Wright函数——超几何表示与符号求值

Dimiter Prodanov[1,2]1– *EHS* 和 *NERF*，比利时微电子研究中心（*Imec*）比利时鲁汶
ORCID 0000-0001-8694-0535 2 –*ITSDP*，保加利亚科学院信息与通信技术研究所（*IICT*）
保加利亚索非亚

arXiv:2304.02903v1 [math.CA] 6 Apr 2023

摘要—**Wright函数源于时空分数阶扩散方程理论，是一种有趣的数学对象，与其他特殊函数和初等函数有着广泛的联系。Wright函数为若干类特殊函数提供了统一的处理方法，例如高斯函数、艾里函数、贝塞尔函数和误差函数等。本文展示了一种算法，可将其符号表示为有限个超几何（HG）函数与多项式之和。随后，在可能的情况下，将这些HG函数表示为已知的初等函数或其他特殊函数。该算法以开源计算机代数系统Maxima 编写，可用于测试计算Wright函数的数值算法。**

索引词—**Wright函数、超几何函数、贝塞尔函数、误差函数、艾里函数、高斯函数、惠特克函数**

一、引言

Wright函数出现在具有时间 Caputo 导数 [1]的时空分数阶扩散方程理论中，也出现在用于神经元顶端树突建模的分数阶电缆方程 [2]中。这个以人名命名的函数统一处理了几类特殊函数，尤其是贝塞尔函数、概率积分函数 erf 、 Airy 函数 Ai 以及 Whittaker 函数等。它还与高斯函数和 Airy 函数的导数有关。该函数最初由无穷级数 [3] 定义：

$$W\left(a,b|\ z\right):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\,\Gamma(ak+b)},\quad z,b\in\mathbb{C},\quad a>-1$$

其中， Γ 表示欧拉伽马函数。当 $a\geq 0$ 时，该函数被归类为 1st 型Wright函数；对于 $-1<a<0$ [4]、 [5]，则为 2nd 型Wright函数。Wright函数对于微分是封闭的

$$\frac{d}{dz}W\left(a,b|\,z\right)=W\left(a,a+b|\,z\right)\tag{1}$$

由欧盟“地平线欧洲”计划资助

与积分

$$\int W\left(a,b|\,z\right)dz=W\left(a,b-a|\,z\right)+C\tag{2}$$

关于 a 正值的公式已在 [6]、[7]中发表，并通过 Meijer G 函数表示式推导得到。最近，Apelblat 和Gonzales-Santander [8]

针对许多 a 和 b 的组合，已有以超几何函数表示的结果。本文将 [8] 的结果扩展到 $a<0$ 和$b>1$ 的情形，并通过显式构造多项式表示，进一步展示在特定条件下如何将 a 的定义域扩展到负整数。

II. 规范复积分表示法

Wright函数的规范复线积分表示由以下积分给出

$$W\left(a,b|\,z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha^-}\frac{e^{\xi+z\xi^{-a}}}{\xi^b}d\xi,\quad z\in\mathbb{C}$$

沿着汉克尔轮廓，该轮廓围绕负实半轴（图 1）。

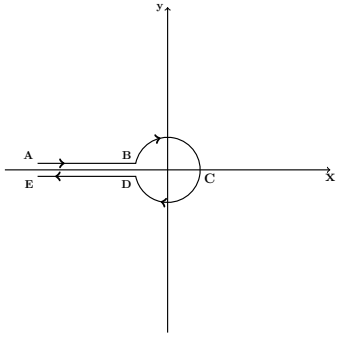

图 1. 汉克尔围道的划分

0000–0000/00$00.00~©~2023 IEEE

III. 多项式约化

对于 b 和 a 的整数值，积分路径围绕原点 O 闭合

$$W\left(a,b|\,z\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{O}\frac{e^{\xi+z\xi^{-a}}}{\xi^{b}}d\xi$$

并且可用于将函数的定义域扩展到负整数参数。特别地，考虑a 为负整数的情形，并将其记为 $-n$。显然，若b 为负整数，例如 $b=-m$，则上述积分为零，并且 $W(-n,-n|\,z)=0$。

相反，如果 $n=-a$ 和 $b=m,\quad m,\ n\in\mathbb{N}$ 那么

$$W\left(-n,m|\,z\right)=\mathrm{Res}\left(ker(\xi),\xi=0\right)=\frac{1}{\Gamma(m)}\left\{\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}e^{\xi+z\xi^{n}}\right\}\Bigg|_{\xi=0}$$

因此，我们可以得出结论：$W(-n,m|\,z)$ 是关于 z 的多项式。这是一项新颖的结果，Wright 未曾预料到，它使得可以扩展该函数参数的定义域。利用完整指数Bell 多项式，通过应用Fa´a-迪布鲁诺公式，可以显式计算这个多项式。对于自然数 n 和 m:

$$W\left(-n,m|\,z\right)=\frac{1}{\Gamma(m)}B_{m-1}\left(g'(0),\ldots,g^{(m-1)}(0)\right)\quad(3)$$

其中 $g(\xi)=\xi+z\xi^{n}$ 是核的指数，而

$$B_{m}\left(g'(0),\ldots,g^{(m)}(0)\right)=\begin{vmatrix}\binom{m-1}{0}g'(0) & \binom{m-2}{1}g''(0) & \ldots & \binom{m-1}{m-1}g^{(m)}(0)\\ -1 & \binom{m-2}{1}g'(0) & \ldots & \binom{m-2}{m-2}g^{(m-1)}(0)\\ 0 & -1 & \ldots & \binom{m-3}{m-3}g^{(m-3)}(0)\\ & & \cdots & \\ 0 & \ldots & -1 & \binom{0}{0}g'(0)\end{vmatrix}$$

在某些情况下，这些表达式可列成如下表格。对于 $m=1$：

$$1,z+1$$

$m=2$：

$$\frac{1}{2},\frac{2z+1}{2},\frac{(z+1)^{2}}{2}$$

$m=3$：

$$\frac{1}{6},\frac{6z+1}{6},\frac{6z+1}{6},\frac{(z+1)^{3}}{6}$$

$m=4$

$$\frac{1}{24},\frac{24z+1}{24},\frac{24z+1}{24},\frac{12z^{2}+12z+1}{24},\frac{(z+1)^{4}}{24}$$

$m=5$：

$$\frac{1}{120},\frac{120z+1}{120},\frac{120z+1}{120},\frac{60z+1}{120},\frac{60z^{2}+20z+1}{120},\frac{(z+1)^{5}}{120}$$

应注意，由于已经有 $g''(0)=0$，所得矩阵是带状矩阵。

IV. 超几何表示

凡是 a 参数为有理数的地方，Wright函数都可以表示为有限个超几何函数之和。广义超几何（GHG）函数 pFq将按照以下记号使用。

$${}_{p}F_{q}\left(a_{0}\ldots a_{p-1};b_{0}\ldots b_{q-1}\Big|z\right):=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^{r}}{r!}\frac{\prod_{j=0}^{p-1}(a_{j})_{r}}{\prod_{j=0}^{q-1}(b_{j})_{r}}\quad(4)$$

其中，$(a)_r$ 和 $(b)_r$ 表示上升阶乘，而 $(a)_0=1$，其采用归一化 ${}_{p}F_{q}\left(\sim;\ \sim\Big|0\right)=1$。按照惯例，分子和分母中的相同参数将相互抵消。对于正有理数 a，可得到表示式 [8]:

定理*1*（第一 *HG* 表示）：假设 $a=n/m>0$，其中 n 和 m 互质。则

$$W\left(a=n/m,b|\,z\right)=\sum_{r=0}^{m-1}\frac{z^{r}}{r!\,\Gamma\left(b+ar\right)}\,{}_{1}F_{m+n}\left(1;b_{0}\ldots b_{n-1},c_{0}\ldots c_{m-1}\Big|\frac{z^{m}}{n^{n}m^{m}}\right),\quad(5)$$

其中

$$b_{j}=r/m+(b+j)/n,\quad c_{j}=(r+1+j)/m$$

证明如下 [6]，并作为第二表示定理证明的起点。

证明 *1*：从

$$W\left(a=n/m,b|\,z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!\,\Gamma(an+b)}=\sum_{q=0}^{m-1}\sum_{p\geq q/m}^{\infty}\frac{z^{mp-q}}{\Gamma(mp-q+1)\,\Gamma(a(mp-q)+b)}$$

由于整数 n 可以分拆为 $n=mp-q$，其中$q=0,\ldots m-1$。经过一些代数运算，我们得到

$$W\left(n/m,b|\,z\right)=\frac{1}{\Gamma(b)}+\sum_{r=1}^{m}z^{r}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{z^{mp}}{\Gamma(ap+ra+b)\Gamma(mp+r+1)}.$$

注意，对于 $p=0$ 内层级数系数是

$$C_{r}=\frac{1}{\Gamma(ra+b)\Gamma(r+1)},$$

它起到归一化因子的作用。因此，该级数变换为

$$W\left(n/m,b|\,z\right)=\sum_{r=0}^{m}\frac{z^{r}}{C_{r}}\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\frac{C_{r}}{\Gamma\left(n(p+r/m+b/n)\right)}\frac{z^{mp}}{\Gamma\left(m(p+(r+1)/m)\right)}\quad(6)$$

此外，使用命题 1 可得到

$$\Gamma(b+aj)=\Gamma\left(a\left(j+b/a\right)\right)=\Gamma(b)\left(\frac{b}{a}\right)_j\left(\frac{b+1}{a}\right)_j\cdots\left(\frac{b+a-1}{a}\right)_j a^{aj}.$$

由方程 6 可直接读出

$$b_0=\frac{r}{m}+\frac{b}{n},\quad c_0=\frac{r+1}{m}$$

增量分别为 $1/n$ 和 $1/m$。因此，最后，

$$W\left(a,b|\,z\right)=\sum_{r=0}^{m-1}\frac{z^r}{r!\,\Gamma\left(b+ar\right)}\cdot {}_1F_{m+n}\left(1;b_0\dots b_{n-1},c_0\dots c_{m-1}\Big|\frac{z^m}{n^n m^m}\right).$$

注意，当 $r=m-1$ $c_1=1$ 时，广义超几何函数因此化简为 ${}_0F_{m+n-1}$。

负有理数 $a<0$ 的公式还需要进一步处理。先假设 $b<1$。令

$$W\left(-n/m,b|\,z\right)=\frac{1}{\Gamma(b)}+\sum_{r=1}^{m}\frac{z^r}{C_r}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{C_r}{\Gamma\left(-np-rn/m+b\right)}\frac{z^{mp}}{\Gamma\left(mp+r+1\right)}$$

首先，我们使用伽马反射公式来获得

$$\frac{1}{\Gamma\left(-np-rn/m+b\right)}=\frac{(-1)^{np}\Gamma\left(\frac{nr}{m}+np-b+1\right)}{\Gamma\left(b-\frac{nr}{m}\right)\Gamma\left(\frac{nr}{m}-b+1\right)}\quad(7)$$

因此，

$$W\left(-n/m,b|\,z\right)=\frac{1}{\Gamma(b)}+\sum_{r=1}^{m}\frac{z^r}{C_r}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{np}C_r\Gamma\left(\frac{nr}{m}+np-b+1\right)z^{mp}}{\Gamma\left(\frac{nr}{m}-b+1\right)\Gamma\left(m(p+(r+1)/m)\right)}$$

最后，我们直接读出参数。

$$b'_j=1-(-r/m+(b+j)/n)=1+r/m-(b+j)/n.$$

然后我们可以表述如下

定理 *2*（第二种超几何表示）：对于 $b\le 1$ 且$n\le m$ 非负互素整数

$$W\left(a=-n/m,b|\,z\right)=\sum_{r=0}^{m-1}\frac{z^r}{r!\,\Gamma\left(b+ar\right)}\ {}_{n+1}F_m\left(1,b'_0\dots b'_{n-1};c_0\dots c_{m-1}\Big|\frac{(-)^n z^m}{n^n m^m}\right),\quad(8)$$

其中

$$b'_j=1+r/m-(b+j)/n\quad c_j=(r+1+j)/m$$

对于 $b\ge 1$，还会按如下方式添加一个多项式部分 P。

定理 *3*（第三种超几何表示）：设a 和b 为有理参数，且 $b\ge 1$ 和 $|a|\le 1$。通过积分递推定义多项式 $P_b(-a,z)$

$$P_b(-a,z)=\int_0^z P_{b-a}(-a,x)dx+c_{b-1},\quad(9)$$

其中，当 b 为整数时，$c_{b-1}=1/(b-1)!$，否则为0。此外，定义 $P_0(z,-a):=1$，并对 $b<0$ 恒等地赋予$P_b(z,-a):=0$。然后

$$W\left(a=-n/m,b|\,z\right)=\sum_{r=0}^{m-1}\frac{z^r}{r!\,\Gamma\left(b+ar\right)}\cdot {}_{n+1}F_m\left(1,b'_0\dots b'_{n-1};c_0\dots c_{m-1}\Big|\frac{(-)^n z^m}{n^n m^m}\right)+P_b(-a,z)\quad(10)$$

其中m 和n 是互素数。

证明 *2*：首先，我们证明弧积分的结果是一个多项式，其中z。假设 $b\ge 1$ 是有理数，并且 $-a=n/m$ 与之前一样。考虑弧BCD。我们作变量代换 $\xi=\epsilon\eta^m$。于是积分变为

$$I=m\oint_{BCD}\frac{d\eta\,\epsilon^{1-b}}{\eta^{(b-1)m+1}}e^{\epsilon^{\frac{n}{m}}\eta^n z+\epsilon\eta^m}$$

将核展开为无穷级数可得到

$$ker=m\,\frac{d\eta\,\epsilon^{1-b}}{\eta^{(b-1)m+1}}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}\frac{\epsilon^{\frac{im+(j-i)n}{m}}\eta^{im+(j-i)n}z^{j-i}}{i!\,(j-i)!}$$

级数的尺度不变部分由满足 $\epsilon^{\frac{im+(j-i)n}{m}-b+1}=1$ 的成员 k_j 给出。这由约束条件给出

$$i=\frac{(b-1)\,m-jn}{m-n}$$

因此，

$$k_j=\frac{d\eta\,m\,z^{\frac{(j-b+1)n}{n-m}}}{\eta\left(\frac{(b-1)n-jm}{n-m}\right)!\left(\frac{(j-b+1)n}{n-m}\right)!}$$

再次将变量变换为 $\eta=e^{i\varphi/m}$，得到积分

$$c_j=\frac{1}{2\pi i}\frac{iz^{\frac{(j-b+1)m}{m-n}}}{\left(\frac{(b-1)m-jn}{m-n}\right)!\left(\frac{(j-b+1)m}{m-n}\right)!}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}e^{\frac{i(bn-1)\varphi}{n}+\frac{i\varphi}{n}-ib\varphi}d\varphi=\frac{z^{\frac{(j-b+1)m}{m-n}}}{\left(\frac{(b-1)m-jn}{m-n}\right)!\left(\frac{(j-b+1)m}{m-n}\right)!}$$

此外，有效指标由集合给出

$$j:\quad\left(\frac{(j-b+1)\,m}{m-n}\in\mathbb{N}\right)\cup\left(\frac{(b-1)\,m-jn}{m-n}\in\mathbb{N}\right)$$

等价地，在 a 表示法中

$$c_j=\frac{z^{\frac{j-b+1}{1-a}}}{\left(\frac{j-b+1}{1-a}\right)!\left(\frac{-aj+b-1}{1-a}\right)!}\quad(11)$$

因此，必须满足 $a<1$，才能使 c_j 不为零。

另一方面，

$$b-1 \le j \le (b-1)/a \quad \cup \quad j \in \mathbb{N}$$

它是一个有限集。因此，对于有理数b，积分I是z的多项式。

要推导多项式递推关系，我们按如下方式进行。根据命题 2

$$W\left(-a,b|\,z\right) = \int_0^z W\left(-a,b-a|\,z\right) + \frac{1}{\Gamma(b)} \tag{12}$$

因此，该方程定义了一个递推关系。

注意，对于 $j=b-1$，系数变为

$$c_{b-1} = \frac{1}{(b-1)!}$$

因此，对于非整数 b，不存在常数单项式。此外，将单项式 c_j 视为 b的函数。对方程 11 求导可得到递推关系

$$\frac{d}{dz}c_j(b) = \frac{z^{\frac{j-b+1}{1-a}-1}}{\left(\frac{j-b+1}{1-a}-1\right)!\left(\frac{-aj+b-1}{1-a}\right)!} = \frac{z^{\frac{j-(b-a)}{1-a}}}{\left(\frac{j-(b-a)}{1-a}\right)!\left(\frac{aj-b+1}{a-1}\right)!} = c_{j-1}(b-a),$$

这也与积分方程 12 一致。因此，多项式 $P_b(-a,\ z)$ 应满足上述递推关系。Wright函数的第二个参数会变化，因此让它作为多项式的指标很方便。

对于整数值的 a，也就是说，当 $m=1$ 时，定理 3 对应于多项式表示，因为超几何级数消失了。

需要指出的是，第二和第三表示定理在现有文献中无从查证。特别是， [5], [7]–[11] 中并未陈述这两个定理。

V. 实现与示例

这些定理已在计算机代数系统（CAS）Maxima 中实现为相应功能。主要功能以函数 wrightsimp 的形式列于清单 B 中。Maxima 通过函数 hgfred 提供超几何归约功能，使得本文所呈现的理论能够无缝集成 [12]。借此可以计算数量可能非常庞大的导数公式。原则上可以进行任意长的分解，但鉴于篇幅有限，本文只讨论分母不超过 3 的情况。对于 $a=1/3$，可直接计算定理 2 的一个示例：

$$W\left(1/3,b|\,z\right) = \frac{{}_0F_3\left(-;b+\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3};\frac{z^3}{27}\right)z^2}{2\Gamma\left(b+\frac{2}{3}\right)} + \frac{{}_0F_3\left(-,b+\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3};\frac{z^3}{27}\right)z}{\Gamma\left(b+\frac{1}{3}\right)} + \frac{{}_0F_3\left(-;b,\frac{1}{3},\frac{2}{3};\frac{z^3}{27}\right)}{\Gamma(b)} \tag{13}$$

A. $a=-1/4$ 的表示

Mainardi 函数 [13]

$$M_a(z) = W\left(-a,1-a|-z\right)$$

可表示为以下求和

$$M_{1/4}(z) = \frac{{}_0F_2\left(-;\frac{5}{4},\frac{3}{2};-\frac{z^4}{256}\right)z^2}{2\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} - \frac{{}_0F_2\left(-;\frac{3}{4},\frac{5}{4};-\frac{z^4}{256}\right)z}{\sqrt{\pi}} + \frac{{}_0F_2\left(-;\frac{1}{2},\frac{3}{4};-\frac{z^4}{256}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \tag{14}$$

对于 $b=3/4$

$$W\left(-1/4,3/4|-z\right) = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{2}\pi}K_{1/4}\left(\frac{z^2}{8}\right)e^{-\frac{z^2}{8}}$$

B. 表示：$a=-1/3$

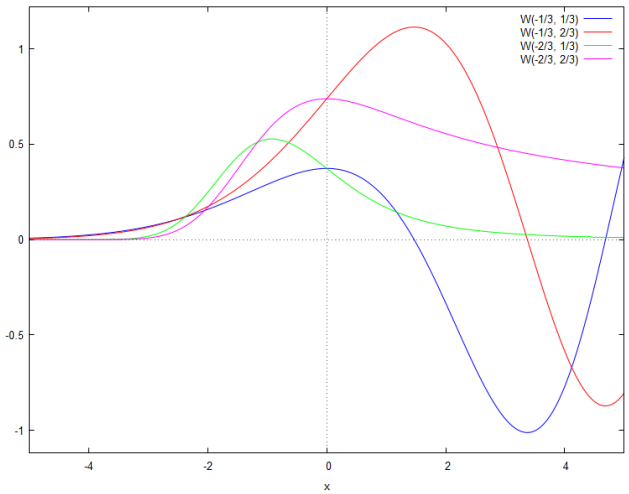

图 2. $W(a,b|\,x)$ 的图像，适用于 $a=-1/3$ 和 $a=-2/3$

$b \le 1$ 的一般公式如下

$$W\left(-1/3,b|\,z\right) = \frac{{}_1F_2\left(\frac{5}{3}-b;\frac{4}{3},\frac{5}{3};-\frac{z^3}{27}\right)z^2}{2\Gamma\left(b-\frac{2}{3}\right)} + \frac{{}_1F_2\left(\frac{4}{3}-b;\frac{2}{3},\frac{4}{3};-\frac{z^3}{27}\right)z}{\Gamma\left(b-\frac{1}{3}\right)} + \frac{{}_1F_2\left(1-b;\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{z^3}{27}\right)}{\Gamma(b)} \tag{15}$$

对于 $b=1/3$，该方程化简为

$$W\left(-1/3,1/3|-z\right) = -\frac{\left(I_{2/3}\left(\frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}\right)-I_{-2/3}\left(\frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}\right)\right)z}{3} = \frac{z}{\sqrt{3}\pi}K_{2/3}\left(\frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}\right) = -\sqrt[3]{3}\,\mathrm{Ai}'\left(\frac{z}{\sqrt[3]{3}}\right) \tag{16}$$

对于 $b = 2/3$ ，式 15 按预期化简为艾里 Ai 函数，它可以分别表示为贝塞尔 J 函数或 I 函数的加权和。对于 $z > 0$

$$W\left(-1/3, 2/3|-z\right) = \frac{I_{-1/3}\left(\frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}\right)\sqrt{z}}{\sqrt{3}} - \frac{I_{1/3}\left(\frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}\right)\sqrt{z}}{\sqrt{3}} = \frac{K_{1/3}\left(\frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}\right)\sqrt{z}}{\pi} = \sqrt[3]{3^2}\,\mathrm{Ai}\left(z/\sqrt[3]{3}\right) \quad (17)$$

C. $a = -1/2$ 的表示

对于 $b \le 1$

$$W\left(-1/2, b|\,z\right) = \frac{{}_1F_1\left(\frac{3}{2}-b;\frac{3}{2};-\frac{z^2}{4}\right)z}{\Gamma\left(b-\frac{1}{2}\right)} + \frac{{}_1F_1\left(1-b;\frac{1}{2};-\frac{z^2}{4}\right)}{\Gamma(b)} \quad (18)$$

特别地，对于 $b = 1$ ，上述方程化为

$$W\left(-1/2, 1|\,z\right) = 1 + \mathrm{erf}\left(\frac{z}{2}\right) = \mathrm{erfc}\left(-\frac{z}{2}\right)$$

根据多项式约化。

高斯导数可以表示为

$$W\left(-\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}\middle|\, z\right) = \left(\frac{d}{dz}\right)^n \frac{e^{-z^2/4}}{\sqrt{\pi}} \quad (19)$$

图像如图 3 所示。高斯核的反导数可以用类似的方法，利用定理 3 计算。对于 $b = 7/2$

$$W\left(-1/2, 7/2|\,z\right) = \left(\frac{z^4}{60\sqrt{\pi}} + \frac{3z^2}{10\sqrt{\pi}} + \frac{8}{15\sqrt{\pi}}\right)e^{-\frac{z^2}{4}} + \left(1+\mathrm{erf}\left(\frac{z}{2}\right)\right)\left(\frac{z^5}{120}+\frac{z^3}{6}+\frac{z}{2}\right) \quad (20)$$

D. $a = -2/3$的表示

Mainardi 函数 $a = 2/3$ 可表示为定义在整个实数轴上的两个指数加权 Bessel K 函数之差：

$$W\left(-2/3, 1/3|-z\right) = \frac{K_{2/3}\left(-\frac{2z^3}{27}\right)z^2e^{-\frac{2z^3}{27}}}{3^{\frac{3}{2}}\pi} - \frac{K_{1/3}\left(-\frac{2z^3}{27}\right)z^2e^{-\frac{2z^3}{27}}}{3^{\frac{3}{2}}\pi} \quad (21)$$

另一方面，

$$W\left(-2/3, 1/3|\,z\right) = -\frac{e^{\frac{2z^3}{27}}\left(3\,\mathrm{Ai}'\left(\frac{z^2}{3^{\frac{4}{3}}}\right)+\sqrt[3]{3}z\,\mathrm{Ai}\left(\frac{z^2}{3^{\frac{4}{3}}}\right)\right)}{3^{\frac{2}{3}}}$$

用艾里函数及其导数表示。图像见图 2。

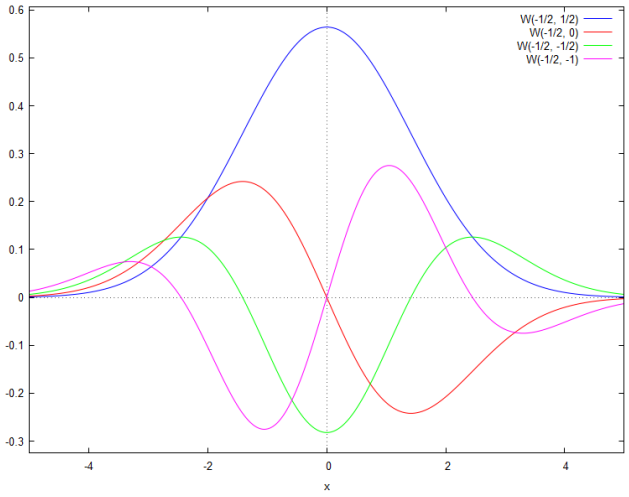

图 3. $W(a,\ b|\,x)$ 在 $a = -1/2$ 下的图像

For $b = 2/3$

$$W\left(-2/3, 2/3|\,z\right) = \frac{K_{1/3}\left(\frac{2z^3}{27}\right)ze^{\frac{2z^3}{27}}}{\sqrt{3}\pi} = \sqrt[3]{9}\,e^{\frac{2z^3}{27}}\,\mathrm{Ai}\left(\frac{z^2}{3^{\frac{4}{3}}}\right) \quad (22)$$

E. $a = -1$ 的表示形式

该公式最近在 [8] 中推导得出；由于参数域通常被限制为 $a > -1$，因此此前文献中未曾预料到这一结果。

$$W\left(-1, b|\,z\right) = \frac{1}{\Gamma(b)}\,{}_1F_0(1-b;-;z) = \frac{(z+1)^{b-1}}{\Gamma(b)} \quad (23)$$

VI. 讨论

本方法的主要应用是为用于 Wright函数求值的纯数值算法提供基准真值。这类算法一直在持续发展 [14]–[16]。Wright函数的一个优点是，与Fox H函数和 MeijerG函数一样，它对于微分和积分是封闭的。此外，还可以设想将其应用于定积分，并将其纳入不同的计算机代数系统积分程序中。

致谢

本研究由欧盟“地平线欧洲”计划根据资助协议 VIBraTE 101086815 资助。

附录

A. 辅助结果

命题*1*： 对于非负整数 n, m

$$\Gamma(mn+b) = \Gamma(mb)\,m^{mn}\prod_{j=0}^{m-1}\left(\frac{j}{m}+b\right)_n$$

证明 *3*：使用伽马函数的高斯-勒让德乘法公式

$$\Gamma(mx) = \frac{m^{mx-1/2}}{(2\pi)^{(m-1)/2}} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(x + \frac{k}{m}\right)$$

因此，对于非负整数 n，该公式可以表示为递增阶乘的乘积：

$$\frac{\Gamma(mn+b)}{\Gamma(mb)} = m^{mn} \prod_{j=0}^{m-1} \frac{\Gamma\left(n + \frac{j}{m} + b\right)}{\Gamma\left(\frac{j}{m} + b\right)} = m^{mn} \prod_{j=0}^{m-1} \left(\frac{j}{m} + b\right)_n \quad 51$$

我们利用对微分的封闭性（式 1）来表述

命题 *2*（积分方程）：

$$W\left(a, b \middle| z\right) = \int_0^z W\left(a, a+b \middle| z\right) + \frac{1}{\Gamma(b)} \qquad (24)$$

因为根据定义，$W(a,\ b|\,0) = 1/\Gamma(b)$。

B. 超几何表示的 *Maxima* 代码

1 w r i g h t s i m p (wexpr) : = 代码块（[l、r、ret: wexpr、a、b、x、z、mm、nn、lsta: [ ] , lstb: [ ] , ss: 0、j、listarith: true、gamma expand: true、assume pos: true] ,若 wexpr 不含 wright，则返回（wexpr）；若 wexpr 是运算符 =”+”则 6 ret: map（lambda（[z] , wrightsimp（z））, wexpr）；否则若 wexpr 是运算符 =’ wright，则（[a、b、x] : args（wexpr），若 a =0 则若 integerp（b）且 b <=0 则返回（0）11 否则 ret: exp（x）/ gamma（b）；若 rationalp（a）且 a >0 则（nn: num（a），mm: denom（a），对 r 从 0 到 mm–1 执行（16 lsta: makelist（r/mm +（b+j）/ nn，j，0，nn – 1），lstb: makelist（（r +1+j）/mm，j，0，mm–1），ss: xˆr / r! / gamma（a * r +b）* hgfred（[1] , append（lsta，lstb），xˆmm/mmˆmm/nnˆnn）+ss），ret: ss 21）；若 rationalp（a）且 a <0 则（nn: abs（num（a））, mm: denom（a），对 r 从 0 到 mm–1 执行（/* 使用伽马函数反射公式 */ 26 lsta: makelist（1 + r/mm –（b+j）/nn，j，0，nn – 1），lstb: makelist（（r +1+j）/mm，j，0，mm–1），若非 integerp（a * r +b），则 ss: xˆr / r! / gamma（a * r +b）* hgfred（cons（1，lsta），lstb，（ – 1）ˆnn*xˆmm/mmˆmm *nnˆnn）+ss），31 若 b >=1 则（/* 多项式部分 */ ss: ss +mdx3（x，b，abs（a））），ret: ss36 ））否则（[l，r] : partbyvar（wexpr，wright），l: subst（nil =1，l），ret: l * wrightsimp（r）），ret）；mdx3（x，n，q）：=代码块（[s: 0，xi] ,46 若 n <=0 则返回（0），若 n =1 则返回（1）否则（若 integerp（n）则 s: 1/gamma（n），s: integrate（mdx3（xi，n –q，q），xi，0，x）+s，expand（s））；

参考文献

[1] R. Gorenflo、Y. Luchko 和 F. Mainardi，“Wright函数作为扩散–波动方程的尺度不变解”，计算与应用数学杂志，第 118 卷，第 1-2 期，第 175–191 页，2000 年 6 月。[2] S. Vitali、F. Mainardi 和 G. Castellani，“棘状树突中分数阶动力学的出现”，分形与分数阶，第 2 卷，第 1 期，第 6 页，2018 年 1 月。[3] E. M. Wright，“广义超几何函数的渐近展开”，伦敦数学学会杂志，第 s1-10 卷，第 4 期，第 286–293 页，1935 年 10 月。[4] F. Mainardi，分数阶微积分与线性黏弹性中的波。Imperial College Press，2010 年 5 月。[5] F. Mainardi 和 A. Consiglio，“数学物理中的第二类 Wright 函数”，数学，第 8 卷，第 6 期，第 884 页，2020 年 6 月。[6] A. R. Miller 和 I. S. Moskowitz，“某些有理参数下的一类 Fox-WrightΨ 函数的约化”，高可信计算机系统中心，技术报告，1995 年。[7] R. Gorenflo、Y. Luchko 和 F. Mainardi，“Wright函数的解析性质及其应用”，分数阶微积分与应用分析，第 2 卷，第 4 期，第 383–414 页，1999 年。[8] A. Apelblat 和 J. L. Gonz´alez-Santander，“积分 Mittag-Leffler、Whittaker 和 Wright 函数”，数学，第 9 卷，第 24 期，第 3255 页，2021 年 12 月。[9] F. Mainardi、Y. Luchko 和 G. Pagnini，“时空分数阶扩散方程的基本解”，分数阶微积分与应用分析，第 4 卷，第 2 期，第 153 – 192 页，2001 年。[10] F. Mainardi、R. B. Paris 和 A. Consiglio，“第二类 Wright 函数与 Whittaker 函数”，分数阶微积分与应用分析，第 25 卷，第 3 期，第 858–875 页，2022 年 5 月。[11] Y. Povstenko，“Wright函数在连续介质物理学中的一些应用：综述”，数学，第 9 卷，第 2 期，第 198 页，2021 年 1 月。[12] I. D. Avgoustis，“特殊函数的符号拉普拉斯变换”，载于*1977* 年 *MACSYMA* 用户会议论文集。Langley：NASA，1977 年。[13] F.Mainardi、A. Mura 和 G. Pagnini，“时间分数阶扩散过程中的 M-Wright 函数：教程式综述”，国际微分方程杂志，第 2010 卷，第 1–29 页，2010 年。[14] L. Aceto 和 F. Durastante，“Wright函数的高效计算及其在分数阶扩散–波动方程中的应用”，*ESAIM*：数学建模与数值分析，2022 年 9 月。[15] Y. Luchko，“实参数取值下 Wright函数求值的算法”，分数阶微积分与应用分析，第 11 卷，第 1 期，第 57 –75 页，2008 年。[16] Y. Luchko、J. Trujillo 和 M. Velasco，“Wright函数及其数值计算”，国际纯粹与应用数学杂志，第 64 卷，第 567 – 575 页，2010 年。