某个元素中，其中某个 J。对于每个 $j \geq J$，通过规定下式来定义 $\mathbb{R}^d$上的测度 ϑ_j^j:

$$\vartheta_j^j|_Q = \begin{cases} 0 & \text{if } E\cap Q = \emptyset \\ \frac{\ell(Q)^s}{\lambda(Q)}\lambda|_Q & \text{if } E\cap Q \neq \emptyset \end{cases} \qquad \text{for each } Q \in \mathcal{D}_j,$$

其中 λ表示 d维勒贝格测度。假设已经在 $\mathbb{R}^d$ 上构造了测度 ϑ_j^j、 ϑ_{j-1}^j、 ……、 ϑ_{j-k}^j，且满足 $j-k > J$。通过规定下式来定义测度 ϑ_{j-k-1}^j :

$$\vartheta_{j-k-1}^j|_Q = \begin{cases} \vartheta_{j-k}^j|_Q & \text{if } \vartheta_{j-k}^j(Q) \leq \ell(Q)^s \\ \frac{\ell(Q)^s}{\vartheta_{j-k}^j(Q)}\vartheta_{j-k}^j|_Q & \text{if } \vartheta_{j-k}^j(Q) > \ell(Q)^s \end{cases} \qquad \text{for each } Q \in \mathcal{D}_{j-k-1}.$$

Let

$$j^* := \max\{j' \leq j \colon E \subset Q \text{ for some } Q \in \mathcal{D}_{j'}\},$$

并定义 $\vartheta^j := \vartheta_{j^*}^j$ （注意 $J \leq j^* \leq j$）。令 $Q_{j^*} \in \mathcal{D}_{j^*}$ 满足 $E \subset Q_{j^*}$。以下是由 ϑ^j的构造得出的结论:

1. $\operatorname{supp}\vartheta^j \subseteq \bigcup\{Q \in \mathcal{D}_j \colon E\cap Q \neq \emptyset\} \subseteq Q_{j^*}$;

2. $\vartheta^j(Q) \leq \ell(Q)^s$ ，对所有满足 $J \leq j' \leq j$的 $Q \in \mathcal{D}_{j'}$ 均成立;

3. E 中的每个点都属于某个 $Q \in \mathcal{D}_{j'}$ ，且满足 $J \leq j' \leq j$ ，使得 $\vartheta^j(Q) = \ell(Q)^s$。

由陈述 1 和 2 可知

$$\sup_{j\geq J} \|\vartheta^j\| \leq \sup_{j\geq J} \ell(Q_{j^*})^s \leq 2^{-Js}, \tag{10.4}$$

因此， $\{\vartheta^j\}_{j\geq J}$ 存在一个弱收敛子列。设 ϑ 为该子列的弱极限。

我们将证明，该测度满足引理的结论。结论 1 和 E 是紧集这一假设推出， ϑ 支撑在 E 中。固定 $Q\in\mathcal{D}^*$。若 $\ell(Q)\geq 2^{-J}$，则由 (10.4) 可得 $\vartheta(Q)\leq\|\vartheta\|\leq 2^{-Js}\leq\ell(Q)^s$；而若 $\ell(Q)\leq 2^{-J}$，则由结论 2 可得 $\vartheta(Q)\leq\ell(Q)^s$。这验证了 ϑ 的“球”条件。还需证明 ϑ 的总质量至少为 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(E)$。为此，固定 $j\geq J$。利用结论 3，我们为每个 $x\in E$ 选取最大的 $Q\in\mathcal{D}^*$，使得 $x\in Q$ 且 $\vartheta^j(Q)=\ell(Q)^s$。令 $\mathcal{Q}_j$ 表示这些元素构成的集合。那么，$\mathcal{Q}_j$ 覆盖 E 和 $\operatorname{supp}\vartheta^j$，且 $\mathcal{Q}_j$ 中不同的元素互不相交。因此

$$\|\vartheta^j\|=\sum_{Q\in\mathcal{Q}_j}\vartheta^j(Q)=\sum_{Q\in\mathcal{Q}_j}\ell(Q)^s\geq\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(E).$$

由于 j 是任意的，我们可以得出 $\|\vartheta\|\geq\mathcal{H}^s_{\mathcal{D}^*}(E)$。 □

10.3.4. 引理 8.4 的证明。固定引理陈述中的 L、σ 和 s，并令 ϑ 为任意一个支撑在 $[0,1]^d$ 上的博雷尔测度，满足

$$\|\vartheta\|\leq 1\qquad\text{and}\qquad\sup_{Q\in\mathcal{D}^*}\frac{\vartheta(Q)}{\ell(Q)^s}\leq L. \tag{10.5}$$

令 $\Omega:=[0,2)^d$，并令 Δ 表示 $\Omega\times\Omega$ 的对角线，即 $\Delta:=\{(x,y)\in\Omega\times\Omega:\ x=y\}$。因此， ϑ 的 σ 维能量可写为

$$I_\sigma(\vartheta)=\iint_{\Omega\times\Omega\setminus\Delta}|x-y|^{-\sigma}d\vartheta(x)d\vartheta(y).$$

我们对 $\Omega\times\Omega\setminus\Delta$ 作如下 Whitney 分解：对于每个 $j\geq -1$，令 $\mathcal{C}_j=\mathcal{C}_j(\Omega)$ 为边长为 2^{-j} 且包含于 Ω 中的二进立方体集合；也就是说，

$$\mathcal{C}_j:=\{x+[0,2^{-j})^d\colon x\in 2^{-j}\mathbb{Z}^d\cap\Omega\}.$$

如果两个二进立方体的闭包交集非空，我们就称它们相邻。对于$j\geq 0$， $\mathcal{C}_j$ 中的每个立方体都包含在 $\mathcal{C}_{j-1}$ 中唯一的“父”立方体内。若 C、$C'\in\mathcal{C}_j$ 满足 C 且 C' 不相邻，但它们的父立方体相邻，我们就称二者相关，并记作 $C\sim C'$。以下性质容易验证：

1. 对于每个 $(x,y)\in\Omega\times\Omega\setminus\Delta$，存在一对（唯一的）相关立方体 C,C'，使得 $(x,y)\in C\times C'$。

2. 如果 $C,C'\in\mathcal{C}_j$ 和 $C\sim C'$，那么对于所有 $(x,y)\in C\times C'$，都有 $|x-y|\geq 2^{-j}$。

3. 对于固定的立方体 C，至多存在 6^d 个立方体 C'，使得 $C\sim C'$。

由性质 1 可得

$$\Omega\times\Omega\setminus\Delta=\bigcup_{j=0}^{\infty}\bigcup_{\substack{(C,C')\in\mathcal{C}_j\times\mathcal{C}_j:\\ C\sim C'}}C\times C'.$$

因此，利用性质 2 和 3，结合 (10.5) 以及关于 s的假设，可得

$$\begin{aligned}
I_\sigma(\vartheta) &\le \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{(C,C')\in\mathcal{C}_j\times\mathcal{C}_j:\\ C\sim C'}} \iint_{C\times C'} |x-y|^{-\sigma} d\vartheta(x) d\vartheta(y) \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{C\in\mathcal{C}_j} \sum_{C'\in\mathcal{C}_j:\, C\sim C'} 2^{j\sigma}\vartheta(C)\vartheta(C') \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\sigma} \sum_{C\in\mathcal{C}_j} \vartheta(C) \#\{C'\in\mathcal{C}_j : C\sim C'\} \max_{C'\in\mathcal{C}_j} \vartheta(C') \\
&\le 6^d \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\sigma} \Big(\sum_{C\in\mathcal{C}_j} \vartheta(C)\Big) \max_{C'\in\mathcal{C}_j} \#\{Q\in\mathcal{D}_j : Q\cap C'\neq\emptyset\} L 2^{-js} \\
&= 6^d L \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\sigma} \|\vartheta\| 2^{j(\mathtt{s}-d)} 2^{-js} \le 6^d L \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\sigma+\mathtt{s}-d-s)} = \frac{6^d L}{1-2^{\sigma+\mathtt{s}-d-s}}.
\end{aligned}$$

由于 ϑ 是任意的，我们已证明该引理成立，其中

$$\mathtt{E}(t) := \frac{6^d}{1-2^{-t}},$$

证明至此完成。 □

References

[1] A. Balog, J. Pelik´an, J. Pintz, and E. Szemer´edi, 无 k^{th} 次幂的差集，《匈牙利数学学报》，65 (1994)，第 2 期，165–187。[2] V. Bergelson and A. Leibman，范德瓦尔登定理与 Szemer´edi 定理的多项式推广，《美国数学学会杂志》，9 (1996)，第 3 期，725–753。[3] A. S. Besicovitch and H. D. Ursell，分数维集（V）：某些连续曲线的维数，《伦敦数学学会杂志》，12 (1937)，第 1 期，18–25。[4] T. Bloom and J. Maynard，无平方差集的新上界，arXiv:2011.13266v2[经典分析], 2021.[5] J. Bourgain，$\mathbb{R}^k$中正密度集的 Szemer´edi 型定理，《以色列数学杂志》，54 (1986)，第 3 期，307–316。[6]J. Bourgain，实数轴上正密度集的罗斯定理的非线性版本，《数学分析杂志》，50 (1988)，169–181。[7] V. Chan, I. Laba, and M. Pramanik，稀疏集中的有限构形，《数学分析杂志》，128 (2016)，289–335。[8] J. Denson, M. Pramanik, and J. Zahl，避开粗糙模式的大集合，《调和分析与应用》，Springer 优化与应用丛书第 168 卷（2021），59–75。[9] D. Dong, X. Li, and W. Sawin，有限域中多项式罗斯型定理的改进估计，《数学分析杂志》，141 (2020)，689–705。[10] P. Durcik, S. Guo, and J. Roos，实数轴上的多项式罗斯定理，《美国数学会汇刊》，371 (2019)，第 10 期，6973–6993。[11] K. Falconer，分形集的几何学，剑桥数学论丛第 85 卷，剑桥：剑桥大学出版社。[12] K. Falconer and A. Yavicoli，$\mathbb{R}^d$中厚紧集的交，《数学杂志》，301 (2022)，第 3 期，2291–2315。[13] R. Fraser, S. Guo, and M. Pramanik，分数维集上的多项式罗斯定理，《国际数学研究通知》，(2022)，第 10 期，7809–7838。

[14] H. Furstenberg，对角测度的遍历行为与 Szemer ´edi 关于等差数列的定理，《数学分析杂志》，71 (1977)，204–256。[15] W. T. Gowers，稀疏集中的等差数列，《数学新进展》（2000），第 149–196 页。国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2001。[16] A. Greenleaf, A. Iosevich, and K. Taylor，具有非空内部的构形集，《几何分析杂志》，31 (2021)，第 7 期，6662–6680。[17] A. Greenleaf, A. Iosevich, and K. Taylor，具有非空内部的 k点构形集，《Mathematika》，68 (2022)，第 1 期，163–190。[18] R. Han, M. T. Lacey, and F. Yang，有限域中角形构形的多项式罗斯定理，《Mathematika》，67 (2021)，第 4 期，885–896。[19] K. Henriot, I. Laba, and M. Pramanik，分形集上的多项式构形，《分析与偏微分方程》，9 (2016)，第 5 期，1153–1184。[20] J.-P. Kahane，《函数随机级数》，剑桥大学出版社，第二版，英国剑桥，1985。[21] T. Keleti，实数中的一个一维子集，它与自身任一平移的交至多为一个点，《实分析交流》，24 (1998/99)，第 2 期，843–844。[22] T. Keleti，构造不含给定模式相似副本的实数一维子集，《分析与偏微分方程》，1 (2008)，第 1 期，29–33。[23] S. A. Kline，关于分数维曲线，《伦敦数学学会杂志》，20 (1945)，第 2 期，79–86。[24] B. Kuca，有限域上多项式 Szemer ´edi 定理的进一步界，《算术学报》，198 (2021)，77–108。[25] B. Kuca，有限域上不同次数多项式的多维多项式 Szemer ´edi 定理，《以色列数学杂志》（即将出版），2022。[26] B. Kuca, T. Orponen, and T. Sahlsten，关于连续型 S ´ark ¨ozy 问题，arXiv:2110.15065v2[经典分析], 2021,即将在《国际数学研究通知》发表。[27] I. Laba and M. Pramanik，分数维集中的等差数列，《几何与泛函分析》，19 (2009)，第 2 期，429–456。[28] E. R. Love and L. C. Young，论一类线 ´性泛函，《基础数学》，28 (1937)，第 1 期，243–257。[29] P. L´evy，《随机过程与布朗运动》，Gauthier-Villars，巴黎，265，1948。[30] P. L´evy，《布朗运动曲线的豪斯多夫测度》，《意大利精算师学会学报》，16 (1953)，1–37。[31] P. Maga，不含给定模式的全维集，《实分析交流》，36 (2010/11)，第 1 期，79–90。[32] A. Math´e，不含多项式构形的大维数集，《数学进展》，316 (2017)，691–709。[33] P. Mattila，《欧几里得空间中集合与测度的几何学》，剑桥大学出版社，英国剑桥，1995。[34] P. Mattila，《傅里叶分析与豪斯多夫维数》，剑桥大学出版社，英国剑桥，2015。[35] S. Peluse，有限域上的多项式 Szemer ´edi 定理，《杜克数学杂志》，168 (2019)，第 5 期，749–774。[36] S. Peluse，无多项式数列集的界，《数学论坛·派》，8 (2020)。[37] S. Peluse andS. Prendiville，非线性罗斯定理的多对数界，《国际数学研究通知》(2020)，5658–5684 [38] A. Rice，Furstenberg–S ´ark ¨ozy 定理已知最佳界的极大推广，《算术学报》，187 (2019)，1–41。[39] A. S´ark¨ozy，论整数序列的差集 I，《匈牙利科学院数学学报》，31 (1978)，第 1–2 期，125–149。[40] A. S´ark¨ozy，论整数序列的差集 III，《匈牙利数学学报》，31 (1978)，355–386。[41] P. Shmerkin，不含等差数列的塞勒姆集，《国际数学研究通知》IMRN，(2017) 第 7 期，1929–1941。[42] P. Shmerkin and V. Suomala，随机分形中的模式，《美国数学杂志》，142 (2020)，第 3 期，683–749。[43]E. M. Stein，《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》，普林斯顿大学出版社，1993。

[44] S.J.Taylor, 《 n空间中布朗路径的豪斯多夫 α维测度》, 《剑桥哲学学会数学汇刊》, 49（1953）, 第 1 期, 31–39。[45] A. Yavicoli, 《避开线性模式的大集合》, 《美国数学学会会刊》, 149（2021）, 第 10期, 4057–4066。[46] A.Yavicoli, 《厚紧集中的模式》, 《以色列数学杂志》244（2021）, 第1 期, 95–126。[47] L.Yoder, 《 d空间中 N 参数布朗运动的图与值域的豪斯多夫维数》, 《概率年刊》, 3（1975）, 第 1 期, 169–171。

Department of Mathematics, 1984 Mathematics Road, University of British Columbia, Vancouver, BC V6T 1Z2, Canada电子邮箱地址: bbruce@math.ubc.ca, malabika@math.ubc.ca