arXiv:2304.02918v1 [math.CA] 6 Apr 2023

具有边界条件的 d-PII 方程的双重标度极限

Maurice Duits* Diane Holcomb†

摘要

我们研究具有边界条件的离散Painlev´eII方程的一个双重标度极限。右边界点的位置处于临界区域，在此处离散Painlev´e方程转化为连续Painlev´e II方程。我们的主要结果是：右边界点位于无穷远处时会出现Hastings-McLeod解，而在这里，离散方程的解在双重标度极限下收敛到Painlev´e II方程的一个tronqu´ee解；该解在负无穷处表现得类似于Hastings-McLeod解，并且在预先指定的位置具有一个极点。我们对双重标度极限的证明基于寻找一个足够接近的近似，以便应用牛顿方法的坎托罗维奇定理。为了满足该定理的标准，我们将为所出现的Painlev´e II方程的解建立一个下界（包括Hastings-McLeod解）。

目录

1 引言2 2结果陈述83 定理2.3和定理2.4 的证明124定理2.1的证明 22 5 定理 2.5 的证明 24 6 近似极小值点 28

*皇家理工学院数学系，Lindstedtsv¨agen 25，SE 10044，瑞典斯德哥尔摩。电子邮箱：duits@kth.se

†皇家理工学院数学系，Lindstedtsv¨agen 25，SE 10044，瑞典斯德哥尔摩。电子邮箱：holcomb@kth.se

1 引言

本文研究离散 Painlev´ II 方程（离散PII）的解 $(a_k)_{k=0}^{n-2}$

$$a_{k+1} + a_{k-1} = \frac{k+\varepsilon}{t}\frac{2a_k}{1-a_k^2}, \qquad k = 0, \dots, n-2, \tag{1.1}$$

其中 $t,\ \varepsilon > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$，其特征由边界条件决定

$$a_{-1} = a_{n-1} = 1. \tag{1.2}$$

请注意，这样的解是否存在并非先验显然，但我们将证明它确实存在且是唯一的。此外，我们将证明，当 $n \to \infty$ 处于某个特定的双重标度极限时，它收敛到连续Painlev´e II 方程（PII方程）的一类特殊解。

$$y''(x) = xy(x) + 2y^3(x). \tag{1.3}$$

正如我们将看到的，边界条件 $a_{n-1} = 1$ 将产生重大影响；我们的双重标度极限与文献中已有的结果不同，因为我们观察到 PII 方程的不同解。我们遇到的解由其在 $x \to -\infty$ 时的行为以及 on $\mathbb{R}$ 上最左侧极点的位置所刻画。我们将证明此类解的存在性，并在此过程中推导出更多性质。不过，在第 2 节给出结果的精确表述之前，我们先回顾 d-PII 方程双重标度极限的一些历史背景，并说明边界条件 (1.2) 的动机。

Painlev´方程

PII 方程（1.3）是六个 Painlev´e 方程中的第二个。这些方程的历史始于约 1900 年 Painlev´e 的研究，后来 Gambier 也参与其中，他们试图对所有满足 Painlev´e 性质的非线性二阶微分方程进行分类：其唯一的可动奇点是极点或分支点。最终，这类方程可归结为六个非线性方程，即我们如今所称的 Painlev´e 方程。很久之后，人们发现这些方程可作为可积非线性偏微分方程的常微分方程约化，并且在随机矩阵理论中发挥重要作用，这才迎来了它们的重大突破。PII 方程（1.3）是 Korteweg-de Vries 方程 [1]的常微分方程约化。著名的 Tracy-Widom 分布 [34] 可以用 PII 方程的 Hastings-McLeod解 [21]表示。在临界点附近的 Hermitian 随机矩阵的局部特征值相关性中，也会出现同一个解；该处的极限密度呈二次消失 [5, 8]。事实上，我们研究带边界条件 1.2 的离散PII 的主要动机，最终是为了成为

能够描述 β 系综的此类局部相关性（厄米模型对应于 $\beta = 2$），我们将在下文中进一步详细解释。关于 Painlev´e 超越函数的一般背景，包括其在数理物理中的其他应用，请参阅 [10, 11,16]。

离散Painlev´e方程也具有丰富的结构，在数学物理中有重要应用；一般性参考文献请参见 [22, 35]。其刻画比连续情形更为复杂，但可以利用有理曲面和仿射根系 [33]对其进行分类。与连续情形类似，d-PII方程 (1.1) 是离散修正Korteweg-de Vries方程 [29, 30] 的一个约化。离散Painlev´e方程在弦理论中的矩阵积分研究中也占有重要地位 [6, 14, 19]。例如，d-PII最初是在这一背景下针对酉矩阵积分进行研究的 [32] 。

离散Painlev´e方程的一项重要性质是，在某些双重标度极限下，它们会收敛到连续方程（至少形式上如此）。例如，代入如下形式的试探解后

$$a_{n+k} = n^{-\frac{1}{3}} u\left(k n^{-\frac{1}{3}}\right) \tag{1.4}$$

将其代入 (1.1)，其中 u 为光滑函数，并取极限 $n \to \infty$，使得

$$t = n, \quad k/n^{\frac{1}{3}} \to x,$$

不难看出，(1.1) 中的离散PII会在 $u(x) = 2^{\frac{1}{3}} y(2^{\frac{1}{3}} x)$ 的条件下转化为PII方程 (1.3)。当然，这是一种形式上的处理，并不存在先验机制能够保证 (1.1)的解收敛到 (1.3)的解。事实上，使这类极限严格成立是一项艰巨的任务。一条广受关注的研究方向源于正交多项式理论，尽管本文不采用这一方法，我们仍将简要概述其中一些最重要的发展。

正交多项式

正交多项式满足递推关系，对于正交测度的特殊可积选择，这些关系中的递推系数本身满足差分方程。文献中已知各种显式例子，其中这些差分方程是离散 Painlev´e 方程的特殊情形。我们推荐参阅 [35] ，其中有关于该主题的良好综述。

通过考察单位圆[32]上的多项式，可以得到 d-PII方程 (1.1)。对于 $k = 0$，1，.....，$\Phi_k(z)$，它是满足以下条件的唯一 k 次首一多项式

$$\int_0^{2\pi} \Phi_k(e^{i\theta}) e^{-\ell\theta} e^{-t\cos\theta} d\theta = 0, \qquad \ell = 0, \ldots, k-1. \tag{1.5}$$

那么存在 $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$，通常称为Verblunsky系数，使得如果我们同时定义共轭多项式 $\Phi_k^*(z) = z^k \Phi_k(1/z)$。族 Φ 和

Φ^* 满足递推关系

$$\begin{aligned}\Phi_{k+1} &= z\Phi_k(z) - \bar{\alpha}_k\Phi_k^*(z) \\ \Phi_{k+1}^* &= \Phi_k^*(z) - \alpha_k z\Phi_k(z)\end{aligned} \tag{1.6}$$

初始条件 $\Phi_0(z) = \Phi_0^*(z) = 1$。不难验证，[32] Verblunsky系数满足 (1.1)，其中 $\varepsilon = 1$，适用于 $k = 0, 1, \ldots$。事实上，它们是满足这些性质的唯一解。

$$\alpha_{-1} = 1, \qquad |\alpha_k| < 1. \tag{1.7}$$

参见 [35]以了解相关讨论和证明。注意，与我们所关注的边界条件 (1.2)不同，正交权函数 (1.5) 的 Verblunsky 系数满足有界条件（这可以解释为无穷远处的条件）。

在过去 25 年间，大量文献致力于研究满足正交关系的多项式的渐近研究。这一研究方向的重要推动力，源于为刻画正交多项式 [17] 的 Rieman-Hilbert 问题而发展出的最速下降技巧 [12, 13] 。在一篇关于最长递增子序列的著名著作 [2] 中，Baik、Deift 和 Johansson 运用这一方法研究了具有变化权函数 $e^{-n\tau\cos^\theta d\theta}$ 的单位圆上的正交多项式，并揭示了它们与 PII 方程的联系。尽管 [2]，并未着重讨论 Verblunsky 系数在双重标度极限下收敛到 PII 方程的 Hastings-McLeod 解这一问题，但这一结果可以从他们的分析中推导出来。

在实直线上定义的正交多项式也已计算出类似的 Painl´eve II 渐近行为。事实上，Bleher 和 Its [4, 5]计算了具有双阱势的实直线上正交多项式的递推关系系数的渐近行为。这些系数满足所谓的离散弦方程或离散 Painlev´e I 方程。在 [5] 中证明了，在双重标度极限下，它们收敛到 PII 方程的 Hastings-McLeod 解（他们还描述了其工作与 [2]之间的关系）。此后，Claeys 和 Kuijlaars [8]证明，这是一种普适行为，只要平衡测度除一个内部点外均为正则，并且在该点密度二次消失，这种行为就会出现。在后续工作中，[9] Claeys、Kuijlaars 和 Vanlessen 证明，通过在平衡测度的不规则点处向势中加入对数奇异性，甚至可以得到 PII 方程的一般形式。同样值得注意的是，离散弦方程最初是由另一种趋向 Painlev´e I 方程的双重标度极限 [6, 14, 19] （而非 PII）所启发的，但当时所选参数使厄米矩阵积分发散。通过考虑满足平面上路径正交性的多项式，仍然可以用递推系数表示解，并严格研究双重标度极限[15, 17]。

如上所述，与这些工作相比，一个重要的区别在于，本文考虑的是一个边值问题。尽管原则上存在一个定义在圆上的正交测度，使得Verblunsky系数能够解出该边值

问题，但要显式找到这一测度并不容易（边界条件迫使其支集由有限个点组成）。因此，我们在证明中将不使用正交多项式或黎曼–希尔伯特方法。

我们还要强调，(1.2) 中的右边界点处于我们预期将收敛到连续 PII 方程的一个解的区域。正如我们将要看到的，这意味着我们的 d-PII 方程的解不会收敛到 PII 方程的 Hastings-McLeod 解，而是收敛到另一个具有实极点的解。我们感兴趣的解在 $-\infty$ 处具有与 Hastings-McLeod 解相同的渐近行为，因此都是所谓的 tronqu´ee 解的例子。

β系综的间隙闭合

我们研究带边界条件 (1.2) 的 d-PII方程 (1.1)，其动机源于间隙闭合的 β-系综。对于 β, $\tau > 0$ 考虑 $[0, 2\pi]^n$ 上与.....成正比的联合概率密度函数 jpdf。

$$\prod_{1\le j<k\le n} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^\beta \prod_{\ell=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}n\tau\beta\cos\theta_\ell} d\theta_\ell. \tag{1.8}$$

注意，对于 $\tau = 0$ 这是圆形 β-系综（CβE），这是随机矩阵理论中的经典模型。对于该选择，概率测度具有旋转不变性。当 $n \to \infty$时，点 $e^{i\theta_j}$对于 $j = 1, \dots, n$将是单位圆上 n个等距点的（随机）扰动。在单位圆上任意一点附近以 $\sim 1/n$ 的尺度进行放大后，随机点在局部将收敛到 Sine$_\beta$ -过程。对于$\beta = 2$这是具有核 $k(\theta, \eta) = \sin\big(\pi(\theta-\eta)\big)/(\theta-\eta)$的行列式点过程。对于一般的 β，刻画会更加复杂，最初的刻画由 Killip和 Stoiciu 于 [26]给出。后来，Valk´o 和Vir´ag 在 [37]证明了该过程可刻画为随机狄拉克算子的特征值。

对于 $\tau > 0$，项 $e^{-n\tau\beta\,\text{余弦}\theta_\ell}$的作用是使点不太可能靠近 $\theta = 0$。它们在圆上具有极限密度，但不再均匀。为理解这一极限，将 (1.8) 改写为吉布斯测度会有所帮助。

$$e^{-\frac{n^2\beta}{2}\mathbb{H}(\theta_1,\dots,\theta_n)} d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

其中

$$\mathbb{H}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{j\ne k} \log\left|e^{i\theta_j} - e^{i\theta k}\right|^{-1} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \tau\cos\theta_j.$$

这使我们能够将 $e^{i\theta_j}$ 视为处于外场$2\tau\cos\theta$中的库仑气体。当 $n \to \infty$时，随机构型将收敛到可显式计算的平衡测度。对于 $0 < \tau \le 1$，点仍会遍布整个圆，但其极限密度为 [2, 引理 4.3]

$$(1 - \tau\cos\theta)\frac{d\theta}{2\pi}.$$

注意，这个密度确实不再均匀，而是在 $\theta = 0$附近凹陷。当 $\tau > 1$时，这个凹陷会转变为间隙，并且在 $\theta = 0$ 附近不会有点（以压倒性的概率）。相变发生在 $\tau = 1$。在这种情况下，极限密度将在 $\theta = 0$处二次趋于零。在这样的点附近，局部过程将不再由 $\sin^\beta$ 过程描述。事实上，对于 $\beta = 2$ ，局部缩放极限将收敛到一个行列式点过程，其相关核用 Ψ函数表示，这些函数来自 Hastings-McLeod 解对应的 PII 方程的 Lax 对 [5, 8]。对于 $\beta \neq 2$ ，局部过程尚不清楚，这是一个重要的开放问题，也是本文的研究动机。

随机矩阵与具有边界条件的离散PII

刻画 β-系综中间隙闭合附近局部过程的关键，是研究与单位圆上的随机测度 $\mu_n = \sum_{k=1}^n q_k \chi_{x=e^{i\theta_k}}$ 相关联的 Szeg¨o 递推，其中 $(q_1, \ q_2, \ ...q_n) \sim$狄利克雷$(\frac{\beta}{2}, \ ....., \ \frac{\beta}{2})$。

当像 Killip 和 Nenciu 在 [25] 中所做的那样，将点过程刻画为随机算子的谱时，该测度的 Verblunsky系数自然会出现。第一步是确定一个随机矩阵模型，使其特征值服从 (1.8)。为此，对于 $\alpha_j \in \mathbb{C}$对于 $j = 0, \ ....., \ n-1$，满足 $|\alpha_0|, \ ....., \ |\alpha_{n-2}| < 1$且 $|\alpha_{n-1}| = 1$，定义 $\rho_k = \sqrt{1 - |\alpha_k|^2}$并

$$\Xi_k = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_k} & \rho_k \\ \rho_k & -\alpha_k \end{pmatrix}.$$

将 $\Xi_{-1} = [1]$和 $X_{n-1} = [\overline{\alpha_{n-1}}]$ 设为 1×1 矩阵。然后令 U 为 $n \times n$ 矩阵

$$U = \operatorname{diag}(\Xi_0, \Xi_2, \ldots)\operatorname{diag}(\Xi_{-1}, \Xi_1, \ldots).$$

那么 U是一个酉矩阵，并且如果我们从联合概率密度中随机选取 $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-2}$和 $\alpha_{n-1} = e^{i\phi}$

$$e^{t\beta\left(-\operatorname{Re}\alpha_0 + \sum_{k=0}^{n-2} \operatorname{Re}\overline{\alpha_k}\alpha_{k-1}\right)} \prod_{\ell=0}^{n-2} (1 - |\alpha_\ell|^2)^{\frac{\beta}{2}(n-1-\ell)-1} d\alpha_\ell \ d\phi \tag{1.9}$$

那么，特征值 $e^{i\theta_j}$ 的 U 将根据 (1.8) 分布，其中 $t = \tau n$。事实上，这可由计算从 Verblunsky 系数到谱测度 [25,的映射的雅可比行列式得到，见引理 4.1 和命题 4.2]，以及简单的计算

$$\sum_{\ell=1}^{n} \cos\theta_\ell = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(U + U^*) = \operatorname{Re}\alpha_0 - \sum_{\ell=0}^{n-2} \operatorname{Re}\overline{\alpha_\ell}\alpha_{\ell+1}.$$

注意，在特殊情形 $t = 0$ 下，相关的 Verblunsky系数之间不存在相关性。当 $t \neq 0$ 也出现在递推关系中时，这种依赖关系的类型ನ್ನಡ

在势函数为四次（或更高次）的情形下， β-系综在 $\mathbb{R}$ 上的系数。Krishnapur、Rider和Vir´ag 研究了这类模型中的局部极限，作为证明边缘过程 [28]普适性的一部分。

当 $n \to \infty$ 时，自然会想了解 Verblunsky系数 α_k的“典型”行为。为此，将 (1.9) 写成

$$e^{-\frac{\beta t}{2}\mathcal{H}(\alpha)} \prod_{\ell=0}^{n-2} d\phi d\alpha_\ell,$$

with

$$\mathcal{H} = -\sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{n-1-\ell-\frac{2}{\beta}}{t} \log(1-|\alpha_\ell|^2) + \operatorname{Re}\alpha_0 - \sum_{\ell=0}^{n-2} \operatorname{Re}\overline{\alpha_\ell}\alpha_{\ell+1}. \tag{1.10}$$

从这个形式可以看出，我们应当预期 Verblunsky系数集中在 $\mathcal{H}$ 的极小值点附近（回想一下，我们对 $t = n\tau$进行了缩放）。注意，极小值点的参数很容易求得。事实上，

$$\mathcal{H} \geq -\sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{n-1-\ell-\frac{2}{\beta}}{t} \log(1-|\alpha_\ell|^2) - |\alpha_0| - \sum_{\ell=0}^{n-2} |\alpha_\ell||\alpha_{\ell+1}|.$$

当且仅当 $\alpha_j = |\alpha_j|$对 $j = 0, \ldots\ldots, n-1$时等号成立（因此，特别地， $\alpha_{n-1} = 1$）。令 $|\alpha_\ell| = a_{n-2-\ell}$ 且 $\varepsilon = 1 - \frac{2}{\beta}$，即可将 (1.10) 的右端写成

$$H_n(a) = -\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k+\varepsilon}{t} \log(1-a_k^2) - \sum_{k=-1}^{n-2} a_k a_{k+1} \tag{1.11}$$

其中我们还令

$$a_{-1} = a_{n-1} = 1.$$

$\nabla H_n = 0$ 的任何一个解都是局部极小值点。直接计算可知， $\nabla H = 0$ 恰好是带有边界条件 (1.2) 的 d-PII方程 (1.1)。因此，研究该方程的解及其缩放极限，是构造一种随机算子的重要第一步；这种随机算子的谱对应于 β-系综中间隙闭合附近的局部过程。

致谢

M.Duits部分得到了瑞典研究委员会（VR）的资助，资助编号为 2016- 05450和2021-06015；以及欧洲研究委员会（ERC）的资助，资助协议编号为101002013。D. Holcomb 部分得到了克努特和爱丽丝·瓦伦堡基金会（KAW）的资助，资助编号为KAW2015.0359；以及瑞典研究委员会（VR）的资助，资助编号为 2018-04758。

我们感谢 Sara Zahedi 就牛顿方法的坎托罗维奇定理与我们进行讨论，并向我们指出了[38]。

2 结果陈述

在本节　本节我们陈述主要结果。证明将推迟到后面的章节。

我们的第一个结果是，边值问题的解存在且唯一。

定理2.1。令 t、$\varepsilon > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$。存在唯一的解 $(a_k)_{k=0}^{n-2} \in (0,1)^{n-1}$满足 *d-PII*方程

$$a_{k+1} + a_{k-1} = \frac{k+\varepsilon}{t} \frac{2a_k}{1-a_k^2}, \qquad k = 0, \dots, n-2, \tag{2.1}$$

具有边界条件 $a_{-1} = a_{n-1} = 1.$

我们将在第 5 节证明这个定理。

在 [35, 定理 3.10], 中，利用针对 $t < 1$的定点论证，证明了 $n = \infty$ 情形下的等价表述。几乎可以逐字照搬同一证明来证明定理 2.1。然而，对于 $t \geq 1$ ， [35] 中的论证不再成立，因此该问题仍未解决。本文给出的证明适用于所有 $t > 0$。该证明基于凸性论证，表明 (1.11) 中的 H_n 在 $[0,1]^{n-1}$ 上有唯一的极小值点，且该点位于定义域内部。

既然我们已经证明了解的存在性与唯一性，接下来考察 a_{n+k} 在 $n \to \infty$ 时的双重标度极限，使得

$$t = n - 2^{-\frac{1}{3}} \sigma n^{\frac{1}{3}}, \text{ and } k/n^{\frac{1}{3}} \to x \in (-\infty, 0).$$

我们的证明的关键在于，利用 PII 方程的特解来近似唯一解。注意，若令 $t = n$，将试探形式 $a_k = A(k/n)$ 代入 (2.1)，并取极限 $n \to \infty$ ，则可得

$$A(\xi) = \frac{\xi A(\xi)}{1 - A(\xi)^2}.$$

结合边界条件 $A(0) = 1$，可得 $A(\xi) = \sqrt{1-\xi}$。注意，$A(\xi)$ 在 $\xi = 1$附近按平方根的形式趋于零，而事实证明，对于 $k \approx n$， $A(k/n)$ 并不是 a_k 的良好近似。在这一范围内，我们将采用如下设定：(1.4)，其中 $u(x) = 2^{\frac{1}{3}} y(2^{\frac{1}{3}} x + \sigma)$，且 y是 PII 方程的一个解

$$y''(x) = xy(x) + 2y^3(x). \tag{2.2}$$

应当与 $A(\xi)$ 匹配的解 y ，这意味着我们要寻找在 $-\infty$ 处具有以下渐近行为的解：

$$y(x) = \sqrt{-x/2}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty. \tag{2.3}$$

关于解 $y(x)$ 的另一个条件来自边界条件 $a_{n-1}=1$。事实上，由于因子 $n^{-1/3}$，近似式 (1.4) 只有在 $y(x)$ 于 σ 处具有极点时才能满足该条件。

PII 方程 (2.2) 的解对于 $x\in\mathbb{C}$ 是亚纯的。在$x\to\infty$ 附近，它们的行为受 Stokes 现象支配：在形如 $k\pi/3<\arg x<(k+1)\pi/3$、其中 $k=0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 5$。的六个扇区中，渐近行为各不相同。分隔这些扇区的射线称为临界射线或 Stokes 直线。注意，负实直线就是这样一条临界直线。正如 Boutroux [7], 所证明的，存在一些特殊解，它们在两个相邻扇区中具有相同的渐近行为。这类解通常被称为 tronqu´ee 解。事实上，Boutroux 证明了，方程 (1.3) 存在一个一参数解族，对于 $|x|\to\infty$ 满足 (2.3)，其中 $|\arg(-x)|<\pi/3$。此外，(2.3) 中的 $o(1)$ 项还可以进一步精确化（见 [16] 中的公式 (11.5.32)），于是有

$$y(x)=\sqrt{-x/2}\left(1-\tfrac{1}{8}(-x)^{-3}+\mathcal{O}((-x)^{-6})\right), \tag{2.4}$$

使得 $|x|\to\infty$ 这样的 $|\arg(-x)|<\pi/3$。这族解中最著名的例子是 Hastings-McLeod解 [21], , 我们将其记为 $y_0(x)$。这个解是一个实解析解，对所有 $x\in\mathbb{R}$ 均有定义，其渐近行为为

$$y_0(x)=\mathrm{Ai}(x),\qquad x\to+\infty, \tag{2.5}$$

其中 Ai(x) 是 Airy 函数。满足 (2.4) 的 (1.3) 的其他实解由 $b\in\mathbb{R}$ 参数化，并由以下渐近行为刻画： $x\to-\infty$

$$y_b(x)=y_0(x)+\frac{b}{(-x)^{\frac{1}{4}}}\exp\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right)(1+o(1)),\qquad x\ \to-\infty. \tag{2.6}$$

这意味着当 $x\to-\infty$ 时，这些解 y_b 之间仅相差超指数小的项。

注 2.2. *Painlev´e* 方程的等单值形变方法（详见 *[16]* ）在 *Stokes* 参数集合与

$$\{(s_1,s_2,s_3)\in\mathbb{C}^3\mid s_1-s_2+s_3+s_1s_2s_3=0\},$$

到 *PII* 方程解的集合。通过选取 $s_1=-i$ 和 $s_3=i$，参数s_2 可以是任意的，这正是我们感兴趣的一参数族。通过选取 $s_2\in\mathbb{R}$，我们得到在 $x\in\mathbb{R}$ 时取实值的解。关于临界射线上的渐近行为讨论，请参见 *[16]* 第 *10* 章（及其中的参考文献）；关于 *Stokes* 现象的讨论，请参见第 *11* 章。另见 *[24, 31]*。接着(2.6)是$_{s_2}$*[16],* 中定理 *10.2* 的第 *3)* 部分，该定理还指出 b 与 s_2 成正比，如下所示：$b=-\frac{}{\sqrt{\pi}2^{7/4}}$.

y_b 的解对于 $b \neq 0$ 将是亚纯的，可能在实轴上有极点。已知极点的位置关于 b也是亚纯的。由 (2.4)中的边界条件可知，从 $-\infty$算起，实直线上要么必定存在第一个极点，要么没有极点。我们将第一个极点记为 $\sigma(b)$, 如果 y_b 没有极点，则 $\sigma(b) = +\infty$。Hastings-McLeod解在实轴上没有极点，因此$\sigma(0) = +\infty$。事实上，Hastings-McLeod解是特殊的，因为它是一个双截断解：它在由 $|\arg(-x)| < \pi/3$ 和$|\arg x| < \pi/3$ 定义的两个扇区中具有一致渐近性，并且每个扇区都包含一条临界射线。在 $\{y_b\}$ 这一族解中，它是唯一的此类解，而其他（实）解在实直线上确实有极点。这可以从以下渐近公式中看出（见上文 [16, 定理 10.1] 和注 2.2）

$$y_b(x) = \operatorname{sgn}(b)\sqrt{x/2}\cot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2} + \frac{\gamma}{2}\log(8\sqrt{2}x^{3/2}) + \eta + \mathcal{O}(x^{-3/2}))\right) + \mathcal{O}(x^{-1}), \quad (2.7)$$

当 $x \to +\infty$时，其中 γ 和 η 是显式依赖于 b 的常数。该展开在主导项的极点邻域之外一致有效。由此展开（以及 y_b 为实值这一事实），我们确实看到 y_b 在实直线上有无穷多个极点，甚至还可以求出当 $x \to +\infty$时的渐近分布。特别地，我们得出， $\sigma(b) < +\infty$ 当且仅当 $b \neq 0$。

给定 $\sigma \in \mathbb{R}$，我们将致力于寻找满足 $\sigma(b) = \sigma.$ 的解 y_b。这里我们遇到了一个重大挑战，因为完全无法显而易见地判断这样的解是否存在。通过使用幂级数展开，可以验证，对于任意给定的 $\sigma \in \mathbb{R}$，都存在一族以该点为极点的一参数 PII 解。由方程的形式可知，PII 的解只能有一阶极点，留数为 ± 1 （而我们感兴趣的是留数为 -1 的解）。然而，无法简单地推导出这些解在 $x \to -\infty$ 时的渐近行为，而且很难调节剩余参数，使解同时满足 (2.4)。事实上，等单值形变方法 [16] 可以将不同奇点处的渐近行为联系起来，但任何 $\sigma \in \mathbb{R}$ 都是 PII 方程的正则点，因此很难显而易见地将 $x \to -\infty$ 处的渐近行为与 $x = \sigma$ 附近极点处的行为联系起来。这目前仅针对特殊的对称解 [27]，得以实现，但这些解的渐近行为不同于 (2.4)，因此与我们无关。

在接下来的主要结果中，我们证明解 y_b 和极点位置 $\sigma(b)$ 关于参数 b 单调。更确切地说，我们证明如下结论：

定理 2.3。对于 $b > 0$，存在一个存在一个 $\sigma(b) \in \mathbb{R}$，使得解 $y_b(x)$ 在区间 $(-\infty, \sigma(b))$ 上解析，并且在 $\sigma(b)$ 处有一个简单极点，其留数为 -1。此外

1. 映射 $b \mapsto \sigma$（b） 是从 （0， ∞） 到 $\mathbb{R}$ 的严格递减双射。
2. *If $b > b' \geq 0$, then $y_b(x) > y_{b'}(x)$ for all $x \in (-\infty, \sigma(b))$.*

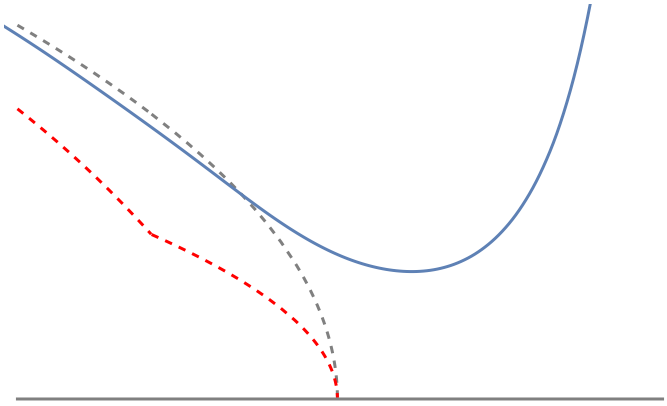


图 1：实线是解 y_b 的数值近似，该解在正轴上有一个极点，并在 $x \to -\infty$时具有渐近行为 $\sqrt{-x/2}$ 。虚线分别表示下界 (2.8) 和曲线 $y = \sqrt{-x/2}$。

据我们所知，这些结果是新的。在我们的证明中，映射 $b \mapsto \sigma(b)$ 并未显式给出；如果能对其进行更好的控制，将会非常有趣。

定理 2.3 的证明中一个重要要素是以下不等式 .

定理 2.4。 令 $b \geq 0$。那么我们有

$$y_b(x) > \max\left(\sqrt{-x/2}\sqrt{\frac{\sqrt{1-2x^3}-1}{\sqrt{1-2x^3}+1}}, \sqrt{-x/6}\right), \tag{2.8}$$

对于 $x \leq \min(\sigma(b), 0)$。

定理 2.3 和 2.4 的证明见第 3 节。

注意，在该定理中我们允许 $b = 0$ ，因此该不等式对Hastings-McLeod解成立，而且据我们所知，文献中尚无类似类型的下界。粗略地说，我们通过证明任意一个 y 的PII方程解，如果从上方穿过 (2.8) 右端的两个函数之一的图像，就会在交点附近递减，并且没有足够的时间积聚动量来折返并保持为正，从而证明了定理 2.4。

现在我们进入主要结果，该结果刻画了双重标度区域中 a_{n+k} 的极限。

定理 2.5. 令 $a_k \in (0, 1)$ 为 $k = 0, \ldots, n-2$ 在边界条件 (1.2)下满足 (1.1) 的唯一解。对于 $\sigma \in \mathbb{R}$ 并令

$$t = n - 2^{-\frac{1}{3}}\sigma n^{1/3}.$$

然后，对于 $x<0$，我们有

$$\lim_{n\to\infty,k/n^{1/3}\to x} n^{1/3}a_{n+k} = 2^{\frac{1}{3}} y_{b(\sigma)}(2^{\frac{1}{3}}x+\sigma)$$

其中，$y_{b(\sigma)}$ 是*PII* 方程的解，该解由(2.3) 唯一刻画，并且其第一个实极点位于 $x=\sigma$。

该定理的证明是第 5 节的主题。

(1.1) 和 (1.2) 中解作为哈密顿量 H (1.11) 的唯一极小值点（以及唯一临界点）的刻画，将在我们证明定理 2.5 的过程中发挥核心作用。我们将利用连续 PII 方程的解 $y_{b(\omega)}$ 来构造 d-PII方程唯一解的一个近似。为了证明这确实是一个良好的近似，我们将使用坎托罗维奇定理，通过牛顿法求 ∇H的零点。更准确地说，我们将对 ∇H_n 稍作改变，并处理一个具有相同零点的函数 F，其定义为 $(F(a))_k = (1-a_k^2)(\nabla H_n(a))_k$。求 F 零点的牛顿法迭代为

$$a^{(k+1)} = a^{(k)} - \left(F'(a^{(k)})\right)^{-1} F(a^{(k)}), \qquad k=0,1,2,\dots$$

从第一个猜测 $a^{(0)}$开始。该方法中的一个关键困难是，F' 可能具有非常小的特征值（主要是由于 Painlev´e区域中的行为），这会导致 $(F')^{-1}$ 的范数随着 $n\to\infty$而发散。为抵消这一影响，我们将从一个非常好的初始近似 $a^{(0)}$开始。要证明这一近似确实足够好，需要对极小值点处 F 的取值，以及在极小值点邻域内从上方和下方对 F' 给出的尖锐估计。该估计

$$y_b(x) \geq \sqrt{-x/6},$$

定理 2.4 对从下方估计 $\|(F')^{-1}\|_\infty$ 至关重要。

3 证明定理 2.3 和2.4

本节中，我们证明定理 2.3 和定理 2.4。

我们不使用 (2.2) 中PII 方程的标准形式，而使用适用于 $u_b(x) = 2^{\frac{1}{3}} y_b(2^{\frac{1}{3}}x)$ 的形式，该形式满足

$$u_b''(x) = 2xu_b(x) + 2u_b(x)^3 \tag{3.1}$$

with

$$u_b(x) = u_0(x) + 2^{\frac{1}{3}}\frac{b}{(-x)^{\frac{1}{4}}}\exp\left(-\frac{4}{3}(-x)^{3/2}\right)(1+o(1)), \qquad x\to-\infty \tag{3.2}$$

其中 $u_0(x) = 2^{\frac{1}{3}} y_0(2^{\frac{1}{3}} x)$ 是（3.1）的 Hastings-McLeod解。通过这一记号变换，我们可以观察到， $\omega(b)$ u_b的极点将位于 $x = 2^{-\frac{1}{3}}\sigma(b)$，其中 $\sigma(b)$ 是 y_b的极点。

我们改用 u_b ，以便与主结果定理 2.5 的证明保持一致。该证明相当技术性，使用 u_b 记法会更清晰。我们首先将定理 2.3 和定理 2.4 改写为 u_b。

定理 3.1. 对于 $b > 0$ ，存在一个 $\omega(b) \in \mathbb{R}$ ，使得解 $u_b(x)$在区间 $(-\infty, \omega(b))$ 上解析，并在 $\omega(b)$ 处有一个简单极点，留数为 -1。此外

1. 映射 $b \mapsto \omega(b)$ 是从 $(0, \infty)$ 到 $\mathbb{R}$ 的严格递减双射。

2. 若 $b > b' \geq 0$，则对所有 $x \in (-\infty, \omega(b))$，有 $u_b(x) > u_{b'}(x)$ 。

定理 3.2。 令 $b \geq 0$。那么我们有

$$u_b(x) > \max\left(\sqrt{-x}\sqrt{\frac{\sqrt{1-2x^3}-1}{\sqrt{1-2x^3}+1}}, \sqrt{-x/3}\right), \tag{3.3}$$

对于 $x \leq \min(\omega(b),0)$。

证明这些结论等价于证明定理 2.3 和定理 2.4。
证明将按以下步骤进行:

1. 证明若干关于 u_b行为的预备结果。

2. Prove that $u_b(x) \geq \sqrt{-x}\sqrt{\frac{\sqrt{1-2x^3}-1}{\sqrt{1-2x^3}+1}}$ for $x < \min(\omega(b), 0)$.

3. 证明定理 3.2 对 Hastings-McLeod解 u_0成立。

4. 证明定理 3.1，由此可推出定理 3.2 对所有 $b > 0$ 均成立。

3.1 一些预备知识

研究 u_b 的行为时，自然会用曲线 $y = 0$ 和 $x + y^2 = 0$将平面划分为四个区域。事实上，若 $(x,\ u_b(x))$ 是这些曲线上的一点，则 $u_b''(x) = 0$。若 $(x,\ u_b(x))$ 位于区域 I 或 III，则 $u_b''(x) > 0$，而 $u_b''(x) < 0$位于区域 II 和 IV。另见图2。

现在我们可以观察到，一旦解 u_b 进入区域 II，就再也不会进入区域 I。

引理 3.3。 如果对于某个 $x_0 \in (-\infty, \omega(b))$，$u_b(x_0) > \sqrt{-x_0}$，那么对于所有 $x \in (x_0, \min(\omega(b), 0))$，$u_b(x) > \sqrt{-x}$ 。

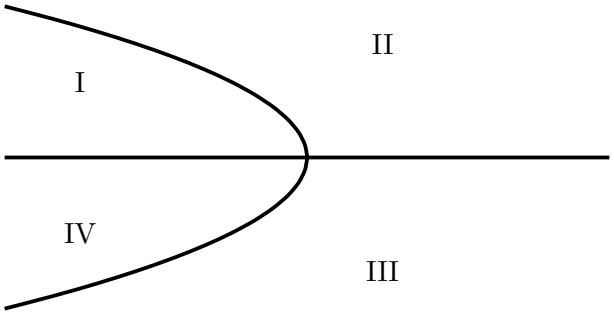


图2：曲线 $y^2+x=0$ 和 $y=0$ 将平面分为四个区域。当$(x,u(x))$ 位于区域 II和 IV时，解u 是凸的；当其位于 I和III时，则是凹的。

证明。 假设 $u_b(x)$ 确实与曲线 $y=\sqrt{-x}$ 在某一点 $\xi>x_0$处相交或相切。也就是说，存在某个 $\xi>x_0$，使得 $u_b(\xi)=\sqrt{-\xi}$ （并且我们将 ξ 取为此事发生后首次出现的 x_0）。由此可知，我们必有 $u_b'(\xi)\leq -\frac{1}{2\sqrt{-\xi}}$，因为其斜率必须至少与 $y=\sqrt{-x}$的斜率一样陡。我们将证明，对于 $x\in(-\infty,\ \xi)$，解 $u_b(x)$ 将位于直线

$$k: y=u_b'(\xi)(x-\xi)+\sqrt{-\xi}$$

它经过点（$\xi,\sqrt{-\xi}$），斜率为 $u_b'(\xi)$。由于 $u_b'(\xi)\leq -\frac{1}{2\sqrt{-\xi}}$ 任何这样的解 $u_b(x)$ 都不满足 (2.4) 中给出的边界条件，因此产生矛盾。

注意，如果 $u_b(x)>\sqrt{-x}$，那么由 (3.1) 可得 $u_b''(x)>0$. 这意味着$u_b'(x)$ 在 $(x_0,\ \xi)$ 上递增，因此 $u_b(x)$ 必须位于经过点 $(\xi,\ \sqrt{-\xi})$ 且斜率为 $u_b'(\xi)$ 的直线上方。事实上，通过观察可知，如果 $u_b(x)$ 位于这条直线上方，那么它也位于 $\sqrt{-x}$，上方，这意味着 $u_b''(x)>0$。因此可知，一旦满足边界条件 (2.4) 的 (1.3) 的一个解 $u_b(x)$ 位于曲线 $y=\sqrt{-x}$ 上方，它就会始终保持在这条曲线上方。

另请参见图3的示意图。 □

我们证明定理3.1和定理3.2的方法中的一个关键点是以下关于 u_b的表示：

命题 3.4. 对于 $b\in\mathbb{R}$，函数 $u_b(x)$ 满足

$$\big(u_b'(x)\big)^2+2\int_{-\infty}^{x}\big(u_b^2(s)+s\big)ds=\big(u_b^2(x)+x\big)^2 \tag{3.4}$$

对于 $x\in(-\infty,\omega(b))$.

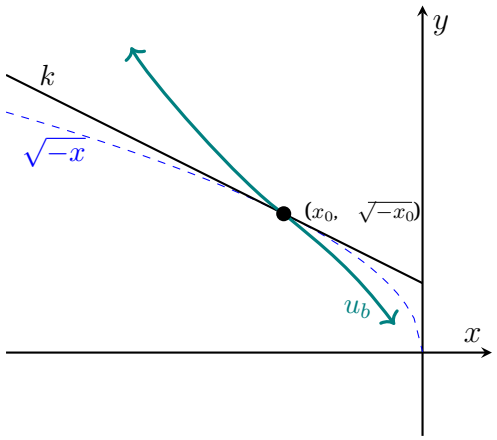


图3：虚线曲线表示 $y = \sqrt{-x}$ ，而实心直线是切线的一部分，该切线在解 u_b 从上方穿过（或接触）曲线$y = \sqrt{-x}$ 的点处，位于-$y = \sqrt{-x}$ 的切线上。由于PII方程的任何解在区域 II内都是凸的， u_b 在交点左侧的图像将保持在切线之上（直到遇到极点）。由于这与渐近行为 (2.4)相矛盾，因此没有 u_b 能够从区域 II进入区域 I 。

证明。 从 (1.3) 出发，并将其乘以 $2u_b'$:

$$2u_b'(x)u_b''(x) = 4u_b'(x)u_b(x)^3 + 4xu_b'(x)u_b(x).$$

现在在等式两边加上 $2u_b(x)^2 + 2x$ ：

$$2u_b'(x)u_b''(x) + 2u_b(x)^2 + 2x = 4u_b'(x)u_b(x)^3 + 4xu_b'(x)y_b(x) + 2u_b(x)^2 + 2x.$$

注意，由于在 $-\infty$处的渐近行为，我们实际上有 $u_b(x)^2 + x$在 $-\infty$ 处可积，因此可以积分

$$(u_b'(x))^2 + 2\int_{-\infty}^{x}(u_b(s)^2 + s)ds = (u_b(x))^4 + 2xu_b(x)^2 + x^2 + c$$

其中 c 是一个积分常数。事实上，在等式两边取极限 $x \to -\infty$ ，可得 $c = 0$ ，这就证明了该结论。 □

从 $x \to -\infty$ 的渐近行为可知， $u_b(x)$起初位于区域 I内。最终，解 $u_b(x)$将离开该区域（最迟在 $x = 0$时）。设 $x_*(b)$为 $u_b(x)$首次离开该区域的时刻。

引理3.5。 令 $x_*(b)$ 为 $u_b(x)$ 首次与 $y = 0$ 或 $y^2 + x = 0$相交的时刻，则

$$u_b' < u_b^2(x) + x \quad for\ x \in (-\infty, x_*(b)).$$

证明。 首先注意到 $u_n''(x) < 0$ 对于 $x < x_*(b)$。这意味着命题 3.4 中(3.4)左端的被积函数为负，因此

$$\big(u_b'(x)\big)^2 > \big(u_b^2(x) + x\big)^2.$$

由此可见， $u_b'(x)$ 在 $(-\infty,\ x_*(b))$ 上符号固定。根据 u_b 在 $-\infty$ 处的渐近行为可知，当 x 足够大且为负时， $u_b'(x)$ 实际上必为负，而 $u_b^2(x) + x < 0$ 对于 $x < x_*(b)$。取适当的平方根即可得到最终结果。

□

该 l 该结果可用于求得正解的下界 u_b .

3.2 u_b 的第一个下界

在本节中，我们证明定理 3.2中不等式的一个方向。特别地，我们证明 $u_b(x)$ 的下界是定理 3.2 中列出的第一个函数。

定理 3.6。 对于 和 $b \in \mathbb{R}$ ，使得 u_b 对于 $-\infty < x < \min(\omega(b),0)$ 为正，我们有

$$u_b(x) \geq \sqrt{-x}\sqrt{\frac{\sqrt{1-4x^3}-1}{\sqrt{1-4x^3}+1}}$$

证明。 我们将使用记号

$$e(x) = 1 - \frac{\sqrt{1-4x^3}-1}{\sqrt{1-4x^3}+1} = \frac{2}{1+\sqrt{1-4x^3}}. \tag{3.5}$$

使用这一记号，我们可以将不等式改写为

$$u_b(x) > \sqrt{-x(1-e(x))}.$$

注意，由 $x \to -\infty$ 时 $e(x)$ 和 $u_b(x)$ 的渐近行为，我们发现该不等式对于较大且为负的 x 成立。

现在假设该不等式并非对所有 $x < \min(\omega(b),0)$都成立。这意味着存在一点 $x_0 < \min(\omega(b),0)$，使得 $u_b(x)$与曲线 $y = \sqrt{-x(1-e(x))}$ 相交。由引理3.5可得， $u_b'(x_0) < e(x_0)x_0$。这意味着 $u_b(x)$ 甚至与斜率为 $e(x_0)x_0$ 且经过点（$x_0,\sqrt{-x_0(1-e(x_0))}$）的直线相交，该点对应于 x_0。这条直线为:

$$\ell : y = \sqrt{-x_0(1-e(x_0))} + e(x_0)x_0(x - x_0).$$

可以验证，这条直线经过原点。由于在由 $y = \sqrt{-x}$ 和负实轴围成的区域内， $u_b''(x) < 0$ for $u_b(x)$，即使对于位于ℓ 和负实轴之间的 $u_b(x)$，这一点也成立。由于在该区域上 $u_b'(x) < e(x_0)x_0$ ，因此可知 $u_b(x)$ 将在负实轴上的某一点离开该区域。这与假设 $u_b(x) > 0$ 对所有 $x < \min(0,\omega(b))$ 均成立相矛盾，因此这样的 x_0 不存在，从而得到所需的不等式。

□

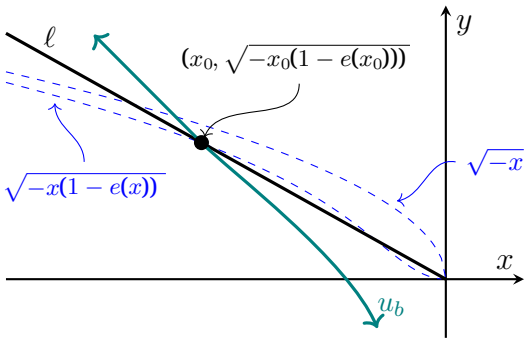


图 4：上方的虚线曲线表示 $u = \sqrt{-x}$，并将区域 I 与区域 II 分隔开。下方的虚线曲线表示 $x \mapsto \sqrt{-x}\sqrt{\frac{\sqrt{1-4x^3}-1}{\sqrt{1-4x^3}+1}}$。如定理 3.6 的证明所示，一旦解 u_b 穿过下方的虚线曲线，它就必须保持在经过交点和原点的直线下方。因此，它将取负值。

我们将在第 3.4 节证明，对于所有 $b \geq 0$ 和 $x < \min(0, \omega(b))$，$u_b(x) > u_0(x) > 0$。这将使我们得到，对于所有 u_b 且 $b \geq 0$，不等式成立。在此之前，我们先回顾 Hastings-McLeod解 $b = 0$ 的一些性质，并补充一些新结果。

3.3 Hastings-McLeod解

本节将证明 Hastings-McLeod解 $u_0(x)$ 满足定理 3.2 中的第二个界。

Hastings 和 McLeod 已经确立了 Painlev´e 方程 (2.2) 的 Hastings-McLeod解 $y_0(x)$ 的存在性和唯一性 [21]。该解满足边界条件 (2.4) 和 (2.5)。变换 $u_0(x) = 2^{\frac{1}{3}} y_0(2^{\frac{1}{3}} x)$ 给出了 u_0 的存在性和唯一性。他们还证明了以下结果：

引理 3.7. *Hastings-McLeod*解 u_0 具有以下性质

1. $\omega(0) = +\infty$，即 u_0 在实直线上没有极点。*2.* 解 $u_0(x)$ 恰好与曲线 $y = \sqrt{-x}$ 相交一次。*3.* 解 $u_0(x)$ 始终为正。*4.* 解 $u_0(x)$ 严格递减。

证明. 这些结论是 [21] 中定理 1.3 的一部分。 □

利用这些性质以及定理3.6中证明的下界，我们可以证明 $u_0(x) > \sqrt{-x/3}$，这将表明定理 3.2 对于 $b = 0$ 成立。

引理 3.8。 我们有 $u_0(x) > \sqrt{-x/3}$ 当 $x < 0$.

证明。 由于我们知道 u_0 严格为正，因此定理 3.6 中的不等式适用。在区域 $x < -(\frac{3}{4})^{1/3}$ 中，这是一个比我们要证明的不等式更强的不等式。因此，只需证明当 $x \in (-(\frac{3}{4})^{1/3}, 0)$. 时， $y_0(x) > \sqrt{-x/3}$ 的不等式。

假设 $u_0(x)$ 接触或穿过曲线 $y = \sqrt{-x/3}$ 在 $x = x_0$。那么在一段时间内，它将保持在由 m 定义的直线下方

$$m : y = \sqrt{-x_0/3} - \frac{x - x_0}{2\sqrt{-3x_0}}.$$

事实上，它将至少一直保持在那条直线下方，直到 m 穿过曲线 $y = \sqrt{-x}$，因为 $u_0''(x) < 0$ 在此区域内。简单计算表明， m 和 $y = \sqrt{-x}$ 在 $(x_1, \sqrt{-x_1})$ 处相交，其中

$$x_1 = (5 - 2\sqrt{6})x_0 > x_0/9.$$

令 u_* 为(3.1)中经过点$(x_1, \sqrt{-x_1})$且导数等于直线 m斜率的解。换言之， u_* 满足 $u_*(x_1) = \sqrt{-x_1}$ 且 $u_*'(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{-3x_0}}$。

结论： 令 $x^- = \inf_x\{u_*(x) < 0\}$，则对所有 $x_1 < x < x^-$， $u_*(x) \geq u_0(x)$。

注意到 $u_*(x_1) > u_0(x_1)$，并且 $u_*'(x_1) > u_0'(x_1)$，因为 $u_0''(x) < 0$ 对于 $x \in (x_0, x_1)$。然后，由于 $u_*(x)$ 满足(3.1)，我们有 $u_*''(x) > 0$ 对于 $x > x_1$，并且 $0 = u_*''(x_1) \geq u_0''(x_1)$。此外，我们可以看到，对于满足 (3.1) 的正解 u ，相应的二阶导数 u'' 关于 u 是递增的。这意味着这些不等式将向前传播，从而得到 $u_*(x) > u_0(x)$ $u_*'(x) > u_0'(x)$，以及 $u_*''(x) \geq u_0''(x)$ 对所有 $x_1 < x < x^-$ 都成立。这证明了该断言。

我们将证明 $u_*(-2x_0) < 0$ ，这意味着 $u_0(x) < 0$ ，对于某个 $x < -2x_0$。这与 u_0的已知性质相矛盾，这意味着不存在这样的点 x_0 ，并且u_0 永远不会穿过曲线 $y = \sqrt{-x/3}$。

为了证明 $u_*(-2x_0) < 0$ ，我们首先注意到 u_* 可以写成

$$u_*(x) = u_*(x_1) + (x - x_1)u_*'(x_1) + \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t} u_*(s)(u_*(s)^2 + s)ds.$$

现在注意到

$$u_*(x_1) + (-2x_0 - x_1)u_*'(x_1) < \frac{\sqrt{-x_0}}{3} - \frac{-2x_0 - x_0}{2\sqrt{-3x_0}} < -\frac{\sqrt{-x_0}}{2}.$$

事实上，第一个不等式成立是因为 $u_*'(x_1) = -\frac{1}{2\sqrt{-3x_0}}$ $u_*(x_1) = \sqrt{-x_1}$ 且 $x_0 < x_1 < \frac{x_0}{9}$; 第二个不等式可通过计算验证。

Ne接下来，我们利用 $u_*(s)^2 + s > 0$ 对于 $s > x_1$ 这一事实来估计二重积分 ，

$$\int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t} u_*(s)(u_*(s)^2+s)ds \le \int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t} u_*(x_1)(u_*(x_1)^2+s)ds$$
$$= \sqrt{-x_1}\int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t}(s-x_1)ds = \frac{1}{6}\sqrt{-x_1}(x-x_1)^3$$

取 $x = 2x_0$ 并使用 $x_1 > x_0/9$ （和 $x_1 < 0$），我们得到

$$\int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t} u_*(s)(u_*(s)^2+s)ds \le \frac{1}{6}\sqrt{-x_1}(-2x_0-x_1)^3 = \frac{1}{18}\sqrt{-x_0}(2+1/9)^3(-x_0)^3.$$

由于 $x_0 \ge -(\frac{3}{4})^{1/3}$因此我们得到

$$\int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{t} u_*(s)(u_*(s)^2+s)ds \le \frac{(2+1/9)^3}{24}\sqrt{-x_0}.$$

现在，由于$\frac{(2+1/9)^3}{24} < \frac{1}{2}$我们看到 $u_*(2x_0) < 0$，这就给出了所需的矛盾： $u_0(-2x_0) < 0$。 □

3.4 单调性

最后，我们给出定理 3.1 的证明，它与引理 3.8 和定理 3.6 一起证明定理 3.2。

我们现在证明以下结论。

定理 3.9。 若 $b_1 > b_2 \ge 0$，则 $\omega(b_1) < \omega(b_2)$ 且 $u_{b_1}(x) > u_{b_2}(x) > \sqrt{-x/3}$ 对所有$x \in (-\infty, \omega(b_1))$均成立。

证明。 令 $b_1 > b_2 \ge 0$。由渐近行为 (2.6) 可知，当负的 x_0 足够大时， $u_{b_1}(x_0) > u_{b_2}(x_0)$ 且 $u'_{b_1}(x_0) > u'_{b_2}(x_0)$（注意， u_b 是亚纯函数，因此可以逐项对渐近展开求导）。我们需要证明的是，这一结论一直延伸到 $\omega(b_1)$。

对 (1.3) 积分可得

$$u_b(x) = u_b(x_0) + (x-x_0)u'_b(x_0) + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t} u_b(s)(u_b(s)^2+s)dsdt.$$

因此，通过取差，我们得到

$$u_{b_1}(x) - u_{b_2}(x) = u_{b_1}(x_0) - u_{b_2}(x_0) + (x-x_0)\left(u'_{b_1}(x_0) - u'_{b_2}(x_0)\right)$$
$$+ \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t}\left(u_{b_1}(s) - u_{b_2}(s)\right)\left(u_{b_1}(s)^2 + u_{b_1}(s)u_{b_2}(s) + u_{b_2}(s)^2 + s\right)dsdt \quad (3.6)$$

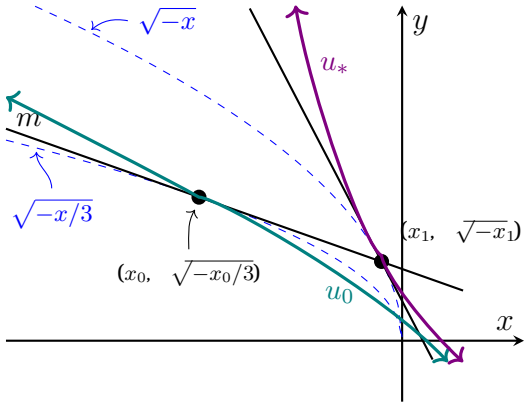


图 5：上方的虚线曲线表示 $u=\sqrt{-x}$，并将区域 I 与区域 II 分隔开。下方的虚线曲线表示 $x\mapsto\sqrt{-x/3}$。橙色曲线是u_0图像的一部分。如果它在点 $(x_0,\ \sqrt{-x_0/3})$ 与下方的虚线曲线相交，那么它必须始终位于 u_* 的图像下方；u_* 是满足初始条件$u_*(x_1)=\sqrt{-x_1}$和 $u_*'(x_1)=1/2\sqrt{-x_1}$ 的 PII 方程的解，其中 $(x_1,\ \sqrt{-x_1})$ 是曲线 $y=\sqrt{-x}$ 与 $y=\sqrt{-x/3}$ 在点$(x_0,\ \sqrt{-x_0/3})$ 处的切线的交点。如果$x_0>-(\frac{3}{4})^{1/3}$，那么 u_* 会变为负值，u_0 也必然变为负值，由此便会导致矛盾。换言之，如果 PII 方程的一个解 u 从上方穿过直线$y=\sqrt{-x/3}$，那么它就没有足够的动量弯折回来并保持为正。

假设对于某个 $x<\min(\omega(b_1)\ \omega(b_2))$，有 $u_{b_1}(x)\le u_{b_2}(x)$，并令 x_1 为满足 $u_{b_1}(x_1)=u_{b_2}(x_1)$ 的第一个时刻。于是，对于 $x_0<x<x_1$，有 $u_{b_1}(x)\ge u_{b_2}(x)$。将 $x=x_1$ 代入（3.6），我们看到左端为零。我们断言右端严格为正，从而得到矛盾。事实上，除二重积分之外的各项之和根据关于 x_0 的假设均严格为正。问题的关键在于证明二重积分中的被积函数也为正。为此，我们先处理 $b_2=0$ 的情形。于是，根据引理 3.8，对于 $s\in(x_0,x_1)$，有 $u_{b_2}(x)>\sqrt{-s/3}$，因此甚至有 $u_{b_1}(s)>\sqrt{-s/3}$。这也意味着

$$(u_{b_1}(s)-u_{b_2}(s))\,(u_{b_1}(s)^2+u_{b_1}(s)u_{b_2}(s)+u_{b_2}(s)^2+s)>0,$$

对于 $s\in(x_0,x_1)$。总之，我们看到 (3.6) 右端的所有项都严格为正，因此得出矛盾。这意味着不存在这样的 x_1，由此我们证明了特殊情形 $b_1>b_2=0$ 下的不等式。特别地，这意味着对于所有 $b\ge 0$ 和 $x<$，均有 $u_b(x)>\sqrt{-x/3}\ \min(0,\omega(b))$。现在，我们可以对一般的 b_1 和 b_2 重复这一论证，并得出所述结论。 □

下面的结论现在显然成立。

推论 3.10. 映射 $b \mapsto \omega(b)$ 严格递减。

引理 3.11. 以下极限成立： $\omega(b) \to +\infty$ 当 $b \downarrow 0$。

证明. 这是已知的。事实上，对于 $b = 0$，Hastings-McLeod解没有极点；但对于 $b > 0$，当 $+\infty$ 时，极点会如 (2.7) 所示出现。 □

引理 3.12. 以下极限成立： $\omega(b) \to -\infty$ 当 $b \to +\infty$。

证明. 我们先回顾，随着 $b \to \infty$， $u_b(x)$ 不可能收敛到 (3.1) 的一个解。事实上，如注 2.2 所述，PII 方程的解由所谓的斯托克斯乘子参数化，而 b 正是其中一个乘子。这些乘子都必须是有限的，因此，当 $b \to \infty$ 时， $u_b(x)$ 的任何极限都必定不属于解集。

由于 $\omega(b)$ 严格递减， $\omega_* = \lim_{b\to+\infty} \omega(b)$ 必定在 $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 中存在。假设 $\omega_* \in \mathbb{R}$。那么我们注意到，随着 $b \to +\infty$， $u_b(x)$ 也构成一列定义在 $(-\infty, \omega_*)$ 上的单调递增函数。因此极限

$$u_\infty(x) = \lim_{b\to\infty} u_b(x), \qquad x \in (-\infty, \omega_*),$$

是一个定义良好的可测函数（可能取值为 $\pm\infty$）。现在我们还注意到

$$\begin{aligned} u_b(x) &= u_b(x_0) + (x - x_0)u_b'(x_0) + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{s} u_b''(z)dzds \\ &= u_b(x_0) + (x - x_0)u_b'(x_0) + 2\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{s} (zu_b(z) + u_b(z)^3)dzds. \end{aligned}$$

对于 $x_0 < \omega_*$。我们将证明

$$u_\infty(x) = u_\infty(x_0) + (x - x_0)u_\infty'(x_0) + 2\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{s} (zu_\infty(z) + u_\infty(z)^3)dzds, \tag{3.7}$$

这表明 $u_\infty(x)$ 是 (3.1) 的一个解，因此我们得出了矛盾，故必有 $\omega_* = -\infty$，如所述。

要证明 u_∞ 满足 (3.7)，我们需要证明

$$\lim_{b\to\infty} \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{s} (zu_b(z) + u_b(z)^3)dzds = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{s} (zu_\infty(z) + u_\infty(z)^3)duds.$$

将被积函数拆分为

$$u_b(z)(z + u_b(z)^2) = \max\left(0, u_b(z)(z + u_b(z)^2)\right) + \min\left(0, u_b(z)(z + u_b(z)^2)\right).$$

现在， $u_b(z) \geq 0$ 和 $u_b(z)$ 关于 b严格递增，因此

$$\max\left(0, u_b(z)(z + u_b(z)^2)\right)$$

对于 $b \to +\infty$严格递增。根据单调收敛定理，我们得到

$$\lim_{b\to\infty} \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{s} \max\left(0, u_b(z)(z+u_b(z)^2)\right) dzds \\ = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{s} \max\left(0, u_\infty(z)(z+u_\infty(z)^2)\right) dzds,$$

其中后者可能取值为 $+\infty$。我们还知道 $u_b(z) > \sqrt{-z/3}$，因此

$$|\min\left(0, u_b(z)(z+u_b(z)^2)\right)| \le \frac{-2z}{3\sqrt{3}}.$$

因此，由控制收敛定理可得

$$\lim_{b\to\infty} \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{s} \min\left(0, u_b(z)(z+u_b(z)^2)\right) dzds \\ = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{s} \min\left(0, u_\infty(z)(z+u_\infty(z)^2)\right) dzds.$$

且后者取有限值。 □

3.5 定理 2.3 和 2.4 的证明

证明。注意到，定理 2.3等价于定理3.1。注意到，单调性直接由定理 3.9得出。 $b \mapsto \omega(b)$ 是双射这一事实由引理 3.11 和 3.12 得出，从而完成定理 3.1 的证明。

注意，定理2.4等价于定理3.2。后者由定理 3.9、 u_0 的正性以及定理 3.6 3.1 得出。 □

4 定理 2.1 的证明

本节我们证明定理 2.1，该定理指出，满足边界条件 (1.2) 的离散PII(1.1) 存在唯一解。

我们从以下引理开始。

引理 4.1。 对于 $1 \le n$，考虑对称的三对角矩阵 $D = D(s_1, .., s_{n-1})$，定义为

$$D_{jj} = \frac{\sqrt{s_{j-1}} + \sqrt{s_{j+1}}}{s_j^{3/2}}, \qquad j = 1, \dots, n-1,$$

and

$$D_{j(j+1)} = -\frac{1}{\sqrt{s_j s_{j+1}}}, \qquad j = 1, \dots, n-1,$$

其中我们令 $s_0 = s_n = 1$。那么 D 是一个正定矩阵。

证明。 该矩阵可以写成由 2×2 构成的若干半正定矩阵之和。事实上，令

$$H_j = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{s_{j+1}}}{s_j^{3/2}} & -\frac{1}{\sqrt{s_j s_{j+1}}} \\ -\frac{1}{\sqrt{s_j s_{j+1}}} & \frac{\sqrt{s_j}}{s_{j+1}^{3/2}} \end{pmatrix}.$$

然后很容易验证， H_j 是半正定的。将 D 写成

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_1^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{n-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_{n-1}^{3/2}} \end{pmatrix}$$

我们看到， D 是半正定矩阵之和。这立即意味着D 是半正定的。此外，从求和表示中也不难看出， $x^T Dx = 0$ 当且仅当 $x = 0$。

□

我们回顾 (1.11) 中哈密顿量 H_n 的定义。

命题 4.2. 哈密顿量 H_n 在空间 $a_k \in (0,1)$上有唯一的极小值点，对 $k = 0, \ldots, n-2$ 满足边界条件 $a_{-1} = a_{n-1} = 1$，且该极小值点出现在其唯一的临界点处。

证明。 回顾一下，

$$H_n(a) = -\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k+\varepsilon}{t} \log(1-a_k^2) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{k-1}$$

满足边界条件 $a_{-1} = a_{n-1} = 1$。变量替换 $a_k = \sqrt{s_{k+1}}$ 后，我们看到 that

$$\tilde{H}_n(s) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+\varepsilon}{t} \log(1-s_k) - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{s_k s_{k-1}},$$

对于 $s_k \in (0,\ 1)$，对于 $k = 1,\ \ldots\ldots,\ n-1$，满足边界条件 $s_0 = s_n = 1$。对于 H_n，在空间 $a_k \in [0,1]$ 中针对 $k = 0,\ \ldots\ldots,\ n-2$ 且满足边界条件$a_{-1} = a_{n-1} = 1$的任何局部极小值点，都会给出 H_n 在空间 $s_k \in [0,1]$ 中针对 $k = 1,\ \ldots\ldots,\ n-1$且满足边界条件 $s_0 = s_n = 1$的一个局部极小值点，反之亦然。

由紧致性和连续性， H_n 存在一个极小值点。设 s^* 为一个极小值点。我们将证明它是唯一的，并且位于内部$(0,1)^n$。对于后者，注意到$H_n(s_1, \ldots, s_n) = +\infty$，如果 $s_k = 1$ 对某个 $k = 1, \ldots, n$ 成立，从而对于 $k = 1, \ldots, n$有 $s_k^* < 1$。接下来我们还将证明，对于 $k = 1, \ldots, n,\ \ s_k^* > 0$。反设不然，并令 k^* 为使得 $s_{k^*}^* = 0$成立的第一个整数。则 $\partial \tilde{H}_n / \partial s_{k^*}(s^* + \varepsilon e_{k^*}) \sim -\sqrt{(s_{k-1}^* + s_{k^*+1}^*)}/\varepsilon$，从而$H_n(s^* + \varepsilon e_{k^*}) < H_n(s^*)$ 对于充分小的 ε成立，这就导致矛盾。我们得出结论：

˜极小值点 s^* 对于 H_n 必须位于内部 $s_k^* \in (0,1)$ 对所有 $k = 1, \dots, n$ 均成立。尚需证明它是唯一的。为此，注意到 H_n 的 Hessian 矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{t(1-s_1)^2} & & & \\ & \frac{1+\varepsilon}{t(1-s_2)^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{n-2+\varepsilon}{t(1-s_{n-1})^2} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}D$$

这是一个对角线上元素均为正的对角矩阵与 D 的和，其中 D 是引理 ˜4.1 中的矩阵。因此它是正定的，进而 H_n 是严格凸函数。因此，极小值点唯一。

这也意味着 H_n 在定义域内部有唯一的极小值点。由于 ˜ 的任意临界点都对应于 H_n 的一个临界点，我们可知 H_n 有唯一的临界点，且该点使 H_n 取极小值。

□

现在我们可以证明定理 2.1。

定理 *2.1* 的证明。这直接由命题 4.2 以及 $\nabla H_n = 0$ 与 d-PII方程相同这一事实得出。

□

5 定理 2.5 的证明

定理 2.5 证明的核心思路是，首先构造哈密顿量 H_n 的一个近似极小值点 $a^{(0)}$ 。具体而言，我们将构造 $a^{(0)}$ ，使得 $\nabla H(a^{(0)}) = \mathcal{O}(n^{-4/3})$。为了证明 $a^{(0)}$ 接近极小值点，我们使用牛顿法的坎托罗维奇定理 [23], ；该定理给出了充分条件，保证对于函数 $F(x)$ 和点 x_0 ，在 x_0 的邻域内存在方程 $F(x) = 0$ 的一个解。由此我们可以证明，真正的极小值点 a^* 位于球 $B(a^{(0)}, bn^{-2/3})$ 内。最后，注意到在适当的重标度下，我们有 $n^{1/3}a^* \in B(n^{1/3}a^{(0)}, bn^{-1/3})$，因此令 $n \to \infty$ 趋于极限，我们将得到

$$\lim_{n\to\infty, k/n^{1/3}\to x} n^{1/3} a^*_{n+k} = \lim_{n\to\infty} n^{1/3} a^{(0)}_{n+k}.$$

根据我们得到的 $a^{(0)}$ 的显式形式，可以轻松计算出这个极限，从而证明定理 2.5。

5.1 近似极小值点 $a^{(0)}$ 及定理 2.5 的证明

在本文余下部分中，采用 u_b的平移版本会比较方便。由于极点 $\omega(b)$ 的位置关于 b 严格单调，我们可以将其反解，并将 b 视为 ω的函数。定义

$$\nu_\omega(x) = u_{b(\omega)}(x + \omega) \tag{5.1}$$

其中 u 满足带有给定边界条件的(3.1)。新的 ν_ω 对于 ω 的所有选择都在 $x=0$ 处有一个极点, 并且我们在记号中标明对 ω 的依赖，以强调这种依赖性。我们将对一般的 ω 使用这一记号，而不只是对模型中作为参数引入的特定对象使用。注意， ν_ω 满足 ODE

$$\nu_\omega''(x) = 2(x+\omega)\nu_\omega(x) + 2\nu_\omega^3(x). \tag{5.2}$$

为定义 $a^{(0)}$ ，我们先引入参数

$$\omega_n = \omega + \frac{\varepsilon}{n^{1/3}}. \tag{5.3}$$

$H_n(a)$ 的近似极小值点由 ν_{ω_n} 的离散化按以下方式构造:

$$a_k^{(0)} = \frac{1}{n^{1/3}}\nu_{\omega_n}\left(\frac{k-n}{n^{1/3}}\right) - \frac{\omega_n}{3(k-n)n^{2/3}} - \frac{1}{2n} \tag{5.4}$$

对于 $k=1$，.....， $n-2$。我们将证明， $a^{(0)}$ 接近 H_n 的唯一临界点 a^*。不过，我们不直接处理梯度函数 $\nabla H_n(a)$，而是对其作出修改，并考虑由下式定义的 F

$$(F(a))_k = -(1-a_k^2)\,(\nabla H_n(a))_k\,. \tag{5.5}$$

This 这种修改仍能确定极小值点，因为对于 $a_k \in (0,\ 1)$，我们将有 t

$$F(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla H_n(a) = 0.$$

下面的定理是证明定理 2.5 的关键。

定理 5.1。 设 F 如 (5.5) 所示， $a^{(0)}$ 如(5.4)所示，则存在一个 $c>0$ ，使得对每个充分大的 n ，都存在一个 $a^* \in B(a^{(0)}, cn^{-2/3})$ ，使得 $F(a^*)=0$。

我们将该定理的证明推迟到下一小节。

注意，并不能立即推出，定理 5.1 中的点 a^* 也是定义在域 H_n (0,1) 对于$k=0,\ldots,$ $n-2$ 上的唯一临界点（以及唯一极小值点）。事实上，由于球 $B(a^{(0)}, cn^{-2/3})$ 有一部分位于我们的域之外，因此对于某些 k， $a_k^* \notin (0,1)$ 可能成立。在下述命题中，我们将证明这种情况不会发生，并且 a^* 确实是 H_n的唯一极小值点。

命题 5.2. 设 a^* 是 $F(a)=0$ 的解，且位于球 $B(a^{(0)}, cn^{-2/3})$内。那么当 n 充分大时，对于所有 $k=0$、1、...、 $n-2$，都有 $0<a_k^*<1$ 。

证明。我们先证明，当 n 充分大时， $0 < a_k^*$ 。回想一下，在 $(-\infty,0)$ 上， $\nu_\omega(x) > 0$ ；由于 ν_ω的边界条件，这一结论可以加强为：对于某个 $\delta > 0$ ， $y_\omega(x) > \delta$ 。接下来注意到

$$a_k^{(0)} = \frac{1}{n^{1/3}} \nu_{\omega_n}\left(\frac{k-n}{n^{1/3}}\right) + \mathcal{O}(n^{-2/3}) > \frac{\delta}{n^{1/3}} + \mathcal{O}(n^{-2/3}).$$

那么，由于 $a^* \in B(a^{(0)},\ cn^{-2/3})$，我们可以选取足够大的 n ，使得 $a_k^* > 0$。

现在要证明 $a_k^* < 1$，首先注意到，只有当 $k < n - tn^{1/3}$ （对某个 t）时， a_k^* 才接近 1。一旦到达 $n - k = \mathcal{O}(n^{1/3})$ 所在的区域，近似解 $a^{(0)}$ 就会遵循缩放后的 Painlevé 解的行为，并逐渐趋近于 0。在此区域内，由 $a^* \in B(a^{(0)},\ cn^{-2/3})$ 可知 $a_k^* < 1$。当 k 较小时，也就是 $a^{(0)}$ 接近 1 的区域，我们首先注意到

$$(F(a))_k = -(1-a_k^2)\,(\nabla H_n(a))_k = (1-a_k^2)(a_{k+1}+a_{k-1}) - 2\frac{k+\varepsilon}{t}a_k.$$

由于 a^* 是 $F(a)$ 的解， $= 0$ 可知

$$\left(1-(a_k^*)^2\right)(a_{k+1}^*+a_{k-1}^*) - 2\frac{k+\varepsilon}{t}a_k^* = 0.$$

改写后得到

$$\left(1-(a_k^*)^2\right)(a_{k+1}^*+a_{k-1}^*) = 2\frac{k+\varepsilon}{t}a_k^*$$

其中右侧必须严格为正，因为 a^* 接近 $a^{(0)}$ ，而 $a^{(0)}$ 接近 1，且 $\varepsilon \geq 0$。这意味着不存在满足 $a_k^* = 1$ 的解，否则左侧将为 0，等式便无法成立。同理， $a_k^* > 1$ 也不可能成立，否则我们需要

$$a_{k+1}^* + a_{k-1}^* < 0,$$

这意味着 a_{k+1}^* 和 a_{k-1}^* 中至少有一个为负。然而这是不可能的，因为在此区域内，$a^* \in B(a^{(0)},\ cn^{-2/3})$，且 $a^{(0)}$ 接近 1。 □

现在我们可以证明本文的主要结果了。

定理 *2.5* 的证明。令 a^* 为 H_n 在集合 $a_k \in (0,\ 1)$ 上的唯一极小值点，其中$k = 0,\ \ldots\ \ldots,\ n-2$，且 $a_{-1} = a_{n-1} = 0$ 取自命题 4.2。于是，令 $a^{(0)}$ 如 (5.4) 所示，我们有

$$\lim_{n\to\infty,k/n^{1/3}\to x} n^{1/3}a_{n+k}^* = \lim_{n\to\infty,k/n^{1/3}\to x}\left(n^{1/3}(a_{n+k}^* - a_{n+k}^{(0)}) + n^{1/3}a_{n+k}^{(0)}\right)$$

根据定理5.1，我们有 $a^* \in B(a^{(0)}, cn^{-2/3})$，由此可得 $n^{1/3}(a_{n+k}^* - a_{n+k}^{(0)}) = \mathcal{O}(n^{-1/3})$，因此该项在极限中消失。这就剩下

$$\lim_{n\to\infty,k/n^{1/3}\to x} n^{1/3}a_{n+k}^{(0)} = \lim_{n\to\infty,k/n^{1/3}\to x}\left(\nu_{\omega_n}\left(\frac{k}{n^{1/3}}\right) + \mathcal{O}(n^{-1/3})\right)$$

注意到 $\omega_n \to \omega$ 单调变化，这也使得 $b(\omega_n) \to b(\omega)$ 单调变化。由于 PII 的解在 b 和 x 中是亚纯的，我们得到：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty, k/n^{1/3}\to x} &\left(\nu_{\omega_n}\left(\frac{k}{n^{1/3}}\right) - \nu_{\omega_n}(x)\right) + \left(u_{b(\omega_n)}(x+\omega_n) - u_{b(\omega_n)}(x+\omega)\right) \\ &+ \left(u_{b(\omega_n)}(x+\omega) - u_{b(\omega)}(x+\omega)\right) + u_{b(\omega)}(x+\omega) \\ &= u_{b(\omega)}(x+\omega).\end{aligned}$$

这里我们对所有 $\omega \in (-\infty, \infty)$使用关系 $\nu_\omega(x) = u_{b(\omega)}(x+\omega)$。这就完成了定理 2.5 的证明。□

5.2 定理5.1的证明

定理5.1的证明将直接应用于巴拿赫空间中牛顿方法的坎托罗维奇定理 [23]。该定理有许多变体，关于详细讨论及历史概述，我们参阅 [38] 。此处陈述的版本是对 [38] 中定理 2.2 结合备注 2.3 的略微简化。

定理 5.3。设 $\mathcal{B}$ 为一个巴拿赫空间，$F:\ X \to \mathcal{B}$ 是开凸子集 $X \subset \mathcal{B}$上的可微函数。设 $x_0 \in X$满足 $F(x_0) \neq 0$，并且 $(F'(x_0))^{-1}$ 存在。此外，假设存在 β、M，使得

(1) $\| (F'(x_0))^{-1} F(x_0)\| \leq \beta,$

(2) $\| (F'(x_0))^{-1} (F'(x) - F'(y)) \| \leq M\|x-y\|$ *for all* $x, y \in B(x_0, 2\beta) \subset X,$

(3) $\beta M < \frac{1}{2}$

然后，当 $k \to \infty$ 时，从 x_0 开始的牛顿迭代 $x_{k+1} = x_k - F(x_k)^{-1}F(x_k)$ 收敛到一个 $x^* \in B(x_0, t^*)$，使得 $F(x^*) = 0$。这里 $t^* = 2\beta/(1+\sqrt{1-2\beta M}) < 2\beta$。

我们还将用到以下界。

定理 5.4。其中 F 如(5.5) 所示，$a^{(0)}$ 如(5.4)所示，存在一个 $c > 0$，使得

(i) F满足

$$\left\| \left(F'(a^{(0)})\right)^{-1} F(a^{(0)}) \right\|_\infty \leq \frac{c}{2} n^{-2/3}$$

(ii) 对于 $a, b \in B(a^{(0)}, cn^{-2/3})$,

$$\left\| \left(F'(a^{(0)})\right)^{-1} \left(F'(a)) - F'(b)\right) \right\|_\infty \leq M\|a-b\|_\infty$$

其中 $M = \mathcal{O}(n^{1/3})$ 作为 $n \to \infty$。

该定理通过一段冗长的技术论证得出，并在第 7 节中证明。 .

定理 *5.1* 的证明。 由前一定理中的陈述*(i)* 可直接推出F 在 $a^{(0)}$的邻域内满足坎托罗维奇定理 (5.3) 中的条件*(1)* 。

由（*ii*）可知， F 满足（*2*），其中 $M = \mathcal{O}(n^{1/3})$。最后，得出结论时我们注意到

$$\beta M = \mathcal{O}(n^{-1/3}) < \frac{1}{2},$$

如果 n 足够大。

由于坎托罗维奇定理的所有条件都得到满足，我们便对所有足够大的 n （即当 $\beta M < 1/2$ 时）得到所需的结论。 □

6 极小值点的近似

定理5.4仍有待证明。本节将通过证明$\|F(a)\|_\infty$ 很小来为其证明作准备。定理 5.4 的其余证明将在第 7 节给出。

回顾一下，我们在 (5.4) 中定义了

$$a_k^{(0)} = \frac{1}{n^{1/3}} \nu_{\omega_n}\left(\frac{k-n}{n^{1/3}}\right) - \frac{\omega_n}{3(k-n)n^{2/3}} - \frac{1}{2n},$$

其中 ν_{ω_n} 如 (5.1) 所示。这是一个全局解，但修正项（ ν_{ω_n} 以外的各项）只有在 k 接近 n 时才开始起作用；事实上，引入这些修正项是为了减小该区域内的误差。 k 接近 n 的区域需要单独处理。为此，我们引入两个将分别研究的区域:

- 区域 I: $k = 0, \dots, n - \lfloor \delta n^{1/3} \rfloor$
- 区域 II: $k = n - \lfloor \delta n^{1/3} \rfloor, \dots, n - 2$.

命题 6.1。 存在 $c > 0$, 关于 k 和 n 一致，使得

$$\left(F(a^{(0)})\right)_k \le c n^{-4/3}.$$

这在第6.1小节中针对 k ∈区域 I 得到证明，并在第 6.2 小节中针对 k ∈区域 II 得到证明。

6.1 在区域 I 上界定 $F(a^{(0)})$

为简化起见，我们采用以下记号:

$$\nu(x) = \nu_{\omega_n}(x) \qquad \text{and} \qquad x_k = \frac{k-n}{n^{1/3}}. \tag{6.1}$$

我们将需要以下引理。

引理 6.2。 对于 k 在区域 I 中，我们有

(1)

$$a_{k+1}^{(0)} - 2a_k^{(0)} + a_{k-1}^{(0)} = \frac{\nu''(x_k)}{n} + \mathcal{O}(n^{-5/3})$$

(2)

$$\left(a_k^{(0)}\right)^2 \left(a_{k+1}^{(0)} + a_{k-1}^{(0)}\right) = 2\frac{\nu^3(x_k)}{n} + \mathcal{O}(n^{-5/3})$$

(3)

$$2a_k^{(0)} \left(\frac{n-k-\omega_n n^{1/3}}{N}\right) = -2(x_k + \omega_n)\frac{\nu(x_k)}{n} + \mathcal{O}(n^{-4/3})$$

当 $n \to \infty$ 时，其中 $\mathcal{O}$ 项中的常数关于 k 一致。

引理 *6.2*（*1*）的证明。我们首先使用泰勒估计：

$$\nu(x_{k\pm1}) = \nu(x_k) \pm \frac{\nu'(x_k)}{n^{1/3}} + \frac{\nu''(x_k)}{2n^{2/3}} \pm \frac{\nu'''(x_k)}{6n} + \frac{\nu^{(4)}(\xi)}{4!n^{4/3}}.$$

这表明：

$$\frac{1}{n^{1/3}}\left(\nu\left(x_{k+1}\right) - 2\nu\left(x_k\right) + \nu\left(x_{k-1}\right)\right) = \frac{\nu''(x_k)}{n} + \mathcal{O}(n^{-5/3}).$$

这里，对于区域 I 中所有的 k，误差项的绝对值可由以下式子控制

$$n^{-5/3} \sup_{x\in(-\infty,-\delta]} |\nu^{(4)}(x)|,$$

根据 $\nu(x)$ 在 $x \to -\infty$ 时的渐近行为，上确界必定有限。这给出了 $a_k^{(0)}$ 主项的贡献。对于修正项，我们注意到最后的 $-\frac{1}{2n}$ 项恰好完全抵消，剩下：

—

$$\left|\frac{\omega_n}{3n^{2/3}}\left(\frac{1}{k+1-n} - \frac{2}{k-n} + \frac{1}{k-1-n}\right)\right|$$
$$= \left|\frac{2\omega_n}{3n^{2/3}(k+1-n)(k-n)(k-1-n)}\right| \le \frac{2|\omega_n|}{3n^{5/3}\delta^3}$$

对于 k，在区域 I 中。 □

引理 *6.2*（*2*）的证明。其证明与（*1*）的证明类似。我们对主项进行泰勒展开，得到。

$$\nu(x_{k+1}) + \nu(x_{k-1}) = 2\nu(x_k) + \mathcal{O}(k^{-2/3}).$$

由于 $a^{(0)}$ 的主导项为 $n^{-1/3}$ 阶，而修正项为 $1/n$ 阶，因此$(a_k^{(0)})^2(a_{k+1}^{(0)} + a_{k-1}^{(0)})$ 的任何交叉项（主项除外）都将为 $\mathcal{O}(n^{-5/3})$。仔细追踪这些项的形式表明，对于 RegionI中的所有 k，我们可以在 k 中一致地界定误差项的大小。

□

引理 *6.2*（*3*）的证明。我们首先注意到，

$$\frac{n-k-\omega_n n^{1/3}}{N} = -\frac{x_k+\omega_n}{n^{2/3}}\left(1+\frac{\omega_n n^{1/3}}{t}\right)$$

这给出了

$$2a_k^{(0)}\left(\frac{n-k-\omega_n n^{1/3}}{t}\right) = -2(x_k+\omega_n)\frac{\nu(x_k)}{n} - \frac{\omega_n(x_k+\omega_n)}{3x_k n^{5/3}} - 2\frac{x_k+\omega_n}{n^{5/3}} + \mathcal{O}(n^{-5/3}).$$

我们可以验证，右侧的第二项也为 $\mathcal{O}(n^{-5/3})$，然而当 k 较小时，第三项为 $\mathcal{O}(n^{-4/3})$（因为 $x_k = (n-k)/n^{1/3}$）。对于某个常数 C，该项的大小可对 k 一致地界定为 $Cn^{-4/3}$。

□

现在我们开始证明区域 I 上的命题 6.1。

区域 *I* 上命题*6.1* 的证明。回顾

$$(F(a))_k = (1-a_k^2)(a_{k+1}+a_{k-1}) - 2\frac{k+\varepsilon}{t}a_k.$$

我们首先注意到，$(F(a))_k$ 可以改写为

$$(F(a))_k = a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1} - a_k^2(a_{k+1}+a_{k-1}) + 2a_k\left(\frac{n-k-\omega_n n^{1/3}}{t}\right),$$

其中 $t = n - \omega n^{1/3}$ 和 $\omega_n = \omega + \frac{\varepsilon}{n^{1/3}}$同前。

引理 6.2 给出了

$$\left(F(a^{(0)})\right)_k = \frac{1}{n}\left(\nu''(x_k) - 2\nu(x_k)(x_k+\omega_n) - 2\nu^3(x_k)\right) + \mathcal{O}(n^{-4/3})$$

现在，由于 ν 满足 (5.2)，我们发现主项恰好抵消，从而得到所需的命题。

□

6.2 在区域 II 上界定 $F(a^{(0)})$

在区域II 上，不仅修正项变得重要，而且我们还有$\nu_\omega(x)$接近一个极点。事实上， $\nu_\omega(x)$在 0 附近的行为由以下引理给出：

引理 6.3. 函数 ν_ω 具有如下展开式

$$\nu_\omega(x) = -\frac{1}{x}\left(1 - \frac{\omega}{3}x^2 - \frac{x^3}{2} + \sum_{k=4}^{\infty} c_k x^k\right).$$

证明. 由于 ν_ω 是亚纯函数，在零点处有一个留数为 -1 的简单极点，因此它具有如下形式的展开式

$$\nu_\omega(x) = -\frac{1}{x}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k\right).$$

接着，我们可以将此展开式代入上面的方程，求出前几个系数。

□

为了处理这一区域，我们需要考虑经过变换的 $\nu_\omega(x)$ 和 $a_k^{(0)}$ ，以消除这一奇点。

6.2.1 变换问题

我们首先从 $\nu_\omega(x)$ 中去除奇点：

引理 6.4。 令 u 为满足(3.1) 及给定边界条件的解。特别地，回想一下， u 在 ω处有一个简单极点，并令

$$f_\omega(x) = xu(x+\omega) + 1 = x\nu_\omega(x) + 1. \tag{6.2}$$

然后， f_ω 满足以下常微分方程：

$$x^2 f_\omega''(x) - 2x f_\omega'(x) = 2\big(f_\omega(x) - 1\big)\Big(f_\omega^2(x) - 2f_\omega(x) + x^2(x+\omega)\Big) \tag{6.3}$$

证明。 验证方法是对 f_ω 求导，并使用 (3.1) 作相应的代换。

□

请注意，前一个引理中的 f_ω 也满足该条件。

$$\frac{f_\omega(x) - 1}{x} = u(x+\omega) = \nu_\omega(x).$$

这使我们自然地引入由 b_k 定义的

$$a_{n+k}^{(0)} = \frac{b_k - 1}{k}, \qquad \text{or} \qquad b_k = k a_{n+k}^{(0)} + 1 \tag{6.4}$$

其中 k 起到 x 的作用。我们通过定义 $x_k = \frac{k}{n^{1/3}}$ 使这种联系更加具体，这将引导我们——

$$b_k = f_{\omega_n}(x_k) - \frac{\omega_n}{3n^{2/3}} - \frac{k}{2n}.$$

备注 6.5。通过这一重新编排，区域 II 对应于 $-\delta n^{1/3} \le k \le -2$。值得记住，$k$ 始终为负。

引理 6.6。函数 f_ω 在 0 处有如下展开：

$$f_\omega(x) = \frac{\omega}{3}x^2 + \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^4),$$

因此对于 $k = -\lfloor \delta n^{1/3} \rfloor, \dots, -2$，

$$|b_k| \le C_\delta \frac{k^2}{n^{2/3}}.$$

证明。由定义以及引理 6.3可得 f 的展开式。关于 b_k 的界之所以成立，是因为我们只需考虑 f_ω 在 0 的一个紧邻域中的展开。

□

6.2.2 界定 $(F(a))_{n+k}$

我们首先用我们的 b_k 重写函数 $F(a)$ 及其导数。

Lemma 6.7. 利用 $x_k = \frac{k}{n^{1/3}}$，我们可以将 $\left(F(a^{(0)})\right)_{n+k}$ 改写为用 b_k 表示的形式，如下：

$$\begin{aligned}\left(F(a^{(0)})\right)_{n+k} = {} & \frac{(b_{k+1} - 2b_k + b_{k-1})}{k} - \frac{b_{k-1} - b_{k+1}}{k^2} \\ & - \left[\frac{b_{k+1} + b_{k-1}}{k} + \frac{b_{k-1} - b_{k+1}}{k^2} - \frac{2}{k}\right] \frac{b_k^2 - 2b_k}{k^2 - 1} \\ & - 2\frac{b_k - 1}{k} \cdot \frac{x_k + \omega_n}{n^{2/3}} + \mathcal{O}(n^{-4/3}),\end{aligned} \tag{6.5}$$

当 $n \to \infty$ 时，其中 $\mathcal{O}(n^{-4/3})$ 项中的常数关于 $k = n - \lfloor \delta n^{1/3} \rfloor, \dots, n-2$ 是一致的（但可以依赖于 δ 和 ω）。

证明。 由 $F(a^{(0)})$ 的定义可得

$$\begin{aligned}\left(F(a^{(0)})\right)_{n+k} &= \left(a^{(0)}_{n+k+1}+a^{(0)}_{n+k-1}\right)(1-(a^{(0)}_{n+k})^2)-2a^{(0)}_{n+k}\left(\frac{n+k+\varepsilon}{t}\right)\\ &= \left(a^{(0)}_{n+k+1}+a^{(0)}_{n+k-1}\right)(1-(a^{(0)}_{n+k})^2)-2a^{(0)}_{n+k}\\ &\quad -2a^{(0)}_{n+k}\frac{k+\omega_n n^{1/3}}{n}+\mathcal{O}(n^{-4/3}).\end{aligned} \tag{6.6}$$

最后的误差项来自

$$\frac{n+k+\varepsilon}{t}-1=\frac{k+\omega_n n^{1/3}}{n}\left(1-\frac{\omega n^{1/3}}{n+\omega n^{1/3}}\right).$$

Now, 为了用 b_k 表示 $F(a^{(0)})$，我们首先改写各个单独的部分：

$$a^{(0)}_{n+k+1}+a^{(0)}_{n+k-1}=\frac{k(b_{k+1}+b_{k-1})+b_{k-1}-b_{k+1}-2k}{k^2-1} \tag{6.7}$$

$$1-(a^{(0)}_{n+k})^2=\frac{k^2-1}{k^2}-\frac{b_k^2-2b_k}{k^2} \tag{6.8}$$

综合以上结果可得

$$\begin{aligned}&\left(a^{(0)}_{n+k+1}+a^{(0)}_{n+k-1}\right)(1-(a^{(0)}_{n+k})^2)-2a^{(0)}_{n+k}\\ &\quad=\frac{(b_{k+1}-2b_k+b_{k-1})}{k}-\frac{b_{k-1}-b_{k+1}}{k^2}\\ &\qquad-\frac{b_k^2-2b_k}{k^2}\left[\frac{k(b_{k+1}+b_{k-1})+b_{k-1}-b_{k+1}-2k}{k^2-1}\right]\end{aligned}$$

其中，最后一行来自 (6.8) 中第二项与 (6.7) 中各项的乘积。为了完成证明，我们只需将 (6.6) 中最后的 $a^{(0)}_{n+k}$ 用 b_k 表示，并代入 $x_k=\frac{k}{n^{1/3}}$。

□

现在需要证明，(6.5) 的右端是方程 (6.3) 中 f_{ω_n} 的微分方程的一种离散化。

引理 6.8。我们有

$$\frac{k(b_{k+1}+b_{k-1}-2b_k)-(b_{k+1}-b_{k-1})}{k^2}=\frac{x_k^2f''(x_k)-2x_kf'(x_k)}{k^3}+\mathcal{O}(n^{-4/3}),$$

and

$$b_{k-1}-b_{k+1}=-\frac{2}{n^{1/3}}f'(x_k)+\frac{1}{n}+\mathcal{O}(n^{-4/3}).$$

当 $n\to\infty$ 时，其中 $\mathcal{O}(n^{-4/3})$ 项中的常数关于 $k=n-\lfloor\delta n^{1/3}\rfloor$、……、$n-2$ 是一致的（但取决于 δ）。

证明。 由简单的泰勒展开可得

$$f(x_{k\pm1}) = f(x_k) \pm \frac{f'(x_k)}{n^{1/3}} + \frac{f''(x_k)}{2n^{2/3}} \pm \frac{f'''(x_k)}{6n} + \mathcal{O}(n^{-4/3}),$$

现在注意到，由引理 6.3 可得 $f'''(x) = 3 + \mathcal{O}(x)$。因此，

$$k(f(x_{k+1}) + f(x_{k-1}) - 2f(x_k)) - (f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})) \\ = \frac{x_k^2 f''(x_k) - 2x_k f'(x_k)}{k} + \frac{1}{n} + \mathcal{O}(\delta n^{-4/3}).$$

这里我们还可以看到另一个原因，说明选择 $b_k = f(x_k)$ 还不够好。事实上，若要得到阶为 $\mathcal{O}(n^{-4/3})$ 的误差项，我们需要消去项 $\frac{1}{n}$。这种消去源于这样一个事实：虽然额外项在二阶差分中会相消，但在一阶差分中，我们有：

$$b_{k-1} - b_{k+1} = f(x_{k-1}) - f(x_{k+1}) + \frac{1}{n}.$$

第二个等式的证明使用了完全相同的方法。 □

引理 6.9. 对于 $m \geq 1$，我们有

$$\frac{k^2}{k^2-1} b_k^m = f(x_k)^m + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{n^{4/3}}\right)$$

w这里，当 $-2 \geq k \geq -\delta n^{1/3}$ 趋于 $n \to \infty$ 时，误差项可以一致地估计。

证明。 首先考虑 $m = 1$ 的情形。于是

$$b_k = f(x_k) - \frac{\omega_n}{3n^{2/3}} - \frac{k}{2n} = f(x_k) - \frac{x_k^2 \omega_n}{3k^2} - \frac{x_k^3}{2k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} f(x_k) + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{n^{4/3}}\right),$$

由此即可得出上述结论。对于 $m > 1$，我们首先注意到

$$f(x_k)^m = \mathcal{O}\left(\frac{k^{2m}}{n^{2m/3}}\right),$$

这意味着

$$\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^{m-1} f(x_k)^m = f(x_k)^m + \mathcal{O}\left(\frac{k^{2m-2}}{n^{2m/3}}\right) = f(x_k)^m + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{n^{4/3}}\right)$$

这就证明了关于 $m \geq 2$ 的陈述。 □

引理 6.10。我们有

$$\left[\frac{b_{k+1}+b_{k-1}}{k}+\frac{b_{k-1}-b_{k+1}}{k^2}-\frac{2}{k}\right]\frac{b_k^2-2b_k}{k^2-1}$$
$$=2\frac{f(x_k)-1}{k^3}\Big(f^2(x_k)-2f(x_k)\Big)+\mathcal{O}(n^{-4/3}),$$

当 $n\to\infty$ 时，其中 $\mathcal{O}(n^{-4/3})$ 项中的常数关于 $k=n-\lfloor\delta n^{1/3}\rfloor,\dots,n-2$ 一致。

证明。 我们先将括号中的量改写为关于 f 的形式：

$$\frac{b_{k+1}+b_{k-1}}{k}+\frac{b_{k-1}-b_{k+1}}{k^2}-\frac{2}{k}$$
$$=2\frac{f(x_k)-1}{k}+\frac{f''(x_k)}{kn^{2/3}}-\frac{2f'(x_k)}{k^2n^{1/3}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{kn^{2/3}}\right)$$

我们将证明，除第一项外，其余各项都没有贡献。为此，我们先回顾一下：根据.....为了证明这一点，我们先回顾 f_ω 6 6 的展开式，该展开式见引理...

$|b_k|\le C\frac{k^2}{n^{2/3}}$
...这意味着

$$\frac{b_k^2-2b_k}{k^2-1}\le\frac{2k^2}{k^2-1}\frac{1}{n^{4/3}}.\tag{6.9}$$

现在考虑括号中的各项。

$$f'_\omega(x)=\frac{2\omega}{3}x+\frac{3}{2}x^2+\mathcal{O}(x^3)$$

由此得到如下界

$$f'_{\omega_n}(x_k)\le C\frac{k}{n^{1/3}}$$

对于 $-\delta n^{1/3}\le k\le 2$。结合 (6.9)，可得

$$\frac{2f'(x_k)}{k^2n^{1/3}}\cdot\frac{b_k^2-2b_k}{k^2-1}\le C'\frac{k^2}{k^2-1}\frac{1}{n^{4/3}}.$$

同样可以证明，项 $\frac{f''(x_k)}{kn^{2/3}}$ 和 $\frac{1}{kn^{2/3}}$ 所产生的误差可由 $Cn^{-4/3}$ 一致地界定，其中 $k=n-\lfloor\delta n^{1/3}\rfloor$，...，$n-2$，从而得到：

$$\left[\frac{b_{k+1}+b_{k-1}}{k}+\frac{b_{k-1}-b_{k+1}}{k^2}-\frac{2}{k}\right]\frac{b_k^2-2b_k}{k^2-1}=2\frac{f(x_k)-1}{k}\cdot\frac{b_k^2-2b_k}{k^2-1}+\mathcal{O}(n^{-4/3})$$

该结果可通过应用引理 6.9 得出。 □

7 定理 5.4 的证明

在 ord 为了证明定理 5.4 中的界，我们先进行如下分解。 :

$$\left\|\left(F'(a^{(0)})\right)^{-1}F(a^{(0)})\right\|_\infty \le \left\|\left(F'(a^{(0)})\right)^{-1}\right\|_\infty \left\|F(a^{(0)})\right\|_\infty \tag{7.1}$$

$$\left\|\left(F'(a^{(0)})\right)^{-1}\left(F'(a)\right)-F'(b)\right)\right\|_\infty \le \left\|\left(D^{-1}F'(a^{(0)})\right)^{-1}\right\|_\infty \left\|D^{-1}\left(F'(a)\right)-F'(b)\right)\right\|_\infty \tag{7.2}$$

其中， D 是一个对角矩阵，对角线上为 $a^{(0)}$ 。因此，我们的计算被分解为对上界中的四项分别进行估计。前一节中的命题6.1为我们提供了关于 $\|F(a^{(0)})\|_\infty$ 的必要估计。其余三项的估计如下证明。

命题 7.1。 存在 $C>0$ ，关于 k 和 n 一致，使得

$$\|D^{-1}(F'(a)-F'(b))_{jk}\|_\infty \le C\|a-b\|_\infty.$$

事实上可以验证， $C\approx 4$。

证明。 我们首先计算 $F'(a)-F'(b)$

$$(F'(a)-F'(b))_{jk}=\begin{cases}(a_j-b_j)(a_j+b_j) & k=j\pm 1\\ 2a_j(a_{j+1}+a_{j-1})-2b_j(b_{j+1}+b_{j-1}) & k=j\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

利用 $a,b\in B(a^{(0)},cn^{-2/3})$，我们得到

$$\frac{a_j}{a_j^{(0)}}=1+\mathcal{O}(n^{-2/3})=\frac{b_j}{a_j^{(0)}}.$$

这意味着

$$D^{-1}(F'(a)-F'(b))_{jk}=\begin{cases}2(a_j-b_j)(1+\mathcal{O}(n^{-2/3})) & k=j\pm 1\\ 2\Big((a_{j+1}-b_{j+1})+(a_{j-1}-b_{j-1})\Big)\left(1+\mathcal{O}(n^{-2/3})\right) & k=j\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases},$$

从而得到

$$\|D^{-1}(F'(a)-F'(b))_{jk}\|_\infty \le C\|a-b\|_\infty$$

□

现在考虑（7.1）和（7.2）中涉及矩阵逆的项:

$$\left\|\left(F'(a^{(0)})\right)^{-1}\right\|_\infty \quad \text{and} \quad \left\|\left(D^{-1}F'(a^{(0)})\right)^{-1}\right\|_\infty. \tag{7.3}$$

我们发现需要以下工具:

定理 7.2 (Varah, [36])。假设 M 按行对角占优（即 $|m_{kk}| > \sum_{j\neq k}|m_{kj}|$ 对所有 k均成立），并令

$$\gamma = \min_k \left(|m_{kk}| - \sum_{j\neq k} |m_{kj}| \right).$$

然后 $\|M^{-1}\|_\infty < 1/\gamma$.

由此我们可以看出，如果我们定义

$$\gamma_k = |m_{kk}| - \sum_{j\neq k} |m_{kj}|,$$

其中， M 是适当的矩阵，那么为 γ_k 给出下界，就足以得到 (7.3) 中各量的上界。

命题 7.3。 存在 $C > 0$，它关于 k 和 n 是一致的，因此 $\gamma_k \geq \frac{1}{Cn^{2/3}}$，并且由此可推广。

$$\left\|\left(F'(a^{(0)})\right)^{-1}\right\|_\infty \leq Cn^{2/3}.$$

证明。 我们计算:

$$\left(F'(a)\right)_{kj} = \begin{cases} 1 - a_k^2 & j = k \pm 1 \\ -2a_k(a_{k+1} + a_{k-1}) - 2\frac{k+\varepsilon}{t} & j = k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

取 $M = F'(a^{(0)})$，定义 $\gamma_k = |m_{kk}| - \sum_{j\neq k}|m_{kj}|$。 然后利用 $0 < a_k^{(0)} < 1$，得到的是

$$\gamma_k = 2a_k^{(0)}(a_{k+1}^{(0)} + a_{k-1}^{(0)}) + 2\frac{k+\varepsilon}{t} - 2(1 - (a_k^{(0)})^2). \tag{7.4}$$

使用简写 $x_k = \frac{k-n}{n^{1/3}}$，可将其改写为

$$\gamma_k = 2a_k^{(0)}(a_{k+1}^{(0)} + a_k^{(0)} + a_{k-1}^{(0)}) + 2\frac{x_k + \omega_n}{n^{2/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

回想一下，我们曾经有

$$a_k^{(0)} = \frac{1}{n^{1/3}}\nu_{\omega_n}(x_k) - \frac{\omega_n}{3(k-n)n^{2/3}} - \frac{1}{2n},$$

并注意，在 $\omega_n \geq 0$ 的情形下，第二项会产生正的贡献（因为 $k-n<0$）。因此，按情形分类会比较方便：情形 1 为 $\omega \geq 0$，情形 2 为 $\omega < 0$。注意，对于 $\varepsilon \geq 0$，我们总有 $\omega_n \geq \omega$。

情况 *1*： $\omega \geq 0$

在这种情况下，我们有 $a_k^{(0)} \geq \frac{1}{n^{1/3}}\nu_\omega(x_k) - \frac{1}{2n}$，这意味着。

$$\gamma_k \geq \frac{2}{n^{2/3}}\nu(x_k)\big(\nu(x_{k+1}) + \nu(x_k) + \nu(x_{k-1})\big) + 2\frac{x_k+\omega_n}{n^{2/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

对 $\nu(x_{k\pm1})$ 进行泰勒展开，得到

$$\gamma_k \geq \frac{6}{n^{2/3}}\nu^2(x_k) + 2\frac{x_k+\omega_n}{n^{2/3}} + \frac{2\nu(x_k)}{n^{4/3}}\nu''(\xi) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

其中 $|\xi - x_k| < \frac{1}{n^{1/3}}$。我们知道，根据 ν 的边界条件，

$$\lim_{x\to-\infty}\nu(x)\nu''(x) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{x\to 0}\nu(x)\nu''(x) = +\infty.$$

由连续性可知，这意味着泰勒近似的误差可以界定为

$$\nu(x)\nu''(\xi) \geq -cn^{-4/3}$$

对于某个在 k 和 n 中一致的 $c>0$ 值。这使得我们得出，

$$\gamma_k \geq \frac{6}{n^{2/3}}\nu^2(x_k) + 2\frac{x_k+\omega_n}{n^{2/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

现在注意到，如果 $x > -\omega_n$ 两个主项都严格为正，且 ν 与 0 保持正距离，那么这可以推广到 $x \geq \omega_n$。对于 $x < \omega_n$，我们使用定理 3.1，它指出，

$$\nu_\omega(x) = u_{b(\omega)}(x+\omega) > \sqrt{-(x+\omega)/3},$$

对于 $x \in (-\infty, -\omega]$。此外，我们从另一个下界定理 3.1 得知，对于 x 较大且为负的情形，该陈述实际上可以加强很多。因此，只需在紧区间上使用这个不等式，这意味着存在 $\delta > 0$ 使得 $\nu_\omega^2(x) > -(1+\delta)(x+\omega)/3$，从而得到

$$\gamma_k > \delta\frac{6}{n^{2/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

取 n 足够大，可得 γ_k 有下界 $cn^{-2/3}$，其中 $c>0$，正如所需。

情形 *2:* $\omega<0$

对于这种情况，我们不能简单地从 $a_k^{(0)}$ 中去掉项 $\frac{\omega_n}{3\,k-n\,()n^{2/3}}$，因为当 k 非常接近 n 时，它会产生量级为 $n^{-2/3}$ 的负贡献。相反，我们将其分为两个区域:

令 $\delta_\omega<0$，使得对于所有 $0>x>\delta_\omega$，我们都有

$$\nu_{\omega_n}(x)\geq\nu_\omega(x)>(1-\omega).$$

我们必须有这样一个 δ_ω 存在，因为 ν_ω 在 $x=0$处有极点。对于 $k-n>\delta_\omega n^{1/3}$，我们于是有

$$a_k^{(0)}\geq\frac{\nu(x_k)}{n^{1/3}}+\frac{\omega}{3n^{2/3}}-\frac{1}{2n}>\frac{1}{n^{1/3}}-\omega\left(\frac{1}{n^{1/3}}-\frac{1}{n^{2/3}}\right)-\frac{1}{2n}>\frac{1}{n^{1/3}}-\frac{1}{2n}.$$

这足以使我们得到

$$\gamma_k>3\left(\frac{1}{n^{1/3}}-\frac{1}{2n}\right)^3+\frac{x_k+\omega_k}{n^{2/3}}.$$

显然，只要将 n 取足够大，就可以得到该量的下界为 $cn^{-2/3}$，其中 c为某个正数。对于 $k-n\leq\delta_\omega n^{1/3}$，我们将有

$$\frac{\omega_n}{3(k-n)n^{2/3}}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

因此可以省略这一项，从而得到

$$\gamma_k\geq\frac{2}{n^{2/3}}\nu(x_k)\big(\nu(x_{k+1})+\nu(x_k)+\nu(x_{k-1})\big)+2\frac{x_k+\omega_n}{n^{2/3}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

与之前一样。这可以按照情形 1 中的相同方法处理。 □

我们以类似的方式估计 $\left(D^{-1}F'(a^{(0)})\right)^{-1}$，其中 D 是对角矩阵，$a^{(0)}$ 位于对角线上。

命题 7.4. 设 $\gamma_k^D=|m_{kk}|-\sum_{j\neq k}|m_{kj}|$ 满足 $M=D^{-1}F'(a^{(0)})$。那么存在 $c>0$，其对 k 和 n 一致，使得

$$\gamma_k^D\geq cn^{-1/3}.$$

此外，根据 *Varah* 定理 *7.2*，存在关于 k 和 n 一致的 $C>0$，使得

$$\left\|\left(D^{-1}F'(a^{(0)})\right)^{-1}\right\|_\infty\leq Cn^{1/3}.$$

证明。 我们首先计算：

$$\left(D^{-1}F'(a^{(0)})\right)_{kj} = \begin{cases} \frac{1}{a_k^{(0)}} - a_k^{(0)} & j = k \pm 1 \\ -2(a_{k+1}^{(0)} + a_{k-1}^{(0)}) - 2\frac{k+\varepsilon}{a_k^{(0)}t} & j = k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

我们可以利用 $a_k^{(0)} > 0$ 得出 $\gamma_k^D = \gamma_k / a_k^{(0)}$，从而得到

$$\gamma_k^D = 2(a_{k+1}^{(0)} + a_k^{(0)} + a_{k-1}^{(0)}) + 2\frac{x_k - \omega_n}{a_k^{(0)} n^{2/3}} + \mathcal{O}(n^{-2/3}). \tag{7.5}$$

现在我们将其分为两种情况：第一种是 k 使得 $a_k^{(0)} \leq Mn^{-1/3}$ 对于某个足够大的$M > 0$。在此区域内，我们有

$$\gamma_k^D = \gamma_k / a_k^{(0)} \geq \frac{cn^{-2/3}}{a_k^{(0)}} \geq \frac{cn^{-2/3}}{Mn^{-1/3}} = \frac{c}{M} n^{-1/3}.$$

证明 $\gamma_k^D > cn^{-1/3}$ 现在可以按照证明 $\gamma_k > cn^{-1/3}$ 的相同方法进行。

□

现在我们已经具备证明定理 5.4 所需的全部要素，这使我们能够应用坎托罗维奇定理。

定理*5.4* 的证明。命题6.1、命题 7.1、7.3 和7.4，连同方程（7.1）和（7.2），给出了定理 5.4 中的界。 □

参考文献

[1] M. J. Ablowitz 和 H. Segur，*Korteweg-de Vries* 方程的渐近解，《应用数学研究》57，（1977）第1期，13–44。[2] J. Baik、P. Deift和K. Johansson，随机排列中最长递增子序列长度的分布，《美国数学会杂志》12（1999年），第4期，1119—1178。[3] D.Bessis、C.Itzykson 和 J.B. Zuber，图像枚举中的量子场论技术，《应用数学进展》（1980）109–157。[4] P.BleherA.Its，正交多项式的半经典渐近行为、黎曼–希尔伯特问题以及矩阵模型中的普适性，《数学年刊》（第2辑）150（1999年），第1期，185–266。。

[5] P.Bleher和 A.Its，《随机矩阵模型中的双重标度极限：黎曼-希尔伯特方法》，《纯粹与应用数学通讯》56（2003年），第4期，433–516。[6] E.Br´ezin和V. A. Kazakov，《闭弦的恰可解场论》，《物理快报B辑》236，144–150（1990年）。[7] P. Boutroux，《关于M. Painlev´e超越函数的研究及二阶微分方程的渐近研究》，《高等师范学校科学年鉴》30，255–375（1913年）；31，99–159（1914年）。[8] T. Claeys和 A.B.J.Kuijlaars，《随机矩阵模型中双重标度极限的普适性》，《纯粹与应用数学通讯》59（2006年），第11期，1573–1603。[9] T. Claeys、A.B.J. Kuijlaars 和 M. Vanlessen，《多临界酉随机矩阵系综与一般Painlev´eII 方程》，《数学年刊》（第2辑）168（2008年），第2期，601—641。[10] P. Clarkson，《Painlev´e 方程——非线性特殊函数》，《正交多项式与特殊函数》，331–411，《数学讲义》1883，施普林格，柏林，2006年。[11] R. Conte（编），《Painlev´e 性质：一个世纪之后》，《数学物理学 CRM 丛书》，Springer-Verlag NewYork, Inc.，1999年。[12] P. Deift、T.Kriecherbauer、K.T-R McLaughlin、S.Venakides和 X. Zhou，《关于指数权的正交多项式的强渐近性》，《纯粹与应用数学通讯》52（1999年），第12期，1491—1552。[13] P. Deift、T.Kriecherbauer、K.T-R McLaughlin、S.Venakides和X.Zhou，《关于变化的指数权的正交多项式的一致渐近性及其在随机矩阵理论普适性问题中的应用》，《纯粹与应用数学通讯》52（1999年），第11期，1335–1425。[14] M.R. Douglas和 S. H.Shenker，《低于一维的弦》，《核物理B辑》335，635–654（1990年）。[15] M.Duits和 A.B.J.Kuijlaars，《关于变化的四次权的正交多项式的 Painlev´eI 渐近行为》，《非线性》19（2006年），第10期，2211—2245。[16] A. Fokas、A. Its、A.Kapaev和 V. Novokshenov，《二维量子引力中矩阵模型的等单调方法》，《数学物理通讯》147（1992年），395–430。[17] A.Fokas、A. Its和Kitaev，《Painlev´e 超越函数：黎曼-希尔伯特方法》，《数学调查与专著》128，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006年。xii+553页。

[18] P. Forrester, 《对数气体与随机矩阵》。伦敦数学学会专著丛书第34卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2010年。[19] D. J. Gross 和 A. A. Migdal, 《非微扰二维量子引力》，Phys. Rev. Lett. 64，127–130（1990年）。[20] B. Grammaticos 和 A. Ramani, 《离散 Painlev´e 方程：综述》。载于《离散可积系统》，245–321，物理学讲义，644，施普林格，柏林，2004年。[21] Hastings 和 McLeod, 《与第二类 Painlev´e 超越函数及 Korteweg-de Vries 方程相关的边值问题》。Arch. Rational Mech. Anal. 73（1980年），第1期，31–51。[22] N. Joshi, 《离散 Painlev´e 方程》。由数学科学会议委员会出版。CBMS 数学区域会议丛书第131卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2019年。[23] L.V. Kantorovich, 《泛函分析中的逐次逼近法》，Acta. Math. 71（1939年）63–97。[24] A. Kapaev, 《第二类 Painlev´e 超越函数的整体渐近行为》，Phys. Lett. A.，167，356–362（1992年）。[25] R. Killip 和 I. Nenciu, 《圆系综的矩阵模型》，Int. Math. Res. Not.，50，2004年，2665—2701。[26] R. Killip 和 M. Stoiciu, 《CMV 矩阵的特征值统计：从泊松到时钟，经由随机矩阵系综》，Duke Math. J. 146(3)，2009年，361–399。[27] A.V. Kitaev, 《第一和第二类 Painlev´e 方程的对称解》，J. Math. Sci. 73，494–499（1995年）。[28] M. Krishnapur、B. Rider、B. Vir´ag, 《随机 Airy 算子的普适性》，Comm. Pure and App. Math.，69（1），145–199，2016年。[29] F. W. Nijhoff、V. G. Papageorgiou, 《可积格子的相似约化及 Painlev´e II 方程的离散类比》，Phys. Lett. A 153（1991年），第6–7期，337—344。[30] F. W. Nijhoff, 《离散 Painlev´e 方程与格点上的对称约化》。载于《离散可积几何与物理》（维也纳，1996年），209—234，牛津数学应用讲座丛书，16，牛津科学出版社，牛津大学出版社，纽约，1999年。[31] V. Y. Novokshenov, 《Painlev´e II 方程的 Tronqu´ee 解》，Theor. Math. Phys. 173（2012年），第1136–1146页。

[32] V. Periwal 和 D. Shevitz，酉矩阵模型作为精确可解的弦理论，《物理评论快报》64 (1990年)，1326–1329.[33] H. Sakai，与仿射根系相关的有理曲面与 *Painlev´é* 方程的几何，《数学物理通讯》220 (2001年)，第 1 期，165–229.[34] C. Tracy 和 H. Widom，间距分布与 *Airy* 核，《数学物理通讯》159 (1)：151—174.[35] W. Van Assche，《正交多项式与 Painlev´é 方程》。澳大利亚数学学会讲座丛书，27。剑桥大学出版社，剑桥，2018 年。[36] J. M. Varah，矩阵最小奇异值的下界，《线性代数及其应用》，11(1)，1974，3–5.[37] B. Virag 和 B. Valko，正弦β 算子，《数学发明》209 (2017)，275–327.[38] T. Yamamoto，T. *Newton* 法及类 *Newton* 方法收敛性分析的历史发展，《计算与应用数学杂志》124 (2000) 1—23。