带有概率干预主义反事实的逻辑的强完备公理化

Fausto Barbero[1] , Jonni Virtema[2]
[1]赫尔辛基大学[2]谢菲尔德大学
fausto.barbero@helsinki.fi,
j.t.virtema@sheffield.ac.uk

arXiv:2304.02964v1 [cs.LO] 6 Apr 2023

摘要

因果多团队语义是一种框架，可在统一的环境中研究概率概念和因果推断。我们研究一种逻辑（$\mathcal{PCO}$），它包含边缘概率和干预主义反事实，并允许表达条件概率陈述、do表达式，以及其他因果推理与概率推理的混合形式。我们的主要贡献是为$\mathcal{PCO}$建立了一套强完备的无穷公理化。

1 引言

在因果推断领域（Pearl，2000；Spirtes 等，1993），人们已经习惯于用所谓的干预主义反事实来表达许多因果概念。最简单的形式是这样的表达：

如果将变量 $X_1, \ldots, X_n$ 固定为取值 $x_1, \ldots, x_n$，那么变量 Y 将取值 y

其中，前件描述了对给定系统进行某种“干预”。在实践中，因果推断领域关注的是估计事件概率。文献中出现了各种各样的因果概率表达式（do表达式、条件do表达式，以及J. Pearl所称的“反事实”）。这类表达式都涉及干预后情景中的概率，但它们在是否涉及概率条件化，以及条件化所依据的是干预前情景中的事件还是干预后情景中的事件方面有所不同。（Barbero和 Sandu，2019）提出，可以用三个更简单的成分来分解这类表达式：边缘概率、干预反事实和选择蕴涵。选择蕴涵描述获取新信息的效果，而干预反事实描述行动的效果。这三个算子可以在一个共同的语义框架中进行研究，该框架称为因果多团队语义。该框架在非概率语境中就已经具有意义，并且已从语义和证明论视角进行了研究（Barbero和 Sandu，2021；Barbero 和 Yang，2022；Barbero和 Galliani，2022）。这些证明论结果依赖于一系列更早的工作（（Galles 和 Pearl，1998；Halpern，2000；Briggs，2012）），这些工作研究了针对在结构方程模型（因果多团队是其一种推广）上求值的（非概率性）反事实的证明系统。在概率情形下，一些语义方向的研究即将发表（Barbero 和 Sandu，2023；Barbero 和 Virtema，2023）。本文首次探讨这些论文中所考虑的概率反事实语言的证明论问题。据我们所知，文献中仅有一个针对概率干预主义反事实的演绎系统提案（Ibeling 和 Icard，2020）。(Ibeling 和 Icard，2020) 所考虑的语言在许多方面都不同于我们关注的语言；它的表达能力更强，因为允许使用算术运算（概率和标量的求和与乘积）；但表达能力也更弱，因为它不允许反事实嵌套（迭代干预），也没有明显的方式来描述干预与条件化之间的复杂交互，例如同时以干预前和干预后的情景为条件，或以两个干预之间某个中间阶段成立的状态为条件。

概率逻辑的公理化向来是个极其棘手的问题。只要一种语言能够表达形如 $\Pr(\alpha) \leq \varrho$（其中 ϱ 为有理数）的不等式，它就不是紧致的。例如，形如 $\Pr(\alpha) \leq \frac{1}{n}$（n 为自然数）的公式集合蕴涵 $\Pr(\alpha) = 0$，但没有任何有限子集能够得出同样的结论。因此，任何通常的有限演绎系统都不可能对这类语言具有强完备性。解决这一问题的一种可能方法，是采用弱完备的演绎系统，即能够捕捉从有限公式集出发的所有正确推理。对于多种包含算术运算的概率语言，这一点已经实现（例如 Fagin 等人，1990）。前文提到的概率干预主义反事实结果（Ibeling 和 Icard，2020）正是这一传统下的弱完备性结果。要证明不含算术运算的概率语言具有弱完备性，似乎更加困难；在相关文献中，我们只找到一项此类结果（Heifetz 和 Mongin，2001）。遗憾的是，Heifetz 和 Mongin（2001）的完备性证明依赖一种模型构造方法，而该方法似乎不适用于能够表达条件概率的语言；

因此，无法以任何直接明了的方式将其应用于我们的情况。

另一个我们所采取的路径，是通过使用带有某种无穷资源的演绎系统来追求强完备性，以应对紧致性的失败。事实证明，使用无穷演绎规则（带有可数多个前提）非常富有成效，并且已经为大量概率语言导出了强完备性定理（参见（Ognjanovi´c 等，2016））。我们尤其感兴趣的是（Ra˘skovi´c 等，2004），其中为一种带有条件概率的语言获得了强完备性；以及（Ognjanovi´c 等，2008），其中为“定性概率”获得了强完备性（即，对于诸如 $\Pr(\alpha) \leq \Pr(\beta)$ 这样的表达式）。我们以这些工作为基础，为 $\mathcal{PCO}$ 用于（Barbero 和 Sandu，2023；Barbero 和 Virtema，2023）中的概率因果语言建立一个强完备的演绎系统（带有两条无穷规则）。证明通过一个典范模型构造展开，该构造依赖于 Lindenbaum 引理的超限版本。尽管证明基本上遵循（Ra˘skovi´c 等，2004）的方案，但由于存在额外算子（反事实和比较原子），它自身也面临着特殊的困难。

2 预备知识

2.1 基本记号

大写字母 X、Y、……表示变量（被认为代表“温度”“体积”等特定量），其取值用小写字母表示（例如，变量 X 的取值将表示为 x、x′、……）。变量和取值的集合（以及元组，具体取决于上下文）用粗体字母表示，例如 X 和 x。我们考虑由有限（多重）集合的计数测度产生的概率。对于有限集合 $S \subseteq T$，我们定义 $P_T(S) := \frac{|S|}{|T|}$。

2.2 多团队和因果多团队

签名是一个二元组 (Dom, Ran)，其中 Dom 是一个非空有限的变量集合，而 Ran 是一个函数，它将每个变量 $X \in \text{Dom}$ 关联到一个非空有限的取值集合 Ran(X)（X 的取值范围）。在整篇论文中，我们固定 Dom 的一个排序，并用 W 表示按该顺序列出的 Dom 中所有变量组成的元组。此外，我们用 W_X 表示 Dom \ {X} 中按固定顺序列出的变量。给定一个变量元组 $X = (X_1, \ldots, X_n)$，我们将 Ran(X) 表示为笛卡尔积 $\text{Ran}(X_1) \times \cdots \times \text{Ran}(X_n)$。签名 σ 的一个赋值是映射 $s : \text{Dom} \to \bigcup_{X \in \text{Dom}} \text{Ran}(X)$，满足对于每个 $X \in \text{Dom}$，都有 $s(X) \in \text{Ran}(X)$。签名 σ 的所有赋值的集合记为 $\mathbb{B}_\sigma$。给定一个定义域包含 X 中变量的赋值 s，s(X) 表示元组 $(s(X_1), \ldots, s(X_n))$。对于 $X \subseteq \text{Dom}$，$s{\restriction}_X$ 表示 s 在 X 中变量上的限制。

签名为 σ 的团队 T 是 $\mathbb{B}_\sigma$ 的子集。直观而言，多重团队就是团队的多重集类比。我们将多重团队表示为（有限）赋值集，并附加一个变量键（不属于签名），其取值范围为 $\mathbb{N}$，且在不同赋值中取不同的值

团队的，并且从未在形式语言中提及。多重团队可以表示为一张表，其中每一行代表一个赋值。例如，如果 Dom = {X,Y,Z}，一个多重团队可能如下所示：

Key	X	Y	Z
0	x	y	z
1	x'	y'	z'
2	x'	y'	z'

多团队本身并不编码任何明确的因果关系概念；它们没有告诉我们，一个系统将如何受到干预的影响。因此，我们需要为多团队增添额外的结构。

定义 2.1。设 T 是一个签名为 (Dom(T), Ran(T))、具有内生变量 $V \subseteq \text{Dom}(T)$ 的因果多团队，则 $T = (T^-, \mathcal{F})$ 是一个二元组，其中

1. T^- 是一个定义域为 Dom(T) 的多团队，并且
2. $\mathcal{F}$ 是一个函数 $\{(V, \mathcal{F}_V) \mid V \in V\}$，它为每个内生变量 V 指派一个非常数 $|W_V|$元函数 $\mathcal{F}_V : \text{Ran}(W_V) \to \text{Ran}(V)$，该函数满足以下进一步的相容性约束：

$$\mathcal{F}_V(s(\mathbf{W}_V)) = s(V), \textit{ for all } s \in T^-.$$

我们还将用 End(T) 表示 T 的内生变量集合。

函数 $\mathcal{F}$ 诱导出一个结构方程系统；一个方程

$$V := \mathcal{F}_V(\mathbf{W}_V)$$

对于每个变量 $V \in \text{End}(T)$。结构方程说明，如果 W_V 中的某些变量的值发生改变，V 的值应如何重新计算。请注意，W_V 中的某些变量在计算 V 时可能并非必需。例如，如果 V 由结构方程 V :=X + 1给出，那么 $W_V \setminus \{X\}$ 中的所有变量都无关紧要（我们称它们为 $\mathcal{F}_V$的虚设自变量）。$\mathcal{F}_V$ 的非虚设自变量集合记作 PA_V（即 V 的父节点集合）。

我们为每个因果多团队 T 关联一个因果图 G_T，其顶点是 Dom 中的变量；对于每个满足 $V \in \text{End}(T)$ 的变量 V，都从 PA_V 中的每个变量向 V 画一条有向边。Dom(T) \ End(T) 中的变量称为外生变量。

定义 2.2。若因果多团队 $S = (S^-, \mathcal{F}_S)$ 与 $T = (T^-, \mathcal{F}_T)$ 具有相同的签名，$S^- \subseteq T^-$，且 $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_T$，则 S 是 T 的因果子多团队。我们将此记作 $S \leq T$。

我们将因果多团队视为动态模型，它们可能受到各种操作的影响——具体而言，受到观察和干预的影响。给定一个因果多团队 $T = (T^-, \mathcal{F})$，以及某种形式语言的公式 α（根据某种语义关系 $\models$ 在赋值上进行求值），“观察 α”会生成 T 的因果子多团队 $T^\alpha = ((T^\alpha)^-, \mathcal{F})$，其中

$$(T^\alpha)^- := \{s \in T^- \mid (\{s\}, \mathcal{F}) \models \alpha\}.$$

对 T 进行干预通常不会产生 T 的子多重团队，而是会修改 T 的某些列中出现的取值。我们考虑干预。

由形如 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{X}_n = \mathbf{x}_n$（或简写为 $\mathbf{X} = \mathbf{x}$）的公式描述。如果存在两个索引 i、j，使得 $\mathbf{X}_i$ 和 $\mathbf{X}_j$ 表示同一个变量，而 $\mathbf{x}_i$ 和 $\mathbf{x}_j$ 表示不同的取值，则该公式不一致；否则，该公式一致。

对因果多团队 $\mathbf{T} = (T^-, \mathcal{F})$ 应用干预 $\mathbf{do}(\mathbf{X} = \mathbf{x})$，其中 $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ 是一致的，将产生一个因果多团队 $\mathbf{T}_{\mathbf{X}=\mathbf{x}} = (T^-_{\mathbf{X}=\mathbf{x}}, \mathcal{F}_{\mathbf{X}=\mathbf{x}})$，其中函数分量为 $\mathcal{F}_{\mathbf{X}=\mathbf{x}} := \mathcal{F}_{\restriction(\mathbf{V}\setminus\mathbf{X})}$（$\mathcal{F}$ 到变量集合 $\mathbf{V}\setminus\mathbf{X}$ 的限制），多重团队分量为 $T^-_{\mathbf{X}=\mathbf{x}} := \{s^{\mathcal{F}}_{\mathbf{X}=\mathbf{x}} \mid s \in T^-\}$，其中每个 $s^{\mathcal{F}}_{\mathbf{X}=\mathbf{x}}$ 都是与 $\mathcal{F}_{\mathbf{X}=\mathbf{x}}$ 兼容的唯一赋值，定义（递归地）为

$$s^{\mathcal{F}}_{\mathbf{X}=\mathbf{x}}(V) = \begin{cases} x_i & \text{if } V = X_i \in \mathbf{X} \\ s(V) & \text{if } V \in Exo(T) \setminus \mathbf{X} \\ \mathcal{F}_V(s^{\mathcal{F}}_{\mathbf{X}=\mathbf{x}}(\mathrm{PA}_V)) & \text{if } V \in End(T) \setminus \mathbf{X}. \end{cases}$$

例2.1. 考虑以下表：

T^-:

键 X	$\rightarrow Y \rightarrow Z$		
0	*0*	*1*	*0*
1	*1*	*2*	*2*
2	*1*	*2*	*2*
3	*2*	*3*	*6*

其中，每一行代表一个赋值（例如，第四行代表赋值 s，其中 $s(\text{键}) = 3$、$s(X) = 2$、$s(Y) = 3$、$s(Z) = 6$）。进一步假设，变量 Z 由函数 $\mathcal{F}_Z(X, Y) = X \times Y$ 生成，Y 由 $\mathcal{F}_Y(X) = X + 1$ 生成，而 X 是外生的。表中的各行与这些规律相容，因此这是一个因果多团队（称为 T）。它编码了许多概率；例如，$P_T(Z = 2) = \frac{1}{2}$。假设我们有办法强制变量 Y 取值 1。我们通过重新计算 Y 列，然后重新计算 Z 列，来表示这种干预（$\mathbf{do}(Y = 1)$）的效果：

键 X Y	$\rightarrow Z$	
0	*0*	***1***	…
1	*1*	***1***	…
2	*1*	***1***	…
3	*2*	***1***	…

$\rightsquigarrow \quad T^-_{Y=1}$:

键 X	$Y \rightarrow Z$		
0	*0*	*1*	***0***
1	*1*	*1*	***1***
2	*1*	*1*	***1***
3	*2*	*1*	***2***

其中，Z 的新值在每一行中都按 X 的值与 Y 的（新）值的乘积计算。概率分布发生了变化：现在 $P_{T_{Y=1}}(Z = 2)$ 是 $\frac{1}{4}$。此外，函数 $\mathcal{F}_Y$ 现在从 $T_{Y=1}$ 中省略了（否则这些赋值将不再与规律兼容）。相应地，因果图中从 X 指向 Y 的箭头也被省略了。

2.3 语言 *CO*

语言 *CO* 用于描述事件；稍后我们会将其纳入一种用于讨论 *CO* 公式概率的语言。对于任意固定的签名，*CO* 的公式由以下巴科斯-诺尔范式文法定义：

$$\alpha ::= Y = y \mid Y \neq y \mid \alpha \wedge \alpha \mid \alpha \supset \alpha \mid \mathbf{X} = \mathbf{x} \boxdot\!\!\rightarrow \alpha,$$

其中 $\mathbf{X} \cup \{Y\} \subseteq \mathbf{Dom}$，$y \in \mathrm{Ran}(Y)$，且 $\mathbf{x} \in \mathrm{Ran}(\mathbf{X})$。形如 $Y = y$ 和 $Y \neq y$ 的公式称为文字。*CO* 的语义由以下条款给出：

$T \models Y = y$	iff	$s(Y) = y$ for all $s \in T^-$.
$T \models Y \neq y$	iff	$s(Y) \neq y$ for all $s \in T^-$.
$T \models \alpha \wedge \beta$	iff	$T \models \alpha$ and $T \models \beta$.
$T \models \alpha \supset \beta$	iff	$T^\alpha \models \beta$.
$T \models \mathbf{X} = \mathbf{x} \boxdot\!\!\rightarrow \psi$	iff	$T_{\mathbf{X}=\mathbf{x}} \models \psi$ or $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ is inconsistent.

我们将保留字母 α、β 来表示 *CO* 公式。

我们可以根据需要引入更多逻辑算子作为有用的缩写。$\top$ 表示 $\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxdot\!\!\rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{x}$，and $\bot$ 表示 $\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxdot\!\!\rightarrow \mathbf{X}, \mathbf{x}$。$\neg\alpha$（对偶否定）表示 $\alpha \supset \bot$。这不是经典（矛盾）否定；很容易看出，其语义为：

- $(T^-, \mathcal{F}) \models \neg\alpha$ iff, for every $s \in T^-$, $(\{s\}, \mathcal{F}) \not\models \alpha$.

因此，一般而言，并非 $\mathbf{T} \models \alpha$ 或 $\mathbf{T} \models \neg\alpha$。注意，$\mathbf{X},\mathbf{x}$ 在语义上等价于 $\neg(\mathbf{X} = \mathbf{x})$，而 $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ 在语义上等价于 $\neg(\mathbf{X}, \mathbf{x})$。在之前的工作中，$\vee$（张量析取）被视为一个原始算-子，但在此我们将 $\alpha \vee \beta$ 定义为 $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$。其语义子句可以描述如下：

- $T \models \alpha \vee \beta$ iff there are $T_1, T_2 \leq T$ s.t. $T_1^- \cup T_2^- = T^-$, $T_1 \models \alpha$ and $T_2 \models \beta$.

与上述表述不同，公式 $\alpha \vee \neg\alpha$ 有效。此外，$\alpha \equiv \beta$ 是 $(\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha)$ 的缩写。请注意，该公式并不是说 α 和 β 在逻辑上等价，而只是说，在当前特定的因果多团队中，它们由相同的赋值满足。

此处讨论的所有算子（基本算子和定义算子）在恰好包含一个赋值的因果多团队上都以经典方式运作。

因果多团队 $(\mathbf{T}^-, \mathcal{F})$ 在多团队 $\mathbf{T}^-$ 为空（相应地，非空）时为空。本文所考虑的所有逻辑 $\mathcal{L}$ 都具有空团队性质：如果 T 为空，那么对于任意 $\alpha \in \mathcal{L}$（以及具有相同签名的任意 $\mathcal{F}$），$\mathbf{T} \models \alpha$。此外，*CO* 是平坦的：$(\mathbf{T}^-, \mathcal{F}) \models \alpha$ 当且仅当，对于所有 $s \in \mathbf{T}^-$，$(\{s\}, \mathcal{F}) \models \alpha$。

2.4 语言 $\mathcal{PCO}$

我们的主要研究对象是概率语言 $\mathcal{PCO}$。除文字外，它还包含概率原子：

$$\Pr(\alpha) \geq \epsilon \mid \Pr(\alpha) > \epsilon \mid \Pr(\alpha) \geq \Pr(\beta) \mid \Pr(\alpha) > \Pr(\beta)$$

其中 α、$\beta \in CO$ 和 $\varrho \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$。前两者称为求值原子，后两者称为比较原子。概率原子与 *CO* 的文字统称为原子公式。概率语言 $\mathcal{PCO}$ 的定义如下：

$$\varphi ::= \eta \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \sqcup \varphi \mid \alpha \supset \varphi \mid \mathbf{X} = \mathbf{x} \boxdot\!\!\rightarrow \varphi,$$

其中 $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Dom}$，$\mathbf{x} \in \mathrm{Ran}(\mathbf{X})$，$\eta$ 是原子公式，而 α 是一个 *CO* 公式。请注意，$\supset$ 的前件和概率算子的论元都是 *CO* 公式。语义。

附加算子如下所示：

$$
\begin{array}{lll}
T \models \psi \sqcup \chi & \text{iff} & T \models \psi \text{ or } T \models \chi \\
T \models \Pr(\alpha) \rhd \epsilon & \text{iff} & T^- = \emptyset \text{ or } P_T(\alpha) \rhd \epsilon \\
T \models \Pr(\alpha) \rhd \Pr(\beta) & \text{iff} & T^- = \emptyset \text{ or } P_T(\alpha) \rhd P_T(\beta)
\end{array}
$$

其中，$\rhd \in \{\geq, >\}$和 $\mathrm{P}_T(\alpha)$ 是 P_T-$((\mathrm{T}^{\alpha})^-)$ 的简写。

通常，对于一组公式 Γ，如果T满足 Γ中的每个公式，我们记作$\mathrm{T} \models \Gamma$。对于 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{PCO}$，如果 $\mathrm{T} \models \Gamma$ 蕴含$\mathrm{T} \models \varphi$，对于所有签名为 σ的因果团队T，我们记作 $\Gamma \models_\sigma \varphi$。$\models_\sigma \varphi$ 是 $\emptyset \models_\sigma \varphi$ 的缩写。我们始终假设某个签名是固定的，并省略下标。

语言 $\mathcal{PCO}$ 仍然具有空团队性质，但它并非平坦的。[1]

缩写 $\top$、$\bot$ 可以在 $\mathcal{PCO}$中自由使用，而$\neg$、$\vee$ 和 $\equiv$ 只能应用于 $\mathcal{CO}$ 论证。$\mathcal{CO}$ 中双重否定的可定义性使我们能够引入更有用的缩写：

$$
\begin{aligned}
\Pr(\alpha) \leq \epsilon &:= \Pr(\neg\alpha) \geq 1 - \epsilon \\
\Pr(\alpha) < \epsilon &:= \Pr(\neg\alpha) > 1 - \epsilon \\
\Pr(\alpha) = \epsilon &:= \Pr(\alpha) \geq \epsilon \wedge \Pr(\alpha) \leq \epsilon \\
\Pr(\alpha) \neq \epsilon &:= \Pr(\alpha) > \epsilon \sqcup \Pr(\alpha) < \epsilon.
\end{aligned}
$$

此外，$\supset$概率算子使我们能够表达一些涉及条件概率的陈述，定义如下（其中 $\rhd \in \{\geq, >\}$）：

$$
\begin{aligned}
&T \models \Pr(\alpha \mid \gamma) \rhd \epsilon && \text{iff } (T^{\gamma})^- = \emptyset \text{ or } P_{T^{\gamma}}(\alpha) \rhd \epsilon. \\
&T \models \Pr(\alpha \mid \gamma) \rhd \Pr(\beta \mid \gamma) && \text{iff } (T^{\gamma})^- = \emptyset \text{ or } P_{T^{\gamma}}(\alpha) \rhd P_{T^{\gamma}}(\beta).
\end{aligned}
$$

Barbero 和 Sandu（2023）指出，$\Pr(\alpha \mid \gamma) \rhd \varrho$ 和 $\Pr(\alpha \mid \gamma) \rhd \Pr(\beta \mid \gamma)$ 分别可以由$\gamma \supset \Pr(\alpha) \rhd \varrho$ 和 $\gamma \supset \Pr(\alpha) \rhd \Pr(\beta)$ 定义。

公式 φ 的弱矛盾否定 φ^C 可在 $\mathcal{PCO}$中归纳定义；这是一个算子，其行为与矛盾否定完全相同，但在空因果多团队上除外。我们将列出定义子句，以及对已定义公式进行否定所产生的取值。

- $(\Pr(\alpha) \geq \varrho)^C$ 就是 $\Pr(\alpha) < \varrho$（反之亦然）
- $(\Pr(\alpha) > \varrho)^C$ 就是 $\Pr(\alpha) \leq \varrho$（反之亦然）
- $(\Pr(\alpha) = \varrho)^C$ 就是 $\Pr(\alpha) , \varrho$（反之亦然）
- $(\text{概率算子}(\alpha) \geq \text{概率算子}(\beta))^C$ 是 $\text{概率算子}(\beta) > \text{概率算子}(\alpha)$（反之亦然）
- $(\bot)^C$ 是 $\top$（反之亦然）
- $(\mathrm{X} = \mathrm{x})^C$ 是 $\text{概率算子}(\mathrm{X} = \mathrm{x}) < 1$
- $(\mathrm{X} , \mathrm{x})^C$ 是 $\text{概率算子}(\mathrm{X} , \mathrm{x}) < 1$
- $(\psi \wedge \chi)^C$是 $\psi^C \sqcup \chi^C$
- $(\psi \sqcup \chi)^C$ 是 $\psi^C \wedge \chi^C$
- $(\alpha \supset \chi)^C$ 是 $\text{概率算子}(\alpha) > 0 \wedge \alpha \supset \chi^C$
- $(\mathrm{X} = \mathrm{x} \ \square\!\!\rightarrow \chi)^C$ 是 $\mathrm{X} = \mathrm{x} \ \square\!\!\rightarrow \chi^C$。

[1]它还缺乏团队语义学文献中所考察的较弱性质，例如向下封闭性和并集封闭性。

在 $\supset$的子句中，添加合取项 $\text{概率算子}(\alpha) > 0$（其直观解释是“如果T非空，那么 T^{α} 非空”），以确保在（T 非空且）T^{α} 为空的情况下，$(\alpha \supset \chi)^C$ 不会被 T 满足。[2]

我们强调，由于 $\mathcal{CO}$ 公式是 $\mathcal{PCO}$ 公式，因此也可以对它们应用弱矛盾否定；然而，$\mathcal{CO}$ 公式的矛盾否定通常本身并不是 $\mathcal{CO}$ 公式。弱矛盾否定的含义如下。

定理2.2。对于每个 $\varphi \in \mathcal{PCO}_\sigma$ 和非空因果多团队 $\mathrm{T} = (\mathrm{T}^-, \mathcal{F})$，其签名为 σ，$\mathrm{T} \models \varphi^C \Leftrightarrow \mathrm{T} \not\models \varphi$。

证明。证明通过对公式 φ的结构进行归纳法展开。我们展示 $\supset$的唯一非平凡情形。

假设 $\mathrm{T} \models \text{概率算子}(\alpha) > 0 \wedge \alpha \supset \chi^C$。因此 $\mathrm{T}^{\alpha} \models \chi^C$。由于T 非空且$\mathrm{T} \models \text{概率算子}(\alpha) > 0$，我们得出 T^{α} 也非空。现在对 χ 应用归纳法假设，我们得到 $\mathrm{T}^{\alpha} \not\models \chi$。因此，$\mathrm{T} \not\models \alpha \supset \chi$。

对于逆命题，假设 $\mathrm{T} \not\models \alpha \supset \chi$。那么 $\mathrm{T}^{\alpha} \not\models \chi$，这（根据空团队性质）意味着 T^{α} 非空，因此 $\mathrm{T} \models \text{概率算子}(\alpha) > 0$。此外，将归纳法假设应用于 χ 可得 $\mathrm{T}^{\alpha} \models \chi^C$，因此 $\mathrm{T} \models \alpha \supset \chi^C$。 □

利用弱矛盾否定，我们可以定义一个行为完全类似于实质条件句的运算符：

- $\psi \rightarrow \chi$ stands for $\psi^C \sqcup \chi$.

事实上，$\mathrm{T} \models \psi \rightarrow \chi$ 当且仅当 T为空，或者$\mathrm{T} \not\models \psi$，或者 $\mathrm{T} \models \chi$。然而，由于 $\mathcal{PCO}$ 具有空多重团队性质，“T为空”蕴含 $\mathrm{T} \models \chi$；因此，对于 $\mathcal{PCO}$，$\rightarrow$ 确实是实质条件句：

- $\psi \rightarrow \chi$ iff $T \not\models \psi$ or $T \models \chi$.

同样，我们令 $\psi \leftrightarrow \chi$ 表示 $(\psi \rightarrow \chi) \wedge (\chi \rightarrow \psi)$。

请注意，即使 α、β 是 $\mathcal{CO}$公式，$\alpha \rightarrow \beta$ 和 $\alpha \supset \beta$ 一般也不等价。例如，考虑一个因果多团队 T，它有两个赋值 $\mathrm{s} = \{(\mathrm{X}, 0), (\mathrm{Y}, 0)\}$ 和 $\mathrm{t} = \{(\mathrm{X}, 1), (\mathrm{Y}, 1)\}$。显然 $\mathrm{T} \models \mathrm{X} = 0 \rightarrow \mathrm{Y} = 1$（因为 $\mathrm{T} \not\models \mathrm{X} = 0$），而 $\mathrm{T} \not\models \mathrm{X} = 0 \supset \mathrm{Y} = 1$（因为 $\mathrm{T}^{X=0} \not\models \mathrm{Y} = 1$）。然而，只要两个公式都属于 $\mathcal{PCO}$（也就是说，只要 $\alpha \in \mathcal{CO}$），从 $\alpha \supset \psi$ 到 $\alpha \rightarrow \psi$ 的蕴涵总是成立。确实，假设 $\mathrm{T} \models \alpha \supset \psi$ 且 $\mathrm{T} \models \alpha$。由前者可得 $\mathrm{T}^{\alpha} \models \psi$。由后者可得 $\mathrm{T} = \mathrm{T}^{\alpha}$。因此，$\mathrm{T} \models \psi$。反方向不能保持真，但能保持有效性：若 $\models \alpha \rightarrow \psi$，则 $\models \alpha \supset \psi$。确实，前者表明，任何满足 α 的因果多团队也满足 ψ。因此，特别地，对任意 T，$\mathrm{T}^{\alpha} \models \psi$，从而 $\mathrm{T} \models \alpha \supset \psi$。

上述类似的考量同样适用于算子对 $\equiv$ 和 $\leftrightarrow$。这些（以及其他）算子对在证明论行为上的进一步差异，由第 3.2 节中提出的公理 T1 和 T2 加以说明。

3 公理系统

我们为 $\mathcal{PCO}$ 提出了一个带有无穷规则的形式演绎系统，并证明该系统对于递归因果多团队是强完备的。我们沿用了

[2]虽然 $\Pr(\alpha) > 0$ 可以替换为 $(\neg\alpha)^C$，但在 $(\mathrm{X} = \mathrm{x})^C$ 和 $(\mathrm{X} , \mathrm{x})^C$ 中使用概率原子似乎是必不可少的。

（Raˇskovi´c 等，2004）的研究思路，他们证明了一个类似结果，适用于含有概率和条件概率的语言。我们的结果进一步纳入了比较原子、反事实以及干预前观测（“Pearl 的反事实”）。

3.1 更多符号说明

部分公理的表述——特别是涉及反事实推理的公理——会用到一些额外的缩写。例如，我们将用 $\mathbf{X}, \mathbf{x}$ 表示析取 $\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{x}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathbf{X}_n, \mathbf{x}_n$。

有一条公理 (C11) 将像 (Halpern，2000) 中那样刻画递归性。为此，我们需要用公式定义原子式 $\mathbf{X} \rightsquigarrow \mathbf{Y}$（“$\mathbf{X}$ 对 $\mathbf{Y}$ 有因果影响”）：

$$\bigvee_{\substack{\mathbf{Z}\subseteq Dom \\ x\neq x'\in \mathrm{Ran}(X) \\ y\neq y'\in \mathrm{Ran}(Y) \\ \mathbf{z}\in \mathrm{Ran}(\mathbf{Z})}} [((\mathbf{Z}=\mathbf{z}\wedge X=x)\boxright Y=y) \wedge((\mathbf{Z}=\mathbf{z}\wedge X=x')\boxright Y=y')].$$

我们还需要一个公式（摘自 (Barbero 和 Sandu，2021)），用于刻画更严格的直接原因概念（当且仅当 $\mathbf{X}\in \mathrm{PA}_Y$ 时，$\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{Y}$ 的直接原因）。该概念可用一个 $\mathcal{PCO}$ 公式 $\varphi_{DC(X,Y)}$ 表示，定义如下：

$$\bigvee_{\substack{x\neq x'\in \mathrm{Ran}(X) \\ y\neq y'\in \mathrm{Ran}(Y) \\ \mathbf{w}\in \mathrm{Ran}(\mathbf{W}_{XY})}} [((\mathbf{W}_{XY}=\mathbf{w}\wedge X=x)\boxright Y=y) \wedge((\mathbf{W}_{XY}=\mathbf{w}\wedge X=x')\boxright Y=y')].$$

其中，$\mathbf{W}_{XY}$ 表示 Dom $\setminus \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$。

第四，某些公理描述外生变量或内生变量的特定性质，这些性质同样可以用 $\mathcal{PCO}$ 刻画。与前面类似，此处 $\mathbf{W}_V$ 表示 Dom $\setminus \{\mathbf{V}\}$。于是，我们可以用以下公式表达变量 $\mathbf{Y}$ 是内生变量这一事实：

$$\varphi_{End(Y)} : \bigsqcup_{X\in \mathbf{W}_Y} \varphi_{DC(X,Y)}$$

其矛盾否定 $(\varphi_{End(Y)})$ 将表达 $\mathbf{Y}$ 是外生的。

最后，对于每个函数分量 $\mathcal{F}$，$\Phi^{\mathcal{F}}$ 是一个公式，用于刻画因果团队具有函数分量 $\mathcal{F}$ 这一事实。具体而言，

$$\Phi^{\mathcal{F}} : \bigwedge_{V\in End(\mathcal{F})} \eta_\sigma(V) \wedge \bigwedge_{V\notin End(\mathcal{F})} \xi_\sigma(V)$$

其中

$$\eta_\sigma(V) : \bigwedge_{\mathbf{w}\in \mathrm{Ran}(\mathbf{W}_V)} (\mathbf{W}_V=\mathbf{w}\boxright V=\mathcal{F}_V(\mathbf{w}))$$

and

$$\xi_\sigma(V) : \bigwedge_{\substack{\mathbf{w}\in \mathrm{Ran}(\mathbf{W}_V) \\ v\in \mathrm{Ran}(V)}} V=v\supset(\mathbf{W}_V=\mathbf{w}\boxright V=v).$$

非空因果多团队 $\mathbb{T}=(\mathbb{T}^-, \mathcal{G})$ 满足 $\Phi^{\mathcal{F}}$ 当且仅当 $\mathcal{G}=\mathcal{F}$。[3]

[3]除了一些无关紧要的差异外，这就是（Barbero 和 Yang，2022）中定理 3.4 的内容，

3.2 公理和规则

我们给出若干用于 $\mathcal{PCO}$ 的公理模式和规则，大致分为六组。每条公理和规则都限定于固定签名 σ 的公式，因此实际上每个签名都有一个独立的公理系统。照例，α 和 β 限定为 $\mathcal{CO}$ 公式。

重言式

T1. 中的所有经典命题重言式实例 $\wedge, \sqcup, \rightarrow, \overset{C}{,}, \top, \bot$.

T2. 在 $\wedge, \sqcup, \rightarrow, \supset, \neg, \top, \bot$ 中的 A C 经典命题重言式实例。

MP 规则。$\dfrac{\psi \quad \psi\rightarrow\chi}{\chi}$

替换规则。$\dfrac{\vdash\varphi \qquad \vdash\theta\leftrightarrow\theta'}{\vdash\varphi[\theta'/\theta]}$（前提是 $\varphi[\theta'/\theta]$ 良构）

概率

P1. $\alpha \leftrightarrow$ 概率算子$(\alpha) = 1$。P2. 概率算子$(\alpha) \geq 0$。P3. (概率算子$(\alpha) = \delta \wedge$概率算子$(\beta) = \varrho \wedge$概率算子$(\alpha\wedge\beta) = 0) \rightarrow$ 概率算子$(\alpha\vee\beta) = \delta+\varrho$（当 $\delta+\varrho \leq 1$时）。P3b. 概率算子$(\alpha) \geq \varrho \wedge$ 概率算子$(\alpha\wedge\beta) = 0 \rightarrow$ 概率算子$(\beta) \leq 1-\varrho$。

P4. 概率算子$(\alpha) \leq \varrho \rightarrow$ 概率算子$(\alpha) < \delta$（如果 $\delta > \varrho$）。

P5. 概率算子$(\alpha) < \varrho \rightarrow$ 概率算子$(\alpha) \leq \varrho$。

P6. 概率算子$(\alpha \equiv \beta) = 1 \rightarrow$ (概率算子$(\alpha) = \varrho \rightarrow$ 概率算子$(\beta) = \varrho$)。

P6b. 概率算子$(\alpha \supset \beta) = 1 \rightarrow$ (概率算子$(\alpha) = \varrho \rightarrow$ 概率算子$(\beta) \geq \varrho$)。

Rule $\bot^\omega$. $\dfrac{\psi\rightarrow \Pr(\alpha)\neq\epsilon, \forall\epsilon\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}{\psi\rightarrow\bot}$

比较

CP1.(概率算子$(\alpha) = \delta \wedge$ 概率算子$(\beta) = \varrho) \rightarrow$ 概率算子$(\alpha) \geq$ 概率算子(β),（如果 $\delta \geq \varrho$）。CP2.(概率算子$(\alpha) = \delta \wedge$ 概率算子$(\beta) = \varrho) \rightarrow$ 概率算子$(\alpha) >$ 概率算子(β),（如果 $\delta > \varrho$）。

观察

O1.概率算子$(\alpha) = 0 \rightarrow (\alpha \supset \psi)$. O1b. $(\alpha \supset \bot) \rightarrow$ 概率算子$(\alpha) = 0$. O2. (概率算子$(\alpha) = \delta \wedge$ 概率算子$(\alpha \wedge \beta) = \varrho) \rightarrow (\alpha \supset$ 概率算子$(\beta) = \epsilon\vec{\delta})$ (当 $\delta, 0$).O3. $(\alpha \supset$ 概率算子$(\beta) = \varrho) \rightarrow$ (概率算子$(\alpha) = \delta \leftrightarrow$ 概率算子$(\alpha \wedge \beta) = \varrho \cdot \delta)$ (当 $\varrho, 0$). O4. $(\alpha \supset \psi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)$.

$\mathrm{O5}_\wedge$。 $\alpha \supset (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\alpha \supset \psi) \wedge (\alpha \supset \chi)$。

$\mathrm{O5}_\sqcup$. $\alpha \supset (\psi \sqcup \chi) \leftrightarrow (\alpha \supset \psi) \sqcup (\alpha \supset \chi)$. $\mathrm{O5}_\supset$. $\alpha \supset (\beta \supset \chi) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \supset \chi$.

Rule $\mathrm{Mon}_\supset$. $\dfrac{\vdash\psi\rightarrow\chi}{\vdash(\alpha\supset\psi)\rightarrow(\alpha\supset\chi)}$

Rule $\rightarrow$to$\supset$. $\dfrac{\vdash\alpha\rightarrow\psi}{\vdash\alpha\supset\psi}$

Rule $\supset^\omega$. $\dfrac{\psi\rightarrow(\Pr(\alpha\wedge\beta)=\delta\epsilon\leftrightarrow\Pr(\alpha)=\epsilon), \forall\epsilon\in(0,1]\cap\mathbb{Q}}{\psi\rightarrow(\alpha\supset\Pr(\beta)=\delta)}$

文字

A1. $\mathbf{Y} = \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{Y} \neq \mathbf{y}'$ (when $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}'$).

A2. $X \neq x \leftrightarrow (X = x \supset \bot)$.

A3. $\mathbf{W}_{\mathbf{y}\in\mathrm{Ran}(\mathbf{y})}\ \mathbf{Y} = \mathbf{y}$.

反事实

C1.$(\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright \psi) \wedge (\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright \chi))$. C2.$(\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright (\psi \sqcup \chi)) \leftrightarrow ((\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright \psi) \sqcup (\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright \chi))$. C3.$(\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright (\alpha \supset \chi)) \leftrightarrow ((\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright \alpha) \supset (\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright \chi))$. C4. $(\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright (\mathbf{Y} = \mathbf{y} \boxright \chi)) \rightarrow ((\mathbf{X}' = \mathbf{x}' \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{y}) \boxright \chi)$

（其中 $\mathbf{X}' = \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}$ 且 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} \setminus \mathbf{y}$；并且 $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ 是一致的）。C4b. $((\mathbf{X} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{y}) \boxright \chi) \rightarrow (\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright (\mathbf{Y} = \mathbf{y} \boxright \chi))$. C5.$(\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright \bot) \rightarrow \psi$（当 $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ 是一致的时）。C6. $(\mathbf{X} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{y}) \boxright \mathbf{Y} = \mathbf{y}$。C7. $(\mathbf{X} = \mathbf{x} \wedge \gamma) \rightarrow (\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright \gamma)$（其中 $\gamma \in \mathcal{PCO}$ 不含 $\boxright$ 的出现）。C8.$(\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright$ 概率算子$(\alpha) \rhd \varrho) \leftrightarrow$ 概率算子$(\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright \alpha) \rhd \varrho$。（其中 $\rhd = \geq$ 或 $>$）。C8b. $(\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright$ 概率算子$(\alpha) \rhd$ 概率算子$(\beta)) \leftrightarrow$ 概率算子$(\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright \alpha) \rhd$ 概率算子$(\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright \beta)$（其中 $\rhd = \geq$ 或 $>$）。C9. $\varphi_{End(Y)} \rightarrow (\mathbf{W}_Y = \mathbf{w} \boxright \mathbf{F}_{\mathbf{y}\in\mathrm{Ran}(\mathbf{Y})} \mathbf{Y} = \mathbf{y})$。C10. $(\varphi_{End(Y)})^C \rightarrow (\mathbf{Y} = \mathbf{y} \supset (\mathbf{W}_Y = \mathbf{w} \boxright \mathbf{Y} = \mathbf{y}))$（当 γ 不含 $\boxright$ 的出现时）。C11. $(\mathbf{X}_1 \rightsquigarrow \mathbf{X}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{X}_{n-1} \rightsquigarrow \mathbf{X}_n) \rightarrow (\mathbf{X}_n \rightsquigarrow \mathbf{X}_1)^C$（对于 $\mathbf{n} > 1$）。规则 Mon$_{\boxright}$。

$$\frac{\vdash \psi \rightarrow \chi}{\vdash (\mathbf{X}\ \mathbf{x} \boxright \psi) \rightarrow (\mathbf{X}\ \mathbf{x} \boxright \chi)}$$

我们将这组公理与规则称为演绎系统，并记作 $\Gamma \vdash \varphi$，如果存在一个由序数 $\leq \kappa$ 编号的可数序列 $\mathcal{PCO}$ 公式 φ_1、……、$\varphi_\kappa = \varphi$，其中列表中的每个公式要么是公理，要么是来自 Γ 的公式，要么可由列表中更早出现的公式通过某条规则推出。该序列本身称为证明。

我们将 $\vdash \varphi$ 记作 $\emptyset \vdash \varphi$；若其成立，我们称 φ 为定理。请注意，某些规则（Rep、Mon$_\supset$、Mon$_{\boxright}$、$\rightarrow$ 到 $\supset$）只能应用于定理，因为它们保持有效性，却不保持真。

3.3 关于公理与规则的说明

规则 MP、$\bot^\omega$、$\supset^\omega$ 以及公理 P1-2-3-4-5 和 O1-2-3，基本上改编自论文（Ra$\check{}$skovi´c 等，2004）。公理 P3 中的限制 $\delta + \varrho \leq 1$ 是由语法规定的（我们不允许将大于 1 的数字用作符号）。额外的公理 P3b 确保公理模式 P3 实际上总是适用，其含义是：如果某个实例不被接纳为公理，那么该实例的前提就是矛盾的。[4] 公理 P6 源自（Ra$\check{}$skovi´c 等，2004），但在我们的情形中，正确的表述需要两个条件连接词$\supset$（用于定义 $\equiv$）和 $\rightarrow$之间的相互作用；请注意，$\Pr(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$不是一个 $\mathcal{PCO}$ 公式，而类似的表述（$\alpha \leftrightarrow \beta$）（$\Pr(\alpha) = \varrho \rightarrow \Pr(\beta) = \varrho$）并不成立。变体 P6b 是我们新增的。这些调整既源于语法上的差异（（Ra$\check{}$skovi´c 等，2004）使用了显式的条件概率算子，而我们只通过选择蕴涵间接讨论条件概率；并且我们在事件层面与概率层面使用不同的逻辑算子），也源于语义上的差异（尤其是，我们对空模型中真值的处理方式有所不同）。

我们的规则 Mon$\supset$ 允许省略 (Ra$\check{}$skovi´c等，2004) 中的公理 8、11 和 12，而这些公理已在引理 5.9 中得到证明。

例如，CP1-2 的类似形式见于（Ognjanovi´c 等，2008）以及更早的文献中。

公理 C6、C7 和 C11 的作用分别与（Galles 和 Pearl，1998）中的有效性、组合性和递归性原则相同。公理 C7 目前这种更直观的形式由（Barbero 和 Yang，2022）提出。Halpern（Halpern，2000）注意到 $\boxright$ 可分配到布尔算子上，并提出了 C1 和 C2 的类似公理。C3-4-4b 的有效性由（Barbero 和 Sandu，2021）指出，而 C5 的重要性则由（Barbero 和 Yang，2022）指出。

4 可靠性

如前所述，许多公理与规则源自文献，而且很容易看出它们在我们的语义框架中同样成立。T1 的可靠性源于它本质上涉及经典算子。T2 的可靠性是 CO 的平坦性所带来的结果；这一点在 Barbero 和 Sandu，2021，附录 C 中作了解释（尤其是引理 C.1 和 C.2）。我们将详细证明那些特别复杂或不寻常的公理 C7-9-10 的可靠性。

命题 4.1（公理 C7 的可靠性）。设 γ 是一个不含 $\boxright$ 的 $\mathcal{PCO}$ 公式。那么对于任何具有适当签名的 T，都有 $\mathbf{T} \models (\mathbf{X} = \mathbf{x} \wedge \gamma) \rightarrow (\mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright \gamma)$。

证明。（略）由于 $\mathbf{T} = (\mathbf{T}^-, \mathcal{F}) \models \mathbf{X} = \mathbf{x}$，很容易看出（通过对因果图中某种适当距离的归纳法），$(\mathbf{T}_{\mathbf{X}=\mathbf{x}})^- = \mathbf{T}^-$。由于 γ 中没有 $\boxright$ 的出现，可以证明（通过对 γ的归纳法），$(\mathbf{T}^-, \mathcal{G}) \models \gamma$ 当且仅当 $\mathbf{T} \models \gamma$。特别地，由于 $(\mathbf{T}_{\mathbf{X}=\mathbf{x}})^- = \mathbf{T}^-$ 且 $\mathbf{T} \models \gamma$，我们有$\mathbf{T}_{\mathbf{X}=\mathbf{x}} \models \gamma$，从而 $\mathbf{T} \models \mathbf{X} = \mathbf{x} \boxright \gamma$。 □

其余的可靠性证明需要一些引理。

引理4.2. 设 T 为一个因果多团队。假设变量Y 在T 中是内生的。那么存在一个变量 $\mathbf{X} \in \mathbf{W}_Y$以及取值$\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathrm{Ran}(\mathbf{X})$,$\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathrm{Ran}(\mathbf{Y})$ 和 $\mathbf{w} \in \mathrm{Ran}(\mathbf{W}_{XY})$ 使得

$$T \models (\mathbf{W}_{XY} = \mathbf{w} \wedge X = x) \boxright Y = y$$

and

$$T \models (\mathbf{W}_{XY} = \mathbf{w} \wedge X = x') \boxright Y = y',$$

从而 $\mathbf{T} \models \varphi_{DC(X,Y)}$。

证明。由于 Y 是内生的，它有一个关联函数$\mathcal{F}_V$，且该函数不是常数。因此，至少存在两个针对 Y 的不同干预，它们会使 Y 取不同的值；不妨在适当重排后，设有两个由不同变量组成的元组 ZX，使得 $\mathbf{ZX} = \mathbf{W}_Y$，且存在取值 $\mathbf{z} \in \mathrm{Ran}(\mathbf{Z})$、$\mathbf{x}$、$\mathbf{x}' \in \mathrm{Ran}(\mathbf{X})$、$\mathbf{y}$、$\mathbf{y}' \in \mathrm{Ran}(\mathbf{Y})$，满足

$$T \models (\mathbf{Z} = \mathbf{z} \wedge \mathbf{X} = \mathbf{x}) \boxright Y = y$$

[4] 我们认为，（Ra$\check{}$skovi´c et al., 2004）中的系统也应加入一个类似于 P3b 的公理。

and

$$T \models (\mathbf{Z} = \mathbf{z} \wedge \mathbf{X} = \mathbf{x}') \boxdot\!\!\rightarrow Y = y' \qquad (*)$$

成立。更明确地写，$\mathbf{X} = X_1 \ldots X_n$，$\mathbf{x} = x_1 \ldots x_n$，$\mathbf{x}' = x'_1 \ldots x'_n$。为使记号统一，我们将 $\mathbf{Z}$ 中最右侧的变量重命名为 X_0，，并将其取值重命名为 x_0。现在，必定存在某个 $i \in \{1, \ldots n\}$，使得

$$T \models (\mathbf{Z} = \mathbf{z} \wedge X_1 \ldots X_{i-1} = x'_1 \ldots x'_{i-1} \wedge X_i \ldots X_n = x_i \ldots x_n) \boxdot\!\!\rightarrow Y = y$$

而

$$T \models (\mathbf{Z} = \mathbf{z} \wedge X_1 \ldots X_i = x'_1 \ldots x'_i \wedge X_{i+1} \ldots X_n = x_{i+1} \ldots x_n) \boxdot\!\!\rightarrow Y = y^*$$

对于某个 y^*，y。事实上，如果并非如此，我们将在步骤 $i = n$ 得到 $(\mathbf{Z} = \mathbf{z} \wedge \mathbf{X} = \mathbf{x}') \boxdot\!\!\rightarrow Y = y$，这与 (*) 矛盾。但此时，我们要寻找的变量 $\mathbf{X}$ 是 X_i，其中 i 是首次获得 y^* 的索引。□

引理4.3。设$T = (T^-, \mathcal{F})$是一个签名为 σ的因果多团队，并考虑 $\varphi_{DC(X,Y)}$ 和 $\varphi_{End(V)}$ 在签名 σ下的版本。于是:

1. $T \models \varphi_{DC(X,Y)}$ 当且仅当 Y 是内生的，且 $\mathbf{X}$ 是 $\mathcal{F}_Y$ 的非虚设自变量。2. $T \models \varphi_{End(Y)}$ 当且仅当 Y 是内生的。

证明。 1)假设$T \models \varphi_{DC(X,Y)}$。那么，根据$\varphi_{DC(X,Y)}$ 的定义，存在 $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathrm{Ran}(\mathbf{X})$，$y, y' \in \mathrm{Ran}(Y)$，$\mathbf{w} \in \mathrm{Ran}(\mathbf{W}_Y)$ 使得

$$T \models (\mathbf{W}_{XY} = \mathbf{w} \wedge X = x) \boxdot\!\!\rightarrow Y = y$$

$$T \models (\mathbf{W}_{XY} = \mathbf{w} \wedge X = x') \boxdot\!\!\rightarrow Y = y'.$$

由于 y, y'，这意味着T的 Y 列中的某些取值可以通过对不同于 Y的变量进行某种干预而改变。因此，Y 不是外生变量，并且它有一个相应的函数 $\mathcal{F}_Y$。现在我们必须

$$T \models (\mathbf{W}_{XY} = \mathbf{w} \wedge X = x) \boxdot\!\!\rightarrow Y = \mathcal{F}_Y(\mathbf{w}x)$$

$$T \models (\mathbf{W}_{XY} = \mathbf{w} \wedge X = x') \boxdot\!\!\rightarrow Y = \mathcal{F}_Y(\mathbf{w}x'),$$

由此可知，$\mathcal{F}_Y(\mathbf{wx}) = y$，$y' = \mathcal{F}_Y(\mathbf{wx}')$。因此，$\mathbf{X}$ 不是 Y 的虚设自变量。

反之，如果 Y 是内生的，且 $\mathbf{X}$是 $\mathcal{F}_Y$ 的非虚设自变量，那么存在 $\mathbf{w} \in \mathrm{Ran}(\mathbf{W}_Y)$和 $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathrm{Ran}(\mathbf{X})$，使得 $\mathcal{F}_Y(\mathbf{wx}) \neq \mathcal{F}_Y(\mathbf{wx}')$。此外，根据干预的定义，

$$T \models (\mathbf{W}_{XY} = \mathbf{w} \wedge X = x) \boxdot\!\!\rightarrow Y = \mathcal{F}_Y(\mathbf{w}x)$$

$$T \models (\mathbf{W}_{XY} = \mathbf{w} \wedge X = x') \boxdot\!\!\rightarrow Y = \mathcal{F}_Y(\mathbf{w}x')$$

由于 $\mathcal{F}_Y(\mathbf{wx}) \neq \mathcal{F}_Y(\mathbf{wx}')$，二者共同蕴含 $T \models \varphi_{DC(X,Y)}$。

2)假设$T \models \varphi_{End(Y)}$。那么，对于某些 $\mathbf{X}, Y$，$T \models \varphi_{DC(X,Y)}$。因此，根据 1.，特别是 Y 是内生的。

假设 Y 是内生的。那么，根据引理 4.2，函数 $\mathcal{F}_V$ 至少有一个非虚设自变量 $\mathbf{X}$。于是，根据 1.，$T \models \varphi_{DC(X,Y)}$。因此 $T \models \varphi_{End(Y)}$。

□

命题 4.4（公理 C9 的可靠性）。对于任意具有适当签名的 T,

$$T \models \varphi_{End(Y)} \rightarrow (\mathbf{W}_Y = \mathbf{w} \boxdot\!\!\rightarrow \bigsqcup_{y \in \mathrm{Ran}(Y)} Y = y).$$

证明。假设 $T = (T^-, \mathcal{F}) \models \varphi_{End(Y)}$。那么，根据引理 4.3, 2.，$Y$ 是内生变量。但此时（对于任意 $\mathbf{w} \in \mathbf{W}_Y$），所有赋值 $\mathbf{s} \in T^{-\mathbf{w}_Y = \mathbf{w}}$都完全相同（键除外），也就是说，它们都满足 $\mathbf{s}(\mathbf{W}_Y) = \mathbf{w}$ 且 $\mathbf{s}(Y) = \mathcal{F}_Y(\mathbf{w})$。因此 $T\mathbf{w}_{Y=\mathbf{w}} \models Y = \mathcal{F}_Y(\mathbf{w})$。于是 $T\mathbf{w}_{Y=\mathbf{w}} \models \bigsqcup_{y \in \mathrm{Ran}(Y)} Y = y$，最终 $T \models \mathbf{W}_Y = \mathbf{w} \boxdot\!\!\rightarrow \bigsqcup_{y \in \mathrm{Ran}(Y)} Y = y$。□

命题 4.5（公理 C10 的可靠性）。对于任何具有适当签名的 T,

$$T \models (\varphi_{End(Y)})^C \rightarrow (Y = y \supset (\mathbf{W}_V = \mathbf{w} \boxdot\!\!\rightarrow Y = y)).$$

证明。假设 $T \models (\varphi_{End(Y)})^C$。那么，根据引理 4.3，2.，$Y$ 是外生的。由于 Y 是外生的，在每个赋值中，Y 的值不受对 $\mathbf{W}_Y$ 的干预影响。因此，特别是，由于 $T^{Y=y} \models Y = y$，我们有 $T^{Y=y} \models \mathbf{W}_Y = \mathbf{w} \boxdot\!\!\rightarrow Y = y$，因而 $T \models Y = y \supset (\mathbf{W}_Y = \mathbf{w} \boxdot\!\!\rightarrow Y = y)$。□

5 完备性

我们将证明该演绎系统对于 $\mathcal{PCO}$ 是强完备的，即对于所有 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{PCO}, \Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$ 均成立。

5.1 导出规则

首先，我们来说明四条我们将经常隐式使用的导出规则。

定理 5.1（演绎）。如果 $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$，那么 $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$。

证明。我们对 $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ 的证明长度进行超限归纳。

- $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$ 或 ψ 为公理的基本情形，与任何逻辑学入门教材中的处理方式相同。ψ 通过 MP 规则得到的情形也一样。至于 ψ 通过规则 $\bot^\omega$ 得到的情形，参见 (Raˇskovi´c et al., 2004), 定理 4。
- $\psi = \theta \rightarrow (\alpha \supset \text{概率算子}(\beta) = \delta)$ 通过应用规则$\supset^\omega$得到。因此，对于每个 $\varrho \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$,

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \theta \rightarrow (\Pr(\alpha \wedge \beta) = \delta\epsilon \leftrightarrow \Pr(\alpha) = \epsilon)$$
$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\theta \rightarrow (\Pr(\alpha \wedge \beta) = \delta\epsilon \leftrightarrow \Pr(\alpha) = \epsilon)) \qquad \text{(i.h.)}$$
$$\Gamma \vdash (\varphi \wedge \theta) \rightarrow (\Pr(\alpha \wedge \beta) = \delta\epsilon \leftrightarrow \Pr(\alpha) = \epsilon)) \qquad (\text{T1}^+\text{Rule MP})$$

然后，

$$\Gamma \vdash (\varphi \wedge \theta) \rightarrow (\alpha \supset \Pr(\beta) = \delta) \qquad (\text{Rule } \supset^\omega)$$
$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\theta \rightarrow (\alpha \supset \Pr(\beta) = \delta)). \qquad (\text{T1+Rule MP})$$

• 情形 ψ 通过替换规则 Rep、$\text{Mon}_{\Box\to}$、$\text{Mon}_{\supset}$ 或 $\to$到$\supset$得到。在这些情形中，由于该规则仅适用于定理，因此它得到一个定理；即，$\vdash \psi$。另一方面，根据T1，$\vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$。因此，根据 MP 规则，$\vdash \varphi \to \psi$。因此 $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$。

□

定理5.2（$\supset$的演绎定理）。令 $\alpha \in CO$。如果$\alpha \vdash \eta$，那么 $\vdash \alpha \supset \eta$。此外，如果 $\eta \in CO$，那么 $\vdash$ 概率算子$(\alpha) = 0 \to$ 概率算子$(\eta) = 0$。

证明。假设 $\alpha \vdash \eta$。根据演绎定理（5.1），$\vdash \alpha \to \eta$。根据规则 $\to$至$\supset$，$\vdash \alpha \supset \eta$。

现在，若 $\eta \in CO$，由 P1 和 MP 规则可得，$\vdash \Pr(\alpha \supset \eta) = 1$。由 P6b 和 MP 规则可得，$\vdash \Pr(\alpha) = 0 \to \Pr(\eta) = 0$。□

引理5.3. 当 $\alpha, \beta \in CO$:

1. $\vdash$ 概率算子$(\alpha \wedge \beta) = 1 \to$ 概率算子$(\alpha) = 1$。
2. $\vdash$ （α的概率算子 $= 1 \wedge$ 概率算子$\beta = 1) \to$ 概率算子$\alpha \wedge \beta = 1$

证明。1）假设 $\vdash$ 概率算子$\alpha \wedge \beta = 1$。那么，由 P1，$\vdash \alpha \wedge \beta$。接着，由 T1，$\vdash \alpha$。再次由 P1，$\vdash$ 概率算子$\alpha = 1$。

2）假设 $\vdash$ 概率算子$\alpha = 1 \wedge$概率算子$\beta = 1$。那么，由 T1，$\vdash$ 概率算子$\alpha = 1$和 $\vdash$概率算子$\beta = 1$。由 P1，$\vdash \alpha$和 $\vdash \beta$。接着，根据 T1，$\vdash \alpha \wedge \beta$。最后，由 P1，$\vdash$ 概率算子$\alpha \wedge \beta = 1$。□

引理 5.4（$\supset$的肯定前件式）。设 $\alpha \in CO_\sigma$ 和 $\Gamma \cup \{\psi\} \subseteq \mathcal{P}CO_\sigma$。那么，

如果 $\Gamma \vdash \alpha \supset \psi$ 且 $\Gamma \vdash \alpha$，则 $\Gamma \vdash \psi$。 2. 如果 $\Gamma \vdash$ 概率算子$(\alpha \supset \beta) = 1$ 且 $\Gamma \vdash$ 概率算子$(\alpha) = 1$，则 $\Gamma \vdash$ 概率算子$(\beta) = 1$。

证明。1) 假设 $\Gamma \vdash \alpha$ 和 $\Gamma \vdash \alpha \supset \psi$。由后者，根据公理 O4 和 MP 规则，可得 $\Gamma \vdash \alpha \to \psi$。因此，再次根据 MP 规则，$\Gamma \vdash \psi$。

2) 第 2 部分) 可以通过几次应用公理 P1 从第 1 部分) 得到。□

命题5.5（逆否）。假设 Γ、$\chi^C \vdash \psi^C$。那么 Γ、$\psi \vdash \chi$。

证明。假设 $\Gamma, \chi^C \vdash \psi^C$。那么根据经典逻辑（公理 T1+MP 规则）$\Gamma, \chi^C, \psi \vdash \bot$。因此，根据演绎定理（5.1）$\Gamma, \psi \vdash \chi^C \to \bot$。因此，再次根据经典逻辑，$\Gamma, \psi \vdash \chi$。□

借助这些额外的证明方法，不难证明我们的证明系统对于 CO 公式是强完备的。稍后我们将利用这一结果，以简短的语义证明取代冗长的证明论论证。

定理 5.6（CO-完备性）。设 σ 为一个签名，且 $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq CO$。那么 $\Gamma \models \alpha$ 蕴含 $\Gamma \vdash \alpha$，后者可由有限推导见证。

证明。Barbero和Yang，2022 证明了一个针对 CO 公式的（有限式）公理与（自然演绎风格）规则系统的强完备性。[5] 我们将证明，该系统的公理与规则可在我们的系统中通过有限步演绎得到，由此结论立即得出。

(Barbero 和 Yang，2022) 的公理 ValDef 和 ValUnq 分别是我们公理 A3 和 A1 的特例。

(Barbero 和 Yang，2022) 中关于 $\wedge$、$\vee$、$\neg$ 的规则是经典规则，因此很容易由 T2 的实例推出。更准确地说，不含解除的假设的规则（从 γ_1、……、γ_n 推出 α）对应于如下形式的 T2 实例：$\vdash (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \supset \alpha$；因此，根据引理 5.4，$\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \vdash \alpha$，再由 T2 可得 γ_1、……、$\gamma_n \vdash \alpha$。

带有解除的假设的 $\vee$ 和 $\neg$ 的规则通过将解除的假设转化为$\supset$的前件来处理。例如，$\vee$ 的消去规则（从 $\Gamma \vdash \beta \vee \gamma$、$\Gamma$、$\beta \vdash \alpha$ 以及 Γ、$\gamma \vdash \alpha$ 得出 $\Gamma \vdash \alpha$）是通过注意到 $\vdash [(\beta \vee \gamma) \wedge (\beta \supset \alpha) \wedge (\gamma \supset \alpha)] \supset \alpha$ 是 T2 的一个实例而推导出的；然后按照前一种情况继续进行。

现在让我们转向关于 $\Box\to$的公理与规则。公理$\Box\to$ExFalso，即 $(X = y \wedge X = x \wedge X = x') \Box\to \bot$ (当x, x')，在我们的系统中可如下导出。根据公理 C6，我们有 (*)：$\vdash (Y = y \wedge X = x \wedge X = x') \Box\to X = x$，以及(**)：$\vdash (Y = y \wedge X = x \wedge X = x') \Box\to X = x'$。根据 A1，$\vdash X = x \to X$，$x'$，从而根据公理 A2 $\vdash X = x \to \neg X = x'$。于是，根据 (*) 和$\text{Mon}_{\Box\to}$，$\vdash (Y = y \wedge X = x \wedge X = x') \Box\to \neg X = x'$。结合(**)，根据 C1，我们得到$\vdash (Y = y \wedge X = x \wedge X = x') \Box\to (X = x' \wedge \neg X = x')$。根据 T2，我们有 $\vdash (X = x' \wedge \neg X = x') \supset \bot$，然后根据 O4$\vdash (X = x' \wedge \neg X = x') \to \bot$。因此，再次根据 $\text{Mon}_{\Box\to}$，我们得到 $\vdash (Y = y \wedge X = x \wedge X = x') \Box\to \bot$。

规则 $\neg\Box\to$E（从 $\neg(X = x \Box\to \alpha)$推出$X = x \Box\to \neg\alpha$）可如下导出。$\neg(X = x \Box\to \alpha)$是 $(X = x \Box\to \alpha) \supset \bot$ 的缩写。由公理 O1b 和O1，我们得到 $(X = x \Box\to \alpha) \supset (X = x \Box\to \bot)$。根据 C3，我们得到 $X = x \Box\to (\alpha \supset \bot)$，可将其缩写为 $X = x \Box\to \neg\alpha$。

规则 $\Box\to$RPL$_A$ 以一种直接的方式对应于我们的替换规则的一个特殊情形，而规则 $\Box\to$RPL$_C$ 对应于$\text{Mon}_{\Box\to}$。其余针对 $\Box\to$ 的公理与规则对应于我们的公理 C1-C4-C4b-C5-C6-C7-C11。□

5.2 公理的推论

让我们证明这些公理的几个重要推论。

引理 5.7。令 $\alpha \in CO$ 和 δ，$0 \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$。

1. $\vdash \Pr(\alpha) \geq \delta \to \Pr(\alpha) > \epsilon$ *(if* $\epsilon < \delta$*).*

2. $\vdash \Pr(\alpha) > \epsilon \to \Pr(\alpha) \geq \epsilon$.

证明。1）根据逆否（命题 5.5）和演绎定理（5.1），只需证明 $(\Pr(\alpha) > 0)^C \to (\Pr(\alpha) \geq \delta)^C$，即 $\Pr(\alpha) \leq 0 \to \Pr(\alpha) < \delta$。但是，由于 $0 < \delta$，这由公理 P4 保证。

2)根据逆否（命题 5.5）和演绎定理（5.1），只需证明(概率算子$(\alpha) \geq 0)^C \to$ (概率算子$(\alpha) >$

[5] 在那篇论文中，$\vee$ 和 $\neg$ 属于正式语法，而$\alpha \supset \beta$ 是 $\neg\alpha \vee \beta$的缩写。

$\varrho)^C$，即 概率算子$(\alpha) < \varrho \rightarrow$概率算子$(\alpha) \leq \varrho$。但这是公理 P5 的一个实例。 □

引理 5.8。令 $\alpha \in CO$和 δ，$\varrho \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$。

1. $\vdash$概率算子$(\alpha) \geq \delta \rightarrow$概率算子$(\alpha) \geq \varrho$ (当 $\varrho < \delta$ 时)。 2. $\vdash$概率算子$(\alpha) \leq \delta \rightarrow$概率算子$(\alpha) \leq \varrho$ (当 $\varrho > \delta$时)。3. $\vdash$概率算子$(\alpha) = \delta \rightarrow$概率算子$(\alpha)$, ϱ (当 $\varrho \quad \delta$ 时)。

证明。1）由引理 5.7，1.，我们得到 $\vdash \Pr(\alpha) \geq \delta \rightarrow \Pr(\alpha) > \varrho$。由引理 5.7，2.，我们得到$\vdash \Pr(\alpha) > \varrho \rightarrow \Pr(\alpha) \geq \varrho$。然后，我们可以通过传递性将这两个陈述合并（由公理 T1 + MP 规则保证）。

2) 该证明类似，只需用公理 P4–P5 替代引理 5.7。

3) 请记住，$\Pr(\alpha) = \delta$ 是 $\Pr(\alpha) \geq \delta \wedge \Pr(\alpha) \leq \delta$ 的缩写。因此，由 $\vdash \Pr(\alpha) = \delta$，根据经典逻辑可得 $\vdash \Pr(\alpha) \geq \delta$,$\vdash \Pr(\alpha) \leq \delta$。现在分两种情况。如果 $\delta < \varrho$，根据公理 P4，我们得到 $\Pr(\alpha) < \varrho$，由此根据公理 T1 可推出 $\Pr(\alpha)$, ϱ，即 $\Pr(\alpha) > \varrho \sqcup \Pr(\alpha) < \varrho$。反之，如果 $\delta > \varrho$，根据引理 5.7，我们得到 $\Pr(\alpha) > \varrho$，随后以同样的方式得出结论。□

以下内容对应于 (Raˇskovi´c etal., 2004) 中的公理 8、11 和 12，而这些公理可由我们的规则 $\text{Mon}_{\supset}$ 推出。

引理 5.9。设 $\alpha, \beta \in CO$ 和 $\delta, \varrho \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$。

1. $\vdash (\alpha \supset$概率算子$(\beta) = \delta) \rightarrow (\alpha \supset$概率算子$(\beta), \varrho)$ 当 δ , ϱ。 2. $\vdash (\alpha \supset$概率算子$(\beta) = \delta) \rightarrow (\alpha \supset$概率算子$(\beta) < \varrho)$ 当 $\delta < \varrho$。 3. $\vdash (\alpha \supset$ 概率算子 $(\beta) = \delta) \rightarrow (\alpha \supset$ 概率算子 $(\beta) \geq \varrho)$ 当 $\delta \geq \varrho$。

证明。1) 这是引理 5.8,3.,和规则 $\text{Mon}_{\supset}$的直接推论。

2) 如果 $\delta < \varrho$，则根据公理 P4，有 $\vdash \Pr(\beta) \leq \delta \rightarrow \Pr(\beta) < \varrho$。由于 $\Pr(\beta) = \delta$ 是 $\Pr(\beta) \geq \delta \wedge \Pr(\beta) \leq \delta$的缩写，根据经典逻辑（T1 + MP 规则），我们有$\vdash \Pr(\beta) = \delta \rightarrow \Pr(\beta) < \varrho$。由此根据规则 $\text{Mon}_{\supset}$即可得证。

3)如果 $\delta = \varrho$，那么根据经典逻辑 概率算子$(\beta) \geq \delta \vdash$ 概率算子$(\beta) \geq \varrho$，并且 概率算子$(\beta) = \delta \vdash$概率算子$(\beta) \geq \delta$。因此概率算子$(\beta) = \delta \vdash$概率算子$(\beta) \geq \varrho$。

如果相反 $\delta > \varrho$，根据引理 5.8，1.，我们得到概率算子$(\beta) \geq \delta \vdash$概率算子$(\beta) \geq \varrho$。根据经典逻辑，则，概率算子$(\beta) = \delta \vdash$概率算子$(\beta) \geq \varrho$。

最后，在这两种情况下，我们都通过规则 $\text{Mon}_{\supset}$ 得出结论。 □

引理 5.10。对于所有 $\alpha, \beta \in CO$,

$$\vdash (\Pr(\alpha \vee \beta) = \epsilon \wedge \Pr(\beta) = 0) \rightarrow \Pr(\alpha) = \epsilon.$$

证明。令 φ 表示前件 概率算子$(\alpha \vee \beta) = \varrho \wedge$概率算子$(\beta) = 0$。我们有：

1. $\varphi \vdash \Pr(\beta) = 0 \rightarrow (\beta \supset \bot)$ （公理 O1）
2. $\varphi \vdash \beta \supset \bot$ (1., Rule MP)
3. $\varphi \vdash \Pr(\beta \supset \bot) = 1$ (2., P1 + MP 规则)
4. $\varphi \vdash$概率算子$([(\alpha \vee \beta) \wedge (\beta \supset \bot)] \equiv \alpha) = 1$ (公理 T2+P1)
5. $\varphi \vdash \Pr\big((\beta \supset \bot) \supset \{[(\alpha \vee \beta) \wedge (\beta \supset \bot) \equiv \alpha]\} \supset \{\alpha \vee \beta \equiv \alpha\}\big) = 1$ (Axiom T2+P1)
6. $\varphi \vdash \Pr(\alpha \vee \beta \equiv \alpha) = 1$ (3.,4.,5., 2×Lemma 5.4)
7. $\varphi \vdash \Pr(\alpha \vee \beta) = \epsilon \rightarrow \Pr(\alpha) = \epsilon$ (P6+Rule MP)
8. $\varphi \vdash \Pr(\alpha) = \epsilon$ （7.，MP 规则）
9. $\vdash \varphi \rightarrow \Pr(\alpha) = \epsilon$. （8.，定理 5.1）

□

5.3 公式的极大一致集

现在我们将转向林登鲍姆引理。如果无法从集合 Γ 中的固定签名 σ 的公式 $\mathcal{PCO}$ 推导出 $\bot$（或者，等价地，至少有一个公式无法从中推导出来），则称该集合是一致的。若 Γ 是一致的，并且当 $\Gamma' \supseteq \Gamma$ 和 Γ' 一致时，有 $\Gamma' = \Gamma$，则称其为极大一致的。

引理 5.11（林登鲍姆）。固定签名 σ 下的每个一致公式集 Γ $\mathcal{PCO}$ 都可以扩展为极大一致集 Δ，且该集合还对推导封闭（即 $\Delta \vdash \psi$ 蕴含 $\psi \in \Delta$）。

证明。设 Γ 是一个一致集，并设 $\Gamma^{\vdash} \supset \Gamma$ 是其形式推论集。我们使用自然数作为索引，将 $\mathcal{PCO}_\sigma$ 的公式枚举为 φ_1、.....、φ_n、.....，并将 CO_σ 的公式枚举为 α_1、.....、α_n、.....。

然后，我们如下定义一个递增的 $\mathcal{PCO}_\sigma$公式 Γ_i 集合序列：

1. $\Gamma_0 := \Gamma^{\vdash}$.
2. Γ_{2i+1} 定义如下：
   如果 $\Gamma_{2i} \cup \{\varphi_i\}$ 是一致的，则令 $\Gamma_{2i+1} := \Gamma_{2i} \cup \{\varphi_i\}$。
   • 否则，如果 φ_i 的形式为 $\psi \rightarrow (\alpha \supset$概率算子$(\beta) = \varrho)$，则令$\Gamma_{2i+1} := \Gamma_{2i} \cup \{\varphi_{Ci}, \psi \rightarrow$(概率算子$(\alpha \wedge \beta) = \delta\varrho \leftrightarrow$概率算子$(\alpha) = \delta)_C\}$，其中 $\delta > 0$ 使该集合保持一致。
   • 否则，令 $\Gamma_{2i+1} := \Gamma_{2i} \cup \{\varphi_{Ci}\}$。3. 令 $\Gamma_{2i+2} := \Gamma_{2i+1} \cup \{$概率算子$(\alpha_i) = \varrho\}$，其中某个 ϱ 使该集合一致。

我们首先通过下面 ω的归纳法证明，所有 Γ_i 都是定义良好且一致的。

• Γ_0 是一致的，因为它是一致集合的推论集。

• 注意到，$\Gamma_{2i} \cup \{\varphi_i\}$ 或 $\Gamma_{2i} \cup \{\varphi_{Ci}\}$ 必有一个是一致的（否则，根据演绎定理，我们可以推出 $\Gamma_{2i} \vdash \varphi_i \leftrightarrow \varphi_{Ci}$，进而根据经典逻辑，$\Gamma_{2i}$ 是不一致的）。如果$\Gamma_{2i} \cup \{\varphi_{Ci}\}$ 是一致的，且 φ_i 是 $\psi \rightarrow (\alpha \supset$概率算子$(\beta) = \varrho)$，我们还需要证明存在一个 $\delta > 0$，使得$\Gamma_{2i} \cup \{\varphi_{Ci}, \psi \rightarrow$(概率算子$(\alpha \wedge \beta) = \delta\varrho \leftrightarrow$概率算子$(\alpha) = \delta)_C\}$ 是一致的。

假设情况并非如此。那么，对于所有$\delta \in (0,1] \cap \mathbb{Q}$,

$$\Gamma_{2i}, \varphi_i^C, \psi \to (\Pr(\alpha \wedge \beta) = \delta\epsilon \leftrightarrow \Pr(\alpha) = \delta)^C \vdash \bot$$
$$\Gamma_{2i}, \varphi_i^C \vdash (\psi \to (\Pr(\alpha \wedge \beta) = \delta\epsilon \leftrightarrow \Pr(\alpha) = \delta)^C)^C$$
(deduction theorem + T1)
$$\Gamma_{2i}, \varphi_i^C \vdash \psi \to (\Pr(\alpha \wedge \beta) = \delta\epsilon \leftrightarrow \Pr(\alpha) = \delta).$$
(by T1: tautology $\neg(A \to \neg B) \to (A \to B)$)

因此，根据规则 $\supset^\omega$, $\Gamma_{2i}, \varphi_i^C \vdash \psi \to (\alpha \supset$ 概率算子$(\beta) = \varrho)$, 即$\Gamma_{2i}, \varphi_i^C \vdash \varphi_i$。因此，根据演绎定理，$\Gamma_{2i} \vdash \varphi_i^C \to \varphi_i$，最后根据一个重言式 $\Gamma_{2i} \vdash \varphi_i$，这与 $\Gamma_{2i} \cup \{\varphi_i^C\}$的一致性相矛盾。

• 假设反证（对于某个 $i < \omega$），不存在 $\varrho \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ 使得 $\Gamma_{2i+1} \cup \{\Pr(\alpha_i) = \varrho\}$ 是一致的。现在记 $\Xi := \Gamma_{2i+1} \setminus \Gamma_0$ （注意，Ξ 是一个有限集。）我们的假设给出，对于每个 $\varrho \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$，$\Gamma_0, \Xi \vdash \Pr(\alpha_i), \varrho$ （因为 $\Pr(\alpha_i), \varrho$ 是 $(\Pr(\alpha_i) = \varrho)^C$）。因此，根据演绎定理和 T1，$\Gamma_0 \vdash (\bigvee_{\theta \in \Xi} \theta) \to \Pr(\alpha_i), \varrho$。于是，根据规则 $\bot^\omega$, $\Gamma_0 \vdash (\bigvee_{\theta \in \Xi} \theta) \to \bot$。然后，根据T1 和 MP 规则，$\Gamma_0, \Xi \vdash \bot$，这与归纳假设 Γ_{2i+1} 是一致的相矛盾。

令 $\Delta := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$。我们希望证明它是一致的。由于 φ_i 或 $(\varphi_i)^C$ 中的任一个会被添加到 Γ_{2i+1} 中，这将立即推出 Δ 是极大一致的。

注意，不可能出现 $\bot \in \Delta$ 的情况，因为否则我们已经会对某个 i 有 $\bot \in \Gamma_i$，从而与 Γ_i 是一致的这一事实相矛盾。因此，如果我们证明 $\Delta \vdash \psi$ 蕴含 $\psi \in \Delta$，就可以得出 $\Delta \nvdash \bot$，也就是说，Δ 是一致的。

我们通过对证明 $\Delta \vdash \psi$的长度进行超限归纳法来证明这一点。首先注意，如果最后应用的规则是有限的（其中根据归纳假设，所有前提都属于Δ），那么存在某个i，使得所有前提都属于 Γ_i（因此$\Gamma_i \vdash \psi$），此外还满足 $\psi \in \Gamma_i$ 或 $\psi^C \in \Gamma_i$。由于 Γ_i 是一致的，因此必然有 $\psi \in \Gamma_i$。于是 $\psi \in \Delta$。接下来我们考虑 ψ 通过一个无限规则得到时的情形。

假设 ψ 是通过 MP规则 $\bot^\omega$得到的。因此，ψ 是 $\chi \to \bot$，而前提（来自 Δ）是以下所有公式 θ^ϵ：$\chi \to$概率算子(α)，ϱ对于 $\varrho \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ 以及对于某个特定的 $\alpha \in CO$。根据归纳假设 $\theta^\epsilon \in \Delta$。现在根据构造的第 3 步，必定存在一个 ϱ 和一个索引i, 使得概率算子$(\alpha) = \varrho \in \Gamma_i$。由于 $\chi \to$ 概率算子$(\alpha) = \varrho$可由概率算子$(\alpha) = \varrho$ 通过T1和MP 规则推导得到（因此不使用无穷规则），我们可以如上得出结论：$\chi \to$ 概率算子$(\alpha) = \varrho \in \Delta$。但是由于$\chi \to \bot$ 可由此公式和 θ^ϵ 通过T1和 MP 规则推导得到，我们以同样的方式得出$\chi \to \bot \in \Delta$，正如所需。

假设 ψ 是通过规则 $\supset^\omega$得到的。那么 ψ 的形式为$\chi \to (\alpha \supset$ 概率算子$(\beta) = \varrho)$，且前提全都是公式θ^δ：$\chi \to ($概率算子$(\alpha \wedge \beta) = \delta\varrho \leftrightarrow$ 概率算子$(\alpha) = \delta)$，其中 $\delta \in (0,1] \cap \mathbb{Q}$，根据归纳假设，这些公式都属于 Δ。若反证假设 $\chi \to (\alpha \supset$ 概率算子$(\beta) = \varrho) \notin \Delta$，则其矛盾否定 $\chi \wedge (\alpha \supset$ 概率算子$(\beta) = \varrho)^C$ 根据极大性属于 Δ；并且根据构造的第2步，存在一个 $i \in \mathbb{N}$ 以及一个 $\delta \in (0,1] \cap \mathbb{Q}$，使得$\chi \to ($概率算子$(\alpha \wedge \beta) = \delta\varrho \leftrightarrow$概率算子$(\alpha) = \delta)^C \in \Gamma_i$。由于从该式和 θ^δ 可通过 T1 推出

以及 MP 规则：$\chi \to \bot$，那么根据构造各阶段的一致性，必定存在一个 j，使得 $\chi \to \bot \in \Gamma_j$and $\chi \wedge (\alpha \supset$ 概率算子$(\beta) = \delta)^C \in \Gamma_j$。但是，按照同样的推理，有一个 k 使得 $\bot \in \Gamma_k$，这与 Γ_k 的一致性相矛盾。 □

随后，我们证明极大一致公式集的一些性质。

引理 5.12。设 Γ 是一个极大一致公式集。那么以下结论成立。

1. Γ 包含所有定理。2. $\psi \wedge \chi \in \Gamma$ 当且仅当 $\psi \in \Gamma$ 且 $\chi \in \Gamma$。3. 存在唯一的 $\varrho \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ 使得 $\Pr(\alpha) = \varrho \in \Gamma$。4. 如果 $\Pr(\alpha) \geq \delta \in \Gamma$，那么存在一个 $\varrho \geq \delta$ 使得 $\Pr(\alpha) = \varrho \in \Gamma$。5. 如果 $\Pr(\alpha) \leq \delta \in \Gamma$，那么存在一个 $\varrho \leq \delta$ 使得 $\Pr(\alpha) = \varrho \in \Gamma$。6. 如果 $\Pr(\alpha) > 0 \in \Gamma$，那么存在唯一的 $\varrho \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ 使得 $\alpha \supset \Pr(\beta) = \varrho \in \Gamma$。7. 如果 $\alpha \supset \Pr(\beta) \geq \delta \in \Gamma$，那么存在一个 $\varrho \geq \delta$ 使得 $\alpha \supset \Pr(\beta) = \varrho \in \Gamma$。

证明。第1点和第2点的证明是例行的。

3）唯一性：引理 5.8，第 3条与 MP 规则蕴含，如果 $\Pr(\alpha) = \varrho \in \Gamma$，那么$\Pr(\alpha) \quad \delta \in \Gamma$ 每当 δ，ϱ。由于 Γ是一致的，那么，$\Pr(\alpha) = \delta \notin \Gamma$。

存在性：假设，对于所有$\varrho \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$，概率算子$(\alpha) = \varrho \notin \Gamma$。然后，根据 Γ的极大性，概率算子(α)，$\varrho \in \Gamma$；并且根据经典逻辑 $\top \to$ 概率算子(α)，$\varrho \in \Gamma$。因此，根据规则 $\bot^\omega$，$\top \to \bot \in \Gamma$。再次根据经典逻辑，$\bot \in \Gamma$，这与 Γ的一致性相矛盾。

4) 根据3.，存在一个 ϱ，使得概率算子$(\alpha) = \varrho \in \Gamma$，由此根据经典逻辑可得概率算子$(\alpha) \leq \varrho \in \Gamma$。为导出矛盾，假设 $\varrho < \delta$。那么根据公理 P4，后者意味着概率算子$(\alpha) < \delta \in \Gamma$。由于根据假设还有概率算子$(\alpha) \geq \delta \in \Gamma$，这与 Γ 的一致性相矛盾。

5) 这与 4. 的证明类似，使用引理 5.7,1.，而不是公理 P4。

6) 唯一性：假设对于某个 δ，ϱ，有 $\alpha \supset$ 概率算子$(\beta) = \delta \in \Gamma$。由引理 5.9, 1.，我们也有 $\alpha \supset$ 概率算子$(\beta) \quad \delta \in \Gamma$，因此，由公理 $O5_\wedge$, $\alpha \supset ($概率算子$(\beta) = \delta \wedge$ 概率算子$(\beta) \quad \delta) \in \Gamma$。由于 (概率算子$(\beta) = \delta \wedge$ 概率算子$(\beta) \quad \delta) \leftrightarrow \bot \in \Gamma$ 根据 T1 成立，我们由替换规则得到 $\alpha \supset \bot \in \Gamma$。由 O1b 可得概率算子$(\alpha) = 0 \in \Gamma$，而由于我们假设概率算子$(\alpha) > 0 \in \Gamma$，这与 Γ 的一致性矛盾。

存在性：由 3. 可知，存在唯一的 δ 使得 $\Pr(\alpha) = \delta$，并且存在唯一的 δ' 使得 $\Pr(\alpha \wedge \beta) = \delta'$。现在 δ 必定是> 0 （否则 Γ 是不一致的）；但由公理 O2，$\alpha \supset \Pr(\beta) = \frac{\delta'}{\delta} \in \Gamma$，如所需。

7) 由 6. 可知，要么 $\Pr(\alpha) > 0 \notin \Gamma$，要么存在一个 ϱ，使得$\alpha \supset \Pr(\beta) = \varrho \in \Gamma$。在前一种情况下，由$\Gamma$ 的极大性和公理 P2，可得 $\Pr(\alpha) = 0 \in \Gamma$。接着由公理 O1 和肯定前件式，可得 $\alpha \supset \Pr(\beta) = \delta$，如所需。

在后一种情况下，不失一般性，我们可以假设 $\Pr(\alpha) > 0 \in \Gamma$。反设 $\varrho < \delta$。那么根据引理 5.9, 2., 我们有 $\alpha \supset \Pr(\beta) < \delta \in \Gamma$。因此根据经典逻辑，$\Pr(\alpha) > 0 \wedge \alpha \supset \Pr(\beta) < \delta \in \Gamma$,

也就是说，$(\alpha \supset \Pr(\beta) \geq \delta)^C \in \Gamma$，这与 Γ 的一致性矛盾。□

我们为涉及反事实的公式表述一些类似的闭包性质。

引理 5.13. 设 Γ 是一个极大相容公式集。那么以下结论成立。

1. 若 $\varphi_{End(Y)} \in \Gamma$，则对所有 $w \in \mathrm{Ran}(W_Y)$，存在唯一的 $y \in \mathrm{Ran}(Y)$，使得 "$W_Y = w \boxrightarrow Y = y'' \in \Gamma$。 2. 存在唯一的 $\varrho \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$，使得 "$X = x \boxrightarrow$概率算子$(\alpha) = \varrho'' \in \Gamma$。

证明。1）唯一性：假设对于某些 y, y'，有 $W_Y = w \boxrightarrow Y = y \in \Gamma$ 且 $W_Y = w \boxrightarrow Y = y' \in \Gamma$。由后者，根据公理 A1 和规则 $\mathrm{Mon}_{\boxrightarrow}$，可得 $W_Y = w \boxrightarrow Y, y \in \Gamma$。根据公理 A2 和规则 $\mathrm{Mon}_{\boxrightarrow}$，可得 $W_Y = w \boxrightarrow \neg(Y = y) \in \Gamma$。根据公理 O4、T1 和规则 $\mathrm{Mon}_{\boxrightarrow}$，可得 $W_Y = w \boxrightarrow (Y = y)^C \in \Gamma$。于是，根据公理 C1，有 $W_Y = w \boxrightarrow (Y = y \wedge (Y = y)^C) \in \Gamma$。由于根据 T1 有 $\vdash (Y = y \wedge (Y = y)^C) \to \bot$，根据规则 $\mathrm{Mon}_{\boxrightarrow}$，可得 $W_Y = w \boxrightarrow \bot \in \Gamma$。最后，根据 C5 可得 $\bot \in \Gamma$，矛盾。

存在性：如果不存在满足该陈述的 y，则对于所有 $y \in \mathrm{Ran}(Y)$，都有 $(W_Y = w \boxrightarrow Y = y)^C \in \Gamma$，即 $W_Y = w \boxrightarrow \Pr(Y = y) < 1 \in \Gamma$，于是根据 T1 和 MP 规则，$\forall y \in \mathrm{Ran}(Y)\, W_Y = w \boxrightarrow \Pr(Y = y) < 1 \in \Gamma$。另一方面，由于 $\varphi_{End(Y)} \in \Gamma$，根据公理 C9，$W_Y = w \boxrightarrow \exists y \in \mathrm{Ran}(Y)\, Y = y \in \Gamma$，并且根据公理 C2, $\exists y \in \mathrm{Ran}(Y)(W_Y = w \boxrightarrow Y = y) \in \Gamma$。但由于这是 $(\forall y \in \mathrm{Ran}(Y)\, W_Y = w \boxrightarrow \Pr(Y = y) < 1)^C$，我们便与 Γ 的一致性相矛盾。

2）唯一性：假设$X = x \boxrightarrow$ 概率算子$(\alpha) = \varrho \in \Gamma$ 并且 $X = x \boxrightarrow$ 概率算子$(\alpha) = \varrho' \in \Gamma$，其中某些 ϱ，ϱ'。由于根据引理 5.8，3.，概率算子$(\alpha), \varrho' \vdash$ 概率算子$(\alpha), \varrho$，根据规则 $\mathrm{Mon}_{\boxrightarrow}$ 我们得到 $X = x \boxrightarrow$ 概率算子$(\alpha), \varrho \in \Gamma$。由于这是$X = x \boxrightarrow$ 概率算子$(\alpha) = \varrho \in \Gamma$ 的矛盾否定，我们发现这与 Γ的一致性相矛盾。

存在性：假设不存在这样的 ϱ。因此，根据 Γ 的极大性，对于所有 ϱ，$\in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ 有 $X = x \boxrightarrow \Pr(\alpha), \varrho \in \Gamma$。那么，根据公理 C8 和 T1 以及 MP 规则，$\Pr(X = x \boxrightarrow \alpha), \varrho \in \Gamma$。根据 T1 和 MP 规则，$\top \to \Pr(X = x \boxrightarrow \alpha), \varrho \in \Gamma$。因此，根据规则 $\bot^{\omega}$，$\top \to \bot \in \Gamma$，并且根据 T1+MP 规则，$\bot \in \Gamma$，产生矛盾。□

记住，W 表示Dom中所有变量的单射枚举。我们可以假设Dom 上的所有赋值都枚举为 $s_1, \ldots, s_n$。对于每个 $i = 1, \ldots, n$，我们将 $\hat{\alpha}_i$ 称为公式 $W = s_i(W)$。

引理 5.14。

1. If $i \neq j$, $\vdash (\hat{\alpha}_i \wedge \hat{\alpha}_j) \supset \bot$.

2. If $j \notin I$, $\vdash \Pr\left((\bigvee_{i \in I} \hat{\alpha}_i) \wedge \hat{\alpha}_j\right) = 0$.

证明。1）由于 s_i 和 s_j 不同，因此存在变量 V 和取值 v、v′，使得合取式 $V = v$ 出现在 $\hat{\alpha}_i$中。且合取式 $V = v'$ 出现在 $\hat{\alpha}_j$ 中。现在我们有：

1. $\vdash (\hat{\alpha}_i \wedge \hat{\alpha}_j) \to (V = v \wedge V = v')$ (T1)
2. $\vdash (V = v \wedge V = v') \to \bot$ (A1 + T1 + Rule MP)
3. $\vdash (\hat{\alpha}_i \wedge \hat{\alpha}_j) \to \bot$ (1., 2., T1 + Rule MP)
4. $\vdash (\hat{\alpha}_i \wedge \hat{\alpha}_j) \supset \bot$. (4., Rule →to⊃)

2）由第 1 点和 T2 可得 $\vdash ((W_{i \in I} \hat{\alpha}_i) \wedge \hat{\alpha}_j) \supset \bot$。结论由公理 O1b 得出。□

引理 5.15。设 Γ 是签名为 σ 的 $\mathcal{PCO}$公式的极大相容集，且 $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$，其中 n 是签名为 σ 的不同赋值的数量。对于每个 $i \in I$，记 ϱ_i 为 $[0,1]$ 中满足 $\Pr(\hat{\alpha}_i) = \varrho_i \in \Gamma$ 的唯一有理数（如引理 5.12 的第 3 点所给出）。则，

$$\Pr(\bigvee_{i \in I} \hat{\alpha}_i) = \sum_{i \in I} \epsilon_i \in \Gamma.$$

证明。根据引理 5.14，若 $k \notin J \subseteq I$，则$\vdash \Pr((W_{i \in J} \hat{\alpha}_i) \wedge \hat{\alpha}_k) = 0$。

然后，利用刚刚证明的公式族以及事实 $\Pr(\hat{\alpha}_i) = \varrho_i \in \Gamma$，对于 $i = 1, \ldots, n$，通过反复应用公理 P3，我们得到概率算子$(W_{i \in J} \hat{\alpha}_i) = P_{i \in J} \varrho_i \in \Gamma$。我们必须证明这些应用中的每一次都是允许的，即对于I 的一个固定枚举$i_1, \ldots, i_l$，并且对于每个 $m = 1, \ldots, l-1$，我们还必须证明 $P_{k=1 \ldots m} \varrho_{i_k}$ 与 $\varrho_{i_{m+1}}$ 的和为 ≤ 1。

我们通过对 m使用归纳法来证明。根据归纳假设，我们有 $P_{k=1 \ldots m} \varrho_{i_k} \leq 1$ and$\Pr(W_{k=1 \ldots m} \hat{\alpha}_{i_k}) = P_{k=1 \ldots m} \varrho_{i_k} \in \Gamma$。根据引理 5.14，我们还有 $\Pr((W_{k=1 \ldots m} \hat{\alpha}_i) \wedge \hat{\alpha}_{i_{m+1}}) = 0 \in \Gamma$。因此，根据公理 P3b，$\Pr(\hat{\alpha}_{i_{m+1}}) \leq 1 - P_{k=1 \ldots m} \varrho_{i_k} \in \Gamma$。因此，根据引理5.12，5.，存在一个 $\delta \leq 1 - P_{k=1 \ldots m} \varrho_{i_k}$，使得 $\Pr(\hat{\alpha}_{i_{m+1}}) = \delta \in \Gamma$。此外，由于 $\Pr(\hat{\alpha}_{i_{m+1}}) = \varrho_{i_{m+1}} \in \Gamma$，根据引理 5.12，3.（唯一性），我们得到 $\delta = \varrho_{i_{m+1}}$，因此 $P_{k=1 \ldots m} \varrho_{i_k} + \varrho_{i_{m+1}} = P_{k=1 \ldots m} \varrho_{i_k} + \delta \leq P_{k=1 \ldots m} \varrho_{i_k} + 1 - P_{k=1 \ldots m} \varrho_{i_k} = 1$，正如所需。

□

5.4 典范因果多团队

现在让我们看看，如何从一个公式的极大相容集 Γ 构造出一个"规范的"因果多团队 $\mathbb{T} = (\mathbb{T}^-, \mathcal{F})$。再次令 W 为 Dom 中所有变量的一个单射枚举，并假设 Dom 上的赋值被枚举为 $s_1, \ldots, s_n$. 我们将 $\hat{\alpha}_i W = s_i(W)$ 记作公式。现在，根据引理 5.12 的第 3 点，对于每个 i，恰好存在一个 $\varrho_i \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$，使得 $\Pr(\hat{\alpha}_i) = \varrho_i \in \Gamma$。令 d 为 ϱ_i 的一个公分母，从而 $\varrho_i = m_i/d$。

- 令 $\mathbb{T}^-$ 包含 m_i 个赋值 s_i的副本。
- 如果 $\varphi_{结束}(Y) \notin \Gamma$，令 Y 为外生变量。
- 若 $\varphi_{End}(Y) \in \Gamma$，令 Y 为一个内生变量，并令$\mathcal{F}_Y$：$\mathrm{Ran}(W_Y) \to \mathrm{Ran}(Y)$ 为将 $w \in \mathrm{Ran}(W_Y)$ 分配给唯一值 $y \in \mathrm{Ran}(Y)$ 的函数，使得$W_Y = w \boxrightarrow Y = y$（其存在性由引理 5.13, 1. 保证）。

图$G_{\mathbb{T}}$ 的 $\mathbb{T}$ 随后按通常方式获得：从这样一张图开始，其中每个内生变量都有来自所有其他变量的箭头；然后移除所有与虚设自变量相对应的箭头。

我们证明 $\mathbb{T}$ 的一些关键性质。

引理 5.16。设 $\mathbb{T}$ 如上由极大一致集 Γ 构造而成。

1. $\mathbb{T}$ 是一个因果多团队。 2. $\mathbb{T}$ 是递归的，即 $G_{\mathbb{T}}$ 是无环的。 3. $P_{i=1..n}\varrho_i = 1$。 4. $|\mathbb{T}^-| = d$。 5. $P_{\mathbb{T}}(\hat{\alpha}_i) = \varrho_i$。 6. 对所有 $\beta \in CO_\sigma$，$P_{\mathbb{T}}(\beta) = P_{i(s_i,\mathcal{F})\models\beta}\varrho_i$。

证明。1)我们需要验证，每个在 $\mathbb{T}^-$ 中至少有一个副本的赋值都与 $\mathcal{F}$ 兼容。如果 V 是 $\mathcal{F}$ 的外生变量，我们无需进行任何验证。因此，设 V 为内生变量。假设给定赋值 $s \in \mathbb{T}^-$不满足兼容性约束：那么$s(V) \neq \mathcal{F}_V(s(\mathbf{W}_V))$。根据 $\mathbb{T}^-$ 的构造，

$$\Pr(\mathbf{W}_V = s(\mathbf{W}_V) \wedge V = s(V)) = \epsilon \in \Gamma, \text{ for some } \epsilon > 0.$$

另一方面，根据 A1 和 T1，我们有

$$\mathbf{W}_V = s(\mathbf{W}_V) \wedge V = s(V) \vdash \mathbf{W}_V = s(\mathbf{W}_V) \wedge V \neq \mathcal{F}_V(s(\mathbf{W}_V)).$$

因此，由定理5.2可得

$$(*): \Pr(\mathbf{W}_V = s(\mathbf{W}_V) \wedge V = \mathcal{F}_V(s(\mathbf{W}_V))) \geq \epsilon \in \Gamma.$$

另一方面，根据 $\mathcal{F}$的构造，我们得到 $W_V = s(W_V) \boxrightarrow V = \mathcal{F}_V(s(W_V)) \in \Gamma$。根据公理模式 T2，$V = \mathcal{F}_V(s(W_V)) \equiv (\neg(V = \mathcal{F}_V(s(W_V))) \supset \bot) \in \Gamma$，并根据 O4 和 T1，

$$V = \mathcal{F}_V(s(\mathbf{W}_V)) \leftrightarrow (\neg(V = \mathcal{F}_V(s(\mathbf{W}_V))) \supset \bot) \in \Gamma.$$

因此$W_V = s(W_V) \boxrightarrow (\neg(V = \mathcal{F}_V(s(W_V))) \supset \bot) \in \Gamma$随后由替换规则。根据公理 O3，

$$(\mathbf{W}_V = s(\mathbf{W}_V) \boxrightarrow \neg(V = \mathcal{F}_V(s(\mathbf{W}_V)))) \supset (\mathbf{W}_V = s(\mathbf{W}_V) \boxrightarrow \bot) \in \Gamma.$$

上述后件蕴含 $\bot$ 根据 C5，因此根据$\text{Mon}_\supset$我们有$(W_V = s(W_V) \boxrightarrow \neg(V = \mathcal{F}_V(s(W_V)))) \supset \bot \in \Gamma$，即$\neg(W_V = s(W_V) \boxrightarrow \neg(V = \mathcal{F}_V(s(W_V)))) \in \Gamma$。根据 A2 和 Rep，我们得到 $\neg(W_V = s(W_V) \boxrightarrow V = \mathcal{F}_V(s(W_V))) \in \Gamma$。然后，根据 P1，概率算子 $(\neg(W_V = s(W_V) \boxrightarrow V = \mathcal{F}_V(s(W_V)))) = 1 \in \Gamma$。根据经典逻辑

$$\Pr(\neg(\mathbf{W}_V = s(\mathbf{W}_V) \boxrightarrow V \neq \mathcal{F}_V(s(\mathbf{W}_V)))) \geq 1 \in \Gamma,$$

因此，根据 $\leq$ 的缩写定义，

$$\Pr(\mathbf{W}_V = s(\mathbf{W}_V) \boxrightarrow V \neq \mathcal{F}_V(s(\mathbf{W}_V))) \leq 0 \in \Gamma.$$

因此，根据 P2，$\Pr(W_V = s(W_V) \boxrightarrow V = \mathcal{F}_V(s(W_V))) = 0 \in \Gamma$。因此，根据 P4，$\Pr(W_V = s(W_V) \boxrightarrow V = \mathcal{F}_V(s(W_V))) < \varrho \in \Gamma$，这与 (*) 矛盾。

2) 首先，我们证明 $X \in PA_Y$ 蕴含 $\varphi_{DC(X,Y)} \in \Gamma$。假设 $\varphi_{DC(X,Y)} \notin \Gamma$。那么，由于 Γ 在证明下封闭，根据公理 T1，(**) 也必然成立：

$$((\mathbf{W}_{XY} = \mathbf{w} \wedge X = x) \boxrightarrow Y = y) \wedge ((\mathbf{W}_{XY} = \mathbf{w} \wedge X = x') \boxrightarrow Y = y') \notin \Gamma$$

对于每个 w, x , x′, y , y′.

注意，我们可以假设Y 是一个内生变量；否则，自动有 $X \notin PA_Y = \emptyset$。请记住，根据 $\mathbb{T}$ 的构造，我们有 $\varphi_{End(Y)} \in \Gamma$。

由于 Y 是内生的，根据 $\mathbb{T}$ 的定义，对于所有 wx，我们有 $(W_{XY} = w \wedge X = x) \boxrightarrow Y = \mathcal{F}_Y(wx) \in \Gamma$。因此，根据 (**) 的相应实例，我们必然得出：对于所有 x′，x 和 y′，$\mathcal{F}_Y(wx)$，$(W_{XY} = w \wedge X = x') \boxrightarrow Y = y' \notin \Gamma$；但根据公理 C9（以及 T1），由于 $\varphi_{End(Y)} \in \Gamma$，$(W_{XY} = w \wedge X = x') \boxrightarrow Y = \mathcal{F}_Y(wx) \in \Gamma$。换言之，对于所有 w，都存在一个取值 y_w，使得对于所有取值 $x \in \text{Ran}(X)$，$(W_{XY} = w \wedge X = x) \boxrightarrow Y = y_w \in \Gamma$。根据 $\mathbb{T}$ 的构造，这说明 X 是 $\mathcal{F}_Y$ 的虚设自变量，即 $X \notin PA_Y$。

其次，我们注意到 $\varphi_{DC(X,Y)} \vdash X \rightsquigarrow Y$。事实上，$\varphi_{DC(X,Y)}$ 是 $X \rightsquigarrow Y$ 的若干析取支之一，因此由 T2 可从中推出 $X \rightsquigarrow Y$。

现在假设 $\mathbb{T}$ 不是递归的，也就是说，存在变量 $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 2)$，使得对 $i = 1, \ldots, n-1$，均有 $X_i \in PA_{X_{i+1}}$，并且 $X_n \in PA_{X_1}$。那么根据上述内容，我们有 $X_1 \rightsquigarrow X_2, \ldots, X_{n-1} \rightsquigarrow X_n$，$X_n \rightsquigarrow X_1 \in \Gamma$。另一方面，由 $X_1 \rightsquigarrow X_2, \ldots, X_{n-1} \rightsquigarrow X_n \in \Gamma$，根据公理 C11 可得 $(X_n \rightsquigarrow X_1)^C \in \Gamma$，这与 Γ 的一致性矛盾。

3) 由于按照 $\mathbb{T}$ 的定义，对于每个 $i \in I$，$\Pr(\hat{\alpha}_i) = \varrho_i \in \Gamma$，由引理 5.15 可知，$\Pr(W_{i=1..n}\hat{\alpha}_i) = P_{i=1..n}\varrho_i \in \Gamma$。另一方面，由公理 A3 和 P1 可得 $\Pr(W_{i=1..n}\hat{\alpha}_i) = 1 \in \Gamma$。因此，由引理 5.12、2.（唯一性），$P_{i=1..n}\varrho_i = 1$。

4) 由 3. 可得 $1 = P_{i=1..n}\varrho_i = P_{i=1..n}m_i d$，这意味着 $P_{i=1..n}m_i = d$。但随后，由于根据定义，$\mathbb{T}^-$ 包含 m_i 个每个赋值 s_i 的副本，其基数为 d。

5)根据定义，$P_{\mathbb{T}}(\hat{\alpha}_i) = P_{s \in \mathbb{B}_{\sigma^-}(s_i,\mathcal{F})\models\hat{\alpha}_i} \#(s,\mathbb{T}) / \#(\mathbb{T}^-) = \#(s_i,\mathbb{T})d / m_i d = \varrho_i$，其中第三个等式使用了4。 6) 我们有 $P_{\mathbb{T}}(\beta) = P_{\mathbb{T}}(W_{i(s_i,\mathcal{F})\models\beta}\hat{\alpha}_i) = P_{i(s_i,\mathcal{F})\models\beta}P_{\mathbb{T}}(\hat{\alpha}_i) = P_{i(s_i,\mathcal{F})\models\beta}\varrho_i$，其中最后一个等式使用了5。 □

引理 5.17。按上述方式写作 Γ 和 $\mathbb{T} = (\mathbb{T}^-, \mathcal{F})$，我们有 $\Phi^{\mathcal{F}} \in \Gamma$。

证明。注意，如果 $V \in \text{End}(\mathcal{F})$，那么，根据 $\mathbb{T}$、$\varphi_{End(V)} \in \Gamma$ 的定义，此外，$\eta_\sigma(V)$ 的每个合取项都属于 Γ。

如果相反$V \in \text{Exo}(\mathcal{F})$，根据 $\mathbb{T}$的定义，$\varphi_{End(V)} \notin \Gamma$。因此，根据 Γ的极大性，$(\varphi_{End(V)})^C \in \Gamma$，所以，根据公理 C10，$V = v \supset (W_V = w \boxrightarrow V = v)$对每个 v 和 w 都成立。因此 $\xi_\sigma(V)$ 属于 Γ。 □

引理 5.18。设 $\beta \in CO_\sigma$ 和 $\hat{\alpha}_i$ 公式如上定义。对于任意 $\varrho \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ 以及签名为 σ 的任意函数分量$\mathcal{F}$，我们有：

$$\vdash \Phi^{\mathcal{F}} \rightarrow (\Pr(\beta) = \epsilon \leftrightarrow \Pr\left(\bigvee_{i|(\{s_i(i/Key)\},\mathcal{F})\models\beta} \hat{\alpha}_i\right) = \epsilon).$$

证明。注意，陈述中的公式可由 $\vdash \Phi^{\mathcal{F}} \rightarrow (\beta \equiv W_{i(\{s_i(i/\text{键})\},\mathcal{F})\models\beta}\hat{\alpha}_i$ 经公理 P1、P6 和替换规则立即推出。由于后者是一个 CO 公式，根据定理 5.6，只需证明它在语义上有效。

设 $\mathbb{T} = (T^-, \mathcal{G})$ 是一个签名为 σ 的因果多团队，并假设 $\mathbb{T} \models \Phi^{\mathcal{F}}$。那么（参见第 3.1 节中的说明）$\mathcal{G} = \mathcal{F}$。根据 CO 的平坦性，我们只需证明：若 $t \in T^-$，则 $(\{t\}, \mathcal{F}) \models \beta$ 当且仅当 $(\{t\}, \mathcal{F}) \models W\,i(\{s_i(i/键)\}, \mathcal{F}) \models_\beta \hat{\alpha}_i$。然而，每个 $t \in T^-$ 都具有 $s_i(k/键)$ 的形式，其中某个 $i \in \{1, \ldots\ldots, n\}$，且 $k \in \mathbb{N}$。显然，$(\{t\}, \mathcal{F}) \models \beta$ 当且仅当 $(\{s_i(i/键)\}, \mathcal{F}) \models \beta$，因为键的取值不会影响公式的满足性。但根据 $\hat{\alpha}_i$ 的定义，$(\{s_i(i/键)\}, \mathcal{F}) \models \hat{\alpha}_i$；因此 $(\{t\}, \mathcal{F}) \models \beta$ 当且仅当 $(\{s_i(i/键)\}, \mathcal{F}) \models \hat{\alpha}_i$ 当且仅当 $(\{s_i(i/键)\}, \mathcal{F}) \models W\,i(\{s_i(i/键)\}, \mathcal{F}) \models_\beta \hat{\alpha}_i$；最后，如前所述，当且仅当 $(\{t\}, \mathcal{F}) \models W\,i(\{s_i(i/键)\}, \mathcal{F}) \models_\beta \hat{\alpha}_i$。 □

引理 5.19。设 α、$\beta \in CO_\sigma$、$\delta \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{T}$、Γ 如前所述。

1. $P_{\mathbb{T}}(\beta) = \delta$ 当且仅当 $\Pr(\beta) = \delta \in \Gamma$。2. 若 $P_{\mathbb{T}}(\beta \mid \alpha) = \delta$，则 $\alpha \supset \Pr(\beta) = \delta \in \Gamma$。3. 若 $\alpha \supset \Pr(\beta) = \delta \in \Gamma$，则 T^α 为空，或 $P_{\mathbb{T}}(\beta \mid \alpha) = \delta$。

证明。2）注意，$P_{\mathbb{T}}(\alpha) = P\,i(s_i, \mathcal{F}) \models_\alpha \varrho_i$。由引理 5.15 可知，$\Pr(W\,i(s_i, \mathcal{F}) \models_\alpha \hat{\alpha}_i) = P\,i(s_i, \mathcal{F}) \models_\alpha \varrho_i \in \Gamma$。因此，由引理 5.17 和引理 5.18 可得（1）：$\Pr(\alpha) = P\,i(s_i, \mathcal{F}) \models_\alpha \varrho_i \in \Gamma$。同理，可得（2）：$\Pr(\alpha \wedge \beta) = P\,i(s_i, \mathcal{F}) \models_{\alpha \wedge \beta} \varrho_i \in \Gamma$。

此外，注意 (1) 中右侧的项为 > 0，这是因为根据假设，$P_{\mathbb{T}}(\cdot \mid \alpha)$ 有定义。因此，我们可以对 (1)、(2) 应用公理 O2，得到

$$\alpha \supset \Pr(\beta) = \frac{\sum_{i \mid (s_i, \mathcal{F}) \models \alpha \wedge \beta} \epsilon_i}{\sum_{i \mid (s_i, \mathcal{F}) \models \alpha} \epsilon_i} \in \Gamma.$$

但该公式中出现的数值，根据引理 5.16，5.，正是 $P_{\mathbb{T}}(\alpha \wedge \beta)$ $P_{\mathbb{T}}(\alpha) = P_{\mathbb{T}}(\beta \mid \alpha)$。

3) 根据引理 5.12，3.，我们得到存在唯一的 δ'，使得 $\Pr(\alpha) = \delta' \in \Gamma$。根据引理 5.17 和引理 5.18，我们得到 $\Pr(W\,i(s_i, \mathcal{F}) \models_\alpha \hat{\alpha}_i) = \delta' \in \Gamma$。同样，根据引理 5.15，我们还得到 $\Pr(W\,i(s_i, \mathcal{F}) \models_\alpha \hat{\alpha}_i) = P\,i(s_i, \mathcal{F}) \models_\alpha \varrho_i \in \Gamma$。因此，再根据引理 5.12，3.（唯一性），$\delta' = P\,i(s_i, \mathcal{F}) \models_\alpha \varrho_i$。

首先，假设 $\delta' = 0$。那么 $P\,i(s_i, \mathcal{F}) \models_\alpha \varrho_i = 0$，因此对于任何满足 $(s_i, \mathcal{F}) \models \alpha$ 的 i，均有 $\varrho_i = 0$。换言之，根据 $\mathbb{T}^-$ 的构造，$\#(s_i, \mathbb{T}) = 0$。因此 T^α 为空。

反之，假设 $\delta' > 0$。那么根据引理 5.7 的 1.，我们有 概率算子(α) $> 0 \in \Gamma$。但根据引理 5.12 的 6.，存在唯一的 δ 使得 $\alpha \supset$ 概率算子(β) $= \delta \in \Gamma$。首先假设 $\delta = 0$；那么，由于 概率算子(α) $> 0 \in \Gamma$，根据公理 O2 和引理 5.12 的 3.，也必有 概率算子($\alpha \wedge \beta$) $= 0 \in \Gamma$。于是，$0 = P\,i(s_i, \mathcal{F}) \models_{\alpha \wedge \beta} \varrho_i$，根据引理 5.17、5.18 和 5.15，因此根据引理 5.16 的 6.，$P_{\mathbb{T}}(\alpha \wedge \beta) = 0$。因此，

$$P_{\mathbb{T}}(\beta \mid \alpha) = \frac{P_{\mathbb{T}}(\alpha \wedge \beta)}{P_{\mathbb{T}}(\alpha)} = \frac{\sum_{i \mid (s_i, \mathcal{F}) \models \alpha \wedge \beta} \epsilon_i}{P_{\mathbb{T}}(\alpha)} = 0 = \delta.$$

若 $\delta > 0$，我们可以应用公理O3，从而得到概率算子($\alpha \wedge \beta$) $= \delta \cdot \delta' \in \Gamma$。根据引理 5.17 和引理 5.18，我们于是有概率算子($W\,i(s_i, \mathcal{F}) \models_{\alpha \wedge \beta} \hat{\alpha}_i$) $= \delta \cdot \delta' \in \Gamma$。按照之前的推理，我们随后得到 $\delta \cdot \delta' = P\,i(s_i, \mathcal{F}) \models_{\alpha \wedge \beta} \varrho_i$。但随后

$$P_{\mathbb{T}}(\beta \mid \alpha) = \frac{P_{\mathbb{T}}(\alpha \wedge \beta)}{P_{\mathbb{T}}(\alpha)} = \frac{\sum_{i \mid (s_i, \mathcal{F}) \models \alpha \wedge \beta} \epsilon_i}{\sum_{i \mid (s_i, \mathcal{F}) \models \alpha} \epsilon_i} = \frac{\delta \cdot \delta'}{\delta'} = \delta,$$

其中在第二个等式中，我们使用了引理 5.16，6。

1) 根据 2. 和 3.，我们有 $P_{\mathbb{T}}(\beta) = P_{\mathbb{T}}(\beta \mid \top) = \delta$ 当且仅当$\top \supset$ 概率算子(β) $= \delta \in \Gamma$。然而，我们可以证明 $\top \supset$ 概率算子(β) $= \delta \in \Gamma$ 当且仅当 概率算子(β) $= \delta \in \Gamma$，于是即可完成证明。

假设 $\top \supset$ 概率算子(β) $= \delta \in \Gamma$。我们还有 $\top \in \Gamma$。因此，根据定理 5.4，1.，概率算子(β) $= \delta \in \Gamma$。

反过来，假设 $\Pr(\beta) = \delta \in \Gamma$。根据 T2，$\beta \equiv (\top \wedge \beta) \in \Gamma$；因此，根据 P1，$\Pr(\beta \equiv (\top \wedge \beta)) = 1 \in \Gamma$；接着，根据公理 P6 和 MP 规则，(*): $\Pr(\top \wedge \beta) = \delta \in \Gamma$。另一方面，根据 T1，$\top \in \Gamma$；接着，根据 P1，(**): $\Pr(\top) = 1 \in \Gamma$。然后，根据公理 O2，对 (**) 和 (*) 应用 MP 规则，得到 $\top \supset \Pr(\beta) = \delta \in \Gamma$。 □

5.5 关键引理与结论

我们将利用这样一个事实：每个 $\mathcal{PCO}$ 公式都可以化为范式（这也更接近因果推断中使用的形式体系）。

定理5.20（Pearl 风格范式）。每个 $\mathcal{PCO}_\sigma$ 公式 φ 都可证明地等价于一个 $\mathcal{PCO}_\sigma$ 公式 φ'，满足：

1. $\square\!\!\rightarrow$ 的所有后件都是概率原子 2. $\supset$ 的所有后件都是反事实或概率原子。

证明。1. 可通过先使用公理 C1-2-3-4-4b 将 $\square\!\!\rightarrow$ 向内推进（或使用公理 C5 去除 $\square\!\!\rightarrow$ 的出现），最后根据公理 P1 和 T1，将所有形如 $X = x$（分别为 X, x）的后件替换为 $\Pr(X = x) \geq 1$（分别为 $\Pr(X, x) \geq 1$）来得到。上述每一步都可能需要使用替换规则。

完成第1步后，我们应用公理 $O5_\wedge$-$O5_\sqcup$-$O5_\supset$，以及替换规则，将 $\supset$ 向内推进，直到它位于反事实或原子公式之前（如果后者不是概率性的，则像上文一样，使用公理P1和T1对其进行替换）。 □

引理5.21（真引理）。设 Γ 和 $\mathbb{T}$ 如前所述。

1. *For all $\alpha \in CO$ and $\varphi \in \mathcal{PCO}$, $\mathbb{T}^\alpha \models \varphi \iff \alpha \supset \varphi \in \Gamma$.*
2. *For all $\varphi \in \mathcal{PCO}$, $\mathbb{T} \models \varphi \iff \varphi \in \Gamma$.*

证明。首先注意，第2点由第1点推出。事实上，第1点特别表明，对于所有 $\varphi \in \mathcal{PCO}$、$\mathbb{T}^\top \models \varphi \iff \top \supset \varphi \in \Gamma$，均有此结论。现在，一方面，$\mathbb{T}^\top = \mathbb{T}$。另一方面，如5.19的证明第1步所示，$\top \supset \varphi \in \Gamma$ 当且仅当 $\varphi \in \Gamma$。

下面证明第1点；我们将对 φ 进行归纳。根据定理5.20，我们可以假设其中的所有反事实均具有 $X = x \ \square\!\!\rightarrow$ 概率算子(β) $\triangleright$ ϱ ($\triangleright$=$\geq$ 或 $>$) 或 $X = x \ \square\!\!\rightarrow$ 概率算子(β) $\triangleright$ 概率算子(γ) 的形式，并且 $\supset$ 只出现在反事实或概率原子公式之前。此外，我们可以应用公理C8和C8b（以及替换规则），将形如 $X = x \ \square\!\!\rightarrow$ 概率算子(β) $\triangleright$ ϱ 的子公式转换为概率算子($X = x \ \square\!\!\rightarrow \beta$) $\triangleright$ ϱ，并将形如 $X = x \ \square\!\!\rightarrow$ 概率算子(β) $\triangleright$ 概率算子(γ) 的子公式转换为概率算子($X = x \ \square\!\!\rightarrow \beta$) $\triangleright$ 概率算子($X = x \ \square\!\!\rightarrow \gamma$)。因此，归纳法只有4个基本情形，即 φ 具有概率算子(β) $\triangleright$ ϱ 或概率算子(β) $\triangleright$ 概率算子(γ) 的形式；对于 $\square\!\!\rightarrow$，则没有归纳情形。

- 基本情形：φ 是 $\Pr(\beta) \triangleright \varrho$。假设 $\alpha \supset \varphi \in \Gamma$。注意，如果 $\triangleright$ 是 $>$，根据引理5.7的 2. 和规则 $\text{Mon}_\supset$，我们仍然得到 $\alpha \supset \Pr(\beta) \geq \varrho \in \Gamma$。根据引理 5.12 的 7.，有

是一个 $\delta \geq \varrho$，使得 $\alpha \supset$ 概率算子$(\beta) = \delta \in \Gamma$。根据引理 5.19 的第 3 条，我们于是有：要么 $\mathbb{T}^\alpha$ 为空，要么 $P_{\mathbb{T}}(\beta \mid \alpha) = \delta$。前一种情况由空团队性质可立即推出 $\mathbb{T}^\alpha \models$ 概率算子$(\beta) \rhd \varrho$。后一种情况意味着 $P_{\mathbb{T}}(\beta \mid \alpha) \geq \varrho$，因此当 $\rhd$ 为 $\geq$时，结论成立。否则，若$\rhd$为 $>$，注意若 $\delta > \varrho$，结论成立；否则，若$\delta = \varrho$，$\alpha \supset$ 概率算子$(\beta) = \varrho \in \Gamma$ 和 $\alpha \supset$ 概率算子$(\beta) > \varrho \in \Gamma$ 通过 T1 和规则 $\text{Mon}_\supset$ 推出 $\alpha \supset \bot \in \Gamma$，进而由 O1b 得到 概率算子$(\alpha) = 0 \in \Gamma$。根据引理 5.16 的第 6 条，这意味着 $P_{\mathbb{i}(s,\mathcal{F})\models\alpha} \varrho_i = 0$，即 $\mathbb{T}^\alpha$ 为空，因此再次由空团队性质得到 $\mathbb{T}^\alpha \models$ 概率算子$(\beta) \rhd \varrho$。

反之，假设 $\mathbb{T}^\alpha \models$ 概率算子$(\beta) \rhd \varrho$。因此，要么 $\mathbb{T}^\alpha$为空，要么 $P_{\mathbb{T}}(\beta \mid \alpha) \rhd \varrho$。在第一种情况下，我们有 $P_{\mathbb{T}}(\alpha) = P_{\mathbb{i}(s,\mathcal{F})\models\alpha} P_{\mathbb{T}}(\hat{} \alpha_i) = 0$。然后，对于每个这样的 i，都有 $P_{\mathbb{T}}(\hat{\alpha}_i) = 0$，因此，根据 $\mathbb{T}^-$ 的定义，概率算子$(\hat{\alpha}_i) = 0 \in \Gamma$。于是，如同引理 5.16的证明第 3步中那样，我们得到概率算子$(W_{\mathbb{i}(s,\mathcal{F})\models\alpha} \hat{\alpha}_i) = 0 \in \Gamma$，然后根据引理5.17 和引理 5.18，概率算子$(\alpha) = 0 \in \Gamma$。因此，根据公理O1，$\alpha \supset$概率算子$(\beta) \rhd \varrho \in \Gamma$，正如所需。

反之，若 $P_{\mathbb{T}}(\beta \mid \alpha) \rhd \varrho$，则存在一个 $\delta \rhd \varrho$，使得 $P_{\mathbb{T}}(\beta \mid \alpha) = \delta$。因此，根据引理 5.19，2.，有 $\alpha \supset \Pr(\beta) = \delta \in \Gamma$。因此，根据引理 5.9，3.（若 $\rhd$=>，则还需用到 1.），我们得到$\alpha \supset \Pr(\beta) \rhd \varrho \in \Gamma$，这正是所需。

- 基础情形：φ 是 $\Pr(\beta) \rhd \Pr(\gamma)$。假设 $\alpha \supset \Pr(\beta) \rhd \Pr(\gamma) \in \Gamma$。先假设 $\Pr(\alpha) = 0 \in \Gamma$。那么，根据引理 5.19，1.，有 $P_{\mathbb{T}}(\alpha) = 0$。因此 $\mathbb{T}^\alpha$ 为空，进而 $\mathbb{T}^\alpha \models \Pr(\beta) \rhd \Pr(\gamma)$。反之，若 $\Pr(\alpha) = 0 \notin \Gamma$，根据引理 5.12，3.，存在一个 $\varrho > 0$，使得 $\Pr(\alpha) = \varrho \in \Gamma$。因此，根据引理 5.19，1.，有 $P_{\mathbb{T}}(\alpha) = \varrho > 0$，即 $\mathbb{T}^\alpha$ 非空。另一方面，根据 Γ 的极大性，我们有 $\Pr(\alpha) \quad 0 \in \Gamma$，因此，根据 P2 和 T1，$\Pr(\alpha) > 0 \in \Gamma$。于是，根据引理 5.12，6.，存在唯一的 δ、δ'，使得（*）：$\alpha \supset \Pr(\beta) = \delta \in \Gamma$ 且 $\alpha \supset \Pr(\gamma) = \delta' \in \Gamma$。接着，根据引理 5.19，3.，由于$\mathbb{T}^\alpha$非空，我们得到 $P_{\mathbb{T}}(\beta \mid \alpha) = \delta$ 且 $P_{\mathbb{T}}(\gamma \mid \alpha) = \delta'$。因此，只要证明 $\delta \rhd \delta'$，就完成了。先假设 $\rhd$ 是 $\geq$，并反设 $\delta < \delta'$。于是，由（*）、公理 CP2 和规则 $\text{Mon}_\supset$，我们得到 $\alpha \supset \Pr(\gamma) > \Pr(\beta) \in \Gamma$。由于 $\Pr(\gamma) > \Pr(\beta)$ 是 $(\Pr(\beta) \geq \Pr(\gamma))$C，我们由 T1 和规则 $\text{Mon}_\supset$得到$\alpha \supset \bot \in \Gamma$，继而由公理 O1b 得到 $\Pr(\alpha) = 0 \in \Gamma$，这与假设矛盾。反之，若 $\rhd$ 是 $>$，则反设$\delta \leq \delta'$。于是，由公理 CP1 和规则 $\text{Mon}_\supset$，我们得到$\alpha \supset \Pr(\gamma) \geq \Pr(\beta) \in \Gamma$，接下来按前述方法继续即可。

反之，假设 $\mathbb{T} \models \alpha \supset$ 概率算子$(\beta) \rhd$ 概率算子(γ)。那么，要么$\mathbb{T}^\alpha$ 为空，要么 $\delta := P_{\mathbb{T}}(\beta \mid \alpha) \rhd P_{\mathbb{T}}(\gamma \mid \alpha) =: \delta'$。在第一种情况下，根据引理 5.19，第 1 点，我们有概率算子$(\alpha) = 0 \in \Gamma$。因此，根据公理 O1，$\alpha \supset$ 概率算子$(\beta) \rhd$ 概率算子$(\gamma) \in \Gamma$。在第二种情况下，根据引理 5.19，第 2 点，我们有 $\alpha \supset$ 概率算子$(\beta) = \delta$ 和$\alpha \supset$ 概率算子$(\gamma) = \delta'$ 属于 Γ。因此，根据公理 CP1（或 CP2）和规则 $\text{Mon}_\supset$, $\alpha \supset$ 概率算子$(\beta) \rhd$ 概率算子$(\gamma) \in \Gamma$。

- 情形 φ 是 $\psi \wedge \chi$。那么 $\mathbb{T} \models \alpha \supset \varphi$ 当且仅当 $\mathbb{T}^\alpha \models \psi \wedge \chi$ 当且仅当 $\mathbb{T}^\alpha \models \psi$ 且 $\mathbb{T}^\alpha \models \chi$ 当且仅当（根据归纳假设）$\alpha \supset \psi \in \Gamma$ 且 $\alpha \supset \chi \in \Gamma$。这等价于 $\alpha \supset (\psi \wedge \chi) \in \Gamma$（根据 T1 和 $\text{O5}_\wedge$）。
- 情形 φ 为 $\psi \sqcup \chi$。这与前面的前一种情况，使用 T1 和 $\text{O5}_\sqcup$。
- 情形 φ 是 $\alpha' \supset \chi$。则 $\mathbb{T} \models \alpha \supset \varphi$ 当且仅当（$\mathbb{T}^\alpha$）$^{\alpha\ \prime} \models \chi$当且仅当 $\mathbb{T}^{\alpha\wedge\alpha'} \models \chi$当且仅当（根据归纳假设）$(\alpha \wedge \alpha') \supset \chi \in \Gamma$。根据公理 $\text{O5}_\supset$，后者等价于 $\alpha \supset (\alpha' \supset \chi) \in \Gamma$，即 $\alpha \supset \varphi \in \Gamma$。

□

定理 5.22（强完备性）。设 σ 是一个签名且 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{PCO}_\sigma$。那么 $\Gamma \models \varphi$ 蕴含 $\Gamma \vdash \varphi$。

证明。假设 $\Gamma \nvdash \varphi$。则 Γ，$\varphi^C \nvdash \bot$（否则根据演绎定理 $\Gamma \vdash \varphi^C \to \bot$，然后根据公理 T1和MP 规则，$\Gamma \vdash \varphi$）；换言之，$\Gamma \cup \{\varphi^C\}$ 是相容的。因此根据引理5.11，存在一个极大相容集 $\Gamma' \supseteq \Gamma \cup \{\varphi^C\}$。令 $\mathbb{T}$ 为由Γ' 构造的典范因果多重团队（根据引理 5.16，这是一个递归因果多重团队）。根据真值引理5.21，$\mathbb{T} \models \Gamma$ 和 $\mathbb{T} \models \varphi^C$。因此 $\mathbb{T} \models \Gamma$和$\mathbb{T} \not\models \varphi$，从而 $\Gamma \not\models \varphi$。

□

6 结论

我们为一种用于概率反事实推理的语言 $\mathcal{PCO}$ 构建了一个强完备公理系统（不含算术运算）。与干预主义反事实文献中的大多数类似结果一样，我们假设签名是有限的；值得探究的是，(Halpern and Peters, 2022) 最近提出的用于公理化无限签名的方法能否扩展到我们的情形。我们的系统包含无穷规则，因此自然会让人想知道能否得到有限规则的公理化。由于紧致性失效，这种公理化至多只能实现弱完备性。

另一个密切相关且亟待解决的公理化问题是：(Barbero 和 Sandu, 2023) 考虑了 $\mathcal{PCO}^\omega$ $\mathcal{PCO}$ 的一个扩展，其中包含全局析取 $\sqcup$ 的可数无穷版本。这种不可数语言的表达能力远强于 $\mathcal{PCO}$，并且可以证明，从某种意义上说，它涵盖了概率干预主义反事实语言应具备的所有表达资源。鉴于这种语言在语义上的特殊作用，值得探究能否为其构建一个（无穷规则的）强完备公理化。要为不可数语言和无穷公理系统证明林登鲍姆引理，会遇到特殊困难，例如 (B´ılkov´a et al., 2018) 中所讨论的那些。

致谢

Fausto Barbero 部分获得了 DFG 项目 VI 1045-1/1 和芬兰科学院项目 349803 的资助。Jonni Virtema 部分获得了 DFG 项目 VI 1045-1/1 和芬兰科学院项目 338259 的资助。

参考文献

Barbero, F. 和 Galliani, P.（2022）。将因果团队语言嵌入谓词逻辑。《纯粹与应用逻辑年刊》，第 103–159 页。

Barbero, F. 和 Sandu, G.（2019）。因果团队中的干预主义反事实。在 CREST 2018 会议录中

– 理论计算机科学电子会议录，第 286 卷，第 16–30 页。开放出版协会。Barbero, F. 和 Sandu, G.（2021）。干预主义反事实的团队语义：观察与干预。《哲学逻辑杂志》，50：471–521。Barbero, F. 和 Sandu, G.（2023）。干预主义反事实的团队语义：概率。即将出版。Barbero, F. 和 Virtema, J.（2023）。含概率干预主义反事实的逻辑的表达能力图景。CoRR, abs/2303.11993。Barbero, F. 和 Yang, F.（2022）。刻画（广义）因果团队上的反事实与依赖关系。《圣母大学形式逻辑杂志》，63(3)。Bılkov´a, M.、Cintula, P. 和 L´avi˘cka, T.（2018）。无穷逻辑中的 Lindenbaum 引理与成对扩展引理。载于《逻辑、语言、信息与计算：第 25 届国际研讨会 WoLLIC 2018（哥伦比亚波哥大，2018 年 7 月 24—27 日）会议录》第 25 卷，第 130–144 页。Springer。Briggs, R.（2012）。干预主义反事实。《哲学研究：分析传统哲学国际期刊》，160(1)：139–166。Fagin, R.、Halpern, J. Y. 和 Megiddo, N.（1990）。一种用于概率推理的逻辑。《信息与计算》，87(1-2)：78–128。Galles, D. 和 Pearl, J.（1998）。因果反事实的公理化刻画。《科学基础》，3(1)：151–182。Halpern, J. Y.（2000）。因果推理的公理化。《人工智能研究杂志》，12(1)：317–337。Halpern, J. Y. 和 Peters, S.（2022）。关于含无穷多个变量的因果模型进行推理。载于《AAAI 人工智能会议论文集》第 36 卷，第 5668–5675 页。Heifetz, A. 和 Mongin, P.（2001）。类型空间的概率逻辑。《博弈与经济行为》，35(1)：31–53。Ibeling, D. 和 Icard, T.（2020）。跨因果层级的概率推理。载于《AAAI 人工智能会议论文集》第 34 卷，第 10170–10177 页。Ognjanovi´c, Z.、Ra˘skovi´c, M. 和 Markovi´c, Z.（2016）。概率逻辑：不确定推理的概率化形式化。Springer。Ognjanovi´c, Z.、Perovi´c, A. 和 Ra˘skovi´c, M.（2008）。带定性概率算子的逻辑。《IGPL 逻辑杂志》，16(2)：105–120。Pearl, J.（2000）。《因果关系：模型、推理与推断》。剑桥大学出版社，美国纽约州纽约市。Ra˘skovi´c, M.、Ognjanovi´c, Z. 和 Markovi´c, Z.（2004）。一种带条件概率的逻辑。载于 Alferes, J. J. 和 Leite, J. 编，《人工智能逻辑》，第 226–238 页，柏林、海德堡。Springer Berlin Heidelberg。Spirtes, P.、Glymour, C. 和 Scheines, R. N.（1993）。《因果关系、预测与搜索》，统计学讲义第 81 卷。Springer New York。