随机 遵循详细平衡的 m 个林德布拉德算符 ce

沃伊切赫·塔尔诺夫斯基[1], *，达里乌什·赫鲁´斯´尼茨基[2], †，谢尔盖·杰尼索夫[3, 4, ‡]，以及卡罗尔·日奇科夫斯基 ´日奇科夫斯基[1, 5, §]

[1]雅盖隆大学理论物理研究所，Lojasiewicza11号，30-348 克拉科夫，波兰[2]尼古拉·哥白尼大学物理系、天文学与信息学学院，Grudzi␣adzka 5/7号，87-100Toru´n，波兰[3]奥斯陆都市大学计算机科学系，N-0130 奥斯陆，挪威[4] NordSTAR——北欧可持续且可信赖的人工智能研究中心，Pilestredet 52号，N-0166，奥斯陆，挪威[5]理论物理中心，Lotnik´ow大道32号，02-668 华沙，波兰

arXiv:2304.02960v1 [cond-mat.stat-mech] 6 Apr 2023

2023年4月7日

摘要

我们引入了不同的随机林德布拉德算符系综 $\mathcal{L}$，这些算符相对于给定的稳态 σ of 大小为 N，满足量子细致平衡条件，并研究了它们的谱性质。这类算符被称为“戴维斯生成元”，其特征值为实数；然而，它们的谱密度取决于 σ。我们提出了不同的结构化随机矩阵系综，使我们能够在与具有非简并谱的随机 σ with 或最大混合稳态 $\sigma = \mathbf{1}/N$相对应的戴维斯生成元的极端情形下解析地处理这一问题。有趣的是，在后一种情形中，通过对随机无约束林德布拉德算符系综所特有的谱密度的虚部进行积分消去，可以较为合理地近似得到该密度。我们还讨论了具有部分简并谱的渐近态情形。最后，我们证明，对随机戴维斯生成元系综施加超退相干所得到的满足细致平衡的柯尔莫哥洛夫生成元，也具有类似的普适性质。通过这种方式，我们构造了一个带有强制细致平衡条件的随机经典生成元系综。

谨以此文纪念 *G¨oran Lindblad*（*1940—2022*）

1 引言

在经典物理学中，细致平衡原理的基本含义是：对于处于平衡态的系统，从状态 a 到状态 b, $a \to b$ 的基本跃迁速率，与反向跃迁$b \to a$ [1]的速率相同。这一原理在化学和生物学中适用得很好，在这些领域，跃迁 $a \to b$ 被解释为某种特定的化学反应，或两个物种种群之间的转变， a 和 b [1]。经典细致平衡是概率向量 $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_N)$ 的马尔可夫演化生成元的一种性质，其演化由所谓的泡利速率方程支配，

$$\dot{p}_i = \sum_{j=1}^{N} \Big(W_{ij} p_j - W_{ji} p_i \Big), \tag{1}$$

其中，非负数 W_{ij} 被解释为跃迁速率。若$\mathbf{p}$ 是稳态，则相对于$\mathbf{p}$ 的细致平衡条件意味着

$$W_{ij} p_j = W_{ji} p_i, \tag{2}$$

对于任意一对 i, j。条件 (2) 只是对这样一种原理的数学表述：如果系统处于稳态$\mathbf{p}$，那么跃迁 $i \to j$ 和 $j \to i$ 的概率相同。

在量子情形中，马尔可夫演化由著名的 Gorini-Kossakowski-Lindblad-Sudarshan（GKLS）主方程 $\dot{\rho}_t = \mathcal{L}(\rho_t)$ 控制，相应的 GKLS生成元[1] 具有众所周知的结构 [2–4]:

*wojciech.tarnowski@doctoral.uj.edu.pl
†darch@fizyka.umk.pl
‡sergiyde@oslomet.no§karol.zyczkowski@uj.edu.pl[1]下文中，我们将交替使用“林德布拉德算符”和“GSKL生成元”来称呼这些对象

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H,\rho] + \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} L_\alpha \rho L_\alpha^\dagger - \frac{1}{2}\{L_\alpha^\dagger L_\alpha, \rho\}, \tag{3}$$

其中，厄米算子 H 代表有效系统的哈密顿量，而 L_α 是跳跃（或噪声）算子。

经典详细平衡条件 (2) 在文献 [5–7]中被推广到量子马尔可夫半群（另见文献 [8]）。如果 σ 是一个稳态（即 $\mathcal{L}(\sigma) = 0$），那么当其在海森堡绘景下的耗散部分关于内积 $(X,\ Y)_\sigma$ =Tr$(\sigma X^\dagger Y)$ 为厄米时，$\mathcal{L}$ 满足量子细致平衡条件；当稳态是完全混合态时，该内积化为标准的希尔伯特–施密特内积。更多详情请参见第 3 节。特别地，如果 $|e_k\rangle$ 是 σ的本征基，那么下列经典转移矩阵 $W_{ij} = \sum_\alpha |\langle e_i|L_\alpha|e_j\rangle|^2$ 满足 (2)。

量子细致平衡（QDB）条件是量子马尔可夫半群的一个特征性质，该半群描述系统与处于平衡态的环境之间的相互作用 [9]。特别地，Davies [10–12]已证明，在弱耦合极限下导出的量子马尔可夫半群满足关于稳态 σ 的量子细致平衡条件。假设系统–环境哈密顿量具有标准形式 [13–16],

$$H = H_S \otimes \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_S \otimes H_E + H_{\rm int}, \tag{4}$$

以及环境的热初态，$\rho_E = e^{-\beta H_E}/Z_E$，戴维斯证明，在弱耦合极限下，$\sigma = \sigma_\beta := e^{-\beta H_S}/Z_S$，相应的生成元 (3) 满足关于 σ_β 的量子详细平衡条件。此外，在此情况下，由 H_S 生成的幺正部分（经兰姆移位修正）与 $\mathcal{L}$ 的耗散部分对易，这意味着，在密度算符 ρ_t的演化过程中，密度矩阵的对角元和非对角元相互解耦。文献中研究的许多开放量子系统 [13–16]都属于这一类。相应的生成元通常被称为“戴维斯生成元”（或“戴维斯GKLS生成元”），相应的动力学映射 $\Lambda_t = e^{t\mathcal{L}}$ 被称为“戴维斯映射” [17]。

量子细致平衡条件在开放量子系统的量子热力学中发挥着重要作用 [9, 16] （另请参见近期研究成果 [18–24]）。特别是，假设量子详细平衡成立，热力学第二定律指出《熵》产生率永不为负，该定律可表述为 [9]:

$$\frac{d}{dt} S(e^{t\mathcal{L}}(\rho) \| \sigma_\beta) \le 0, \tag{5}$$

其中，$S(\rho\|\sigma)$是相对熵，ρ 是一个大小为 N的系统的任意状态。

文献 [25]指出，满足 DB 条件的 GKLS生成元还具有另一项有趣性质。令 ℓ_α 表示 $\mathcal{L}$的（通常为复数的）特征值。可得 $\mathcal{L}(\sigma) = 0$，且众所周知 Re $\ell_\alpha \le 0$。因此定义（非负）弛豫率 $\Gamma_\alpha = -$Re $\ell_\alpha(\alpha = 1,\ \ldots\ldots,\ N^2-1)$。事实上，$\Gamma_\alpha$是可测量量。文献 [25] 猜想

$$\Gamma_\alpha \le \frac{1}{N}(\Gamma_1 + \ldots + \Gamma_{N^2-1}). \tag{6}$$

有趣的是，对于满足量子细致平衡 [25] 的 $\mathcal{L}$，这一不等式已得到证明（近期综述另见文献 [26]）。这些都表明，满足细致平衡条件的 GKLS生成元在数学和物理层面都具有许多有趣的性质。特别是，此类算子的谱可能呈现某些普适特征。请注意，由于耗散部分 $\mathcal{L}$ 相对于内积 $(A,\ B)_\sigma$ = Tr$(\sigma A^\dagger B)$是厄米的，因此其谱为实数。因此，满足细致平衡条件的纯耗散林德布拉德算符具有纯实谱。显然，满足经典细致平衡的柯尔莫哥洛夫算子也同样如此。

最近，我们分析了随机林德布拉德算符 $\mathcal{L}$ [27, 28] 以及经典柯尔莫哥洛夫算符 $\mathcal{K}$ [28]的谱性质。特别是，我们证明了纯耗散随机林德布拉德算符呈现普适的谱性质：经过适当缩放的复特征值会在复平面上形成普适的柠檬状图形（另见近期关于随机林德布拉德算符的研究 [29–32]）。这种方法使我们能够研究在马尔可夫半群作用下演化的典型量子系统的性质。随机矩阵理论（RMT） [33] 为处理这一问题提供了合适的工具。随机矩阵理论已发展成为一个在物理学和数学领域有诸多重要应用的学科；参见文献 [34]以及文献 [35]中的论文集。从 Haake 的开创性专著 [36] （另见文献 [37]）问世以来，随机矩阵便成为研究经典与量子混沌 [38, 39]的重要理论工具。关于随机矩阵理论在开放量子系统中的近期应用，参见例如文献 [40]。

在文献 [27] 中，提出了一种简单的随机矩阵（RM）模型，该模型再现了随机林德布拉德算子复特征值主体的柠檬状形状，并为柠檬形边界提供了解析表达式。此外，利用自由概率工具，我们构造了结构化的随机系综

矩阵，使我们能够描述从著名的Girko圆盘 [41], （随机操作 [42, 43], 的特征）到GKLS生成元典型的柠檬状分布的跃迁。

经典对应物，即随机柯尔莫哥洛夫生成元的系综，最早由 Timm[45] 分析，随后由 Bordenave、Caputo 和 Chafai [44]进一步讨论。结果表明， $\mathcal{K}$ 的复特征值经过适当缩放后，会在复平面上形成普适的纺锤状形状 [44, 45]。有趣的是，林德布拉德算符和柯尔莫哥洛夫算子这两类算子可以通过超退相干 [28]联系起来。超退相干是超映射的一个特例，即一种将量子信道映射为量子信道的线性映射 [46–48]。类比于退相干机制将量子态转变为经典态（相对于系统希尔伯特空间中固定的标准正交基），超退相干会将量子映射转变为经典随机矩阵 [49, 50], ，同时将量子林德布拉德算符转变为经典柯尔莫哥洛夫算子 [28]。逐渐增强超退相干的强度，可以观察到谱分布的柠檬状形状如何转变为纺锤状形状 [28]。

本文将分析扩展至满足细致平衡条件的算子。由于在这种情况下算子的谱为实数，我们针对不变态的不同假设，分析沿实轴分布的特征值密度。具体而言，我们考察最重要的随机态示例：具有非简并谱的随机态 σ，它对应于一个戴维斯生成元；以及完全简并的稳态 $\sigma = \mathbb{1}/N$。本文还分析了一类适用于部分简并稳态的随机戴维斯生成元。

本文结构安排如下。第 2 节和第 3 节分别回顾经典和量子细致平衡条件。第 4 节综述一般的随机林德布拉德算符和柯尔莫哥洛夫算子。第 5 节分析相对于稳态 σ满足量子细致平衡条件的随机林德布拉德算子系综，其中稳态的特征值简并度各不相同。本文还介绍了若干随机矩阵模型，用于逼近数值模拟中观测到的随机算子的谱密度。第 6 节给出总结性讨论，包括尚未解决的问题列表以及未来研究的一些可能方向。附录 A 简要回顾了本文所用的基本随机矩阵理论系综。附录 B 简要讨论了 Pastur方程 [51], ，该方程对于描述特征值密度至关重要。附录 C 和 D 则介绍了关于稳态部分简并的随机林德布拉德算符所得结果的一些技术细节。

2 经典细致平衡条件

生成 Pauli 主方程 (1) 的算符称为 Kolmogorov 生成元，其形式为

$$\mathcal{K}_{ij} = W_{ij} - \delta_{ij} \sum_{k=1}^{N} W_{kj}. \tag{7}$$

任何经典生成元至少有一个稳态 $\mathbf{p}$ 满足 $\mathcal{K}\mathbf{p} = 0$。

定义 1. 经典算子 $\mathcal{K}$ 满足细致平衡条件，关于$\mathbf{p}$ 当任意一对 i、j 满足式 *(2)* 时成立。

条件 (2) 本身只是这样一个原理的数学表示：如果系统处于稳态$\mathbf{p}$，那么跃迁 $i \to j$ 和 $j \to i$ 的概率相同。特别地，如果$\mathbf{p}$ 是逆温度为 β 的热态，即 $p_k = e^{-\beta E_k}$，那么

$$\frac{W_{ij}}{W_{ji}} = e^{-\beta(E_i - E_j)}. \tag{8}$$

有趣的是，细致平衡条件 (2) 可以重新表述如下：让我们在 $\mathbb{R}^N$ 中定义关于给定状态 $\mathbf{p}$的内积$(.\,,.)_{\mathbf{p}}$，

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbf{p}} := \sum_{k=1}^{N} p_k x_k y_k. \tag{9}$$

命题1。算子 L 满足关于 $\mathbf{p}$ 的细致平衡条件，当且仅当 L^{T} 满足

$$(L^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbf{p}} = (\mathbf{x}, L^{\mathrm{T}}\mathbf{y})_{\mathbf{p}}, \tag{10}$$

对于任意 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$，也就是说， L^{T} 关于 $(.\,,.)_{\mathbf{p}}$是厄米的。

等价地，定义对角矩阵 $P{:=}\,\mathrm{Diag}[p_1, \ldots, p_n]$，条件 (2) 可改写为

$$WP = PW^{\mathrm{T}}. \tag{11}$$

特别地，若$\mathbf{p}$ 是最大混合态，则转移矩阵 $W^{\mathrm{T}}=W$，即 W 是对称的。假设$\mathbf{p}$ 是忠实的，即 $p_k>0$，则任何满足条件 (11) 的转移矩阵 W 均可构造为

$$W=SP^{-1}, \tag{12}$$

其中 S 是任意的（实）对称矩阵。

3 量子细致平衡

经典详细平衡条件已推广至量子马尔可夫半群 [5–7]。我们首先回顾两个算子的标准希尔伯特–施密特乘积，$(X,\ Y)_{\mathrm{HS}}=\mathrm{Tr}X^{\dagger}Y$。区分固定的忠实量子态 $\sigma>0$ 并引入任意两个算子的标量积也很方便，$(X,\ Y)_{\sigma}:=\mathrm{Tr}(\sigma X^{\dagger}Y)$。类比于标量积 (9)，对于最大混合态 $\sigma=\mathbb{1}/N$，内积 $(X,\ Y)_{\sigma}$ 退化为希尔伯特–施密特乘积的标准构造，即 $(X,\ Y)_{\sigma}=\frac{1}{N}(X,\ Y)_{\mathrm{HS}}$。这些概念使我们能够表达量子的细致平衡条件 [5–7]。

定义 2.若存在一个表示，则 *GKLS* 生成元满足关于给定稳态 σ 的量子详细平衡条件

$$\mathcal{L}(\rho)=-i[H,\rho]+\mathcal{L}_D(\rho), \tag{13}$$

使得 $[H,\sigma]=0$，且耗散部分 $\mathcal{L}_D$ 满足

$$(\mathcal{L}_D^{\ddagger}(X),Y)_{\sigma}=(X,\mathcal{L}_D^{\ddagger}(Y))_{\sigma}, \tag{14}$$

where $\Phi^{\ddagger}$ 表示一个通过 $(\Phi^{\ddagger}(X)\ Y)_{\mathrm{HS}}=(X,\Phi(Y))$定义的对偶映射（海森堡绘景）$_{\mathrm{HS}}$.

请注意，如果

$$\mathcal{L}(\rho)=-i[H,\rho]+\Phi(\rho)-\frac{1}{2}\{\Phi^{\ddagger}(\mathbb{1}),\rho\}, \tag{15}$$

对于某个完全正映射 Φ，其对偶定义如下。

$$\mathcal{L}^{\ddagger}(X)=i[H,X]+\Phi^{\ddagger}(X)-\frac{1}{2}\{\Phi^{\ddagger}(\mathbb{1}),X\}. \tag{16}$$

量子 细致平衡条件 (14) 简化为 $[\Phi^{\dagger}(\mathbb{1})\ \sigma]=0$ 以及以下条件 n

$$(\Phi^{\ddagger}(X),Y)_{\sigma}=(X,\Phi^{\ddagger}(Y))_{\sigma}, \tag{17}$$

也就是说，映射 $\Phi^{\ddagger}$ 关于 $(.,.)_{\sigma}$是厄米的。若稳态 σ 是忠实的，则上述条件可改写如下

$$\Phi^{\ddagger}(X)=\Phi(X\sigma)\sigma^{-1}, \tag{18}$$

或者，等价地

$$\Phi^{\ddagger}(X)\sigma=\Phi(X\sigma), \tag{19}$$

事实上，定义一个映射（称为模算子）

$$\Delta_{\sigma}(X):=\sigma X\sigma^{-1}, \tag{20}$$

可以证明， [5] 如果 $\mathcal{L}$ 关于 σ满足量子细致平衡，那么

$$[\mathcal{L},\Delta_{\sigma}]=0,\quad [\mathcal{L}^{\ddagger},\Delta_{\sigma}]=0. \tag{21}$$

显然，完全正映射 Φ是经典转移矩阵 W_{ij}的量子版本。设 $\{|i\rangle\}_{i=1}^{N}$是 σ的一组特征基，即 $\sigma=\sum_{i=1}^{N}p_i|i\rangle\langle i|$，并定义

$$W_{ij}:=\langle i|\Phi(|j\rangle\langle j|)|i\rangle=\langle j|\Phi^{\ddagger}(|i\rangle\langle i|)|j\rangle. \tag{22}$$

Then，如果 Φ 满足条件（17），则转移矩阵 W_{ij} 满足经典条件（2） .

特别地，如果 $\sigma=\mathbb{1}/N$，那么量子细致平衡条件表明 $\mathcal{L}_D^{\ddagger}=\mathcal{L}_D$，即薛定¨谔图景和海森堡图景相同。因此，耗散部分可以表示为

$$\mathcal{L}_D^{\ddagger}(X)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N^2}K_{\alpha\beta}\Big(F_{\alpha}XF_{\beta}-\frac{1}{2}\{F_{\alpha}F_{\beta},X\}\Big), \tag{23}$$

其中厄米算子 F_α 和实对称科萨科夫斯基矩阵 $K_{\alpha\beta}$。

设 $E_{ii'} = |i\rangle\langle i'|$, ，其中 $|i\rangle$ 定义稳态的一个特征基，它是算符空间中的一组标准正交基。则有如下表示

$$\mathcal{L}_D^\ddagger(X) = \sum_{i,i'=1}^{N} \sum_{j,j'=1}^{N} K_{ii',jj'} \Big(|i\rangle\langle i'|X|j'\rangle\langle j| - \frac{1}{2}\delta_{i'j'}\{|i\rangle\langle j|, X\} \Big), \tag{24}$$

其中科萨科夫斯基矩阵 $K_{ii',\ jj'}$ 是正定的。现在，细致平衡条件 (14) 推出科萨科夫斯基矩阵 [7]的元素之间满足如下关系:

$$K_{ii',jj'} p_j = K_{j'j,i'i} p_{j'}. \tag{25}$$

注意，条件 (25) 蕴含

$$K_{ii',jj'} q_{jj'} = K_{ii',jj'} q_{ii'}, \tag{26}$$

其中 $q_{mn} := p_m/p_n$。量子详细平衡是一项限制很强的条件，因为若 $q_{ii'} \neq q_{jj'}$，相应的元素$K_{ii',\ jj'}$ 必须为零。特别地，在满足以下条件的非简并 σ 这一典型情形中

$$q_{mn} = q_{m'n'} \iff (m,n) = (m',n'), \tag{27}$$

K 中唯一非零的元素如下

$$W_{ij} = K_{ij,ij}, \quad D_{ij} = K_{ii,jj}, \quad i,j = 1,\ldots,N. \tag{28}$$

注意， $W_{ij} \geq 0$，且 $D_{ij} = D_{ji}$。

定理1。 满足量子详细平衡条件、且相对于一个满足 (27)

读取的是

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Dav}}(\rho) = \Phi(\rho) - \frac{1}{2}\{\Phi^\ddagger(\mathbb{1}), \rho\} \tag{29}$$

with

$$\Phi(\rho) = \sum_{i\neq j} W_{ij} |i\rangle\langle j|\rho|j\rangle\langle i| + \sum_{i,j} D_{ij} |i\rangle\langle i|\rho|j\rangle\langle j|, \tag{30}$$

a且转移矩阵 W_{ij} 满足经典详细平衡条件 $W_{ij}p_j = W_{ji}p_i$.

上述生成元通常被称为“戴维斯生成元” [10]。戴维斯生成元除了由 W_{ij}定义的经典部分外，还包含一个纯量子部分，该部分由 D_{ij} 定义，负责退相干过程。

第二种极端情形对应于最大混合态 $\sigma = \mathbb{1}/N$，此时条件简化为 (25)

$$K_{ii',jj'} = K_{j'j,i'i}, \tag{31}$$

允许 K 的所有元素均非零。矩阵$K_{ii',jj'}$ 是厄米的，然而（31）并不意味着对称性。不过，当林德布拉德算符用厄米基 F_α 表示时，量子详细平衡意味着$K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}$。

注1.有趣的是，内积 (17) 可以推广为以下单参数族乘积 [52–55]

$$(X,Y)_s := \mathrm{Tr}(\sigma^s X^\dagger \sigma^{1-s} Y), \tag{32}$$

对于 $s \in [0,1]$。注意，当 $s = 1$ 时可恢复(17)，这通常称为‘GNS乘积’。对于 $s = \frac{1}{2}$ 可得到所谓的‘KMS乘积’,

$$(X,Y)_{\mathrm{KMS}} := (X,Y)_{1/2} = \mathrm{Tr}(\sigma^{1/2} X^\dagger \sigma^{1/2} Y). \tag{33}$$

事实证明， [52, 53] 如果 $\mathcal{L}_D^\ddagger$ 关于 $(X,Y)_1$, 是自伴的，那么对于任意 $s \neq \frac{1}{2}$， $\mathcal{L}_D^\ddagger$ 也自伴。与 $s = \frac{1}{2}$ 对应的对称情形已在文献 [53]中分析。 –

4 无详细平衡的随机林德布拉德算子和柯尔莫哥洛夫算子的谱性质

我们简要回顾随机林德布拉德算符 [27, 28] 和随机柯尔莫哥洛夫算子 [28, 44, 45]的主要性质。假设哈密顿部分为零，林德布拉德算符仅包含耗散部分，该部分完全由完全正映射 Φ控制，见式（15）。固定标准正交基 $\{F_\alpha\}_{\alpha=1}^{N^2}$后，它可表示为 $\Phi(\rho) = \sum_{\alpha}^{N^2},_{\beta=1} K_{\alpha\beta} F_\alpha \rho F_\beta^\dagger$，其中所谓的科萨科夫斯基矩阵 K （矩阵元为 $K_{\alpha\beta}$）是正定的。下文采用如下归一化 $\mathrm{Tr}K = N$，它等价于

$$\mathrm{Tr}\,\Phi(\mathbb{1}) = \mathrm{Tr}\,\Phi^\ddagger(\mathbb{1}) = N. \tag{34}$$

$\mathcal{L}$ 的谱与相应超算子的谱相同

$$\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\Phi} - \frac{1}{2}(\Phi^\ddagger(\mathbb{1}) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \overline{\Phi^\ddagger(\mathbb{1})}), \tag{35}$$

$\widehat{\ }$其中 $\Phi = \sum_{\alpha,\ \beta} K_{\alpha\beta} F_\alpha \otimes F_\beta$通过向量化得到。现在，随机算子 $\mathcal{L}$对应于随机完全正映射 Φ ，因而对应于随机科萨科夫斯基矩阵 $K_{\alpha\beta}$ ，后者可以采样为 Wishart矩阵

$$K = N\frac{GG^\dagger}{\mathrm{Tr}\,GG^\dagger}, \tag{36}$$

其中 G是一个复 $N^2 \times N^2$方形 Ginibre矩阵。事实证明， [27, 28] 重新缩放后的算子 $\widehat{\mathcal{L}}' = N(\widehat{\mathcal{L}} + 1\mathbb{l} \otimes 1\mathbb{l})$在大 N极限下呈现出普适的柠檬形特征值分布；见图 1a。这一普适形状可以由以下随机矩阵（RM）模型[27,28]解释。通过表示
正矩阵 $K_{\alpha\beta}$ as $K = G^\dagger G$，其中 G 是方差为((&___的复 Ginibre矩阵。

$$\langle G_{\alpha\mu}\overline{G}_{\beta\nu}\rangle = \frac{1}{N^3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}, \tag{37}$$

可得 $\langle \mathrm{Tr}K \qquad \rangle = N$ （即，我们要求 $\mathrm{Tr}K$ 仅在平均意义下等于 N）。通过引入跳跃算子 rs,

$$L_\alpha = \sum_{\mu=1}^{N^2} G_{\alpha\mu} F_\mu, \tag{38}$$

可得到对角克劳斯表示

$$\Phi = \sum_{\alpha=1}^{N^2} L_\alpha \rho L_\alpha^\dagger, \tag{39}$$

其中（随机）克劳斯算子满足

$$\langle \mathrm{Tr}\, L_\alpha L_\beta^\dagger\rangle = \frac{1}{N}\delta_{\alpha\beta}. \tag{40}$$

现在，由于在大 N 极限下， L_α 的元素是独立同分布的高斯变量， $L_\alpha\widehat{\ }$ 的（复）特征值会均匀覆盖复平面上半径为 $r = 1/N$ 的圆盘。相应的超算子 $\mathcal{L}$ 的形式为

$$\widehat{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=1}^{N^2} L_\alpha \otimes \overline{L_\alpha} - \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} - \frac{1}{2}(X \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \overline{X}), \tag{41}$$

其中厄米算子 X 定义为

$$X = \Phi^\ddagger(\mathbb{1}) - \mathbb{1} = \sum_{\alpha=1}^{N^2} L_\alpha^\dagger L_\alpha - \mathbb{1}. \tag{42}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$因此， $\mathcal{L}$的谱受 Φ和 $X \otimes 1\mathbb{l} + 1\mathbb{l} \otimes \overline{X}$的谱控制。注意，在大 N极限下，$L_\alpha \otimes L_\alpha$的特征值均匀分布在半径为 $1/N^2$的圆盘上。超算子 $\widehat{\Phi}$是 N^2个独立矩阵 $L_\alpha \otimes L_\alpha$之和。因此，在大 N 极限下（根据非厄米矩阵 [56]的中心极限定理），其谱密度在半径为 $1/N$的圆盘上均匀分布。因此，显然，在$\widehat{\ }$的大 N 极限下， Φ 可以建模为谱半径为 $1/N$的Ginibre矩阵。实际上，由于映射$\frown\Phi$保持厄米性， Φ可以建模为实Ginibre矩阵 G_R。对于第二项， $X \otimes 1\mathbb{l} + 1\mathbb{l} \otimes X$，注意到由式（42）可得 $X = \sum_{\alpha=1}^{N^2} X_\alpha$，其中 $X_\alpha = L_\alpha^\dagger L_\alpha - \frac{1}{N^2}1\mathbb{l}$，即 X_α 是一个Wishart矩阵 $L_\alpha^\dagger L_\alpha$ —

平移了 $1/N^2$。注意， X_α的特征值分布具有零均值和方差 $1/N^2$。现在将自由中心极限定理 [57] 应用于随机矩阵 X，该矩阵由 N^2 个矩阵 X_α之和构成，可以发现， X 的谱密度由支撑于 $[-\frac{2}{N},\frac{2}{N}]$上的 Wigner 半圆分布定义，

$$\rho_X(x)=\frac{N^2}{2\pi}\sqrt{\frac{4}{N^2}-x^2}. \tag{43}$$

因此，显然， $\mathcal{L}':=N(\mathcal{L}+1\!\!1_N\otimes 1\!\!1_N)$ 可以由以下随机矩阵模型 [27,28] 近似。

$$\widehat{\mathcal{L}'}\approx G_R+\frac{1}{2}(\mathrm{GOE}_N\otimes 1\!\!1_N+1\!\!1_N\otimes\mathrm{GOE}_N), \tag{44}$$

其中，两项中的 GOE 矩阵相同，其谱密度（在大 N 极限下）由 $[-2,2]$上的 Wigner 半圆给出，

$$\rho_{\mathrm{GOE}}(x)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}. \tag{45}$$

上述随机矩阵模型的谱密度由单位 Girko 圆盘与两个高斯正交系综矩阵（各缩放为 1/2）的 Wigner 半圆分布的（经典）卷积之间的自由卷积给出（更多详情参见文献 [27,28] ）。有趣的是，这个简单的随机矩阵模型再现了随机林德布拉德算符谱分布的柠檬状形状。柠檬边界由以下方程 [27,28] 的解刻画：

$$\mathrm{Im}[z+G(z)]=0, \tag{46}$$

with

$$G_{\mathcal{L}}(z)=2z-\frac{2z}{3\pi}\left[(4+z^2)E\left(\frac{4}{z^2}\right)+(4-z^2)K\left(\frac{4}{z^2}\right)\right], \tag{47}$$

其中， $K(z)$ 和 $E(z)$ 分别是第一类和第二类完全椭圆积分（详情请参见 [27,28]）。此外，还可以计算复特征值和实特征值的密度，但所得公式相当复杂 [28]。有趣的是，该密度沿虚方向保持不变。

对随机柯尔莫哥洛夫算子 [28,44,45]也可以进行类似的分析。可得 $\mathcal{K}_{ij}=W_{ij}-\delta_{ij}W_j$，其中 $W_j=\sum_k W_{kj}$，且 $W_{ij}\geq 0$。为了生成 $\mathcal{K}$， W 的元素从支撑在正半轴上的分布中独立同分布地采样。我们选择 $W_{ij}=|z_{ij}|^2$，其中 z_{ij} 是均值为零、方差为 $N^{-1/2}$的独立同分布复高斯变量。重标度后的算子 $\mathcal{K}'=\sqrt{N}(\mathcal{K}+1\!\!1)$ 在大 N极限下呈现普适的纺锤形特征值分布，见图 1b。该分布可由以下简单的随机矩阵模型得到。矩阵 W 由谱半径为 1 的实Ginibre矩阵 G_R 建模。根据中心极限定理，对角元素 W_j 可近似为高斯变量。由此得到以下模型

$$\mathcal{K}'\approx G_R+\mathrm{Gauss}_N, \tag{48}$$

其中，Gauss_N 表示一个对角矩阵，其元素是均值为零、单位方差的独立同分布高斯变量。该模型意味着，特征值分布由 Girko 圆盘与实高斯分布的自由卷积决定。纺锤状区域的边界可由式 (46) 计算，其中函数 $G(z)$ 现在写作

$$G_{\mathcal{K}}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-z^2}\left[\mathrm{Erfi}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)-i\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\,z)\right], \tag{49}$$

其中虚误差函数$(z)=-i$误差函数(iz)，和误差函数$(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$ 是误差函数。

5 随机林德布拉德算符满足细致平衡条件

在本节中，我们研究满足量子细致平衡条件的随机林德布拉德算符系综族。此类算子由一个大小为 N的不变态 σ 参数化，该不变态可以任意选取。 σ的特征值的简并，更准确地说，关系式 (26)，决定了相应科萨科夫斯基矩阵中的哪些元素可以为非零。我们从两个极端情况开始分析，即对应于最大混合稳态 $\sigma=1\!\!1/N$ 的完全简并密度矩阵，以及没有简并- 的密度矩阵；如果该矩阵是随机抽取的，后一种情况是典型情形。然后，我们考虑 σ 的简并逐渐增加的情形，从而在这两个极端情况之间进行插值。

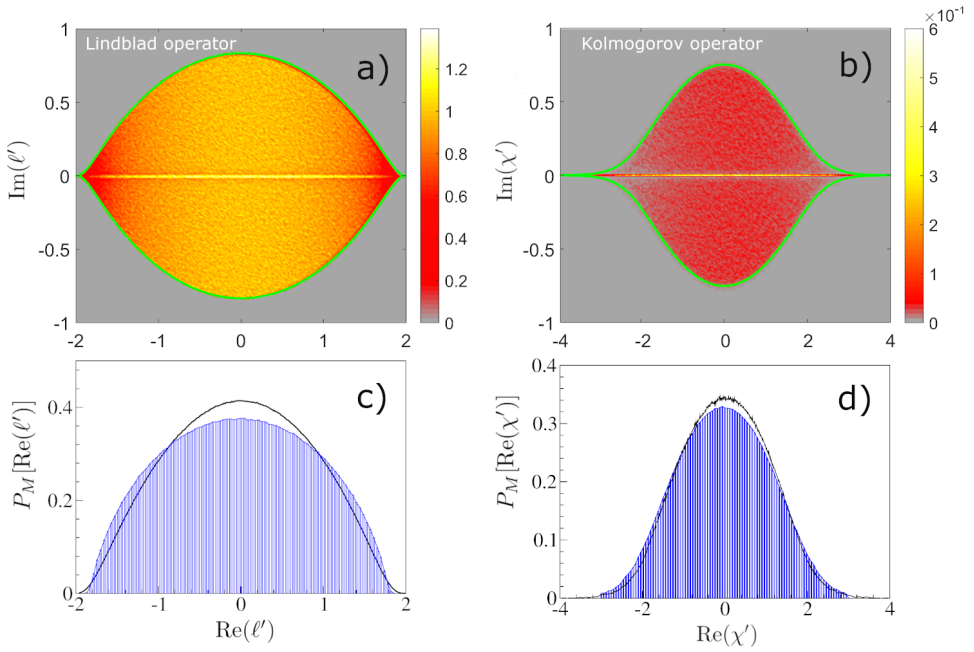

图 1：a) 重标度特征值的谱密度 $P[\mathrm{Re}(\ell'),\mathrm{Im}(\ell')]$，$\ell' = N(\ell+1)$，来自随机纯耗散林德布拉德算符的谱 $\mathcal{L}$，其中 $N = 250$。亮绿色轮廓线是谱边界，见公式 (46,47)。密度通过 10^2 次实现进行采样。b) 特征值的概率密度函数 $P[\mathrm{Re}(\chi'),\mathrm{Im}(\chi')]$：这些特征值来自对随机林德布拉德算符系综进行去相干处理后得到的柯尔莫哥洛夫算子。密度通过 10^2 次实现进行采样。亮绿色轮廓线是谱边界，见公式 (46,49)。c) 随机林德布拉德算符的特征值实部 $\mathrm{Re}(\ell')$ 的边缘密度（黑线），以及满足相对于状态 $\sigma = \mathbb{1}/N$ 细致平衡条件的随机林德布拉德算符的谱密度（蓝色柱状图）。c) 随机柯尔莫哥洛夫算符的特征值实部 $\mathrm{Re}(\ell')$ 的边缘密度（黑线），以及满足相对于状态 $\mathbf{p} = (1/N, 1/N, \ldots, 1/N)$ 细致平衡条件的随机柯尔莫哥洛夫算子的谱密度（蓝色柱状图）。

5.1 关于最大混合态 $\sigma = \mathbb{1}/N$ 的细致平衡

如果 $\sigma = \mathbb{1}/N$，那么 $\mathcal{L}$ 满足关于 σ 的量子详细平衡，当且仅当 Φ 是自对偶的，即 $\Phi = \Phi^\ddagger$。我们将这样的林德布拉德算符记为 $\mathcal{L}_{\mathrm{mm}}$。特别地，如果基底 F_α 由厄米算子构成，那么 $\Phi = \Phi^\ddagger$ 当且仅当 $K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}$，因此科萨科夫斯基矩阵 K 是实对称矩阵。它可以根据公式 (36) 进行采样，此时 G 是一个 $N^2 \times N^2$ 实Ginibre矩阵。公式 (38) 中对应的跳跃算子此时是厄米的，这是量子详细平衡带来的主要技术结果。这提供了一种替代且更高效的随机林德布拉德算符采样方法：生成大小为 N、归一化为 $\langle \mathrm{Tr} L_\alpha^2 \rangle = \frac{1}{N}$ 的独立同分布 GUE 矩阵作为跳跃算子。

注 2。在 GKLS 生成元的规范表示式（公式（3））中，跳跃算子 L_α 是无迹的。然而，很容易验证，如果 L_α 是厄米的，那么

$$L_\alpha \rho L_\alpha - \frac{1}{2}\{L_\alpha L_\alpha, \rho\} = \widetilde{L}_\alpha \rho \widetilde{L}_\alpha - \frac{1}{2}\{\widetilde{L}_\alpha \widetilde{L}_\alpha, \rho\}, \tag{50}$$

其中 $\widetilde{L}_\alpha = L_\alpha - \frac{1}{N}\mathrm{Tr} L_\alpha \mathbb{1}$。因此，$L_\alpha$ 无迹并非必要条件。

随机矩阵模型的合理性依据第 4 节所述的推理，只需做少许调整。具体而言，由于跳跃算子是厄米的，超算子 Φ 也是厄米的，因此可以用一个大小为 N^2 的高斯正交系综矩阵对其建模。因此，缩放后的林德布拉德算符 $\hat{\mathcal{L}}'_{\mathrm{mm}} = N(\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{mm}} + \mathbb{1}\otimes\mathbb{1})$ 可以用以下随机矩阵模型近似：

$$\hat{\mathcal{L}}'_{\mathrm{mm}} \approx \mathrm{GOE}^{(1)}_{N^2} + \frac{1}{2}(\mathrm{GOE}^{(2)}_N \otimes \mathbb{1}_N + \mathbb{1}_N \otimes \mathrm{GOE}^{(2)}_N), \tag{51}$$

其中，不同上标的高斯正交系综矩阵彼此独立。

为了计算上述随机矩阵模型的密度，我们借助厄米矩阵的自由概率工具箱 [58, 59]。由于直接处理密度并不方便，通常会转而使用其斯蒂尔切斯变换，也称为格林函数

$$G(z) = \left\langle \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,(z-H)^{-1} \right\rangle = \int \frac{\rho(x)}{z-x}dx. \tag{52}$$

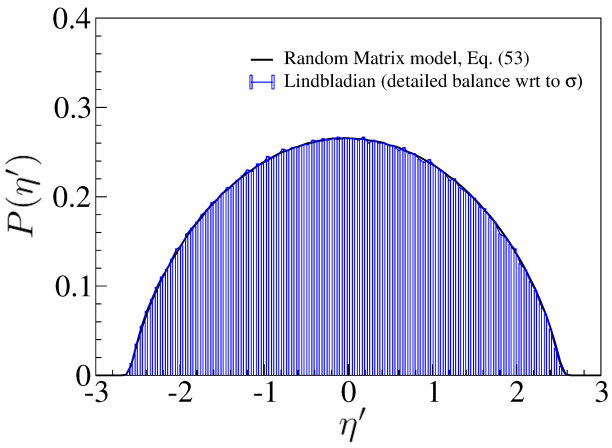

图 2：满足关于最大混合态 $\sigma = \mathbb{1}/N$ 的量子细致平衡条件的随机林德布拉德算符的重标度特征值密度（蓝色条形）以及随机矩阵模型的密度，通过数值求解公式（54）获得（实心黑线）。对于 $N = 100$，两种密度均使用 10^2 次实现进行采样。

得到格林函数后，便可通过索霍茨基–普列梅利公式恢复密度

$$\rho(x) = \mp \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} G(z \pm i\epsilon). \tag{53}$$

在自由概率中，随机矩阵的加法问题通过自由卷积 [57–59] 得以解决。在我们的随机矩阵模型中，矩阵 $C \otimes \mathbb{1}_N + \mathbb{1}_N \otimes C$ 的谱由两个 Wigner 半圆的（经典）卷积给出。随后，所得密度与另一个 Wigner 半圆进行自由卷积。

命题2。斯蒂尔切斯变换 $G(z)$ 关于 $\mathcal{L}'_{\mathrm{mm}}$ 满足该方程

$$G(z) = G_{\mathcal{L}}(z - G(z)) \tag{54}$$

其中 $G_{\mathcal{L}}$ 由 (47)给出。

证明见附录 B。

5.2 关于无简并随机稳态的详细平衡

若按照任意无原子测度随机选取稳态 [60], ，则其谱以概率1为非简并。相应的林德布拉德算符由定理1刻画。相应的对角形式为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Dav}}(\rho) = \sum_{i,j=1}^{N} L_{ij}\rho L_{ij}^{\dagger} - \frac{1}{2}\{L_{ij}^{\dagger}L_{ij}\rho\}, \tag{55}$$

其中

- $L_{ii} = \sum_{j=1}^{N} l_j^i E_{jj}$,
- $L_{ij} = S_{ij} p_j^{-1/2} E_{ij}$ for $i, j = 1, \ldots, N$, $i \neq j$ and $S_{ij} \in \mathbb{C}$ such that $|S_{ij}| = |S_{ji}|$.

回顾一下，$E_{ij} = |i\rangle\langle j|$。$S_{ij}$ 和 S_{ji} 除相位外相关，我们选择 S 厄米。通过设定 $D_{ij} = \sum_k l_i^k l_j^k$ 和 $W_{ij} = |S_{ij}|^2 p_j^{-1}$，即可得到定理1。

通过直接检查林德布拉德算符 (29)，可以发现

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Dav}}(E_{ij}) = \lambda_{ij} E_{ij} \quad (i \neq j); \qquad \mathcal{L}_{\mathrm{Dav}}(E_{ii}) = \sum_{j=1}^{N} \mathcal{K}_{ij} E_{jj}, \tag{56}$$

其中实特征值 λ_{ij} 读作 $\lambda_{ij} = -\frac{1}{2}(d_{ij} + w_i + w_j)$，且

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (l_i^k - l_j^k)^2, \qquad w_i = \sum_{k \neq i} |S_{ki}|^2 p_i^{-1}, \qquad \mathcal{K}_{ij} = |S_{ij}|^2 p_j^{-1} - \delta_{ij} \sum_{k=1}^{N} |S_{kj}|^2 p_j^{-1}. \tag{57}$$

这意味着量子详细平衡（QDB）使密度矩阵对角元素的演化与非对角元素完全解耦。厄米性保持将对角线两侧对应元素的演化联系起来，并意味着相应特征值具有二重简并，因为 $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$。除此之外，密度矩阵的非对角元素彼此独立地演化。因此，戴维斯生成元的向量化形式可分解为

$$\hat{\mathcal{L}}_{\mathrm{Dav}} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}, \tag{58}$$

其中，$\mathcal{K}$ 是一个相对于由 σ的特征值组成的概率向量满足经典细致平衡的柯尔莫哥洛夫算子。大小为 $N($ $N-1)/2$ 的对角矩阵 $\mathcal{D}$ 包含 $1 \le i < j \le N$的退相干特征值λ_{ij}。有趣的是，对超退相干 [28]的作用也会得到相同结构的林德布拉德算符。事实上，随机戴维斯生成元几乎是经典的。只有公式（57）中的 d_{ij} 是纯粹量子的，并且在超退相干作用下不会保留下来。

我们按如下方式在林德布拉德算符中引入随机性。对角跳跃算子 $\{L_{ii}\}$ 的元素服从均值为零、方差为 $\sigma_l^2 = \langle (l_j^i)^2 \rangle = \frac{1}{N^2}$的高斯分布，而定义非对角跳跃算子$\{L_{ij}\}$ 的厄米矩阵 S_{ij} 的元素服从均值为零、方差为 $\sigma_S^2 = \langle |S_{ij}|^2 \rangle = \frac{1}{N} \langle p^{-1} \rangle$的复高斯分布，这里我们引入了一个简写记号

$$\langle p^{-1} \rangle := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} p_j^{-1}. \tag{59}$$

该归一化方案确保 $\langle \mathrm{Tr} K \rangle = N$。在数值情形下，我们进一步将所有跳跃算子按同一因子重新缩放，使其满足严格等式 $\mathrm{Tr} K = N$。

注意，$\sum_{k \neq i} |S_{ki}|^2$ 是独立复高斯随机变量的平方和。因此，其分布与 $\frac{1}{2}\sigma_S^2 \chi^2_{2(N-1)}$相同，其中 χ^2_k 表示具有 k 个自由度的卡方分布。根据大数定律，当 k χ^2_k 较大时，$\sum_{k \neq i} |S_{ki}|^2$ 可以用均值为 k 、方差为 $2k$的高斯分布很好地近似。因此，对于较大的 N，我们有

$$w_i \approx (1 + q_i)(1 + \xi_i N^{-1/2}) \tag{60}$$

其中，ξ_i 是一个服从标准正态分布的随机变量，而 $q_i = \frac{p_i^{-1}}{\langle p^{-1} \rangle} - 1$。

通过类似的推理可以发现，在大 N 极限下，d_{ij} 可以很好地由均值为 $2/N$ 、标准差为 $2\sqrt{2}N^{-3/2}$的高斯分布近似。这意味着 $d_{ij} \ll w_i$，因此 d_{ij} 对特征值 λ_{ij} 的贡献可以忽略。

退相干特征值可有效描述如下

$$\lambda_{ij} \approx -1 - \frac{q_i + q_j}{2} + \frac{1}{\sqrt{2N}} \xi_{ij}, \tag{61}$$

其中 $\xi_{i\ j}$ 服从独立同分布的高斯分布 均值为零、方差为单位值的随机变量

元素 $|S_{ij}|^2$ 相互独立，标准差为 σ_S^2。因此，元素为 $|S_{ij}|^2$ 的对称矩阵的谱符合经 $\sqrt{N}\sigma_S^2$重新缩放的 Wigner 半圆分布。项 $-p_j^{-1} \sum_{k=1}^{N} |S_{kj}|^2$ 是独立随机变量之和，因此根据中心极限定理，其元素服从均值为 $\frac{-1}{\langle p^{-1} \rangle}$、标准差为 $\frac{1}{N^{1/2}\langle p^{-1} \rangle}$的高斯分布。最后，我们引入对角矩阵 $Q = \mathrm{Diag}[q_1, q_2, \ldots, q_N]$。于是，Kolmogorov 算子可表示为

$$\mathcal{K} \approx \left(-\mathbb{1}_N + \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\mathrm{GOE}_N + \mathrm{Gauss}_N \right) \right) (1 + Q), \tag{62}$$

一个 $N \times N$ 高斯正交系综矩阵和一个元素取自标准正态分布的对角矩阵。

请注意，随机戴维斯算子中的随机性有两个来源：σ 中的概率随机性，以及对称矩阵 S中元素的随机性。我们将 κ 记为 q_i的标准差，它本质上编码了概率向量 p中的涨落。它决定了三种状态，每种状态对应不同的有效随机矩阵模型。

（i）如果 $\kappa \ll N^{-1/2}$，则 S 中的随机性占主导地位。Kolmogorov 分量和纯退相干分量分别缩放为 $\mathcal{K} = -\mathbb{1}_N + N^{-1/2}\mathcal{K}'$和 $\mathcal{D} = -\mathbb{1}_{N(N-1)/2} + N^{-1/2}\mathcal{D}'$，其中

$$\mathcal{K}' \approx \mathrm{GOE}_N + \mathrm{Gauss}_N, \qquad \mathcal{D}' \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Gauss}_{N(N-1)/2}. \tag{63}$$

(ii) 如果 $\kappa \gg N^{-1/2}$，σ 中的随机性占主导地位，并且

$$\mathcal{K}_{ij} \approx -\delta_{ij} \frac{p_i^{-1}}{\langle p^{-1} \rangle}, \qquad \lambda_{ij} \approx -\frac{p_i^{-1} + p_j^{-1}}{2\langle p^{-1} \rangle}. \tag{64}$$

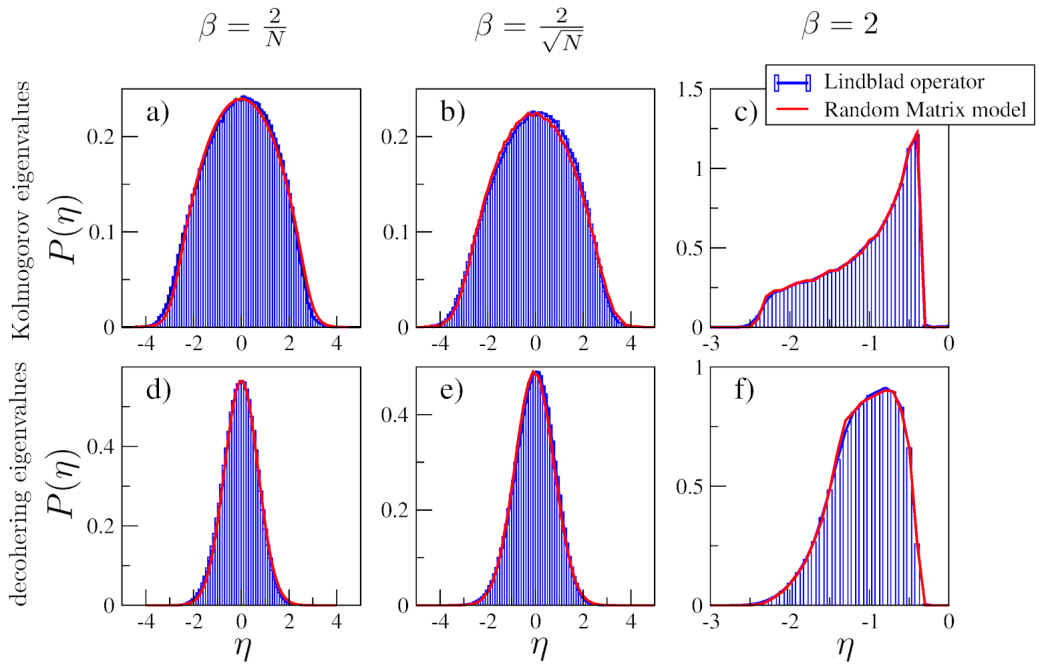

图3：对于三个不同区域，满足相对于热态的量子细致平衡条件（式（67））的随机林德布拉德算符的谱密度。由于退相干特征值（底行）是二重简并的，因此在数值计算过程中可以将其与柯尔莫哥洛夫部分的特征值（顶行）区分开来。在第一个区域 $\beta \ll N^{-1/2}$ 中，将柯尔莫哥洛夫部分的密度与命题3所述随机矩阵理论模型的谱密度并列比较。在另外两个区域中，将随机戴维斯的密度与通过对相应随机矩阵模型（式（64）和（65））进行抽样得到的谱密度进行比较。

(iii) 如果 $\kappa \sim N^{-1/2}$，两种随机性来源的贡献相当，并且会相加。Kolmogorov 分量和纯退相干特征值分别按 $\mathcal{K} = -1_N + N^{-1/2}\mathcal{K}'$ $\lambda_{ij} = -1 + N^{-1/2}\lambda'_{ij}$ 和 进行重新缩放。引入重新缩放的变量和 Diag 后，$q_i = N^{-1/2}q'_i$ $Q' = [q'_1, \ldots, q'_N]$ Davies 算子的重新缩放分量为

$$\mathcal{K}' \approx \mathrm{GOE}_N + \mathrm{Gauss}_N - Q', \qquad \lambda'_{ij} \approx -\frac{q'_i + q'_j}{2} + \frac{\xi_{ij}}{\sqrt{2}}, \tag{65}$$

其中，ξ_{ij} 是关于 $i < j$ 相互独立的标准正态变量，并满足 $\xi_{ij} = \xi_{ji}$。

虽然区域 (ii) 和 (iii) 中的密度取决于稳态概率的具体选择，但在区域 (i) 中，当 N 趋于无穷大时，Kolmogorov 部分对应的谱密度可以利用自由概率工具计算，其斯蒂尔切斯变换满足 Pastur方程，见附录 B。

命题3。设 $\mathcal{K}' = A + B$，其中 A 是一个归一化为 $\langle \frac{1}{N}\mathrm{Tr}A^2 \rangle = 1$ 的高斯正交系综矩阵，而 B 是对角矩阵，其元素相互独立，服从均值为零、方差为单位的高斯分布，如式(63)所示。$\mathcal{K}'$ 的谱密度的斯蒂尔切斯变换满足以下函数方程

$$G(z) = G_{\mathcal{K}}(z - G(z)), \tag{66}$$

其中 $G_{\mathcal{K}}$ 由式 (49)给出。

上述分析可以通过热态 $\sigma_\beta = \mathrm{Diag}[p_1, p_2, ..., p_N]$来说明，其中

$$p_j = e^{-\beta E_j}/\mathcal{Z}\ , \quad \mathcal{Z} = \sum_{j=1}^{N} e^{-\beta E_j}. \tag{67}$$

若能量 E_j在 $[0,1]$,上均匀分布，则由 p_j^{-1}在其均值附近的分布紧性确定的三个区间，可转化为逆温度的标度：$\beta \ll N^{-1/2}$、 $\beta \sim N^{-1/2}$和 $\beta \gg N^{-1/2}$。因此，对于每个区间，我们采用不同的随机矩阵模型（红线）。

在图3中，我们比较了通过对随机林德布拉德算符和相应随机矩阵模型的谱密度进行采样所获得的数值密度，确认了随机矩阵模型在全部 3 个区域中的有效性。

5.3 部分简并稳态

注意到这两种情形下林德布拉德算符的谱存在显著差异，渐近态分别为完全简并的密度矩阵和特征值互不简并的密度矩阵，因此我们在此考虑介于这两个极端情形之间的林德布拉德算符。为此，我们考虑这样的密度矩阵：其中前 M（$1 \le M \le N$）个特征值彼此相等，其余 $N-M$ 个则两两不同。为方便起见，我们用 A 表示 σ 简并子空间中的指标集合，用 p_A 表示相应的概率。我们还假设，特征值之间不存在其他关系，因而不会使科萨科夫斯基矩阵出现额外的非零元素。科萨科夫斯基矩阵的非零元素具有如下特征。

命题 **在 4 上。令 $A=\{1,\dots,M\}$ 和 p_i 为满足以下关系的 σ 的特征值。** *:*

(i) $p_i = p_j$ *if* $i,j \in A$

(ii) $p_i \neq p_j$ 如果 $i \notin A$ 或 $j \notin A$

(iii) $p_i p_j \neq p_{i'} p_{j'}$，且如果索引之一为 $\notin A$，则 $\{i,i'\} \neq \{j,j'\}$

满足量子详细平衡的 K 的非零元素形式为：

(i) $K_{ij,kl}$ 对于满足 $K_{ij,kl} = K_{lk,ji}$ 的 $i,j,k,l \in A$，*(ii)* $K_{kk,ll}$ 对于满足 $K_{kk,ll} = K_{ll,kk}$ 的 $k,l \notin A$，*(iii)* $K_{ij,kk}$ 和 $K_{kk,ji}$ 对于满足 $K_{ij,kk} = K_{kk,ji}$ 的 $i,j \in A$ 和 $k \notin A$，*(iv)* $K_{ik,jk}$ 和 $K_{kj,ki}$ 对于满足 $K_{ik,jk}p_k = K_{kj,ki}p_j$ 的 $i,j \in A$ 和 $k \notin A$，

(v) $K_{kl,\ kl}$ 对于满足 $K_{kl,\ kl}p_l = K_{lk,\ lk}p_k$ 的 $k,l \notin A$。

证明直接由一致性条件 $K_{ij,\ kl} = \frac{p_j p_k}{p_i p_l} K_{ij,\ kl}$（参见（26））得出，即 $p_j p_k = p_i p_l$ 或相应的元素 $K_{ij,\ kl}$ 为零。这些元素之间的关系由量子详细平衡（QDB）方程（25）确定。

通过重新排列 K 的指标，我们将其化为分块对角形式，其中包含：一个大小为 M^2+N-M 的块，涵盖命题 4 中的情形 (i)–(iii)；$2(N-M)$ 个大小为 M 的块（元素由 i 和 j 编号），对应情形 (iv)；以及一个大小为 $(N-M)(N-M-1)$ 的对角部分，包含情形 (v) 所描述的元素。注意，在情形 (i)–(iii) 中，量子详细平衡意味着块内某些元素相等；而在情形 (iv)–(v) 中，它则规定了某些块对之间的关系。

确定了 K 的块结构并知其为正定后，我们将其表示为 $K = G^\dagger G$，并选取具有与 K 相同块结构的 G。随后，以基矩阵 E_{ij} 按照式 (38) 中的类似方式构造跳跃算子，并立即得到如下结果

命题 5. 设 *Lindblad* 生成元由以下跳跃算子集给出 *s:*

(i) $L_\alpha = \sum_{i,j=1}^{M} l_{ij}^{\alpha} E_{ij} + \sum_{k=M+1}^{N} l_{kk}^{\alpha} E_{kk}$ *with* $l_{ij}^{\alpha} = \overline{l}_{ji}^{\alpha}$ *for* $\alpha = 1,\dots,M^2+N-M$,

(ii) $L_{kl} = S_{kl} p_l^{-1/2} E_{kl}$ *for* $k,l = M+1,\dots,N$ *and* $k \neq l$,

(iii) $L_{ik} = \sum_{j=1}^{M} T_{jk}^{i} p_k^{-1/2} E_{jk}$ *for* $i = 1,\dots,M$ *and* $k = M+1,\dots,N$,

(iv) $L_{ki} = \sum_{j=1}^{M} T_{kj}^{i} p_j^{-1/2} E_{kj}$ *for* $i = 1,\dots,M$ *and* $k = M+1,\dots,N$,

其中复矩阵 S 和 T^i 满足 $|S_{kl}| = |S_{lk}|$ 和 $T_{jk}^{i} = T_{kj}^{i}$。那么，该生成元相对于 σ 满足量子详细平衡条件，其特征值满足命题 *4* 的假设。

注 3. 当 $M=1$ 时可恢复戴维斯生成元，此时情形 (iii) 和 (iv) 归约为 (ii)；或者，等价地，当 $M=0$ 时，(iii) 和 (iv) 为空。在完全简并的情形下，所有跳跃算子都具有形式 (i)。类型 (iii) 和 (iv) 的非平凡生成元的存在，是具有部分简并稳态的量子详细平衡 Lindblad 算子的一项独特特征。

元素 S_{ij} 和 S_{ji} 的模相等，但其相位不受约束。为方便起见，我们选择 S 为厄米。我们还引入了一种混合记法，其中一些跳跃算子用单个希腊字母作索引，另一些则用双索引的拉丁字母作索引。图 4 展示了这种跳跃算子的构造。Lindblad算子具有与底层科萨科夫斯基矩阵相同的块结构，见附录 C。

正如第 5.2 节中所观察到的，随机戴维斯生成元的谱形状取决于矩阵 S 中随机性的尺度，以及稳态逆特征值的分布范围。其动机在于

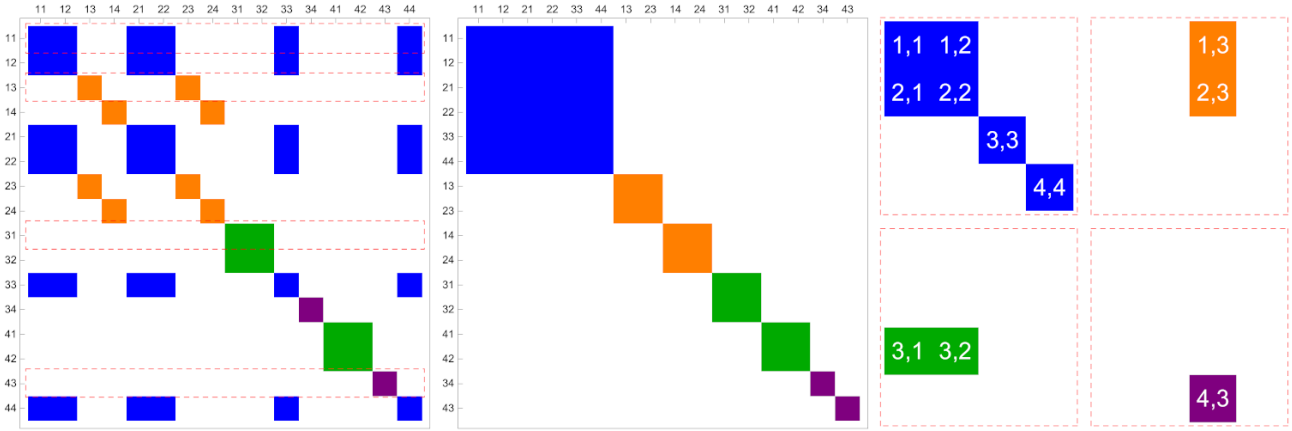

图 4: （左）尺寸为 $N = 4$、具有 $M = 2$ 个简并特征值的系统所对应的满足量子细致平衡条件的科萨科夫斯基矩阵。（中）对科萨科夫斯基矩阵的指标进行置换后，可将其化为分块对角形式。（右） K 的非零元素表示跳跃算子中的非零元素；这些跳跃算子通过取 K 的一行，并将其切分为长度各为 N 的片段得到。将这些片段依次堆叠，形成 L。

插值林德布拉德算符的研究目标是考察简并程度以及由此产生的科萨科夫斯基矩阵结构对谱形状的影响。从这一角度来看， p_a^{-1}的分布可能会因引入不必要的复杂性而模糊最终结果。因此，我们在此假设前 M个 σ的特征值等于 $1/N$，而非简并特征值集中在 $1/N$附近。 $\mathcal{L}$ 的谱不受 p_a分布的影响，因此我们可以设定 $p_a = 1/N$。

我们以如下方式将随机性引入跳跃算子。复厄米矩阵的元素服从均值为零、方差为 $\langle |l_{ij}^{\alpha}|^2 \rangle = \sigma_L^2$、$\langle |T_{jk}^{i}|^2 \rangle = \sigma_T^2$ 和 $\langle |S_{ij}|^2 \rangle = \sigma_S^2$ 的高斯分布。我们假设采用以下归一化

$$\sigma_L^2 = \frac{1}{N(M^2 - M + N)}, \qquad \sigma_S^2 = \frac{1}{N^2}, \qquad \sigma_T^2 = \frac{1}{MN^2}.$$

这个没有归一化方案确保跳跃算子的平均范数相等， $\langle \mathrm{Tr} LL^\dagger \rangle = \frac{1}{N}$ —.

林德布拉德算符的谱以 -1 为中心，特征值分散在一个区间内，该区间的大小按 $\frac{\sqrt{N-M+1}}{N}$ 的尺度缩放。对于随机戴维斯生成元（$M = 1$），这一缩放因子为 $N^{-1/2}$；而对于最大混合稳态的情形，这一因子为 N^{-1}，因此在两者之间进行插值。因而，为了描述谱的主体部分，我们将林德布拉德算符重新缩放为 $\mathcal{L} = -\mathbb{1} + \frac{\sqrt{N-M+1}}{N}\mathcal{L}'$，并提出一个对 $1 \ll M \ll N$有效的随机矩阵模型。该随机矩阵模型由四个组分组成，即 $\mathcal{L}' \approx \mathcal{L}_1' \oplus \mathcal{L}_1' \oplus \mathcal{L}_2' \oplus \mathcal{L}_2' \oplus \mathcal{L}_3' \oplus \mathcal{L}_4'$，其构建块

$$\mathcal{L}_1' \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Gauss}_{(N-M)(N-M-1)/2}, \qquad \mathcal{L}_2' \approx \bigoplus_{i=1}^{N-M} \frac{1}{2}(\mathrm{Gauss}_M^{(i)} + \mathrm{GOE}_M^{(i)}), \tag{68}$$

$$\mathcal{L}_3' \approx \mathrm{GOE}_M \otimes \mathbb{1}_M + \mathbb{1}_M \otimes \mathrm{GOE}_M, \qquad \mathcal{L}_4' \approx \mathrm{GOE}_{N-M} + \mathrm{Gauss}_{N-M}. \tag{69}$$

这里的高斯是一个对角矩阵，对角线上为标准独立高斯元素。块 $\mathcal{L}_1'$ 和$\mathcal{L}_2'$ 出现两次，以反映由于厄米性保持而导致的特征值的二重简并。在对命题5 中由 (i)型跳跃算子给出的林德布拉德算符部分作进一步近似后，可以得到 $\mathcal{L}_3'$和 $\mathcal{L}_4'$ 的模型，详情请参见附录 D。

随着简并度降低，块 $\mathcal{L}_2'$ 和 $\mathcal{L}_3'$ 逐渐缩小，并在 $M = 0$时消失，而 $\mathcal{L}_1'$ 和 $\mathcal{L}_4'$ 则简化为式 (63) 中随机戴维斯对应的随机矩阵模型。导出最大混合态的矩阵模型则不那么简单。 $\mathcal{L}_3'$ 的随机矩阵模型还应包含项 $\frac{1}{\sqrt{N-M+1}}\mathcal{L}'_{\mathrm{mm}}$，但由于我们假设 $N \gg M$，因此忽略了这一部分。另一方面，对于 $M \approx N$， $\mathcal{L}_3'$ 中的高斯正交系综矩阵不再是合适的模型，这一情形需要更精细的处理，详情参见附录 D。

6 结论

我们介绍了几种随机林德布拉德算子系综 $\mathcal{L}$，它们满足量子细致平衡条件。这些系综可以用其稳态 σ进行标记。随机稳态通常是非简并的，会导出所谓的戴维斯生成元 [10–12]。由于细致平衡条件强制 $\mathcal{L}$ 的谱为实数，我们研究了沿实轴的特征值密度。对于

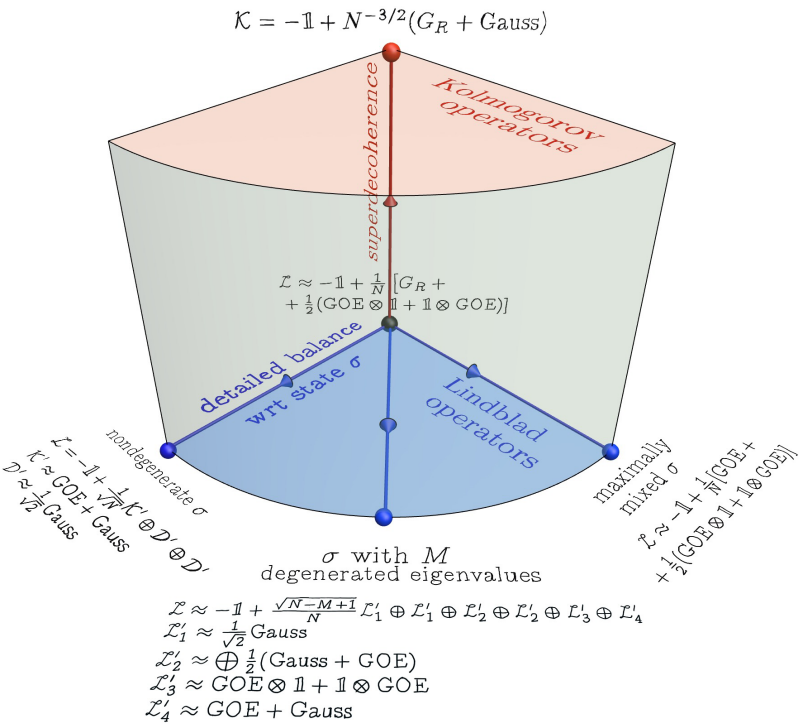

图5：满足细致平衡的马尔可夫演化随机生成元系综及其对应的随机矩阵模型。量子生成元（林德布拉德算符）根据其渐近态的类型加以指定。对于任意量子林德布拉德生成元系综 $\mathcal{L}$，通过应用超退相干，可得到相应的经典柯尔莫哥洛夫算子系综 $\mathcal{K}$。

关于稳态 σ简并的各种假设，我们构建了相应的随机矩阵系综（见附录 A），从而得以求得渐近谱密度的解析表达式。

在我们先前的工作中 [27, 28], ，我们探讨了完全随机林德布拉德算符的性质，并发现其谱分布在复平面上的一个普适柠檬形区域内。对特征值的虚部积分消去后，我们得到边缘分布，它可以较好地近似满足相对于最大混合态的细致平衡条件的林德布拉德生成元的谱密度。

我们还研究了随机柯尔莫哥洛夫算子，它们在经典概率单纯形上诱导连续时间动力学。我们没有直接分析这一问题，而是采用了超退相干的思想 [28]。具体而言，通过对量子戴维斯生成元的系综进行退相干化，我们将其转化为经典戴维斯生成元，并研究了后者的谱特征。与量子情形一样，描述随机柯尔莫哥洛夫算子复谱的概率分布的边缘分布 $\mathcal{K}$（其支集位于复平面上的通用纺锤形区域 [44, 45], ）为经典戴维斯生成元的谱密度提供了合理的近似。

最后，我们构建了一族随机矩阵模型，用于再现不同经典和量子的满足平衡条件的算符的谱密度。它们总结于图 5 所示的示意图中。

作为下一步，研究超退相干引发的量子到经典的转变如何在生成元满足（完全或部分）细致平衡条件时实现，将会很有意思。此外，随机林德布拉德算符的谱性质显著取决于算子的秩，其取值范围可以是从 1 到 N^2 的任意值。未来的工作将对随机生成元及其对以下三个参数的依赖关系进行更全面的分析：（a）超退相干程度；（b）满足细致平衡条件的精确度；（c）算子 $\mathcal{L}$ 的秩 [61]。

7 致谢

本研究得到挪威研究理事会项目“IKTPLUSS-IKT og digital innovasjon- 333979”（SD）以及国家研究中心（波兰）项目2021/03/Y/ST2/00193（WT和KZ）的支持，作为ERA-NET 项目“DQUANT：从耗散量子混沌视角看近期量子计算”的组成部分。DC得到了波兰国家科学中心项目 No. 2018/30/A/ST2/00837 的支持。

附录

A 随机矩阵的基本系综

本文使用了以下基本的随机矩阵系综:

• 令 G 表示一个随机的 $N \times N$ **Ginibre矩阵** [62], , 其元素是均值为零、方差为 $\langle |G_{ij}|^2 \rangle = 1/N$ 的独立同分布高斯随机变量。它的谱均匀覆盖单位圆盘，这一结果称为*Girko* 圆律 [41, 62, 63]。

• $G_R = (G + \overline{G})/\sqrt{2}$表示一个来自**实Ginibre矩阵**系综的矩阵——实非对称随机矩阵。其谱由复平面上的一个（变形的）Girko 圆盘以及实轴上的一个奇异分量组成；实轴上下方谱密度的凹陷恰好补偿了这一分量。在极限$N \to \infty$ 下，这些有限尺寸效应消失 [64–66], , 标准的 Girko 圆盘随之恢复。

• $\mathrm{GUE}_N = (G + G^\dagger)/\sqrt{2}$ 表示一个来自**高斯酉系综** [67]的厄米随机矩阵。其名称指的是它的概率密度在酉群 $U(N)$作用下保持不变。在矩阵维数 N趋于无穷的极限下，其谱收敛于 Wigner 半圆分布（45）。

• 高斯正交系综$_N = (\mathrm{GUE}_N + \mathrm{GUE}_N)/\sqrt{2}$ 表示来自**高斯正交系综**的实对称随机矩阵，该矩阵关于正交群 $O(N)$保持不变。渐近地，能级密度也收敛于半圆分布，但能级之间的相关性不同。最近邻分布呈现能级排斥，$P(s) \sim s^\beta$，其中对于 GUE 为 $\beta = 2$ ，对于高斯正交系综为 $\beta = 1$ ，其中 s 表示连续特征值之间的（展开后的）间距。

• 高斯$_N$ 表示一个随机对角矩阵，其对角线元素为相互独立、均值为零、方差为单位值的实高斯随机变量。其能级密度呈高斯分布，且彼此不相关的能级表现出能级聚集和泊松行为， $P(s) = \exp(-s)$，这对应于 $\beta = 0$。

• 最后， X 是一个辅助的 $N \times M$ 实矩形 Ginibre矩阵。其元素是均值为零且方差为一的实 i.i.d 高斯随机变量。 $N \times N$ 矩阵 Wish$_{N,M} = \frac{1}{M} XX^T$ 是一个实**Wishart** 矩阵。在极限 $N, M \to \infty$ 使得 $r = N/M$ 保持不变时，其谱密度由 Marchenko-Pastur 定律给出 [68, 69]

$$\rho_{MP}(x) = \frac{1}{2\pi r x}\sqrt{(r_+ - x)(x - r_-)}, \tag{70}$$

其中 $r_\pm = (1 \pm \sqrt{r})^2$ 是谱的边缘。如果 $r > 1$ ，密度还包括位于 0 处的额外狄拉克 delta。

B Pastur方程

厄米随机矩阵中主要关注的对象是平均谱密度 $\rho(x) = \langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - \lambda_i) \rangle$。研究这一对象时会用到它的斯蒂尔切斯变换，在物理学文献中也称为格林函数， $G_H(z) = \langle \frac{1}{N} \mathrm{Tr}(z - H)^{-1} \rangle$。一旦得知复值格林函数，就可以根据 G 在实轴附近的行为，通过 Sochocki-Plemelj 公式恢复谱密度

$$\rho(x) = \mp \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} G(x \pm i\epsilon). \tag{71}$$

随机矩阵理论中的一个核心问题是计算两个随机矩阵之和的谱 $A + B$。借助为非对易对象 [58, 59]发展出的自由概率工具，可以在大 N 极限下解决这一问题。在这一框架中，自由性取代了独立性的概念。非正式地说，如果两个矩阵的特征基之间不存在任何关系，那么它们就是自由的。

要计算两个矩阵之和的谱，首先要计算它们的格林函数及其满足条件的函数逆 $B(z)$

$$G(B(z)) = z, \qquad B(G(z)) = z, \tag{72}$$

并定义了 $R(z) = B(z) - \frac{1}{z}$ 变换，该变换对于自由随机矩阵具有可加性

$$R_{A+B}(z) = R_A(z) + R_B(z). \tag{73}$$

在本文的语境下，我们关注 A 为高斯正交系综（GOE），而 B 可以是任意厄米矩阵的情形。GOE 的 R 变换为 $R(z) = z$，因此我们有关系式 $R_{A+B}(z) = z + R_B(z)$。在等式两边同时加上$\frac{1}{z}$，得到

$$B_B(z) = B_{A+B} - z. \tag{74}$$

在下一步中，我们在等式两边计算 G_B，并使用 (72) 得到

$$z = G_B(B_{A+B}(z) - z). \tag{75}$$

最后，我们代入 $z \to G_{A+B}(z)$ 并使用 (72)，得到 Pastur方程 [51]:

$$G_{A+B}(z) = G_B(z - G_{A+B}(z)). \tag{76}$$

为涵盖正文中出现的情形，只需找出 $G_B(z)$。事实上，对于我们感兴趣的两个实例，即$B = \frac{1}{2}(C \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes C)$，其中一个是高斯正交系综矩阵（针对命题2），另一个是高斯对角矩阵（针对命题3），它们的 Stieltjes变换已在 [27, 28] 中计算得到。

C 满足关于部分简并稳态的详细平衡条件的林德布拉德算符的谱性质

通过直接但冗长的计算，可以验证量子详细平衡生成元在基矩阵上的作用。

命题6。由命题 *5* 中的跳跃算子集合定义的林德布拉德算符满足以下关系：

(i) 对于 $a, b \notin A$ 和 $a \neq b$

$$\mathcal{L}(E_{ab}) = \lambda_{ab} E_{ab}, \quad where \quad \lambda_{ab} = -\frac{1}{2}(d_{ab} + t_a + w_a + w_b + t_b),$$

(ii) 对于 $a \in A$ 和 $b \notin A$

$$\mathcal{L}(E_{ab}) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\left(G^{(b)}_{ia} + p_A^{-1} H_{ia} + \delta_{ia}(w_a + t_a)\right) E_{ib},$$

(iii) 对于 $a \notin A$ 和 $b \in A$

$$\mathcal{L}(E_{ab}) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\left(G^{(a)}_{bi} + p_A^{-1} H_{bi} + \delta_{bi}(w_b + t_b)\right) E_{ai},$$

(*iv*) 对于 a、$b \in A$

$$\mathcal{L}(E_{ab}) = \widetilde{\mathcal{L}}_{\mathrm{mm}}(E_{ab}) + p_A^{-1}\sum_{k=M+1}^{N} \mathcal{T}_{k,ba} E_{kk} - \frac{1}{2} p_A^{-1}\sum_{j=1}^{M}\left(H_{ja} E_{jb} + H_{bj} E_{aj}\right),$$

(v) 对于 $a \notin A$

$$\mathcal{L}(E_{aa}) = \sum_{k=M+1}^{N} \mathcal{K}_{ka} E_{kk} + \sum_{i,j=1}^{M} p_a^{-1} \mathcal{T}_{a,ij} E_{ij} - t_a E_{aa},$$

其中

$$\mathcal{T}_{a,ij} = \sum_{m=1}^{M} T^m_{ia} T^m_{aj}, \qquad H_{ja} = \sum_{k=M+1}^{N} \mathcal{T}_{k,ja}, \qquad t_a = p_a^{-1}\sum_{j=1}^{M} \mathcal{T}_{a,jj}, \qquad w_a = \sum_{\substack{k=M+1 \\ k\neq a}}^{N} |S_{ka}|^2 p_a^{-1},$$

$$d_{ab} = \sum_{\alpha}\left(l^{\alpha}_{aa} - l^{\alpha}_{bb}\right)^2, \qquad G^{(b)} = \sum_{\alpha}(J^{(b)}_{\alpha})^2, \qquad (J^{(b)}_{\alpha})_{ij} = l^{\alpha}_{ij} - l^{\alpha}_{bb}\delta_{ij}, \qquad \widetilde{\mathcal{K}}_{ka} = |S_{ka}|^2 p_a^{-1} - \delta_{ka}\sum_{j=M+1}^{N} |S_{ja}|^2 p_a^{-1},$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathrm{mm}}(E_{ab}) = \sum_{\alpha} \tilde{L}_{\alpha} E_{ab} \tilde{L}_{\alpha} - \frac{1}{2}\{\tilde{L}^2_{\alpha}, E_{ab}\} \qquad with \qquad \tilde{L}_{\alpha} = \sum_{i,j=1}^{M} l^{\alpha}_{ij} E_{ij}.$$

˜（ii）与（iii）之间的关系直接源于 $\mathcal{L}$ 的厄米性保持。 $\mathcal{L}_{\mathrm{mm}}$ 上文所述的是一个满足量子详细平衡的林德布拉德算符，其对应的状态为最大混合态，并限制在由 σ 的˜简并部分张成的空间内。类似地， $\mathcal{K}$ 是一个限制在由 σ 的非简并部分张成的空间内的柯尔莫哥洛夫生成元。

ˆ上述命题表明， $\mathcal{L}$ 直接呈现出与科萨科夫斯基矩阵结构完全一致的分块对角形式。林德布拉德算符在由E_{ab}张成的子空间上已经是对角的，其特征值为 λ_{ab} ，其中 $a \neq b$对应于 σ的非简并部分。共有（$N-M$）（$N-M-1$）个此类特征值，包括其二重简并。此外，还有 $N-M$ 个块（每个对应于 $b \notin A$），大小为 $M \times M$。相应的特征值同样是二重简并的，因为情形 (ii) 和 (iii)由同一个矩阵控制，至多相差一个转置。最后，有一个大小为 M^2-M+N 的块，控制密度矩阵对角元素以及由 σ的简并部分张成的子空间中的元素的动力学。

D 随机矩阵模型的论证

在本节中，我们分析命题 6 中定义的随机林德布拉德算符的块，并论证随机矩阵模型 (69)。

情形（*i*）。所有特征值均具有 $\lambda_{ab} = -\frac{1}{2}(d_{ab} + w_a + w_b + t_a + t_b)$的形式。与随机戴维斯的情形类似，来自 d_{ab} 的贡献可以忽略不计。 w_a 和 t_a 均表示复高斯变量模平方之和，因此服从 χ^2 分布。总体而言， λ_{ab} 服从如下随机变量的分布

$$\lambda_{ab} \sim -\frac{1}{4MN}\chi^2_{4M^2} - \frac{1}{4N}\chi^2_{4(N-M-1)}. \tag{77}$$

对于较小的 M，第一项可以忽略，而对于 $N \gg M \gg 1$，两项都会有贡献。根据中心极限定理， χ^2_N 可以很好地用均值为 N 、方差为 $2N$的正态分布近似。因此，对于$M \ll N$ λ_{ab} 可以很好地用均值为 -1 、方差为$\frac{N-M}{2N^2}$ 的高斯分布近似。

情况 *(ii)*。矩阵 $J^{(b)}_\alpha$ 的元素服从高斯分布，因此我们使用 Wick 定理来计算其矩。它的二阶矩为 $\langle \frac{1}{M}\mathrm{Tr}(J^{(b)}_\alpha)^2\rangle = \sigma_L^2(M+1)$，四阶矩为$\langle \frac{1}{M}\mathrm{Tr}(J^{(b)}_\alpha)^4\rangle = \sigma_L^4\ 2M^2+6M+4$ $J^{(b)}_\alpha{}^2$ $\sigma_L^2\ M+1$ $\sigma_L^4\ M^2+$( )。因此，$4M+3$ $G^{(b)}$ M^2-M+N 矩阵( ) 的谱均值为( )，方差为( )。该矩阵是这类矩阵的和，因此根据自由中心极限定理，其谱是以 M/N 为中心、方差为 $\frac{M^2}{N^2}\frac{(M^2-M+N)}{}$ 的 Wigner 半圆分布。方差至多为 $1/N$ 阶，并随 M 增大而减小。因此，与之前分析的 t_a 和 w_a 所产生的贡献相比，它可以忽略；由此可得出结论： $G^{(b)}$ 可以近似为按 $\frac{M}{N}$ 缩放的单位矩阵。

矩阵 H 的元素为

$$H_{ia} = \sum_{k=M+1}^{N}\sum_{m=1}^{M} T^m_{ik}T^m_{ka}. \tag{78}$$

H 是Wishart矩阵这一事实在注意到指标 k 和 m 可以合并为一个从1到 $M(N-M)$的单一指标时最为明显。因此， $p_A^{-1}H$与矩阵$\frac{N-M}{N}$Wish$_{M,M(N-M)}$具有相同的分布，其中Wish$_{N,T}$表示具有矩形参数 $\frac{N}{T}$的 $N\times N$ Wishart矩阵。综合这些结果，情形(ii)中单个 $M\times M$ 块的林德布拉德算符可以表示为

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{M+N}{N}\mathbb{1}_M + \frac{\sqrt{N-M}}{N}\mathrm{Gauss}_M + \frac{N-M}{N}\mathrm{Wish}_{M,M(N-M)}\right).$$

该模型可以b e可在 $N-M$ 较大时进一步简化，因为Wishart矩阵可以近似 as

$$\mathrm{Wish}_{M,M(N-M)} \approx \mathbb{1}_M + \frac{1}{\sqrt{N-M}}\mathrm{GOE}_M. \tag{79}$$

这一近似由（78）得出，其中 H 可解释为 $N-M$ 个独立 Wish$_{M,\ M}$矩阵之和，随后对其应用自由中心极限定理。因此，情形（ii）中单个 $M\times M$ 块的最终模型为

$$-\mathbb{1}_M + \frac{\sqrt{N-M}}{2N}(\mathrm{GOE}_M + \mathrm{Gauss}_M).$$

情况 *(iii)* 是由于厄米性保持而直接复制情况 (ii)。

根据命题 6，林德布拉德算符将 E_{aa} 中对应 $a \notin A$ 的元素与 E_{ij} 中对应 $i,\ j \in A$的元素耦合。不过，根据数值结果，我们假设在这两种情况下都忽略含有 $\mathcal{T}_{a,\ ij}$ 的混合项，由此得到两个独立的块。

情形 *(iv)*。第 5.1 节分析的 $\hat{\ } \mathcal{L}_{\mathrm{mm}}$ 矩阵模型需要调整，以考虑元素方差和尺寸的差异。经过这些简单的调整后，我们得到

$$\widetilde{\hat{\mathcal{L}}}_{\mathrm{mm}} = -\frac{M}{N}\mathbb{1} + \frac{1}{N}\hat{\mathcal{L}}'_{\mathrm{mm}}, \tag{80}$$

其中 $\hat{\ } \mathcal{L}'_{\mathrm{mm}}$ 由（51）给出。如同在情形（ii）中的论证，含有 H 矩阵的部分导致

$$-\frac{N-M}{2N}\left(\mathrm{Wish}_{M,M(N-M)} \otimes \mathbb{1}_M + \mathbb{1}_M \otimes \mathrm{Wish}_{M,M(N-M)}\right),$$

利用（79）可以进一步简化。在这一假设下，含有 $\hat{\ } \mathcal{L}'_{\mathrm{mm}}$ 的项也是次主导项，因此将其忽略，得到最终模型

$$\hat{\mathcal{L}}_3 \approx -\mathbb{1}_{M^2} + \frac{\sqrt{N-M}}{2N}\left(\mathrm{GOE}_M \otimes \mathbb{1}_M + \mathbb{1}_M \otimes \mathrm{GOE}_M\right).$$

对于 $N - M = \mathcal{O}(1)$，用高斯正交系综近似 Wishart矩阵不再成立。因此，为了刻画部分简并情形与完全简并情形之间的跃迁，需要使用完整模型

$$\hat{\mathcal{L}}_3 \approx -\frac{M}{N}\mathbb{1} - \frac{N-M}{2N}\left(\mathrm{Wish}_{M,M(N-M)} \otimes \mathbb{1}_M + \mathbb{1}_M \otimes \mathrm{Wish}_{M,M(N-M)}\right) + \frac{1}{N}\hat{\mathcal{L}}'_{\mathrm{mm}}. \tag{81}$$

情形（*v*）。第一部分是 Kolmogorov 生成元的截断，其元素的生成方式与第 5.2 节相同，但只取大小为 $N - M$ 的左下块。考虑到这一点，经过缩放和平移后，随机矩阵模型在定性上相同，写作

$$\widetilde{\hat{\mathcal{K}}} \approx -\frac{N-M}{N}\mathbb{1}_{N-M} + \frac{\sqrt{N-M}}{N}\left(\mathrm{GOE}_{N-M} + \mathrm{Gauss}_{N-M}\right).$$

如前所述， t_a 服从$\frac{1}{2MN}\chi^2_{2M^2}$的分布，可用均值为$\frac{M}{N}$、方差为 $1/N^2$的正态分布近似。对于 $M \ll N$，与上文的 $\frac{N-M}{N^2}$ 相比，其涨落可以忽略，因此含有 t_a 的项可以近似为 $\frac{M}{N}\mathbb{1}$，于是

$$\hat{\mathcal{L}}_4 \approx -\mathbb{1}_{N-M} + \frac{\sqrt{N-M}}{N}\left(\mathrm{GOE}_{N-M} + \mathrm{Gauss}_{N-M}\right). \tag{82}$$

参考文献

[1] N. G. van Kampen，《物理与化学中的随机过程》，North Holland，阿姆斯特丹，2007。

[2] V. Gorini、A. Kossakowski、E. C. G. Sudarshan，N 能级系统的完全正动力半群，《数学物理杂志》**17**，821（1976）。

[3] G. Lindblad，量子动力半群的生成元，《数学物理通讯》**48**，119（1976）。

[4] D. Chru´sci´nski 和 S. Pascazio，GKLS 方程简史，《开放系统与信息动力学》**24**，1740001（2017）。

[5] R. Alicki，关于非哈密顿系统的细致平衡条件，《数学物理报告》**10**，249（1976）。

[6] V. Gorini、A.Frigerio、M.Verri、A.Kossakowski 和E.C.G.Sudarshan，量子马尔可夫主方程的性质，《数学物理报告》**13**，149（1978）。

[7] A. Kossakowski、A. Frigerio、V. Gorini 和 M. Verri，《量子细致平衡与 KMS 条件》，《数学物理通讯》**57**,97 (1977)。

[8] W.A.Majewski和R. F. Streater，细致平衡与量子动力学映射，《物理学杂志 A：数学与一般》 **31**,7981（1998）。

[9] J.L.Lebowitz andH.Spohn，弱耦合于热库的量子系统的不可逆热力学。《化学物理进展》 **38**，109（1978）。

[10] E. B. Davies，马尔可夫主方程，《数学物理通讯》**39**，91（1974）

[11] E. B. Davies，《马尔可夫主方程》II，《数学年刊》**219**，147（1976）

[12] E. B. Davies，《马尔可夫主方程》。III，Ann. Inst. Henri Poinca´e **11**，265（1975）

[13] H.-P. Breuer 和 F.Petruccione，《开放量子系统理论》，牛津大学出版社，牛津，2007年。[14] A. Rivas和S. F.Huelga，《开放量子系统：导论》（施普林格，海德堡，2011年）。[15] E.B. Davies，《开放量子系统》，伦敦，学术出版社（1976年）。[16] R.Alicki和 K.Lendi，《量子动力半群及其应用》（施普林格，柏林，1987年）；第二版，柏林，1991年[17] W.Roga、M.Fannes 和 K. Zyczkowski，量子比特和量子三能级系统的 Davies 映射，《数学物理报告》66，311（2010年）。[18] J. Goold、M. Huber、A.Riera、R.Arnau、L. de Rio、P.Skrzypczyk，量子信息在热力学中的作用——专题综述。《物理学杂志 A：数学与理论》49（14）：143001。[19] F.Binder、L. A.Correa、C.Gogolin、J.Anders和G.Adesso，《量子领域中的热力学》。物理学基础理论（施普林格，2018年）。[20] R. Kosloff，量子热力学：动力学视角，《熵》15，2100（2013年）。[21] R. Kosloff，量子热力学与开放系统建模，《化学物理学杂志》150，20（2019年）。[22] G. T. Landi 和 M. Paternostro，不可逆熵产生：从经典到量子，《现代物理评论》93，035008（2021年）。[23] P. Strasberg、G. Schaller、T.Brandes和 M. Esposito，量子与信息热力学：基于重复相互作用的统一框架，《物理评论 X》7，021003（2017年）。[24] P.Strasberg和 A. Winter，量子热力学第一定律与第二定律：基于熵的微观定义的一致推导，《PRX量子》2，030202（2021年）。[25] D.Chru´sci´nski、G. Kimura、A.Kossakowski和 Y.Shishido，量子动力半群弛豫速率的普适约束，《物理评论快报》127，050401（2021年）。[26] D. Chru´sci´nski，超越马尔可夫区间的动力映射。《物理报告》992，1（2022年）。[27] S. Denisov、T. Laptyeva、W. Tarnowski、D.Chru´sci´nski和K.Zyczkowski，随机 Lindblad 算符的普适谱，《物理评论快报》123，140403（2019年）。[28] W. Tarnowski、I.Yusipov、T. Laptyeva、S. Denisov、D.Chru´sci´nski和K.Zyczkowski，马尔可夫演化的随机生成元：由超退相干导致的量子—经典转变，《物理评论E》104，034118（2021年）。[29] T. Can、V. Oganesyan、D.Orgad和S. Gopalakrishnan，随机量子主方程中的谱隙与中隙态，《物理评论快报》123，234103（2019年）。[30] L. S´a、P.Ribeiro和 T. Prosen，随机刘维尔算符的谱与稳态性质，《物理学杂志A：数学与理论》53，305303（2020年）。[31] K. Wang、F. Piazza和 D.J.Luitz，局域随机刘维尔算符中的弛豫时间尺度层级，《物理评论快报》124，100604（2020年）。[32] L. S´a、P. Ribeiro、T. Can和T.Prosen，随机Kraus 映射和量子线路中的谱转变与普适稳态，《物理评论 B》102，134310（2020年）。[33] M. L.Mehta，《随机矩阵》，第3版（爱思唯尔，阿姆斯特丹，2004年）。[34] T. Guhr、A. Mueller-GRoeling和 H.A.Weidenmueller，量子物理学中的随机矩阵理论：共同概念，《物理报告》299，189（1998年）。[35] 专题：随机矩阵理论，《物理学杂志 A：数学与普通物理》36（2003年）。[36] F.Haake，《量子混沌特征》，第1版（施普林格，柏林，1991年）。[37] F. Haake、S. Gnutzmann和M. Ku´s，《量子混沌特征》，第4版（施普林格，柏林，2018年）。[38] H.-J. St¨ockmann，《量子混沌：导论》（剑桥大学出版社，剑桥，英国，1999年）。[39] D.Braun，《耗散量子混沌与退相干》（施普林格现代物理学丛书，柏林，2001年）

[40] H.Schomerus, 《开放量子系统的随机矩阵方法》, 《随机过程与随机矩阵》, 预印本 arXiv:1610.05816 及莱斯乌什暑期学校讲义（2015）。[41] V. L.Girko, 《圆律》, Teor.Veroyat. Prim.29, 669（1984）。[42] W. Bruzda、V. Cappellini、H.-J. Sommers 和 K. Zyczkowski, 《随机量子操作》, Phys. Lett. A 373, 320-324（2009）。[43] R. Kukulski、I.Nechita、 L.Pawela、Z. Puchała 和 K. Zyczkowski, 《生成随机量子信道》, J.Math. Phys. 62,062201（2021）。[44] C. Bordenave、P. Caputo 和 D. Chafai, 《稀疏随机图上马尔可夫生成元的谱》, Comm. Pure and Appl. Math.67, 4621（2014）。[45] C.Timm, 《主方程的随机转移速率矩阵》, 《物理评论 E》80,021140（2009）。[46] G. Chiribella、G. M. D'Ariano 和 P. Perinotti, 《变换量子操作：量子超映射》, Europhys. Lett. 83, 30004（2008）[47] K. Zyczkowski, 《四次量子理论：标准量子力学的扩展》, J. Phys. A 41, 355302-23pp（2008）。[48] G. Gour, 《通过超信道比较量子信道》, 预印本 arXiv:1808.02607[49] K. Korzekwa、S. Czachórski、Z. Puchała 和 K. Zyczkowski, 《量子信道相干化》, 新物理学杂志 20, 043028-26（2018）。[50] Z. Puchała、K. Korzekwa、R. Salazar、P. Horodecki、K. Zyczkowski, 《退相位超信道》, 《物理评论 A》104, 052611（2021）。[51] L. A. Pastur, 《关于随机矩阵的谱》, Theoretical and Mathematical Physics 10, 67-74（1972）。[52] F. Fagnola 和 V. Umanitá, 《细致平衡量子马尔可夫半群的生成元》, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 10, 335（2007）。[53] F. Fagnola 和 V. Umanitá, 《细致平衡、时间反演与量子马尔可夫半群的生成元》, Mathematical Notes 84, 108（2008）。[54] E. A. Carlen 和 J. Maas, 《具有细致平衡的量子马尔可夫半群的梯度流与熵不等式》, Jour. Func. Analysis, 273 1810（2017）。[55] M. Vernooij、M. Wirth, 《导子与 KMS 对称量子马尔可夫半群》, arXiv:2303.15949。[56] T. Tao、V. Vu 和 M. Krishnapur, 《随机矩阵：经验谱分布的普适性与圆律》, Ann. Probabil. 38, 2023（2010）。[57] D. V. Voiculescu, 《某些非对易随机变量的加法》, J. Funct. Anal. 66, 323 -346（1986）。[58] D. V. Voiculescu、K. J. Dykema 和 A. Nica, 《自由随机变量》, 美国数学会, （1992）。[59] J. A. Mingo 和 R. Speicher, 《自由概率与随机矩阵》（施普林格，2017）。[60] K. Zyczkowski、K. A. Penson、I. Nechita 和 B. Collins, 《生成随机密度矩阵》, J. Math. Phys. 52, 062201（2011年）。[61] W. Tarnowski 等, 《随机马尔可夫生成元的立方》, 准备中，2023。[62] J. Ginibre, 《复矩阵、四元数矩阵和实矩阵的统计系综》, J. Math. Phys. 6, 440（1965）。[63] P. J. Forrester, 《对数气体与随机矩阵》（普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2010）。[64] N. Lehmann 和 H.-J. Sommers, 《随机实矩阵的特征值统计》, 《物理评论快报》67, 941（1991）。[65] G. Akemann 和 E. Kanzieper, 《实随机矩阵 Ginibre 系综的可积结构与 Pfaffian 积分定理》, J. Stat. Phys. 129, 1159（2007）。[66] P. J. Forrester 和 T. Nagao, 《实 Ginibre 系综的特征值统计》, 《物理评论快报》99, 050603（2007）。

[67] M.L. Mehta，《随机矩阵》（爱思唯尔，2004年）。

[68] V. A. Marchenko 和 L.A. Pastur，某些随机矩阵集合的特征值分布，《数学文集》114 (4) 507-536（1967年）。

[69] L.A.Pastur 和M. Shcherbina，大型随机矩阵的特征值分布（第171号）。美国数学学会（2011年）。