arXiv:2304.02900v1 [math.AC] 6 Apr 2023

与剩余域余核相关的 Ext 模

YUYA OTAKE

Abstract. 令 R 为交换诺特环。在本文中，我们探究了模 M 嵌入到一个投射维数至多为 n 的模中，与 M 的第 n个上同调核的（$n+1$）-无挠性之间的密切关系。作为应用，当 R 为局部环且剩余域为 k 时，我们计算了与 k 的余核相关的 Ext 模作为 k-向量空间的维数。

1. Introduction

在本文中，设 R 是一个交换诺特环。我们假设所有模都是有限生成模。Auslander和 Bridger [1] 建立了诺特环上有限生成模的稳定范畴理论。n-挠自由模的概念是整环上挠自由模概念的自然推广，在稳定模理论中发挥着重要作用。除此之外，Auslander和 Bridger 研究了 n-上同调核模何时成为 n-挠自由模，并证明了如下逼近定理。

定理 1.1（Auslander–Bridger）。设 M 是一个 R-模，且 $n \geqslant 0$ 是一个整数。以下条件等价。

(1) 第M 个上同调模是 Ω^n-挠自由的。(2) 存在一个 R-模的正合列 $0 \to B \to J \to M \to 0$，使得 B 的投射维数至多为 $n-1$，并且对所有整数 $1 \leqslant i \leqslant n$，都有 $\operatorname{Ext}^i_R(J, R) = 0$。

Simon [10] 将定理 1.1(2) 中出现的正合列称为 M 的 n-逼近，并将其对偶版本称为 M的 n-包络。由定理 1.1 可知，Gorenstein 局部环上的任意模都有 Auslander 和 Buchweitz [2]意义下的 Cohen–Macaulay 逼近。文献[2] 还证明了，在 Gorenstein 局部环上，任意模都有有限投射包络，这是 Cohen–Macaulay 逼近的对偶概念。具体而言，对于 Gorenstein 局部环 R上的任意模 M，存在一个 R-模的正合列 $0 \to M \to W \to C \to 0$，使得 W 具有有限投射维数，且 C 是极大 Cohen–Macaulay 模。特别地，Gorenstein 局部环上的每个模都能嵌入到一个有限投射维数的模中。反过来，Foxby [5] 证明，若 R 是 Cohen–Macaulay 局部环，且每个 R-模都能嵌入到一个有限投射维数的 R-模中，那么 R 是 Gorenstein 的。Takahashi、Yassemi 和 Yoshino [11] 成功地从 Foxby 定理中去掉了对环 R为 Cohen–Macaulay 的假设。

本文中，对于固定的整数 n，我们首先考虑将给定的模嵌入到投射维数至多为 n 的模中。具体而言，我们的首要目标是探讨以下问题。

问题 1.2。设 M 是一个 R-模，且 n 是一个非负整数。何时可以将 M 嵌入一个投射维数至多为 n 的 R-模中?

我们对问题1.2 的回答如下定理，该定理表明，这个问题与 n 阶余核的 $(n+1)$-无挠性密切相关。

定理 1.3（定理 2.3）。设 M为一个 R-模，且 $n \geqslant 0$ 为一个整数。如果$\Omega^n M$是 $(n+1)$-挠自由的，那么 M 可以嵌入一个 R-模中，其投射维数至多为 n。反之，如果对于具有深度 $R_\mathfrak{p} < n$ 的 R 的所有素理想 $\mathfrak{p}$，$M_\mathfrak{p}$在 $R_\mathfrak{p}$ 上具有有限 Gorenstein 维数，则结论也成立。

作为上述定理的一个应用，我们重新得到 Takahashi、Yassemi 和 Yoshino 在推论 2.4 中的结果。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13D02，13D07。
Key words and phrases. n-挠自由模，n-上同调核模，n-球面模，投射维数，Gorenstein 环

接下来，我们考虑 R 是局部环、剩余域为 k 且深度为 t 的情形。最近，Dey和 Takahashi [4] 研究了 k 的余核的无挠性。他们特别在 [4, 定理 4.1(2) 和4.5(1)] 中证明了 $\Omega^t k$ 是$(t+1)$-挠自由的，并且它是一个$(t+2)$nd上同调核，当且仅当局部环 R 的型数为一。受他们结果的启发，作为定理 1.3 的另一个应用，我们考虑对于一个 R-模 M 以及正整数 i、j， R-模 $\operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Tr}\Omega^j k, M)$的长度，其中 $\operatorname{Tr}(-)$是（Auslander）转置。我们证明，如果 M 的深度至少为 t，则对于所有整数 $i>0$，模$\operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Tr}\Omega^t k, M)$ 是一个 k-向量空间，并计算其作为 k-向量空间的维数。令 $M=R$ 代入我们的计算，便得到以下推论。

推论 1.4（推论 3.7）。设 R 是剩余域为 k、深度为 t 的局部环。则以下结论成立。

(1) 当且仅当局部环 R 的型数为一时，上同调核 $\Omega^t k$ 是 $(t+2)$-挠自由。(2) 存在某个 $i\geqslant t+3$ 使得 $\operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Tr}\Omega^t k, R)=0$，当且仅当环 R 是 Gorenstein。

如果 $\Omega^t k$ 是$(t+2)$-挠自由的，那么特别地，它是一个 $(t+2)$阶上同调核，因此根据上文提到的Dey和Takahashi 的结果， R 具有型数为一。推论 1.4(1)断言逆命题也成立。换言之，Dey 和Takahashi 给出的等价条件也等价于$\Omega^t k$的$(t+2)$-无挠性。此外，由推论 1.4(2)可知，如果 $\Omega^t k$ 是 $(t+3)$-挠自由的，那么 R 是 Gorenstein。

本文的组织如下。在第2节中，我们考察给定的模何时可以嵌入到一个具有有限投射维数的模中。我们在本节中证明上述定理1.3，并陈述一些推论和例子。在第 3节中，当 R 为局部时，我们证明与 R 的剩余域相关的某些 Ext 模是剩余域上的向量空间，并计算它们的维数，作为上一节所得结果的一个应用；该结果给出了上述推论 1.4。

2. Modules embedded in modules of finite projective dimension

在本节中，我们研究给定的 R-模何时可以嵌入一个具有有限投射维数的 R-模中。本节的主要结果回答了这一问题，并用于计算下一节中 Ext 模的长度。

首先，我们介绍一些基本的记号和概念。

记号2.1. (1) 设 M 和 N 是 R-模。我们用 $M\approx N$ 表示存在投射模 P 和 Q，使得 $M\oplus P\cong N\oplus Q$。

(2) 我们将 $(-)^*$ 称为 R-对偶函子 $\operatorname{Hom}_R(-,R)$。

以下概念在 [1] 中被引入，并在本文中发挥着重要作用。

定义 2.2。（1）设 M 为一个 R-模， $P_1\xrightarrow{\partial}P_0\to M\to 0$ 为 M的一个投射表示。 M的（第一）上同调核 ΩM和（Auslander）转置 $\operatorname{Tr} M$分别定义为 $\operatorname{Im}\partial$和余核$\partial^*$。模 ΩM 和 $\operatorname{Tr} M$ 由 M 唯一确定，但相差投射直和项。对于任意整数$n>0$， M 的 n阶上同调核 $\Omega^n M$ 归纳定义为 $\Omega^n M=\Omega(\Omega^{n-1}M)$。（2） [1, 定义 2.15] 设 $n\geqslant 0$ 为一个整数。若对于所有整数 $1\leqslant i\leqslant n$，均有 $\operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Tr} M,R)=0$，则称 M 为 R-$n\geqslant 0$ 挠自由模。若一个 R-模 M 是 1-挠自由的，则称其为无挠；若其是 2-挠自由的，则称其为自反。（3） [1, 定义 2.35] 设 $n>0$ 为一个整数。若对于所有整数 $1\leqslant i\leqslant n-1$，均有 $\operatorname{Ext}^i_R(M,R)=0$，且 M 的投射维数至多为 n，则称 M 为 R- $n>0$ -球面模。（4） [1, 定义 3.7] 若对于所有整数 $i>0$，均有 $\operatorname{Ext}^i_R(M,R)=0$ 且 $\operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Tr} M,R)=0$，则称 M 为 Gorenstein 投射模。 M的 Gorenstein 维数定义为满足存在一个正合列 $0\to G_n\to G_{n-1}\to\cdots\to G_1\to G_0\to M\to 0$ 的整数 n 的下确界，其中该正合列由 R-模构成，且 G_i 为 Gorenstein 投射模，并记为 $\operatorname{G-dim}_R M$。

以下定理是本节的主要结果。该定理描述了问题 1.2 与各种条件之间的关系，其中包括 n 阶余核的 $(n+1)$-无挠性。

定理 2.3. 设 M 是一个 R-模，且 n 是一个非负整数。考虑以下条件。

(1) 模$\Omega^n M$是 $(n+1)^n$-挠自由的。(2) 存在一个 R-模的正合列 $0\to M\to W\to C\to 0$，使得 W 的投射维数至多为 n，且 $C\approx\operatorname{Tr}\Omega^{n+1}\operatorname{Tr}\Omega^n M$。

(3) 存在一个 R-模的正合列 $0 \to M \to W \to C \to 0$，使得 W 的投射维数至多为 n，并且对所有 $1 \leqslant i \leqslant n+1$，$\mathrm{Ext}^i(C, R) = 0$。(4) 模 M 可以嵌入到一个投射维数至多为 n. (5) 模 $\Omega^n M$ 是第 $(n+1)$ 个上同调核。

那么蕴含关系 (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3) $\implies$ (4) $\implies$ (5)成立。若$\mathrm{G\text{-}dim}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} < \infty$ 对 R 的所有满足深度 $R_\mathfrak{p} < n$的素理想 $\mathfrak{p}$ 都成立，则这五个条件彼此等价。

证明。假设 $\Omega^n M$ 是 $(n+1)$-挠自由。特别地，由于$\Omega^n M$是 n-挠自由，存在一个正合列 $0 \to B \to \mathrm{J}_n(M) \to M \to 0$，使得 B 的投射维数至多为 $n-1$，并且 $\mathrm{J}_n(M) \approx \mathrm{Tr}\,\Omega^n \mathrm{Tr}\,\Omega^n M$，根据命题2.21]。由于根据假设，$\mathrm{J}_n(M)$ 是无挠的，我们有一个正合列 $0 \to \mathrm{J}_n(M) \to P \to \mathrm{Tr}\,\Omega\mathrm{Tr}\mathrm{J}_n(M) \to 0$，其中 P是投射的。令 $C = \mathrm{Tr}\,\Omega\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{J}_n(M)$。我们构造推出图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & B & \to & \mathrm{J}_n(M) & \to & M & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & B & \to & P & \to & W & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & C & = & C & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0. & &
\end{array}$$

注意，W 的投射维数至多为 n，且

$$C \cong \mathrm{Tr}\,\Omega\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{J}_n(M) \cong \mathrm{Tr}\,\Omega\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{Tr}\,\Omega^n\,\mathrm{Tr}\,\Omega^n M \approx \mathrm{Tr}\,\Omega^{n+1}\,\mathrm{Tr}\,\Omega^n M.$$

因此，蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (2) 成立。由 [6, 命题 1.1.1]可得蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (3)。假设条件 (3) 成立。那么存在正合列 $0 \to M \to W \to C \to 0$，使得 W的投射维数至多为 n，且对所有整数 $1 \leqslant i \leqslant n+1$，$\mathrm{Ext}^i(C, R) = 0$。反复应用马蹄引理，可得正合列 $0 \to M' \to W' \to C' \to 0$，使得$M' \approx \Omega^n M$、$W' \approx \Omega^n W$且 $C' \approx \Omega^n C$。由于 W'是投射的，我们有 $\Omega^n M \approx \Omega^{n+1} C$。由 [6, 命题 1.1.1]，，$\Omega^n M$ 是 $(n+1)$-挠自由的，因此蕴含关系 (3) $\Rightarrow$ (1) 成立。蕴含关系 (3) $\Rightarrow$ (4) 显然成立。按照蕴含关系 (3) $\Rightarrow$ (1) 的证明取 Ω^n，即可得到蕴含关系 (4) $\Rightarrow$ (5)。在对 R的所有满足深度 $R_\mathfrak{p} < n$的素理想 $\mathfrak{p}$，均有 $\mathrm{G\text{-}dim}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} < \infty$这一假设下，如果 $\Omega^n M$是一个 $(n+1)$ 阶上同调核，那么由 [7, 定理 43]，$\Omega^n M$是 $(n+1)$-挠自由的。■

Simon [10] 将定理 2.3(3) 中出现的正合列称为 M 的 $(n+1)$-包络。n-包络的存在性也在 [10, 定理 2.18] 中讨论。n- 逼近和 n- 包络的极小性则在 [10, 第 3] 节中研究。

我们可以直接从定理 2.3 推出 Takahashi、Yassemi 和 Yoshino [11, 推论 2.4] 中的结果 .

推论 2.4（Takahashi–Yassemi–Yoshino）。设 R 是局部的，且深度为 t。令 k 为 R 的剩余域。则以下条件等价。
(1) 环 R 是 Gorenstein。 (2) 任意 R-模都可以嵌入一个有限投射维数的 R-模中。
(3) 模 $\mathrm{Tr}\,\Omega^t k$ 可以嵌入一个有限投射维数的 R-模中。

证明。假设 R 是Gorenstein的。那么对于任意 R-模 M， $t$th上同调核$\Omega^t M$ 是极大Cohen–Macaulay模。根据 [3, 定理3.3, 10], $\Omega^t M$ 是$(t+1)$-挠自由的，并且由定理2.3 可得蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (2)。蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (3)显然。设$\mathrm{Tr}\Omega^t k$ 是某个有限投射维数 R-模的子模。由定理 2.3 可知，$\Omega^t\,\mathrm{Tr}\,\Omega^t k$ 是$(t+1)$-挠自由的。特别是，$\mathrm{Ext}^1(\Omega^t\,\mathrm{Tr}\Omega^t\,\mathrm{Tr}\,\Omega^t k, R) = \mathrm{Ext}^{t+1}(\mathrm{Tr}\,\Omega^t\,\mathrm{Tr}\,\Omega^t k, R) = 0$。由于 $\mathrm{Ext}^1(\Omega^t k, R)$是 $\mathrm{Ext}^1(\Omega^t\,\mathrm{Tr}\,\Omega^t\,\mathrm{Tr}\,\Omega^t k, R)$ 的直和项，我们有$\mathrm{Ext}^{t+1}(k, R) = \mathrm{Ext}^1(\Omega^t k, R) = 0$，并且由 [9, II. 定理 2] 可得蕴含关系 (3) $\Rightarrow$ (1)。■

下面的推论是证明定理 3.4 所必需的；定理 3.4 是本文的主要定理之一。对于局部环 $(R, \mathfrak{m}, k)$，我们用 $\mathrm{r}(R)$ 表示 R 的型，也就是说，$\mathrm{r}(R)$ 是向量空间 $\mathrm{Ext}_R^{\operatorname{depth} R}(k, R)$ 在 R 的剩余域 k 上的维数。

推论 2.5. 假设 R 是局部环且深度为 t。令 k 为 R 的剩余域。那么存在正合列 $0 \to k \to W \to C \to 0$，使得 W 的投射维数为 t，且 $C \approx \operatorname{Tr}\Omega^{t+1}\operatorname{Tr}\Omega^{t}k$。此外，如果 $t>0$，那么 $W \approx \operatorname{Tr}\Omega^{t-1}(k^{\oplus \mathrm{r}(R)})$。

为了证明上述推论，我们需要以下引理，该引理可直接由 [8,定理 2.7(1)]得到。

引理 2.6. [8, 定理 2.7] 令 W 是一个 R-模，且 s 是一个正整数。如果 W 是 s-球面的，则$W \approx \operatorname{Tr}\Omega^{s-1}\operatorname{Ext}^{s}_{R}(W,R)$。

推论2.5 的证明。由 [4, 定理4.1(2)], $\Omega^{t}k$ 是 $(t+1)$-挠自由的。由定理2.3 可知，存在一个正合列 $0 \to k \to W \to C \to 0$，使得 W 的投射维数至多为 t，且 $C \approx \operatorname{Tr}\Omega^{t+1}\operatorname{Tr}\Omega^{t}k$。我们假设 t 为正。于是由于对于所有$1 \leqslant i \leqslant t-1$，$\operatorname{Ext}^{i}(k,R) = 0 = \operatorname{Ext}^{i}(C,R)$，$W$也如此。因此，$W$是 t-球面的，并且$\operatorname{Ext}^{t}(W,R) \cong \operatorname{Ext}^{t}(k,R) \cong k^{\oplus \mathrm{r}(R)}$。由引理 2.6，我们得到 $W \approx \operatorname{Tr}\Omega^{t-1}\operatorname{Ext}^{t}(W,R) \cong \operatorname{Tr}\Omega^{t-1}(k^{\oplus \mathrm{r}(R)})$。■

Ext 模的级数是 Auslander 和 Bridger 理论的主要研究对象之一；参见 [1,第 2 章和 4]。回顾一下，R-模 M 的级数定义为满足 $\operatorname{Ext}^{i}_{R}(M,R) \neq 0$的整数 i 的下确界，记作 $\operatorname{grade}_{R} M$。下面陈述定理 2.3 与 Auslander 和 Bridger 所给出的级数条件之间的关系。

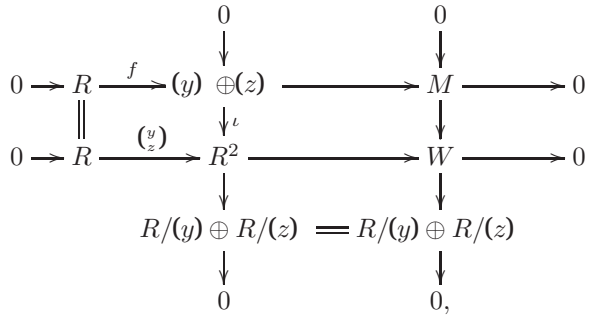
推论 2.7。设 $n \geqslant 0$ 为一个整数，M 为一个 R-模。若 $\Omega^{n}M$ 是 $(n+1)$-挠自由的，则对于所有整数 $1 \leqslant i \leqslant n$，都有 $\operatorname{grade}_{R} \operatorname{Ext}^{i}_{R}(M,R) \geqslant i$。

证明。由定理 2.3，存在一个 $0 \to M \to W \to C \to 0$ 由 R-模组成的正合列，使得 W 的投射维数至多为 n，且对于所有 $1 \leqslant i \leqslant n+1$，$\operatorname{Ext}^{i}(C,R) = 0$。因此，对于所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，我们有 $\operatorname{Ext}^{i}(M,R) \cong \operatorname{Ext}^{i}(W,R)$。由于 W具有有限投射维数，根据 [1, 推论 4.17]，对于所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，$\operatorname{grade}\operatorname{Ext}^{i}(M,R) = \operatorname{grade}\operatorname{Ext}^{i}(W,R) \geqslant i$。■

我们以给出定理 2.3 的一个例子结束本节。下面的例子表明，定理 2.3 中的蕴含 (4) $\Longrightarrow$ (1) 一般并不成立。

例 2.8。令 $R = k[\![x,y,z]\!]/(x^2, xy, y^2z)$。则 R是一个 1 维 Cohen–Macaulay 局部环，且$y+z$是一个参数。在此我们构造一个 R-模 M，使得 M不是无挠的（即不能嵌入任何自由模中），但可以嵌入一个投射维数为一的模中，并且 ΩM 不是自反的。在此情形下，模 M 满足定理 2.3 中的条件 (4)，但不满足条件 (1)。

我们将 $f\colon R \to (y) \oplus (z)$ 记为由 $f(1) = \binom{y}{z}$给出的 R-同态。注意，由希尔伯特–伯奇定理 [3, 定理1.4.17], , 同态$\binom{y}{z}\colon R \to R^2$ 是单射，因此 f 也是单射。令 $M = $余核 f和 $W = $余核$\binom{y}{z}$。我们得到具有正合行与列的交换图



其中 $\iota\colon (y) \oplus (z) \to R^2$ 是自然嵌入。将 $\operatorname{Hom}_{R}(k,-)$ 作用于上方交换图的第一行，可得正合列

$$0 = \operatorname{Hom}_{R}(k,R^2) \to \operatorname{Hom}_{R}(k,W) \to \operatorname{Ext}^{1}_{R}(k,R) \xrightarrow{0} \operatorname{Ext}^{1}_{R}(k,R^2).$$

由于 R具有型 2，$\operatorname{Hom}_{R}(k,W)$ 同构于 $k^{\oplus 2}$。此外，根据上图的第二列，我们有正合列

$$0 \to \operatorname{Hom}_{R}(k,M) \to \operatorname{Hom}_{R}(k,W) \to \operatorname{Hom}_{R}(k,R/(y)) \oplus \operatorname{Hom}_{R}(k,R/(z)).$$

注意，深度$_R R/(y) > 0$，深度$_R R/(z) = 0$和 $R/(z)$ 的型为 1。我们得出$\mathrm{Hom}_R(k, M) \neq 0$，即深度$_R M = 0$。特别地，$M$ 不是无挠的。

接下来，我们证明 ΩM 不是自反的。由于 $\Omega M \approx \Omega^2(R/(y)) \oplus \Omega^2(R/(z))$，只需证明 $\Omega^2(R/(y))$ 不是自反的。根据 [1, 命题 2.26], ，这等价于证明等式 $\operatorname{grade}_R \operatorname{Ext}^2_R(R/(y)\ R) = 0$。令 $\mathfrak{p} = (x, y)$。理想 $\mathfrak{p}$ 是 R的一个极小素理想，而 $R_\mathfrak{p} \cong k[\![x, y, z]\!]_{(x,y)}/(x^2, xy, y^2)$ 是一个阿廷非 Gorenstein 局部环。因此我们有

$$\operatorname{Ext}^1_{R_\mathfrak{p}}((x)R_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) \oplus \operatorname{Ext}^1_{R_\mathfrak{p}}((y)R_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) \cong \operatorname{Ext}^1_{R_\mathfrak{p}}((x, y)R_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) \cong \operatorname{Ext}^2_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) \neq 0.$$

由对称性可得 $\operatorname{Ext}^1_{R_\mathfrak{p}}((y)R_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p})$ 非零。现在 $0 \neq \operatorname{Ext}^1_{R_\mathfrak{p}}((y)R_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) \cong \operatorname{Ext}^2_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/(y)R_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) \cong \operatorname{Ext}^2_R(R/(y)\ R)_\mathfrak{p}$，因此 $\operatorname{grade}_R \operatorname{Ext}^2_R(R/(y)\ R) = 0$。

3. Dimensions of Ext modules related to the residue field

在本节中，当 R 是局部时，我们利用上一节得到的结果，计算与 R 的剩余域相关的 Ext 模的长度。为此，我们需要以下引理。

引理3.1。设 n 是一个正整数，并设 M 和 N 是 R-模。如果对于所有整数$1 \leqslant i \leqslant n-1$，$\operatorname{Ext}^i_R(M, R) = 0$，则对于所有整数 $1 \leqslant j \leqslant n-1$，$\operatorname{Ext}^j_R(M, N) \cong \operatorname{Tor}^R_{n-j}(\operatorname{Tr}\Omega^{n-1}M, N)$，且$\operatorname{Tor}^R_j(M, N) \cong \operatorname{Ext}^{n-j}_R(\operatorname{Tr}\Omega^{n-1}M, N)$。此外，如果 M 是 n-球面的，则对于所有整数 $1 \leqslant j \leqslant n$，$\operatorname{Ext}^j_R(M, N) \cong \operatorname{Tor}^R_{n-j}(\operatorname{Ext}^n_R(M, R)\ N)$，且$\operatorname{Tor}^R_j(M, N) \cong \operatorname{Ext}^{n-j}_R(\operatorname{Ext}^n_R(M, R)\ N)$。

证明。设 $P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$是 M的投射分解。由于对所有 $1 \leqslant i \leqslant n-1$，$\operatorname{Ext}^i(M, R) = 0$，因此 R-对偶 $P_0^* \to P_1^* \to \cdots \to P_{n-1}^* \to P_n^* \to \operatorname{Tr}\Omega^{n-1}M \to 0$是正合的。我们有如下复形同构

$$\begin{array}{ccccccccc} P_0^* \otimes N & \longrightarrow & P_1^* \otimes N & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{n-1}^* \otimes N & \longrightarrow & P_n^* \otimes N \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \operatorname{Hom}(P_0, N) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(P_1, N) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(P_{n-1}, N) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(P_n, N). \end{array}$$

因此，对所有 $1 \leqslant j \leqslant n-1$，$\operatorname{Ext}^j(M, N) \cong \operatorname{Tor}^{n-j}(\operatorname{Tr}\Omega^{n-1}M, N)$。若 M是 n-球面的，则 $\operatorname{Tr}\Omega^{n-1}M \approx \operatorname{Ext}^n(M, R)$；参见 [8, 定理 2.7]。我们只需证明 $j = n$的情形。在这种情况下，根据上面的复形同构，我们有 $\operatorname{Ext}^n(M, N) \cong \operatorname{Coker}(\operatorname{Hom}(P_{n-1}, N) \to \operatorname{Hom}(P_n, N)) \cong \operatorname{Coker}(P_{n-1}^* \otimes N \to P_n^* \otimes N) \cong \operatorname{Ext}^n(M, R) \otimes N$。对偶命题的证明类似。■

设 R 是一个极大理想为 $\mathfrak{m}$ 的局部环，且 M 是一个 R-模。对于所有整数 i，M 的第 i 个 Betti 数 $\beta_i(M)$（分别地，Bass 数 $\mu_i(M)$）定义为 $\dim_{R/\mathfrak{m}} \operatorname{Tor}^R_i(R/\mathfrak{m}, M)$（分别地，$\dim_{R/\mathfrak{m}} \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M)$）。注意，若 $i < 0$，则对于所有模 M，$\beta_i(M) = \mu_i(M) = 0$。

以下断言是上述引理的推论。

引理 3.2. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是深度为 $t > 0$ 的局部环。设 M 是一个 R-模，且 $1 \leqslant j \leqslant t$ 是一个整数。那么，对于所有整数 $i > 0$，模 $\operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Tr}\Omega^{j-1}k, M)$ 和 $\operatorname{Tor}^R_i(\operatorname{Tr}\Omega^{j-1}k, M)$ 是 k-向量空间，其维数分别为 $\beta_{j-i}(M)$ 和 $\mu_{j-i}(M)$。

证明。令 $i > 0$为一个整数。由于$\operatorname{Tr}\Omega^{j-1}k$是 j-球面的，若 $j < i$，则 $\operatorname{Ext}^i(\operatorname{Tr}\Omega^{j-1}k, M)$ 和 $\operatorname{Tor}_i(\operatorname{Tr}\Omega^{j-1}k, M)$ 都是零模。我们可以假设 $j \geqslant i$。注意到$\operatorname{Ext}^j(\operatorname{Tr}\Omega^{j-1}k, R) \cong k$由引理 2.6 得出。利用引理 3.1，我们得到同构

$$\operatorname{Ext}^i(\operatorname{Tr}\Omega^{j-1}k, M) \cong \operatorname{Tor}_{j-i}(\operatorname{Ext}^j(\operatorname{Tr}\Omega^{j-1}k, R), M) \cong \operatorname{Tor}_{j-i}(k, M) \cong k^{\oplus\beta_{j-i}(M)}$$

以及同构射

$$\operatorname{Tor}_i(\operatorname{Tr}\Omega^{j-1}k, M) \cong \operatorname{Ext}^{j-i}(\operatorname{Ext}^j(\operatorname{Tr}\Omega^{j-1}k, R), M) \cong \operatorname{Ext}^{j-i}(k, M) \cong k^{\oplus\mu_{j-i}(M)}.$$

■

对于一个短正合列，如果其 R-对偶也是正合的，那么 Tor 和Ext 的长正合列满足以下结论。本引理对于在本节主要结果的证明中计算 Ext 模的维数是必要的。

引理3.3。设 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 是一个 R-模的正合列。假设 R-对偶 $0 \to C^* \xrightarrow{g^*} B^* \xrightarrow{f^*} A^* \to 0$ 也是正合的。那么对于任意 R-模 X，存在一个长正合列

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^R(A, X) \to \mathrm{Tor}_1^R(B, X) \to \mathrm{Tor}_1^R(C, X) \to \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Tr}\ A, X) \to \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Tr}\, B, X) \to \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Tr}\ C, X) \to \cdots.$$

证明。由马蹄引理可得交换图。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & P_1 & \to & P_1 \oplus Q_1 & \to & Q_1 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & P_0 & \to & P_0 \oplus Q_0 & \to & Q_0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

具有正合行与列，其中 P_i 和 Q_i 对于 $i = 0$是投射的，1. 由于 $0 \to C^* \xrightarrow{g^*} B^* \xrightarrow{f^*} A^* \to 0$是正合的， R-对偶图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C^* & \to & B^* & \to & A^* & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Q_0^* & \to & (P_0 \oplus Q_0)^* & \to & P_0^* & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Q_1^* & \to & (P_1 \oplus Q_1)^* & \to & P_1^* & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & T_C & \xrightarrow{t_g} & T_B & \to & T_A & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

具有正合行与列，其中 $T_A \approx \mathrm{Tr}\, A$、 $T_B \approx \mathrm{Tr}\ B$ 以及 $T_C \approx \mathrm{Tr}\, C$。取$\mathrm{Hom}(-, X)$，我们得到一个具有正合行与列的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(T_A, X) & \to & \mathrm{Hom}(T_B, X) & \to & \mathrm{Hom}(T_C, X) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(P_1^*, X) & \to & \mathrm{Hom}((P_1 \oplus Q_1)^*, X) & \to & \mathrm{Hom}(Q_1^*, X) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(P_0^*, X) & \to & \mathrm{Hom}((P_0 \oplus Q_0)^*, X) & \to & \mathrm{Hom}(Q_0 *, X) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & A \otimes X & \to & B \otimes X & \to & C \otimes X & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0. & &
\end{array}$$

根据蛇引理，我们有一个正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}(T_A, X) \to \mathrm{Hom}(T_B, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(t_g, X)} \mathrm{Hom}(T_C, X) \to A \otimes X \xrightarrow{f \otimes X} B \otimes X \to C \otimes X \to 0.$$

此外，还有长正合列。

$$0 \to \mathrm{Hom}(T_A, X) \to \mathrm{Hom}(T_B, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(t_g, X)} \mathrm{Hom}(T_C, X) \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Tr}\, A, X) \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Tr}\ B, X) \to \cdots$$

and

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1(A, X) \to \mathrm{Tor}_1(B, X) \to \mathrm{Tor}_1(C, X) \to A \otimes X \xrightarrow{f \otimes X} B \otimes X \to C \otimes X \to 0.$$

通过连接这些序列，我们得到了所需的长正合列。 ■

利用本节得到的结果和推论 2.5，我们可以证明以下定理，这是本节的主要结果。以下定理可视为关于局部环 R 的剩余域的余核的 n 无挠性的一些结果的推广；参见推论 3.6 和 3.7。

定理 3.4. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是深度为 t 的局部环，且 M 是一个深度至少为 t 的 R-模。那么，对于所有整数 $i>0$，模 $\operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Tr}\Omega^t k,M)$ 都是一个 k-向量空间，并且下列结论成立。
(1) 对所有整数 $1\leqslant i\leqslant t$，有 $\dim_k\operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Tr}\Omega^t k,M)=\beta_{t-i+1}(M)$。 (2) 有 $\dim_k\operatorname{Ext}^{t+1}_R(\operatorname{Tr}\Omega^t k,M)-\dim_k\operatorname{Ext}^{t+2}_R(\operatorname{Tr}\Omega^t k,M)=\beta_0(M)-r(R)\mu_t(M)$。 (3) 对所有整数 $i\geqslant t+3$，有 $\dim_k\operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Tr}\Omega^t k,M)=\mathrm{r}(R)\mu_{i-2}(M)$。

证明。假设 $t=0$。由命题 2.6(a)，存在一个正合列 $0\to\operatorname{Ext}^1(\operatorname{Tr}k,M)\to k\otimes M\to\operatorname{Hom}(k^*,M)\to\operatorname{Ext}^2(\operatorname{Tr}k,M)\to 0$。由于 $k\otimes M\cong k^{\oplus\beta_0(M)}$ 且 $\operatorname{Hom}(k^*,M)\cong\operatorname{Hom}(k^{\oplus\mathrm{r}(R)},M)\cong_k{}^{\oplus\mathrm{r}(R)}\mu_0(M)$，断言 (2) 得证。此外，由于 $\Omega^2\operatorname{Tr}k\approx k^*\cong k^{\mathrm{r}(R)}$，对所有 $i>2$，有 $\operatorname{Ext}^i(\operatorname{Tr}k,M)\cong\operatorname{Ext}^{i-2}(\Omega^2\operatorname{Tr}k,M)\cong k^{\oplus\mathrm{r}(R)\mu_{i-2}(M)}$。在此情形下，所需结果得证。

接下来，我们处理 t 为正的情形。由推论 2.5，存在一个正合列 $0\to k\to W\to C\to 0$，使得 $W\approx\operatorname{Tr}\Omega^{t-1}(k^{\oplus\mathrm{r}(R)})$ 且 $C\approx\operatorname{Tr}\Omega^{t+1}\operatorname{Tr}\Omega^t k$。存在一个正合列

$$\operatorname{Tor}_{i+1}(W,M)\to\operatorname{Tor}_{i+1}(C,M)\to\operatorname{Tor}_i(k,M)\to\operatorname{Tor}_i(W,M)$$

对于任意整数 i。由于 W 是 t-球面的，因此对所有 $i>t$，$\operatorname{Tor}_i(W,M)=0$。此外，由引理 3.1，我们有如下同构。

$$\operatorname{Tor}_i(W,M)\cong\operatorname{Ext}^{t-i}(\operatorname{Ext}^t(W,R),M)\cong\operatorname{Ext}^{t-i}(\operatorname{Ext}^t(\operatorname{Tr}\Omega^{t-1}k,R),M)^{\oplus\mathrm{r}(R)}\cong\operatorname{Ext}^{t-i}(k,M)^{\oplus\mathrm{r}(R)}$$

对于任意整数 $1\leqslant i\leqslant t$。由这些同构以及关于 M 的假设，我们得到，对于所有整数 $1\leqslant i\leqslant t$，$\operatorname{Tor}_i(W,M)=0$。因此，对于所有 $i>0$，$\operatorname{Tor}_i(W,M)=0$，也就是说，对于所有 $i>0$，$\operatorname{Tor}_{i+1}(C,M)\cong\operatorname{Tor}_i(k,M)\cong_k{}^{\oplus\beta_i(M)}$。注意，$\Omega^t k$ 是 $(t+1)$-挠自由的，因此由 [6, Proposition 1.1.1] 可知，对于所有整数$1\leqslant i\leqslant t+1$，$\operatorname{Ext}^i(C,R)=0$。我们有

$$\operatorname{Tr}\Omega^{t+1}C\approx\operatorname{Tr}\Omega^{t+1}\operatorname{Tr}\Omega^{t+1}\operatorname{Tr}\Omega^t k\cong\operatorname{Tr}\Omega^t k.$$

利用引理 3.1，我们得到的是

$$\operatorname{Tor}_i(C,M)\cong\operatorname{Ext}^{t+2-i}(\operatorname{Tr}\Omega^{t+1}C,M)\cong\operatorname{Ext}^{t+2-i}(\operatorname{Tr}\Omega^t k,M)$$

对所有整数 $1\leqslant i\leqslant t+1$ 均成立。因此，对所有整数$1\leqslant i\leqslant t$，$\operatorname{Ext}^i(\operatorname{Tr}\Omega^t k,M)\cong\operatorname{Tor}_{t+2-i}(C,M)\cong k^{\oplus\beta_{t+1-i}(M)}$，断言 (1) 得证。此外，正合列 $0\to k\to W\to C\to 0$ 满足引理 3.3 的假设。存在一个长正合列

$$\operatorname{Tor}_1(W,M)\to\operatorname{Tor}_1(C,M)\to\operatorname{Ext}^1(\operatorname{Tr}k,M)\to\operatorname{Ext}^1(\operatorname{Tr}W,M)\to\operatorname{Ext}^1(\operatorname{Tr}C,M)\to\cdots. \tag{3.4.1}$$

注意，$\operatorname{Ext}^i(\operatorname{Tr}W,M)\cong\operatorname{Ext}^{t-1+i}(k,M)^{\oplus\mathrm{r}(R)}\cong_k{}^{\oplus\mathrm{r}(R)\mu_{t-1+i}(M)}$，且对所有 $i>0$，$\operatorname{Ext}^i(\operatorname{Tr}C,M)\cong\operatorname{Ext}^{t+1+i}(\operatorname{Tr}\Omega^t k,M)$。此外，由于 $\operatorname{Tr}k$ 的投射维数至多为一，对所有 $i>1$，$\operatorname{Ext}^i(\operatorname{Tr}k,M)=0$。由长正合列 (3.4.1)，对所有 $i>1$，有 $\operatorname{Ext}^{t+1+i}(\operatorname{Tr}\Omega^t k,M)\cong\operatorname{Ext}^i(\operatorname{Tr}C,M)\cong\operatorname{Ext}^i(\operatorname{Tr}W,M)\cong k^{\oplus\mathrm{r}(R)\mu_{t-1+i}(M)}$。断言 (3) 成立。由引理 3.2，$\operatorname{Ext}^1(\operatorname{Tr}k,M)\cong_k{}^{\oplus\beta_0(M)}$。由于 $\operatorname{Tor}_1(W,M)=0$ 且 $\operatorname{Tor}_1(C,M)\cong\operatorname{Ext}^{t+1}(\operatorname{Tr}\Omega^t k,M)$，由 (3.4.1) 得到正合列$0\to\operatorname{Ext}^{t+1}(\operatorname{Tr}\Omega^t k,M)\to k^{\beta_0(M)}\to k^{\oplus\mathrm{r}(R)\mu_t(M)}\to\operatorname{Ext}^{t+2}(\operatorname{Tr}\Omega^t k,M)\to 0$。断言 (2) 得证。■

注 3.5. 设 M 是一个 R-模，且 I 是 R 的一个理想。我们用 $(0:_M I)$ 表示 M 的子模，它由 M 中满足 $Ix=0$ 的元素 x 组成。假设 R 是局部的，剩余域为 k，且深度为 0。在 $t=0$ 的情形下定理 3.4 的证明中，映射 $\sigma_{k,M}\colon k\otimes_R M\to\operatorname{Hom}_R(k^*,M)$由$\sigma_{k,M}(a\otimes x)(f)=f(a)x$给出，其中 $a\in k$, $x\in M$和 $f\in k^*$。容易看出，映射 $\sigma_{k,M}$ 的像同构于模 $M/(0:_M(0:_R\mathfrak{m}))$，其中 $\mathfrak{m}$ 是 R 的极大理想。因此，根据定理 3.4 的证明，等式 $\dim_k\operatorname{Ext}^1_R(\operatorname{Tr}k,M)=\beta_0(M)-\dim_k M/(0:_M(0:_R\mathfrak{m}))$ 和 $\dim_k\operatorname{Ext}^2_R(\operatorname{Tr}k,M)=\mathrm{r}(R)\mu_0(M)-\dim_k M/(0:_M(0:_R\mathfrak{m}))$ 成立。

在定理 3.4 中令 $M=R$，得到以下推论。

推论 3.6. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 为局部的，且深度为 t。对于所有整数 $i>0$，模 $\operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Tr}\Omega^t k,R)$ 都是一个 k-向量空间，并且满足以下条件。
(1)对所有整数 $1\leqslant i\leqslant t+1$，有 $\operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Tr}\Omega^t k,R)=0$。(2) 有$\dim_k \operatorname{Ext}^{t+2}_R(\operatorname{Tr}\Omega^t k,R)=\mathrm{r}(R)^2-1$。(3) 对所有整数 $i\geqslant t+3$，有 $\dim_k \operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Tr}\Omega^t k,R)=\mathrm{r}(R)\mu_{i-2}(R)$。

证明。断言 (3) 立即由定理 3.4(3)得出。注意，$\Omega^t k$ 是 $(t+1)$-挠自由的，因此 $\operatorname{Ext}^{t+1}(\operatorname{Tr}\Omega^t k,R)=0$。断言 (1) 和 (2) 由定理 3.4(1)(2) 得出。■

以下推论中 (1-a)和(1-b) 的等价性由Dey和Takahashi [4, Theorem4.5(1)] 证明。利用上述推论，我们可以证明这些条件也等价于条件 (1-c)。此外，我们可以给出判定局部环 R 为 Gorenstein 的准则。

推论 3.7. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 为局部的，且深度为 t。以下结论成立。
(1) 以下各项等价。(1-a)局部环 R 的型数为一。
(1-b)模$\Omega^t k$ 是 $(t+2)$-上同调核。(1-c) 模 $\Omega^t k$
是 $(t+2)$-挠自由。
(2) 具有 $\operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Tr}\Omega^t k,R)=0$ 对某个整数 $i\geqslant t+3$ 当且仅当 R 是 Gorenstein。

证明。(1) 等价关系 (1-a) $\Leftrightarrow$ (1-b) 由 [4, 定理 4.5(1)] 得出。等价关系 (1-a) $\Leftrightarrow$ (1-c) 由推论 3.6(1)(2) 得出。

(2)如果 $\operatorname{Ext}^i(\operatorname{Tr}\Omega^t k,R)=0$ 对某个整数 $i\geqslant t+3$成立，那么根据推论 3.6(3)，$\mu_{i-2}(R)=0$。根据 [9, II. 定理 2], ，我们得出 R 是 Gorenstein。反之显然。■

致谢。作者感谢其导师 Ryo Takahashi 提出的许多宝贵意见。

References

[1] M. Auslander; M. Bridger, 《稳定模理论》，美国数学会回忆录 **94** *American Mathematical Society Providence R.I.* 1969。[2] M. Auslander; R.-O. Buchweitz, 《极大 Cohen–Macaulay 逼近的同调理论》，皮埃尔·萨缪尔纪念学术会议（奥赛，1987），*Mém. Soc. Math. France (N.S.)* **38** (1989)，5–37。[3] W. Bruns; J. Herzog, 《Cohen–Macaulay环》，修订版，剑桥高等数学研究 **39** *Cambridge University Press Cambridge* 1998。[4] S. Dey; R. Takahashi, 关于 n- 挠自由模及相关模的子范畴， *Collect. Math.* **74** (2023)，第 1 期，113–132。[5] H.-B.Foxby, Gorenstein环上模的嵌入， *Proc. Amer. Math. Soc.* **36** (1972)，336–340。[6] O. Iyama, 极大正交子范畴上的高维 Auslander–Reiten理论， *Adv. Math.* **210** (2007)，第 1 期，22–50。[7] V. Maşek, 交换诺特环上模的 Gorenstein 维数与挠，*C*omm. Algebra20(2000)，第 12期，5783–5812。[8] Y. Otake, 球面模与挠自由模的稳定范畴， *Proc. Amer. Math. Soc.* (即将出版)，`arXiv:2204.04398`。[9] P. Roberts, 局部环上对偶化复形的两个应用， *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **9**(1976 1, 103 106)，第 – 期。[10] A. M. Simon, 关于诺特环上的 q-逼近与 q-包络，以及 Auslander-Bridger理论的一些改进，*Comm. Algebra* **47** (2019)，第11 期，4496–4519。[11] R. Takahashi; S. Yassemi; Y. Yoshino, 关于嵌入有限同调维数模的存在性，*Proc. Amer. Math. Soc.* **138**(2010)，第 7 期，2265–2268。

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furocho, Chikusaku, Nagoya 464-8602, Japan
Email address: `m21012v@math.nagoya-u.ac.jp`