定制 通过偏振态与偏振度调控实现涡旋结构光的光学手性

Kayn A. Forbes* 和 Dale Green

化学学院，东英吉利大学，诺里奇，诺福克，*NR7 4TJ*，英国。

k.forbes@uea.ac.uk

摘要 我们展示了椭圆率 和偏振度 如何影响非近轴涡旋光束非凡的光学手性特性。我们发现，与近轴光学和非涡旋模式形成鲜明对比的是，在紧聚焦条件下，光学涡旋光束能够产生极其丰富且可调的光学手性密度空间分布。我们建立了一种理论描述，说明如何通过改变输入涡旋模式的偏振态 和偏振度 ，以及通过赝标量拓扑荷 所表征的光学轨道角动量的大小和符号，按需定制光学手性。我们预期，这些结果将在手性纳米光学和结构光子学领域发挥重要作用，既能催生新技术，也能改进现有方法。

1.引言 手性物体与其镜像不可重合。物质手性贯穿于各个尺度的宇宙，从星系的螺旋臂，到我们的手和脚，再到维系地球生命的生物分子。光也可能具有手性，最常见的表现形式是圆偏振态，在这种状态下，电磁场矢量描绘出可向左或向右扭转的螺旋线。这种与偏振旋向相关的手性，通常用赝标量光学螺旋度/手性来描述 其中上（下）号分别表示左旋（右旋）。研究物质手性的一种常用方法是使用手性光进行手性光谱学研究，典型例子包括圆二色性、旋光性和振动光学活性[1,2]。此类光谱学的基础极其简单：右旋（左旋）分子或纳米结构会与左旋圆偏振光子相互作用

与右旋圆偏振光子作用时不同 ，这种区分称为天然旋光性 [1]。手性光谱学的重要性怎么强调都不为过：生命的几乎所有分子构件（核苷、氨基酸、蛋白质、碳水化合物等）都是手性的；已开发的药物中，超过一半具有手性 [3]；考虑到近期全球面临的 COVID-19 挑战，有必要指出，手性光谱学可用于研究病毒 [4,5]。因此不难理解，手性光谱学为何成为科学领域广泛开展且蓬勃发展的研究方向，并应用于化学体系 [1,5,6], 生物分子 [7–10], 以及人工纳米结构和超材料 [11–16]。尽管这些研究涉及极其多样的手性材料，但仍主要依赖圆偏振光作为手性光学探针。

结构光一词指的是，由于光学技术取得了重大进展，我们能够定制光束，使其在空间和时间上都具有非均匀的偏振、振幅和相位 [8,9]。最广为人知的结构光类型之一是光学涡旋，这是一个泛称，指具有方位角相位的电磁场 ，其中 是赝标量拓扑荷，而 是方位角坐标。 具体模式包括拉盖尔-高斯光束和贝塞尔光束。光学涡旋已广泛应用于众多领域，最新综述参见 [17,19–24]。无论偏振如何，光学涡旋都具有手性：其螺旋波前（相位恒定的表面）具有手性，可以向左扭转或向右扭转 。自2018年以来，将光学涡旋的手性应用于研究的活动显著增加

手性光与物质相互作用中的涡旋及光谱学 [22,25]。前沿实验包括有机金属化合物的 X 射线涡旋二色性 [26], 以及小至樟脑酮和柠檬烯等手性分子中的非线性涡旋二色性 [27]；还有液晶中涡旋光束的拉曼光学活性 [28]。

要研究与光学涡旋相位相关的手性，关键在于认识到它是光束的全局属性（其结构横跨光束的横向维度，即光束宽度），不同于作为局部属性的偏振。因此，为了使材料的手性能够辨别光学涡旋的旋向， 或，尺度必须相对相似：因此，对于较小的手性纳米结构和分子，光必须在空间上受到限制，例如通过紧聚焦实现。众所周知，入射光束的偏振态和偏振度会显著影响非傍轴场焦平面附近的电磁场[29,30]。此前所有关于涡旋光束光学手性密度的研究，都针对完全偏振的光束（即聚焦前入射光束的偏振度 为），且仅考察椭圆率的两个极端 ，即线偏振 或圆偏振。本研究专门探讨偏振度和椭圆率如何影响纳米光学中涡旋光束的光学手性密度。研究指出，对这两个可通过实验控制的参数进行调节，会产生极其丰富多样的涡旋光束光学手性密度分布，而这一点迄今尚未得到利用。

2. 非近轴贝塞尔光束的光学手性密度

2.1 非近轴贝塞尔光束的电磁场和光学手性密度 我们使用解析理论来描述非近轴贝塞尔光束。我们采用Lax等人[31]最先引入的标准表述。零阶横向电磁场

对于沿*z*轴传播的贝塞尔光束而言，是

$$\boldsymbol{E}^{(\mathrm{T}_0)} = (\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}} + \beta\,\hat{\boldsymbol{y}})\,J_\ell\left[k_t r\right]E_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z + \ell\phi - \omega t)}, \qquad \boldsymbol{B}^{(\mathrm{T}_0)} = (\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}} - \beta\,\hat{\boldsymbol{x}})\frac{k_z}{k}\,J_\ell\left[k_t r\right]B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z + \ell\phi - \omega t)}, \tag{1}$$

其中，是广义琼斯矢量， 是电场振幅，，是波数平方，其中，；是第一类贝塞尔函数；是引言中提到的方位角相位；以及 是平均圆频率。为简洁起见，以下省略相关性依赖。式（1）中的两个场在 [] 时，能够正确描述傍轴模式和贝塞尔光束的电磁场，例如。良好准直的光束。然而，很容易证明，式（1）并不

以当前形式满足麦克斯韦方程组，例如。通过使用麦克斯韦方程组，采用一种最初由Lax等人提出的知名方法[31], ，我们可以将贝塞尔光束的电磁场展开至小参数的二阶，因此其中现在包括零阶横向场；一阶纵向场 （沿方向偏振）；以及二阶横向场 （推导过程见补充材料）：

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}(\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}}+\beta\,\hat{\boldsymbol{y}})J_{\ell}+\hat{\boldsymbol{z}}\,\dfrac{ik_t}{2k_z}\left(\{\alpha+i\beta\}\mathrm{e}^{-i\phi}\,J_{\ell-1}+\{i\beta-\alpha\}\mathrm{e}^{i\phi}\,J_{\ell+1}\right)\\ +\dfrac{k_t^2}{4k^2}\left(\hat{\boldsymbol{x}}\left[2\alpha J_{\ell}+J_{\ell-2}\{\alpha+i\beta\}\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{\alpha-i\beta\}\mathrm{e}^{2i\phi}\right]\right.\\ \left.+\hat{\boldsymbol{y}}\left[2\beta J_{\ell}+J_{\ell-2}\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{-\beta-i\alpha\}\mathrm{e}^{2i\phi}\right]\right)\end{bmatrix}E_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)},\qquad(2)$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}(\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}}-\beta\,\hat{\boldsymbol{x}})\dfrac{k_z}{k}J_{\ell}+\hat{\boldsymbol{z}}\,\dfrac{ik_t}{2k}\left(\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-i\phi}\,J_{\ell-1}+\{i\alpha+\beta\}\mathrm{e}^{i\phi}\,J_{\ell+1}\right)\\ +\dfrac{k_t^2}{4kk_z}\left(\hat{\boldsymbol{x}}\left[-2\beta J_{\ell}+J_{\ell-2}\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{-i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{2i\phi}\right]\right.\\ \left.+\hat{\boldsymbol{y}}\left[2\alpha J_{\ell}+J_{\ell-2}\{-i\beta-\alpha\}\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{i\beta-\alpha\}\mathrm{e}^{2i\phi}\right]\right)\end{bmatrix}B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}.\qquad(3)$$

公式（2）和（3）都可以准确描述近轴或非近轴（例如紧聚焦）贝塞尔光束。贝塞尔光束的小参数为： 增大这一因子的数值，本质上相当于对光束进行紧聚焦。例如，在远场（或 ）对于沿 *z*轴 传播的光束而言，电场基本上可以用公式（2）和（3）中的零阶横向场描述；同样，也可以用公式（1）近乎精确地描述（即近轴描述）[32]。聚焦光束时，会增大，而公式（2）和（3）中的附加纵向项和横向项在量值上变得重要，并由此产生结构光在纳米光学中的非凡特性[33–35]。 因此，在紧聚焦条件下，近轴描述（1）不再适用。本文将远场中入射光的偏振特性称为二维（2D）偏振，即零阶电场偏振态。空间约束下非傍轴场的偏振特性通常称为三维（3D）偏振[36–38]。

光学手性密度 对于准单色光束，可定义为（更多信息请参见补充材料）[39–41]

$$C=-\frac{\varepsilon_0\omega}{2}\,\mathrm{Im}\left(\bar{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{B}\right),\qquad(4)$$

其中，上横线表示复共轭。粗略地说，这种光的动态性质（在自由空间中守恒）可衡量光场的手性程度。它与光学螺旋度有关，感兴趣的读者可参阅文献[39,41] 了解更多信息。手性光-物质相互作用源于多极干涉，这些干涉会为材料[1,42]产生空间奇、时间偶张量。必须特别注意，式（4）与手性材料中的电偶极-磁偶极（E1M1）干涉相耦合。因此，式（4）所定义的光学手性并未涵盖所有手性光-物质相互作用，例如由电偶极-电四极干涉（E1E2）引起的相互作用。将式（2）和式（3）代入式（4），即可得到光学手性密度（完整的系统推导见补充信息）

$$C=-\frac{I\omega}{c^2}\left[\frac{k_z}{k}J_\ell^2 P\sin 2\eta+\frac{k_t^2}{4kk_z}\left(2\left\{1+\frac{k_z^2}{k^2}\right\}J_\ell^2 P\sin 2\eta+\left\{P\sin 2\eta+1\right\}J_{\ell-1}^2+\left\{P\sin 2\eta-1\right\}J_{\ell+1}^2\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{k_t^4}{8k^3k_z}\right)\left(2J_\ell^2 P\sin 2\eta+J_{\ell-2}^2\left\{P\sin 2\eta+1\right\}+J_{\ell+2}^2\left\{P\sin 2\eta-1\right\}\right)\right], \quad (5)$$

其中 是光束强度， 是输入光的二维偏振度，并且定义了二维偏振椭圆率： 是线偏振光， 是纯圆偏振光，并且 对应于椭圆偏振光（带正号表示右旋，带负号表示左旋）。式（5）方括号中的第一项对应于近轴光束众所周知的光学手性密度，它完全源于二维偏振态中的椭圆率，与第三斯托克斯参数成正比，并且显然需要。 其余各项对应于由一阶纵向场和二阶横向场产生的光学手性密度，在我们所关注的非近轴条件下，这些场变得十分重要。注意，式（5）中的各项均不依赖于方位角，即二维偏振椭圆的取向。

2.2 纯*P*=1 2D偏振贝塞尔光束的光学手性密度图1和图2绘出了光学手性密度（5），其中和 （即紧聚焦）。

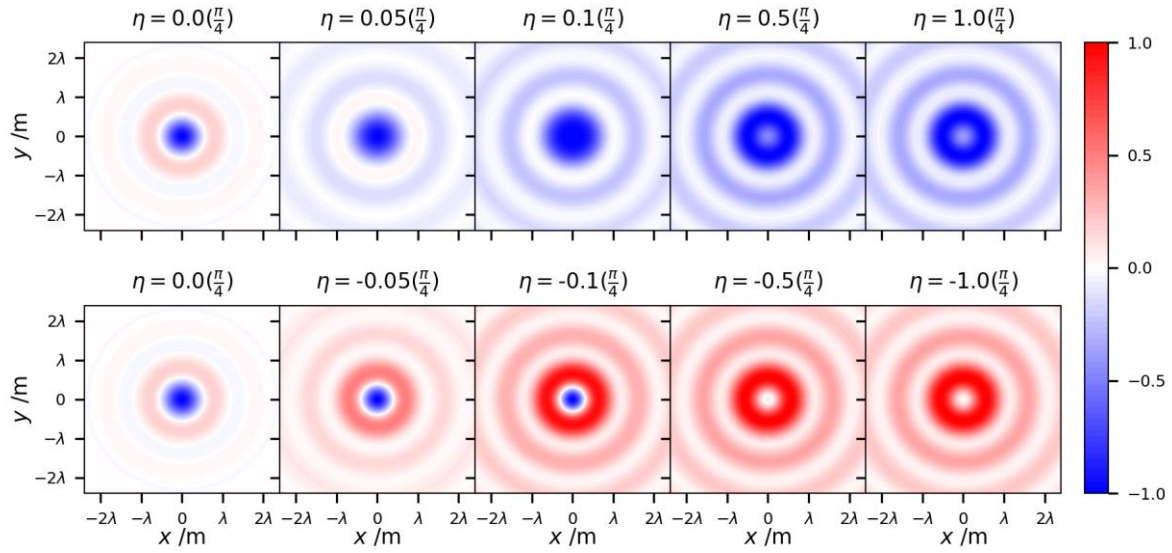


图1：焦平面内 二维偏振椭圆率变化时，贝塞尔光束的光学手性密度 。输入偏振从线偏振逐渐变化，经由不同程度的椭圆偏振，直至达到纯圆偏振。顶排依次为右旋偏振；底排为左旋偏振。所有图中，每幅图均单独归一化。

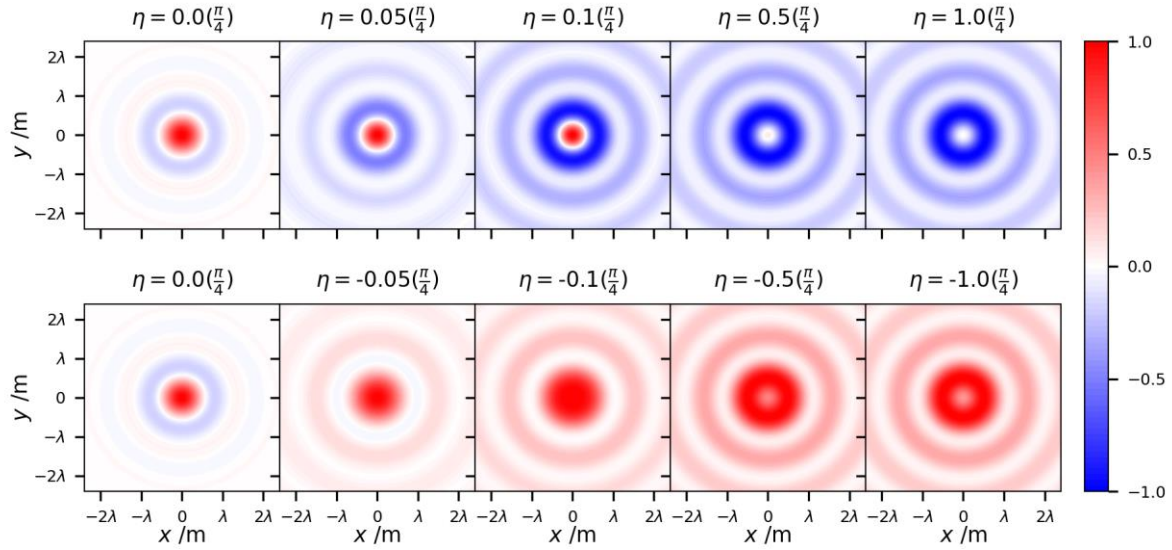


图2： 光学手性密度的演化， 焦平面中二维偏振椭圆率变化的贝塞尔光束。 (其余条件与图1相同)。

图1和图2中最左列对应于输入的二维线偏振（）贝塞尔光束，最右列对应于圆偏振贝塞尔光束，中间各列则显示不同的椭圆率。首先，我们注意到，紧聚焦下的二维线偏振涡旋光束表现出非零的光学手性密度[44,45]：这与平面波或近轴光束形成鲜明对比，在后者中，偏振态必须具有一定的椭圆率 。此外，

比较图1和图2可知，光学手性密度的空间分布会根据 的符号而反转，即取决于涡旋波前的旋向。这种与紧聚焦线偏振涡旋光束相关的非零手性，正是涡旋二向色性 [26,46] 和涡旋差分散射 [47]的成因：手性材料对线偏振非近轴涡旋光束的吸收和散射速率各不相同，具体取决于入射光束是还是 。

沿着图 1 和图2 中的各行移动时，我们通过提高输入光的二维椭圆率来改变二维偏振状态，这会显著改变光学手性密度的空间分布。值得注意的是，我们很快就会失去一半的手性密度环（例如，左侧面板有 5 个环，而最右侧面板有3 个）。我们还注意到，（涡旋旋向）与（偏振旋向）的符号之间存在手性相互作用：这

源于光的自旋-轨道相互作用。最引人注目的是，当涡旋的旋向与偏振相反时（例如，左旋涡旋、右旋椭圆率），我们会产生同号的轴上光学手性密度；而当二者具有相同旋向时，则会出现符号相反的手性密度，并沿着该方向逐渐趋于零密度

轴。这与紧聚焦涡旋光束的强度行为有些相似，对于这类光束，通常会从平行和反平行的自旋与轨道角动量的角度进行描述 [34,48]。此外，在 （即偏振与涡旋旋向反平行）情况下，我们得到一个 模式 的光学手性空间分布（例如见图3），尽管。

通过绘制（5）可以直观地突出光学轨道角动量和涡旋手性对光学手性的显著影响，适用于，即一个无轨道角动量的紧聚焦非涡旋光束。图3突出显示，当二维偏振态中不存在椭圆率（）时，光学手性为零，

而光学手性密度的大小随着椭圆率的增加而增大，空间分布对大小和符号（旋向）均保持不变。这显然与图 1 和图 2中具有轨道角动量的紧聚焦 贝塞尔模式形成鲜明对比。

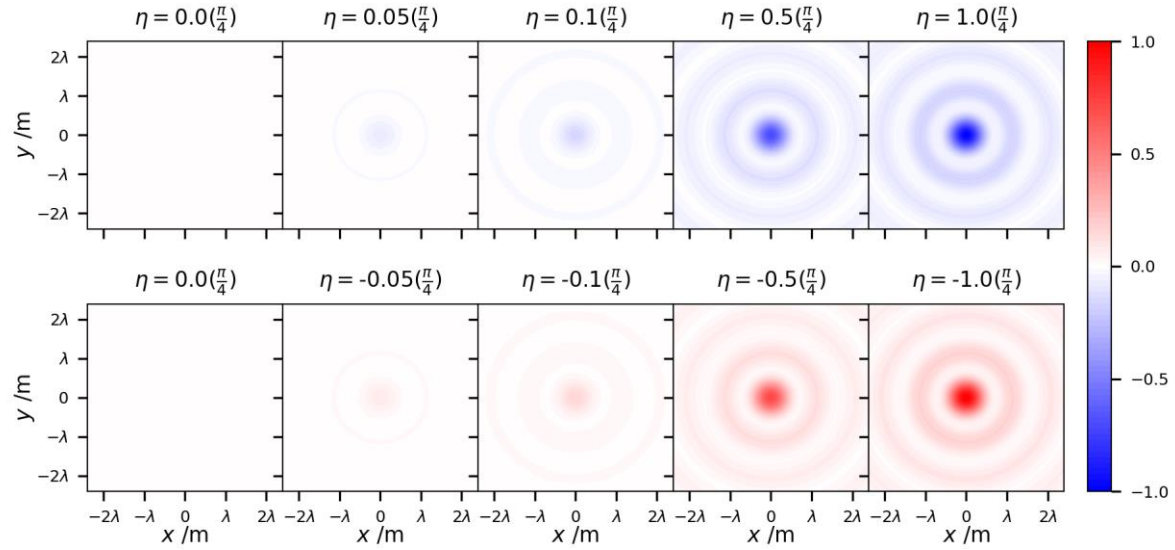


图3： 紧聚焦的光学手性密度演化 贝塞尔光束在焦平面内随二维偏振椭圆率变化 。每幅图均相对于 图进行归一化。（其余均与图1相同）。

我们可以控制的另一个自由度是 入射光束的大小，且模式的图示可见补充材料。光学手性空间分布与图 1 和图 2 中的模式相似，但的值较大时，主要区别在于环宽增加，这与涡旋光束强度的变化行为类似。

为了理解紧聚焦在产生图1和图2中所强调的非凡光学手性性质方面所发挥的作用，在傍轴条件下绘制（5）是很有帮助的。我们在引言中从定性物理角度说明了为何必须采用紧聚焦：在这里，我们可以从数学上看到这一点。对于弱聚焦的、本质上属于近轴的光束，图1和图2的对应图示见图4，其中可以清楚地观察到，非傍轴场的所有非凡性质都消失了。事实上，不存在可观测的自旋-轨道相互作用；对于线偏振入射光，手性微小到可以忽略（实际上为零）；并且，光学手性密度不依赖于涡旋旋向的符号：图4中的图示对于。

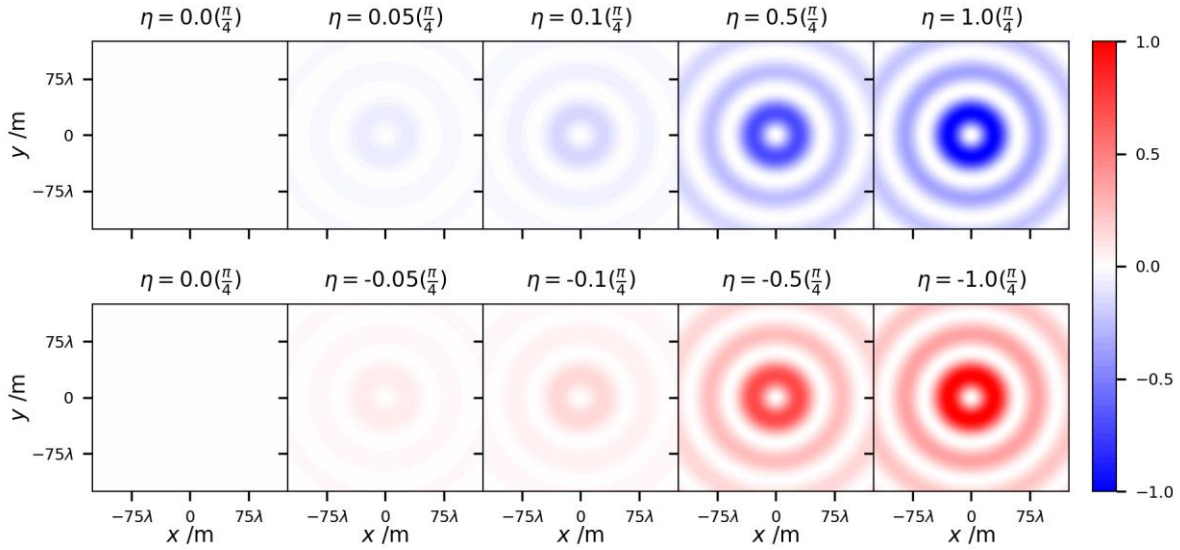


图4： 光学手性密度的演变，针对一个 和 弱聚焦的贝塞尔光束在焦平面内，二维偏振椭圆率不断变化。 每幅图均以 图为基准进行归一化。（其他条件均与图1相同）。

2.3 具有部分二维偏振的贝塞尔光束的光学手性密度 在完全偏振光 和非偏振光 这两个极端状态之间，还存在部分偏振光。在上一节中，我们研究了偏振态（具体而言，椭圆率）如何影响完全偏振光束在焦平面中的光学手性密度；在本节中，我们将研究偏振度 如何影响一组固定偏振态下的光学手性密度：图5；图6 ；以及图7 。

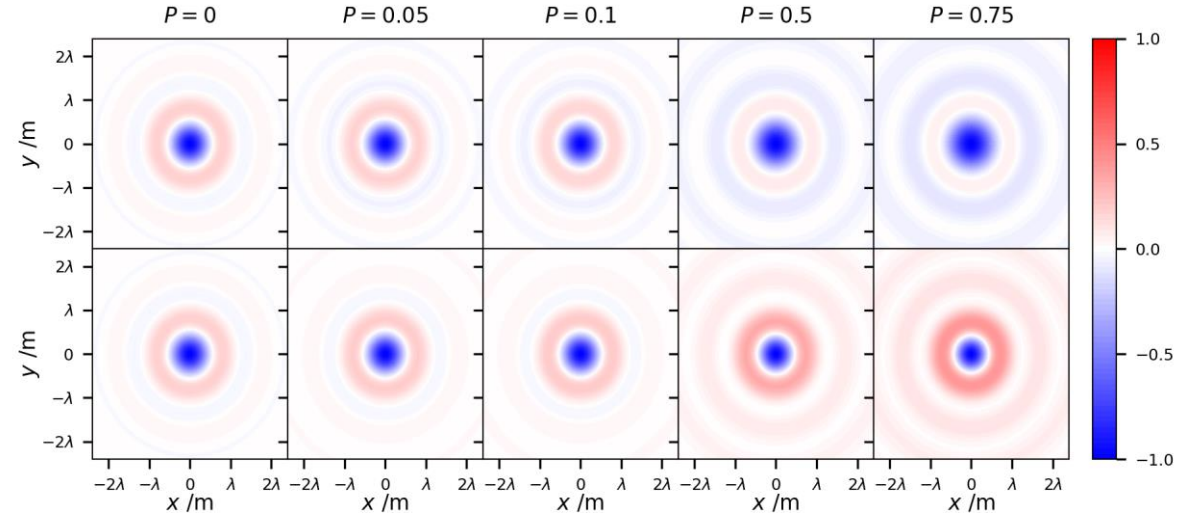


图5： 光学手性密度的演变，针对一个 贝塞尔光束在焦平面内，偏振度 *P*不断变化的椭圆偏振光束。顶排依次呈现右旋偏振；底排呈现左旋偏振。所有图中 且每幅图均单独归一化。

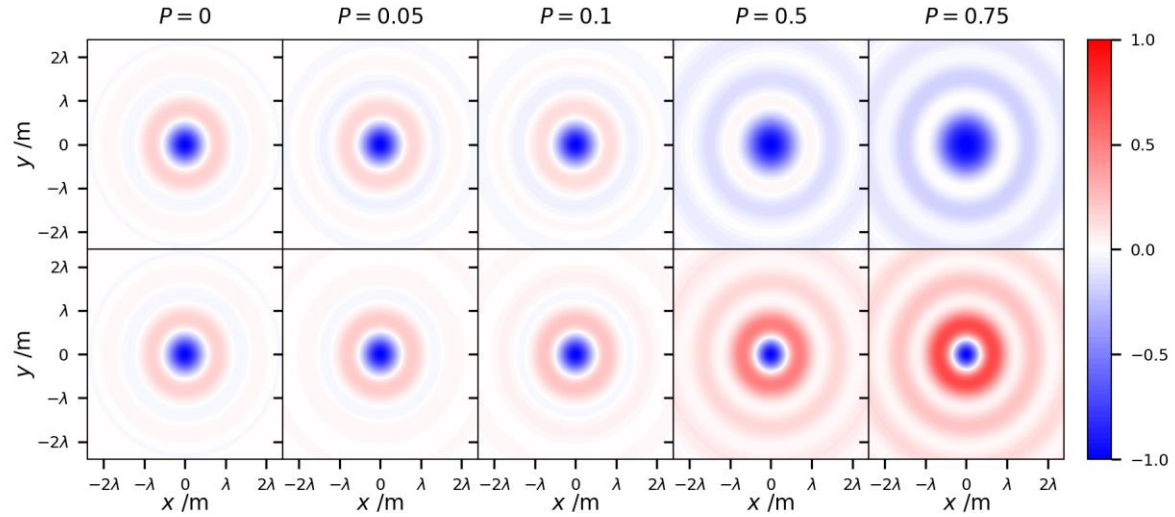


图6： 椭圆偏振光束的 偏振度变化时，贝塞尔光束在焦平面上的光学手性密度演化P。 其他条件与图5相同。

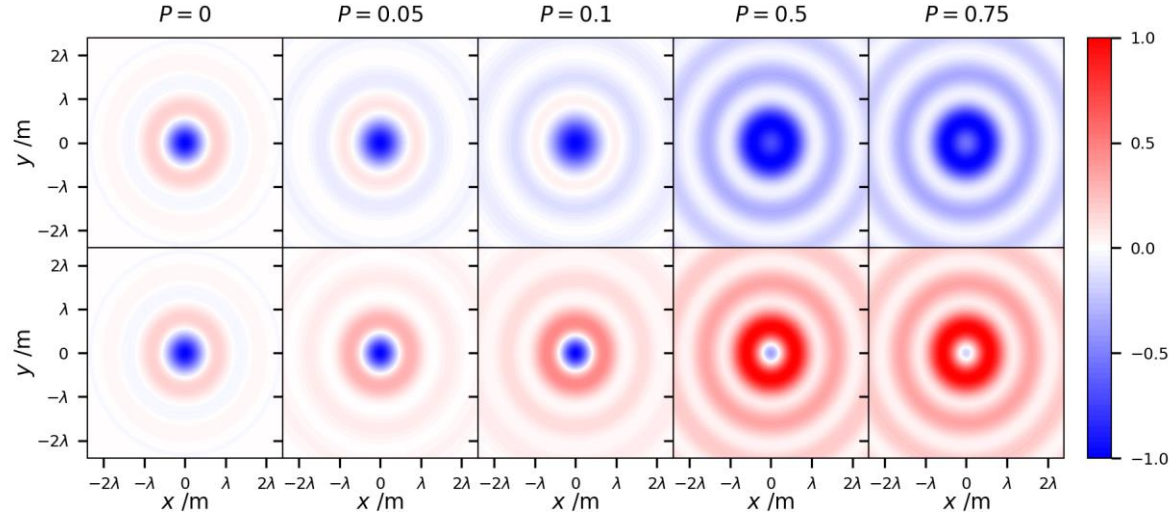


图7： 椭圆偏振光束的 偏振度变化时，贝塞尔光束在焦平面上的光学手性密度演化P。 其他条件与图5相同。

首先，我们必须指出 这一显著结果：即使光束是非偏振的 （图5-7中最左侧的列），P光学手性密度仍然不为零[50]。换言之，我们可以利用非偏振光源获得手性光-物质相互作用，并进行手性光谱学研究[43,50,51]。此外，图5-7清楚地突出了，增加（或降低）二维偏振度会显著影响光学手性密度的空间分布，尽管二维偏振状态 对于场的偏振部分在每种情况下都是固定的（其数值也同样固定）。P

衡量 影响的另一种方法，是比较对于给定 （来自图1和图2）的完全二维偏振光束的光学手性空间分布，与 （图5-7）时的情况进行比较。η作为示例，图7展示了具有 的部分偏振光束的光学手性密度，这可以与 图1的第四列进行比较。我们看到，图7表明，一个 产生的光学手性密度与一个 光束相似。在此

在本节中，我们着重讨论了 模式，不过相应的 图可见补充材料，其中还包括模式图。

$$\ell = \pm 2$$

3. 讨论与结论 本文系统研究了输入近轴涡旋光束的二维偏振态和偏振度如何影响焦平面附近非近轴场的光学手性密度。我们重点展示了纳米光学中光学涡旋能够产生的极其丰富的光学手性密度空间分布。通过改变输入涡旋模式的二维偏振态和偏振度，以及轨道角动量的大小和符号，可以按需调控这种光学手性密度，。必须记住，近轴光束或平面波产生的光学手性密度需要同时具备 和，而 改变这些参数不会导致光学手性密度空间分布出现任何可观测的变化，只会改变其大小（例如图4）。将目前手性光谱学中普遍采用的这种光学探针与本文所展示的非近轴涡旋光束的光学手性进行比较，便可清楚看出，结构光手性为何有望彻底改变手性光-物质相互作用 [22,25,52]。

此时值得简要讨论纳米光学中光场的另一项非凡性质：光的横向自旋动量 [33,53]。近期已有多项研究考察二维偏振的状态和程度对这一性质的影响 [54–57]。与涡旋光束的光学手性密度一样，即使光源为二维非偏振，光的横向自旋动量密度仍然会出现 [54,55]。横向自旋的这一性质对于受限电磁场而言极为普遍，例如存在于表面倏逝波和紧聚焦激光束中。然而，二维非偏振光所具有的光学手性密度严格来说只会出现在光学涡旋光束中 [50]。值得深思的是，对于二维非偏振场，光既能同时具有自旋角动量和光学手性密度，而二维偏振的状态和程度还会显著影响这些物理量的空间分布。

如引言中所述，迄今为止，几乎所有手性光谱学和手性光-物质相互作用都采用圆偏振光（例如非结构化高斯光束）作为手性光学探针。我们研究的涡旋光束的光学手性密度已被证明，在创造新应用并改进现有手性纳米光学应用方面取得了显著进展 [25–28,43]。本文表明，结构光这种非凡的光学手性还可以比以往所认为的更进一步地按需调控。未来研究将聚焦于其他具有增强手性特性的结构光形式 [58], ，例如矢量涡旋模式，并探讨二阶相干性的影响。

参考文献

[1] L. D. Barron，分子光散射与光学活性（剑桥大学出版社，剑桥，2009）。[2] P. L. Polavarapu，手性光谱学：基础与应用（CRC出版社，博卡拉顿，2016）。[3] L. A. Nguyen、H.He 和 C. Pham-Huy，手性药物：概述，《国际生物医学科学杂志》**2**，85（2006）。[4] T. Kakkar 等，超手性近场探测病毒结构，《光：科学与应用》**9**，195（2020）。[5] M. Krupová、J.Kessler和P.Bouř，手性光谱学的近期趋势：振动圆二色性和拉曼光学活性的理论与应用，ChemPlusChem**85**，561（2020）。

[6] D. Leung、S. O. Kang 和 E. V. Anslyn，《对映体过量的快速测定：聚焦于光学方法》，《化学会评论》41，448（2012）。[7] J. Kumar、H. Eraña、E. López-Martínez、N. Claes、V. F. Martín、D. M. Solís、S. Bals、A. L. Cortajarena、J. Castilla 和 L. M. Liz-Marzán，《利用等离激元手性检测帕金森病中的淀粉样纤维》，《美国国家科学院院刊》115，3225（2018）。[8] N. Berova、P. L. Polavarapu、K. Nakanishi 和 R. W. Woody，《综合手性光谱学：在合成化合物、天然产物和生物分子立体化学分析中的应用》，第2卷（John Wiley & Sons, Inc.，美国新泽西州霍博肯，2012）。[9] L. D. Barron，《生物分子拉曼光学活性光谱学的发展》，《生物医学光谱学与成像》4，223（2015）。[10] O. Ávalos-Ovando、E. Y. Santiago、A. Movsesyan、X.-T. Kong、P. Yu、L. V. Besteiro、L. K. Khorashad、H. Okamoto、J. M. Slocik 和 M. A. Correa-Duarte，《仿生手性等离激元：光学活性与光化学的范式转变》，《ACS光子学》9，2219（2022）。[11] E. S. Goerlitzer、A. S. Puri、J. J. Moses、L. V. Poulikakos 和 N. Vogel，《手性等离激元入门指南：基本无害的理论与大面积基底设计》，《先进光学材料》2100378（2021）。[12] L. Ohnoutek、J.-Y. Kim、J. Lu、B. J. Olohan、D. M. Răsădean、G. Dan Pantoș、N. A. Kotov 和 V. K. Valev，《半导体纳米螺旋的三次谐波米氏散射》，《自然·光子学》16，126 2022( )。[13] A. Kakkanattu、A. Kakkanattu、N. Eerqing、N. Eerqing、S. Ghamari、S. Ghamari 和 F. Vollmer，《手性分子与纳米结构的光学传感和操控综述：聚焦等离激元增强效应》*[特邀]*，《光学快报》Opt. Express，OE 29，12543（2021）。[14] Y. Chen、W. Du、Q. Zhang、O. Ávalos-Ovando、J. Wu、Q.-H. Xu、N. Liu、H. Okamoto、A. O. Govorov 和 Q. Xiong，《多维纳米手性光学》，《自然综述：物理学》4，113（2022）。[15] L. A. Warning、A. R. Miandashti、L. A. McCarthy、Q. Zhang、C. F. Landes 和 S. Link，《用于手性感测的纳米光子学方法》，《ACS纳米》15，15538（2021）。[16] X.-T. Kong、L. V. Besteiro、Z. Wang 和 A. O. Govorov，《生物组装与非生物系统中的等离激元手性和圆二色性：理论背景与最新进展》，《先进材料》32，1801790（2020）。[17] A. Forbes、M. de Oliveira 和 M. R. Dennis，《结构光》，《自然·光子学》15，253（2021）。[18] A. Forbes，《激光产生的结构光》，《激光与光子学评论》13，1900140（2019）。[19] Y. Shen、X. Wang、Z. Xie、C. Min、X. Fu、Q. Liu、M. Gong 和 X. Yuan，《光学涡旋三十年：从拓扑荷到多重奇点的轨道角动量操控》，《光：科学与应用》8，1（2019）。[20] Y. Yang、Y. Ren、M. Chen、Y. Arita 和 C. Rosales-Guzmán，《结构光光学捕获：综述》，《先进光子学》3，034001（2021）。[21] C. Rosales-Guzmán、B. Ndagano 和 A. Forbes，《复矢量光场及其应用综述》，《光学杂志》20，123001（2018）。[22] A. Porfirev、S. Khonina 和 A. Kuchmizhak，《轨道角动量赋能的光—物质相互作用：微纳尺度物质调控》，《量子电子学进展》100459（2023）。[23] M. Babiker、D. L. Andrews 和 V. E. Lembessis，《复杂扭曲光场中的原子》，《光学杂志》21，013001（2018）。[24] H. Yang、Z. Xie、H. He、Q. Zhang 和 X. Yuan，《片上器件扭曲光场展望》，《APL光子学》6，110901（2021）。[25] K. A. Forbes 和 D. L. Andrews，《扭曲光场的轨道角动量：手性与光学活性》，《物理学杂志：光子学》3，022007（2021）。[26] J. R. Rouxel、B. Rösner、D. Karpov、C. Bacellar、G. F. Mancini、F. Zinna、D. Kinschel、O. Cannelli、M. Oppermann 和 C. Svetina，《无序分子介质的硬X射线螺旋二色性》，《自然·光子学》16

[27] J.-L. Bégin、A. Jain、A. Parks、F. Hufnagel、P. Corkum、E. Karimi、T. Brabec 和 R. Bhardwaj，《手性与非手性分子中的非线性螺旋二色性》，《自然·光子学》17，1（2023）。[28] S. Müllner、F. Büscher、A. Möller 和 P. Lemmens，《利用涡旋光束区分液晶拉曼散射中的手性与螺旋贡献》，Physical Review Letters 129，207801（2022）。[29] M. Chekhova 和 P. Banzer，《光的偏振：经典、量子与非线性光学》（Walter de Gruyter GmbH & Co KG，2021）。[30] L. Novotny 和 B. Hecht，《纳米光学原理》（剑桥大学出版社，剑桥，2012）。[31] Lax、W. H. Louisell 和 W. B. McKnight，《从麦克斯韦到近轴波动光学》，Physical Review A 11，1365（1975）。[32] K. A. Forbes、D. Green 和 G. A. Jones，《近轴光学涡旋纵向场的相关性》，Journal of Optics 23，075401（2021）。[33] A. Aiello、P. Banzer、M. Neugebauer 和 G. Leuchs，《从横向角动量到光子轮》，《自然·光子学》9，789（2015）。[34] K. Y. Bliokh、M. A. Alonso、E. A. Ostrovskaya 和 A. Aiello，《自由空间中非近轴光的角动量与自旋-轨道相互作用》，Physical Review A 82，063825（2010）。[35] K. Y. Bliokh、A. Aiello 和 M. A. Alonso，《各向同性介质中的光自旋-轨道相互作用》，载于《光的角动量》（剑桥大学出版社，2012），第174–245页。[36] M. A. Alonso，《非近轴光场偏振的几何描述：教程》，ArXiv Preprint ArXiv:2008.02720（2020）。[37] C. J. Sheppard，《三维偏振的琼斯参数与斯托克斯参数》，Physical Review A 90，023809（2014）。[38] K. Lindfors、A. Priimagi、T. Setälä、A. Shevchenko、A. T. Friberg 和 M. Kaivola，《紧聚焦非偏振光的局域偏振》，《自然·光子学》1，228（2007）。[39] R. P. Cameron、S. M. Barnett 和 A. M. Yao，《电磁理论中的光学螺旋度、光学自旋及相关量》，New Journal of Physics 14，053050（2012）。[40] K. Y. Bliokh 和 F. Nori，《表征光学手性》，Physical Review A 83，021803（2011）。[41] N. Mackinnon，《螺旋度与手性之间的差异》，J. Opt. 21，125402（2019）。[42] D. L. Andrews，《纳米尺度光学与材料手性的量子表述：对称性问题、空间与时间宇称及可观测量》，Journal of Optics 20，033003（2018）。[43] D. Green 和 K. A. Forbes，《纳米尺度涡旋光束的光学手性》，Nanoscale 15，540（2023）。[44] J. S. Eismann、M. Neugebauer 和 P. Banzer，《在非手性纳米结构中激发手性偶极矩》，Optica 5，954（2018）。[45] K. A. Forbes 和 G. A. Jones，《光学涡旋光束的螺旋度与手性度量》，J. Opt. 23，115401（2021）。[46] K. A. Forbes 和 G. A. Jones，《手性粒子中的光学涡旋二色性》，《物理评论A》103，053515（2021）。[47] R. M. Kerber、J. M. Fitzgerald、S. S. Oh、D. E. Reiter 和 O. Hess，《纳米天线中的轨道角动量二色性》，Communications Physics 1，87（2018）。[48] Y. Iketaki、T. Watanabe、N. Bokor 和 M. Fujii，《线偏振与圆偏振下一阶和二阶拉盖尔-高斯光束中心强度的研究》，Optics Letters 32，2357（2007）。[49] M. Born 和 E. Wolf，《光学原理：光传播、干涉与衍射的电磁理论》（Elsevier，2013）。[50] K. A. Forbes，《非偏振光的光学螺旋度》，Physical Review A 105，023524（2022）。[51] K. A. Forbes 和 D. Green，《利用三维结构化涡旋光实现对映选择性光学梯度力》，Optics Communications 515，128197（2022）。[52] A. Forbes，《光的轨道角动量展望》，Journal of Optics 24，124005（2022）。

[53] P. Shi、L. Du 和 X. Yuan，《自旋光子学：从横向自旋到光子斯格明子》，纳米光子学 **10**，3927（2021）。[54] J. S. Eismann、L. H. Nicholls、D. J. Roth、M. A. Alonso、P. Banzer、F. J. Rodríguez-Fortuño、A. V. Zayats、F. Nori 和 K. Y. Bliokh，《非偏振光的横向旋转》，《自然·光子学》**15**，156 2021( )。[55] Y. Chen、F. Wang、Z. Dong、Y. Cai、A. Norrman、J. J. Gil、A. T. Friberg 和 T. Setälä，《聚焦随机光中横向自旋的结构》，《物理评论A》**104**，013516（2021）。[56] Z. Wang、C. Yan、F. Wang、Y. Chen 和 Y. Cai，《光学空间相干性对紧聚焦光中局域自旋角动量密度的影响》，《美国光学学会志 A》、《光学、图像科学与视觉》**39**，C58（2022）。[57] Z. Wang、C. Yan、Z. Dong、F. Wang、Y. Chen 和 Y. Cai，《偏振度对涡旋光束紧聚焦时局域自旋密度的影响》，《IEEE光子学杂志》**14**，1（2022）。[58] M. Hanifeh、M. Albooyeh 和 F. Capolino，《最优手性光：结构光螺旋度密度的上限及其在纳米尺度物质手性检测中的应用》，《ACS光子学》**7**，2682（2020）。

补充材料

通过偏振态与偏振度调控定制涡旋结构光的光学手性

Kayn A. Forbes* 和 Dale Green

东英吉利大学化学学院，诺里奇，诺福克，*NR7 4TJ*，英国

k.forbes@uea.ac.uk

小参数下二阶贝塞尔光束电磁场的推导

主文稿中公式（2）和（3）的推导如下。贝塞尔光束的零阶横向 电磁场是众所周知的：

$$\boldsymbol{E}^{(\mathrm{T}_0)}[\boldsymbol{r},t]=(\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}}+\beta\,\hat{\boldsymbol{y}})J_{\ell}[k_t r]E_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)} \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{B}^{(\mathrm{T}_0)}[\boldsymbol{r},t]=(\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}}-\beta\,\hat{\boldsymbol{x}})\frac{k_z}{k}J_{\ell}[k_t r]B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)} \tag{1.7}$$

我们假设准单色频率以平均频率 为中心。符号和记号的所有定义均在主文稿中给出。这两个场都不满足麦克斯韦方程组。将它们代入高斯定律即可很容易地看出这一点 和。为了解决这个问题，可以使用 Melvin Lax 等人最先提出的方法。[1]。 T_0 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}^{(\mathrm{T}_0)}\neq 0$ $\nabla\cdot\boldsymbol{B}^{(\mathrm{T}_0)}\neq 0$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E}^{(\mathrm{T}_0)}&=\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\boldsymbol{E}^{(\mathrm{T}_0)}\\&=\nabla_{\perp}\cdot\boldsymbol{E}^{(\mathrm{T}_0)}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\cdot\boldsymbol{E}^{(\mathrm{T}_0)}\\&=0.\end{aligned} \tag{1.8}$$

我们可以重新排列 (1.8) 来计算纵向分量 通过 $\boldsymbol{E}_z$

$$E_z=-\int\nabla_{\perp}\cdot\boldsymbol{E}^{(\mathrm{T}_0)}\partial z. \tag{1.9}$$

对磁场进行相同的操作可得

$$B_z=-\int\nabla_{\perp}\cdot\boldsymbol{B}^{(\mathrm{T}_0)}\partial z. \tag{1.10}$$

现在，我们需要分别将 (1.6) 和 (1.7) 代入 (1.9) 和 (1.10)，得到

$$E_z=\frac{i}{k}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)J_{\ell}[k_t r]E_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}, \tag{1.11}$$

and

$$B_z = \frac{i}{k}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial y} - \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{k_z}{k} J_\ell\left[k_t r\right] B_0\, \mathrm{e}^{i(k_z z + \ell\phi - \omega t)}.$$

(1.12)

从现在起，我们将重点推导电场，并知道磁场的推导遵循类似的代数运算。整个推导过程中，我们使用以下笛卡尔坐标到柱坐标的变换： 以及

$$\frac{\partial}{\partial} = (\cos\phi)\frac{\partial}{\partial} - \frac{1}{r}(\phi)\frac{\partial}{\partial\phi} \quad \sin \quad \overline{y\,r\,1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = (\sin\phi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}(\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

$$E_z = \frac{i}{k_z}\left(\alpha\left\{(\cos\phi)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}(\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}\right\} + \beta\left\{(\sin\phi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}(\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}\right) J_\ell\left[k_t r\right] E_0\, \mathrm{e}^{i(k_z z + \ell\phi - \omega t)}$$

$$= \frac{i}{k_z}\left(\alpha\left\{(\cos\phi)\left\{\frac{k_t}{2}\left[J_{\ell-1}\left[k_t r\right] - J_{\ell+1}\left[k_t r\right]\right]\right\} - \frac{i\ell}{r} J_\ell\left[k_t r\right]\sin\phi\right\}\right)$$
$$+\beta\left\{(\sin\phi)\left\{\frac{k_t}{2}\left[J_{\ell-1}\left[k_t r\right] - J_{\ell+1}\left[k_t r\right]\right]\right\} + \frac{i\ell}{r} J_\ell\left[k_t r\right]\cos\phi\right\}\right) E_0\, \mathrm{e}^{i(k_z z + \ell\phi - \omega t)}$$

$$= \frac{i}{k_z}\left(\alpha\left\{(\cos\phi)\left\{\frac{k_t}{2}\left[J_{\ell-1}\left[k_t r\right] - J_{\ell+1}\left[k_t r\right]\right]\right\} - i\left\{\frac{k_t}{2}\left[J_{\ell-1}\left[k_t r\right] + J_{\ell+1}\left[k_t r\right]\right]\right\}\sin\phi\right\}\right)$$
$$+\beta\left\{(\sin\phi)\left\{\frac{k_t}{2}\left[J_{\ell-1}\left[k_t r\right] - J_{\ell+1}\left[k_t r\right]\right]\right\} + i\left\{\frac{k_t}{2}\left[J_{\ell-1}\left[k_t r\right] + J_{\ell+1}\left[k_t r\right]\right]\right\}\cos\phi\right\}\right) E_0\, \mathrm{e}^{i(k_z z + \ell\phi - \omega t)}$$

$$= \frac{ik_t}{2k_z}\left(\alpha\left\{(\cos\phi)\left\{\left[J_{\ell-1}\left[k_t r\right] - J_{\ell+1}\left[k_t r\right]\right]\right\} - i\left\{\left[J_{\ell-1}\left[k_t r\right] + J_{\ell+1}\left[k_t r\right]\right]\right\}\sin\phi\right\}\right)$$
$$+\beta\left\{(\sin\phi)\left\{\left[J_{\ell-1}\left[k_t r\right] - J_{\ell+1}\left[k_t r\right]\right]\right\} + i\left\{\left[J_{\ell-1}\left[k_t r\right] + J_{\ell+1}\left[k_t r\right]\right]\right\}\cos\phi\right\}\right) E_0\, \mathrm{e}^{i(k_z z + \ell\phi - \omega t)}$$

$$= \frac{ik_t}{2k_z}\left(\alpha J_{\ell-1}\left[k_t r\right]\cos\phi - \alpha i J_{\ell-1}\left[k_t r\right]\sin\phi - \alpha J_{\ell+1}\left[k_t r\right]\cos\phi - \alpha i J_{\ell+1}\left[k_t r\right]\sin\phi\right.$$
$$\left.+\beta J_{\ell-1}\left[k_t r\right]\sin\phi + i\beta J_{\ell-1}\left[k_t r\right]\cos\phi - \beta J_{\ell+1}\left[k_t r\right]\sin\phi + i\beta J_{\ell+1}\left[k_t r\right]\cos\phi\right) E_0\, \mathrm{e}^{i(k_z z + \ell\phi - \omega t)}$$

$$= \frac{ik_t}{2k_z}\left[(\alpha + i\beta) J_{\ell+1}\left[k_t r\right]\mathrm{e}^{-i\phi} + (i\beta - \alpha) J_{\ell-1}\left[k_t r\right]\mathrm{e}^{i\phi}\right] E_0\, \mathrm{e}^{i(k_z z + \ell\phi - \omega t)}.$$

(1.13)

我们使用了关系式 对于我们的贝塞尔函数自变量，该关系式为(在第一次变换中使用链式法则)；我们还使用了贝塞尔关系 对我们而言，具体来说就是在第二次变换中，最后在末尾使用欧拉公式。将(1.13) 代入 (1.8)，即可得到电场确实满足无散条件，这正是麦克斯韦方程组所要求的：

$$\boldsymbol{E}^{(\mathrm{T}_0)}+\boldsymbol{E}^{(\mathrm{L}_0)}=\left[\underbrace{(\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}}+\beta\,\hat{\boldsymbol{y}})J_\ell}_{\text{Zeroth-order Transverse T}_0}+\underbrace{\hat{\boldsymbol{z}}\,\frac{ik_t}{2k_z}\left(\{\alpha+i\beta\}\mathrm{e}^{-i\phi}\,J_{\ell-1}+\{i\beta-\alpha\}\mathrm{e}^{i\phi}\,J_{\ell+1}\right)}_{\text{First-order Longitudinal L}_0}\right]E_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}.$$

(1.14)

磁场的计算遵循非常相似的推导过程：

$$\boldsymbol{B}^{(\mathrm{T}_0)}+\boldsymbol{B}^{(\mathrm{L}_1)}=\left[\underbrace{(\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}}-\beta\,\hat{\boldsymbol{x}})\frac{k_z}{k}J_\ell}_{\text{Zeroth-order Transverse T}_0}+\underbrace{\hat{\boldsymbol{z}}\,\frac{ik_t}{2k}\left(\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-i\phi}\,J_{\ell-1}+\{i\alpha+\beta\}\mathrm{e}^{i\phi}\,J_{\ell+1}\right)}_{\text{First-order Longitudinal L1}}\right]B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}\qquad(1.15)$$

注意，为了简洁起见，我们现在省略了贝塞尔函数的自变量：从此处开始，我们在整个补充信息中都将如此处理。为了计算二阶横向电场 ，我们需要使用麦克斯韦-安培定律：

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}.\qquad(1.16)$$

为了得到二阶横向电场分量 ，我们将磁场 (1.15) 代入重新整理后的麦克斯韦-安培定律 (1.16)：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=c^2\int(\nabla\times\boldsymbol{B})\partial t\\&=c^2\,\frac{i}{\omega}\left(\nabla\times\left[(\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}}-\beta\,\hat{\boldsymbol{x}})\frac{k_z}{k}J_\ell+\hat{\boldsymbol{z}}\,\frac{ik_t}{2k}\left(\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-i\phi}\,J_{\ell-1}+\{i\alpha+\beta\}\mathrm{e}^{i\phi}\,J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}\right).\end{aligned}\qquad(1.17)$$

我们根据一阶磁场纵向分量的横向梯度，生成二阶电场分量（旋度算子作用于零阶横向磁场，会产生零阶横向电场分量和一阶纵向电场分量；这些分量已在上文利用其他麦克斯韦方程推导得出）。

$$\boldsymbol{E}^{(\mathrm{T}_2)} = c^2\frac{i}{\omega}\left(\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\times\left[\hat{\boldsymbol{z}}\frac{ik_t}{2k}\left(\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\alpha+\beta\}\mathrm{e}^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}\right)$$

$$= c^2\frac{i}{\omega}\left(\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial y}-\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial x}\right)\times\left[\frac{ik_t}{2k}\left(\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\alpha+\beta\}\mathrm{e}^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}\right)$$

$$= c^2\frac{i}{\omega}\left(\left(\hat{\boldsymbol{x}}\left[(\sin\phi)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}(\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}\right]-\hat{\boldsymbol{y}}\left[(\cos\phi)\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}(\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\right)\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{ik_t}{2k}\left(\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\alpha+\beta\}\mathrm{e}^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]\right)B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$= c^2\frac{i}{\omega}\left(\underbrace{\hat{\boldsymbol{x}}(\sin\phi)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{ik_t}{2k}\left(\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\alpha+\beta\}\mathrm{e}^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]}_{1}\right.$$
$$+\underbrace{\hat{\boldsymbol{x}}\frac{1}{r}(\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{ik_t}{2k}\left(\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\alpha+\beta\}\mathrm{e}^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]}_{2}$$
$$\underbrace{-\hat{\boldsymbol{y}}(\cos\phi)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{ik_t}{2k}\left(\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\alpha+\beta\}\mathrm{e}^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]}_{3}$$
$$\left.\underbrace{+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{1}{r}(\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{ik_t}{2k}\left(\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\alpha+\beta\}\mathrm{e}^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]}_{4}\right)B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}. \tag{1.18}$$

要跟踪计算过程，我们将代数运算拆分为*y*和*y*分量，即 1、2、3 和 4。第一个*y*分量在（1.18）的最后一行中标记为 1，其表达式为

$$\hat{\boldsymbol{x}}(\sin\phi)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{ik_t}{2k}\left(\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\alpha+\beta\}\mathrm{e}^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$
$$= \hat{\boldsymbol{x}}(\sin\phi)\left[\frac{ik_t}{2k}\left(\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-i\phi}\left\{\frac{k_t}{2}\left(J_{\ell-2}-J_{\ell}\right)\right\}+\{i\alpha+\beta\}\mathrm{e}^{i\phi}\left\{\frac{k_t}{2}\left(J_{\ell}-J_{\ell+2}\right)\right\}\right)\right]B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}, \tag{1.19}$$

其中我们使用了贝塞尔关系 以类似于前文的方式。第二个*y*分量为：

$$\hat{\boldsymbol{x}}\frac{1}{r}(\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{ik_t}{2k}\left(\{i\alpha-\beta\}e^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\alpha+\beta\}e^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{1}{r}(\cos\phi)\left[\frac{ik_t}{2k}\left(i(\ell-1)\{i\alpha-\beta\}e^{-i\phi}J_{\ell-1}+i(\ell+1)\{i\alpha+\beta\}e^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{1}{r}(\cos\phi)\left[\frac{ik_t}{2k}\left(i(\ell-1)\{i\alpha-\beta\}e^{-i\phi}\left(\frac{k_t r\{J_\ell+J_{\ell-2}\}}{2(\ell-1)}\right)+i(\ell+1)\{i\alpha+\beta\}e^{i\phi}\left(\frac{k_t r\{J_\ell+J_{\ell+2}\}}{2(\ell+1)}\right)\right)\right]$$
$$\times B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\hat{\boldsymbol{x}}\left[\frac{ik_t}{2k}\left(\{i\alpha-\beta\}e^{-i\phi}\left(\frac{k_t i(\cos\phi)\{J_\ell+J_{\ell-2}\}}{2}\right)+\{i\alpha+\beta\}e^{i\phi}\left(\frac{k_t i(\cos\phi)\{J_\ell+J_{\ell+2}\}}{2}\right)\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\hat{\boldsymbol{x}}\left[\frac{ik_t^2}{4k}\left(\{i\alpha-\beta\}e^{-i\phi}\,i(\cos\phi)\{J_\ell+J_{\ell-2}\}+\{i\alpha+\beta\}e^{i\phi}\,i(\cos\phi)\{J_\ell+J_{\ell+2}\}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}. \qquad (1.20)$$

我们利用了贝塞尔关系，即。 将两个*y*分量 (1.19) 和 (1.20) 相加，得到

$$\hat{\boldsymbol{x}}\frac{ik_t^2}{4k}\left[\begin{array}{l}\left((\sin\phi)\{i\alpha-\beta\}e^{-i\phi}\{(J_{\ell-2}-J_\ell)\}+(\sin\phi)\{i\alpha+\beta\}e^{i\phi}\{(J_\ell-J_{\ell+2})\}\right)\\+\left(\{i\alpha-\beta\}e^{-i\phi}\,i(\cos\phi)\{J_\ell+J_{\ell-2}\}+\{i\alpha+\beta\}e^{i\phi}\,i(\cos\phi)\{J_\ell+J_{\ell+2}\}\right)\end{array}\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{ik_t^2}{4k}\begin{bmatrix}-J_\ell(\sin\phi)\{i\alpha-\beta\}e^{-i\phi}+J_\ell i(\cos\phi)\{i\alpha-\beta\}e^{-i\phi}\\+J_\ell(\sin\phi)\{i\alpha+\beta\}e^{i\phi}+J_\ell i(\cos\phi)\{i\alpha+\beta\}e^{i\phi}\\+J_{\ell-2}(\sin\phi)\{i\alpha-\beta\}e^{-i\phi}+J_{\ell-2}i(\cos\phi)\{i\alpha-\beta\}e^{-i\phi}\\-J_{\ell+2}(\sin\phi)\{i\alpha+\beta\}e^{i\phi}+J_{\ell+2}i(\cos\phi)\{i\alpha+\beta\}e^{i\phi}\end{bmatrix}B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{ik_t^2}{4k}\begin{bmatrix}J_\ell i\{i\alpha-\beta\}e^{i\phi}e^{-i\phi}+J_\ell i\{i\alpha+\beta\}e^{i\phi}e^{-i\phi}\\+J_{\ell-2}i\{i\alpha-\beta\}e^{-i\phi}e^{-i\phi}+J_{\ell+2}i\{i\alpha+\beta\}e^{i\phi}e^{i\phi}\end{bmatrix}B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{ik_t^2}{4k}\begin{bmatrix}J_\ell\{-\alpha-i\beta\}+J_\ell\{-\alpha+i\beta\}\\+J_{\ell-2}\{-\alpha-i\beta\}e^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{i\beta-\alpha\}e^{2i\phi}\end{bmatrix}B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{ik_t^2}{4k}\left[-2\alpha J_\ell+J_{\ell-2}\{-\alpha-i\beta\}e^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{i\beta-\alpha\}e^{2i\phi}\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}. \qquad (1.21)$$

y 分量（在式 (1.18) 中标记为 3 和 4）以类似的方式确定：

$$
\begin{aligned}
&-\hat{\boldsymbol{y}}\left(\cos\phi\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{ik_t}{2k}\left(\left\{i\alpha-\beta\right\}e^{-i\phi}\,J_{\ell-1}+\left\{i\alpha+\beta\right\}e^{i\phi}\,J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}\\
&=-\hat{\boldsymbol{y}}\left(\cos\phi\right)\left[\frac{ik_t}{2k}\left(\left\{i\alpha-\beta\right\}e^{-i\phi}\left\{\frac{k_t}{2}\left(J_{\ell-2}-J_{\ell}\right)\right\}+\left\{i\alpha+\beta\right\}e^{i\phi}\left\{\frac{k_t}{2}\left(J_{\ell}-J_{\ell+2}\right)\right\}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)},
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{y}}\frac{1}{r}\left(\sin\phi\right)\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{ik_t}{2k}\left(\left\{i\alpha-\beta\right\}e^{-i\phi}\,J_{\ell-1}+\left\{i\alpha+\beta\right\}e^{i\phi}\,J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}\\
&=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{1}{r}\left(\sin\phi\right)\left[\frac{ik_t}{2k}\left(i\left(\ell-1\right)\left\{i\alpha-\beta\right\}e^{-i\phi}\,J_{\ell-1}+i\left(\ell+1\right)\left\{i\alpha+\beta\right\}e^{i\phi}\,J_{\ell+1}\right)\right]B_0\\
&e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}\\
&=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{1}{r}\left(\sin\phi\right)\left[\frac{ik_t}{2k}\left(i\left(\ell-1\right)\left\{i\alpha-\beta\right\}e^{-i\phi}\left(\frac{k_t r\left\{J_{\ell}+J_{\ell-2}\right\}}{2\left(\ell-1\right)}\right)+i\left(\ell+1\right)\left\{i\alpha+\beta\right\}e^{i\phi}\left(\frac{k_t r\left\{J_{\ell}+J_{\ell+2}\right\}}{2\left(\ell+1\right)}\right)\right)\right]\\
&\times B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}\\
&=\hat{\boldsymbol{y}}\left[\frac{ik_t^2}{4k}\left(i\left\{i\alpha-\beta\right\}\left(\sin\phi\right)e^{-i\phi}\left\{J_{\ell}+J_{\ell-2}\right\}+i\left\{i\alpha+\beta\right\}\left(\sin\phi\right)e^{i\phi}\left\{J_{\ell}+J_{\ell+2}\right\}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}.
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

将式 (1.22) 和 (1.23) 相加，得到总的 *y* 分量：

$$
\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{y}}\frac{ik_t^2}{4k}\left[\begin{array}{l}\left(\left\{i\alpha-\beta\right\}\left(-\cos\phi\right)e^{-i\phi}\left(J_{\ell-2}-J_{\ell}\right)+\left\{i\alpha+\beta\right\}\left(-\cos\phi\right)e^{i\phi}\left(J_{\ell}-J_{\ell+2}\right)\right)\\ \left(i\left\{i\alpha-\beta\right\}\left(\sin\phi\right)e^{-i\phi}\left\{J_{\ell}+J_{\ell-2}\right\}+i\left\{i\alpha+\beta\right\}\left(\sin\phi\right)e^{i\phi}\left\{J_{\ell}+J_{\ell+2}\right\}\right)\end{array}\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}\\
&=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{ik_t^2}{4k}\left[\begin{array}{l}J_{\ell}\left\{i\alpha-\beta\right\}\left(\cos\phi\right)e^{-i\phi}+J_{\ell}\left\{i\alpha-\beta\right\}i\left(\sin\phi\right)e^{-i\phi}\\ +J_{\ell}\left\{i\alpha+\beta\right\}\left(-\cos\phi\right)e^{i\phi}+J_{\ell}\left\{i\alpha+\beta\right\}\left(i\sin\phi\right)e^{i\phi}\\ +J_{\ell-2}\left\{i\alpha-\beta\right\}\left(-\cos\phi\right)e^{-i\phi}+J_{\ell-2}\left\{i\alpha-\beta\right\}\left(i\sin\phi\right)e^{-i\phi}\\ -J_{\ell+2}\left\{i\alpha+\beta\right\}\left(-\cos\phi\right)e^{i\phi}+J_{\ell+2}\left\{i\alpha+\beta\right\}\left(i\sin\phi\right)e^{i\phi}\end{array}\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}\\
&=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{ik_t^2}{4k}\left[\begin{array}{l}J_{\ell}\left\{i\alpha-\beta\right\}e^{i\phi}\,e^{-i\phi}-J_{\ell}\left\{i\alpha+\beta\right\}e^{-i\phi}\,e^{i\phi}\\ -J_{\ell-2}\left\{i\alpha-\beta\right\}e^{-i\phi}\,e^{-i\phi}+J_{\ell+2}\left\{i\alpha+\beta\right\}e^{i\phi}\,e^{i\phi}\end{array}\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}\\
&=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{ik_t^2}{4k}\left[J_{\ell}\left\{i\alpha-\beta\right\}-J_{\ell}\left\{i\alpha+\beta\right\}+J_{\ell-2}\left\{\beta-i\alpha\right\}e^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\left\{i\alpha+\beta\right\}e^{2i\phi}\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}\\
&=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{ik_t^2}{4k}\left[-2\beta\,J_{\ell}+J_{\ell-2}\left\{\beta-i\alpha\right\}e^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\left\{i\alpha+\beta\right\}e^{2i\phi}\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}.
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

将总的 *y* 分量（1.21）和 *y* 分量（1.24）代回（1.18），可得总的二阶横向电场为：

$$\boldsymbol{E}^{(\mathrm{T}_2)}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}\dfrac{k_t^2}{4k^2}\Big[2\alpha J_\ell+J_{\ell-2}\{\alpha+i\beta\}\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{\alpha-i\beta\}\mathrm{e}^{2i\phi}\Big]\\ +\hat{\boldsymbol{y}}\dfrac{k_t^2}{4k^2}\Big[2\beta J_\ell+J_{\ell-2}\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{-\beta-i\alpha\}\mathrm{e}^{2i\phi}\Big]\end{bmatrix}E_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}. \tag{1.25}$$

将其与零阶横向分量和一阶纵向分量相加，(1.14) 即可得到截至二阶的总电场：

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}(\alpha\hat{\boldsymbol{x}}+\beta\hat{\boldsymbol{y}})J_\ell+\hat{\boldsymbol{z}}\dfrac{ik_t}{2k_z}\Big(\{\alpha+i\beta\}\mathrm{e}^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\beta-\alpha\}\mathrm{e}^{i\phi}J_{\ell+1}\Big)\\ +\hat{\boldsymbol{x}}\dfrac{k_t^2}{4k^2}\Big[2\alpha J_\ell+J_{\ell-2}\{\alpha+i\beta\}\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{\alpha-i\beta\}\mathrm{e}^{2i\phi}\Big]\\ +\hat{\boldsymbol{y}}\dfrac{k_t^2}{4k^2}\Big[2\beta J_\ell+J_{\ell-2}\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{-\beta-i\alpha\}\mathrm{e}^{2i\phi}\Big]\end{bmatrix}E_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}, \tag{1.26}$$

如正文所示。按照类似的步骤，使用法拉第定律可得二阶横向磁场：$\nabla\times\ ^{\mathrm{t}}=-\dfrac{\partial}{\partial\mathrm{BE}}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=-\int(\nabla\times\boldsymbol{E})\partial t\\&=-\frac{i}{\omega}\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[(\alpha\hat{\boldsymbol{x}}+\beta\hat{\boldsymbol{y}})J_\ell+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{ik_t}{2k_z}\Big(\{i\beta+\alpha\}\mathrm{e}^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\beta-\alpha\}\mathrm{e}^{i\phi}J_{\ell+1}\Big)\right]E_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}.\end{aligned} \tag{1.27}$$

同样，与电场一样，我们只需关注纵向场的横向梯度，即可得到二阶横向场。下面给出计算过程，不作说明。

$$-\frac{i}{\omega}\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\hat{\boldsymbol{z}}\frac{ik_t}{2k_z}\left(\{i\beta+\alpha\}e^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\beta-\alpha\}e^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]E_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\frac{i}{k}\left(\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial x}-\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\frac{ik_t}{2k_z}\left(\{i\beta+\alpha\}e^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\beta-\alpha\}e^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\frac{i}{k}\left(\hat{\boldsymbol{y}}\left\{(\cos\phi)\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}(\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}-\hat{\boldsymbol{x}}\left\{(\sin\phi)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}(\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}\right)$$
$$\times\left[\frac{ik_t}{2k_z}\left(\{i\beta+\alpha\}e^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\beta-\alpha\}e^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\underbrace{\frac{i}{k}\hat{\boldsymbol{y}}(\cos\phi)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{ik_t}{2k_z}\left(\{i\beta+\alpha\}e^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\beta-\alpha\}e^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}}_{1}$$
$$\underbrace{-\frac{i}{k}\hat{\boldsymbol{y}}\frac{1}{r}(\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{ik_t}{2k_z}\left(\{i\beta+\alpha\}e^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\beta-\alpha\}e^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}}_{2}$$
$$\underbrace{-\frac{i}{k}\hat{\boldsymbol{x}}(\sin\phi)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{ik_t}{2k_z}\left(\{i\beta+\alpha\}e^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\beta-\alpha\}e^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}}_{3}$$
$$\underbrace{-\frac{i}{k}\hat{\boldsymbol{x}}\frac{1}{r}(\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{ik_t}{2k_z}\left(\{i\beta+\alpha\}e^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\beta-\alpha\}e^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}}_{4}, \qquad (1.28)$$

$$\frac{i}{k}\left(\hat{\boldsymbol{y}}(\cos\phi)\frac{\partial}{\partial r}\right)\left[\frac{ik_t}{2k_z}\left(\{i\beta+\alpha\}e^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\beta-\alpha\}e^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\frac{i}{k}\left(\hat{\boldsymbol{y}}(\cos\phi)\right)\left[\frac{ik_t}{2k_z}\left(\{i\beta+\alpha\}e^{-i\phi}\left\{\frac{k_t}{2}\left(J_{\ell-2}-J_\ell\right)\right\}+\{i\beta-\alpha\}e^{i\phi}\left\{\frac{k_t}{2}\left(J_\ell-J_{\ell+2}\right)\right\}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\frac{i}{k}\hat{\boldsymbol{y}}\left[\frac{ik_t^2}{4k_z}\left(\{i\beta+\alpha\}(\cos\phi)e^{-i\phi}\left(J_{\ell-2}-J_\ell\right)+\{i\beta-\alpha\}(\cos\phi)e^{i\phi}\left(J_\ell-J_{\ell+2}\right)\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}, \qquad (1.29)$$

$$-\frac{i}{k}\hat{\boldsymbol{y}}\frac{1}{r}(\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{ik_t}{2k_z}\left(\{i\beta+\alpha\}e^{-i\phi}J_{\ell-1}+\{i\beta-\alpha\}e^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=-\frac{i}{k}\hat{\boldsymbol{y}}\frac{1}{r}\left[\frac{ik_t}{2k_z}\left(i(\ell-1)\{i\beta+\alpha\}(\sin\phi)e^{-i\phi}J_{\ell-1}+i(\ell+1)\{i\beta-\alpha\}(\sin\phi)e^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=-\frac{i}{k}\hat{\boldsymbol{y}}\frac{1}{r}\left[\frac{ik_t}{2k_z}\begin{pmatrix}i(\ell-1)\{i\beta+\alpha\}(\sin\phi)e^{-i\phi}\left(\frac{k_t r\{J_\ell+J_{\ell-2}\}}{2(\ell-1)}\right)\\+i(\ell+1)\{i\beta-\alpha\}(\sin\phi)e^{i\phi}\left(\frac{k_t r\{J_\ell+J_{\ell+2}\}}{2(\ell+1)}\right)\end{pmatrix}\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=-\frac{i}{k}\hat{\boldsymbol{y}}\left[\frac{ik_t^2}{4k_z}\left(\{i\beta+\alpha\}(i\sin\phi)e^{-i\phi}\{J_\ell+J_{\ell-2}\}+\{i\beta-\alpha\}(i\sin\phi)e^{i\phi}\{J_\ell+J_{\ell+2}\}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)},\qquad(1.30)$$

(1.29) 和 (1.30) 的和

$$\frac{i}{k}\hat{\boldsymbol{y}}\left[\frac{ik_t^2}{4k_z}\left(\{i\beta+\alpha\}(\cos\phi)e^{-i\phi}(J_{\ell-2}-J_\ell)+\{i\beta-\alpha\}(\cos\phi)e^{i\phi}(J_\ell-J_{\ell+2})\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$
$$-\frac{i}{k}\hat{\boldsymbol{y}}\left[\frac{ik_t^2}{4k_z}\left(\{i\beta+\alpha\}(i\sin\phi)e^{-i\phi}\{J_\ell+J_{\ell-2}\}+\{i\beta-\alpha\}(i\sin\phi)e^{i\phi}\{J_\ell+J_{\ell+2}\}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{k_t^2}{4kk_z}\begin{bmatrix}\left(\{i\beta+\alpha\}(i\sin\phi)e^{-i\phi}\{J_\ell+J_{\ell-2}\}+\{i\beta-\alpha\}(i\sin\phi)e^{i\phi}\{J_\ell+J_{\ell+2}\}\right)\\-\left(\{i\beta+\alpha\}(\cos\phi)e^{-i\phi}(J_{\ell-2}-J_\ell)+\{i\beta-\alpha\}(\cos\phi)e^{i\phi}(J_\ell-J_{\ell+2})\right)\end{bmatrix}B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{k_t^2}{4kk_z}\begin{bmatrix}J_\ell\{i\beta+\alpha\}(i\sin\phi)e^{-i\phi}+J_\ell\{i\beta+\alpha\}(\cos\phi)e^{-i\phi}\\+J_\ell\{i\beta-\alpha\}(i\sin\phi)e^{i\phi}-J_\ell\{i\beta-\alpha\}(\cos\phi)e^{i\phi}\\+J_{\ell-2}\{i\beta+\alpha\}(i\sin\phi)e^{-i\phi}-J_{\ell-2}\{i\beta+\alpha\}(\cos\phi)e^{-i\phi}\\+J_{\ell+2}\{i\beta-\alpha\}(i\sin\phi)e^{i\phi}+J_{\ell+2}\{i\beta-\alpha\}(\cos\phi)e^{i\phi}\end{bmatrix}B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{k_t^2}{4kk_z}\begin{bmatrix}J_\ell\{i\beta+\alpha\}e^{i\phi}e^{-i\phi}-J_\ell\{i\beta-\alpha\}e^{-i\phi}e^{i\phi}\\-J_{\ell-2}\{i\beta+\alpha\}e^{-i\phi}e^{-i\phi}+J_{\ell+2}\{i\beta-\alpha\}e^{i\phi}e^{i\phi}\end{bmatrix}B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{k_t^2}{4kk_z}\left[J_\ell\{i\beta+\alpha\}-J_\ell\{i\beta-\alpha\}+J_{\ell-2}\{-i\beta-\alpha\}e^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{i\beta-\alpha\}e^{2i\phi}\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\hat{\boldsymbol{y}}\frac{k_t^2}{4kk_z}\left[2\alpha J_\ell+J_{\ell-2}\{-i\beta-\alpha\}e^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{i\beta-\alpha\}e^{2i\phi}\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}.\qquad(1.31)$$

$$-\frac{i}{k}\left(\hat{\boldsymbol{x}}\left(\sin\phi\right)\frac{\partial}{\partial r}\right)\left[\frac{ik_t}{2k_z}\left(\left\{i\beta+\alpha\right\}e^{-i\phi}\,J_{\ell-1}+\left\{i\beta-\alpha\right\}e^{i\phi}\,J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=-\frac{i}{k}\hat{\boldsymbol{x}}\left[\frac{ik_t}{2k_z}\left(\left\{i\beta+\alpha\right\}\left(\sin\phi\right)e^{-i\phi}\left\{\frac{k_t}{2}\left(J_{\ell-2}-J_{\ell}\right)\right\}+\left\{i\beta-\alpha\right\}\left(\sin\phi\right)e^{i\phi}\left\{\frac{k_t}{2}\left(J_{\ell}-J_{\ell+2}\right)\right\}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\frac{k_t^2}{4kk_z}\hat{\boldsymbol{x}}\left[\left(\left\{i\beta+\alpha\right\}\left(\sin\phi\right)e^{-i\phi}\left(J_{\ell-2}-J_{\ell}\right)+\left\{i\beta-\alpha\right\}\left(\sin\phi\right)e^{i\phi}\left(J_{\ell}-J_{\ell+2}\right)\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)},\tag{1.32}$$

$$-\frac{i}{k}\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{1}{r}\left(\cos\phi\right)\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left[\frac{ik_t}{2k_z}\left(\left\{i\beta+\alpha\right\}e^{-i\phi}\,J_{\ell-1}+\left\{i\beta-\alpha\right\}e^{i\phi}\,J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=-\frac{i}{k}\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{1}{r}\left(\cos\phi\right)\right)\left[\frac{ik_t}{2k_z}\left(\begin{array}{l}i\left(\ell-1\right)\left\{i\beta+\alpha\right\}e^{-i\phi}\left(\dfrac{k_t r\left\{J_{\ell}+J_{\ell-2}\right\}}{2\left(\ell-1\right)}\right)\\+i\left(\ell+1\right)\left\{i\beta-\alpha\right\}e^{i\phi}\left(\dfrac{k_t r\left\{J_{\ell}+J_{\ell+2}\right\}}{2\left(\ell+1\right)}\right)\end{array}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=-\frac{i}{k}\left(\hat{\boldsymbol{x}}\left(\cos\phi\right)\right)\left[\frac{ik_t^2}{4k_z}\left(i\left\{i\beta+\alpha\right\}e^{-i\phi}\left\{J_{\ell}+J_{\ell-2}\right\}+i\left\{i\beta-\alpha\right\}e^{i\phi}\left\{J_{\ell}+J_{\ell+2}\right\}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\frac{k_t^2}{4kk_z}\hat{\boldsymbol{x}}\left[\left(i\left\{i\beta+\alpha\right\}\left(\cos\phi\right)e^{-i\phi}\left\{J_{\ell}+J_{\ell-2}\right\}+i\left\{i\beta-\alpha\right\}\left(\cos\phi\right)e^{i\phi}\left\{J_{\ell}+J_{\ell+2}\right\}\right)\right]B_0\,e^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)},\tag{1.33}$$

将（1.32）式与（1.33）式相加可得

$$\frac{k_t^2}{4kk_z}\hat{\boldsymbol{x}}\Big[\big(\{i\beta+\alpha\}(\sin\phi)\mathrm{e}^{-i\phi}\,(J_{\ell-2}-J_\ell)+\{i\beta-\alpha\}(\sin\phi)\mathrm{e}^{i\phi}\,(J_\ell-J_{\ell+2})\big)\Big]B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$+\frac{k_t^2}{4kk_z}\hat{\boldsymbol{x}}\Big[\big(i\{i\beta+\alpha\}(\cos\phi)\mathrm{e}^{-i\phi}\,\{J_\ell+J_{\ell-2}\}+i\{i\beta-\alpha\}(\cos\phi)\mathrm{e}^{i\phi}\,\{J_\ell+J_{\ell+2}\}\big)\Big]B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\frac{k_t^2}{4kk_z}\hat{\boldsymbol{x}}\begin{bmatrix}\big(\{i\beta+\alpha\}(\sin\phi)\mathrm{e}^{-i\phi}\,(J_{\ell-2}-J_\ell)+\{i\beta-\alpha\}(\sin\phi)\mathrm{e}^{i\phi}\,(J_\ell-J_{\ell+2})\big)\\+\big(i\{i\beta+\alpha\}(\cos\phi)\mathrm{e}^{-i\phi}\,\{J_\ell+J_{\ell-2}\}+i\{i\beta-\alpha\}(\cos\phi)\mathrm{e}^{i\phi}\,\{J_\ell+J_{\ell+2}\}\big)\end{bmatrix}B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\frac{k_t^2}{4kk_z}\hat{\boldsymbol{x}}\begin{bmatrix}-J_\ell\{i\beta+\alpha\}(\sin\phi)\mathrm{e}^{-i\phi}+J_\ell\{i\beta+\alpha\}(i\cos\phi)\mathrm{e}^{-i\phi}\\+J_\ell\{i\beta-\alpha\}(\sin\phi)\mathrm{e}^{i\phi}+iJ_\ell\{i\beta-\alpha\}(\cos\phi)\mathrm{e}^{i\phi}\\+J_{\ell-2}\{i\beta+\alpha\}(\sin\phi)\mathrm{e}^{-i\phi}+iJ_{\ell-2}\{i\beta+\alpha\}(\cos\phi)\mathrm{e}^{-i\phi}\\-J_{\ell+2}\{i\beta-\alpha\}(\sin\phi)\mathrm{e}^{i\phi}+iJ_{\ell+2}\{i\beta-\alpha\}(\cos\phi)\mathrm{e}^{i\phi}\end{bmatrix}B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\frac{k_t^2}{4kk_z}\hat{\boldsymbol{x}}\begin{bmatrix}J_\ell\{i\beta+\alpha\}i\,\mathrm{e}^{i\phi}\,\mathrm{e}^{-i\phi}+J_\ell\{i\beta-\alpha\}i\,\mathrm{e}^{-i\phi}\,\mathrm{e}^{i\phi}\\+J_{\ell-2}\{i\beta+\alpha\}i\,\mathrm{e}^{-i\phi}\,\mathrm{e}^{-i\phi}+J_{\ell+2}\{i\beta-\alpha\}i\,\mathrm{e}^{i\phi}\,\mathrm{e}^{i\phi}\end{bmatrix}B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\frac{k_t^2}{4kk_z}\hat{\boldsymbol{x}}\begin{bmatrix}J_\ell\{i\beta+\alpha\}i+J_\ell\{i\beta-\alpha\}i\\+J_{\ell-2}\{i\beta+\alpha\}i\,\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{i\beta-\alpha\}i\,\mathrm{e}^{2i\phi}\end{bmatrix}B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}$$

$$=\frac{k_t^2}{4kk_z}\hat{\boldsymbol{x}}\begin{bmatrix}J_\ell\{-\beta+i\alpha\}+J_\ell\{-\beta-i\alpha\}\\+J_{\ell-2}\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{-i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{2i\phi}\end{bmatrix}B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)} \qquad (1.34)$$

$$=\frac{k_t^2}{4kk_z}\hat{\boldsymbol{x}}\Big[-2\beta J_\ell+J_{\ell-2}\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{-i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{2i\phi}\Big]B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}.$$

因此，总磁场为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}(\alpha\hat{\boldsymbol{y}}-\beta\hat{\boldsymbol{x}})\frac{k_z}{k}J_\ell+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{ik_t}{2k}\big(\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-i\phi}\,J_{\ell-1}+\{i\alpha+\beta\}\mathrm{e}^{i\phi}\,J_{\ell+1}\big)\\+\frac{k_t^2}{4kk_z}\Big(\hat{\boldsymbol{x}}\Big[-2\beta J_\ell+J_{\ell-2}\{i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{-i\alpha-\beta\}\mathrm{e}^{2i\phi}\Big]\\+\hat{\boldsymbol{y}}\Big[2\alpha J_\ell+J_{\ell-2}\{-i\beta-\alpha\}\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\{i\beta-\alpha\}\mathrm{e}^{2i\phi}\Big]\Big)\end{bmatrix}B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}. \qquad (1.35)$$

光学手性密度的计算

The 准单色光束的光学手性密度由以下公式给出 a:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}+c^2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}\right] \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\boldsymbol{E}\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}\right)+c^2\boldsymbol{B}\cdot\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}\right)\right] \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}+\bar{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{B}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}+\bar{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right)\right) \\ +c^2\,\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{B}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}+\bar{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right)\cdot\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}+\bar{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right)\right)\end{array}\right] \\
&= \frac{\varepsilon_0}{8}i\omega\left[\left(\boldsymbol{E}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}+\bar{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right)\cdot\left(\boldsymbol{B}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}-\bar{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right)+\left(\boldsymbol{B}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}+\bar{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right)\cdot\left(\bar{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{e}^{i\omega t}-\boldsymbol{E}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right)\right] \qquad (1.36)\\
&= \frac{\varepsilon_0}{8}i\omega\left[\left(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\,\mathrm{e}^{-2i\omega t}+\bar{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}-\bar{\boldsymbol{E}}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{e}^{2i\omega t}\right)+\left(\boldsymbol{B}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{e}^{-2i\omega t}+\bar{\boldsymbol{B}}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{e}^{2i\omega t}-\bar{\boldsymbol{B}}\cdot\boldsymbol{E}\right)\right] \\
&= \frac{\varepsilon_0}{4}i\omega\left[\bar{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}\right] \\
&= -\frac{\varepsilon_0\omega}{2}\,\mathrm{Im}\left(\bar{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{B}\right)
\end{aligned}
$$

有趣的是，与能量密度不同，我们不需要对式（1.36）在某个特征时间尺度上取平均；它自然地与时间无关。在式（1.36）的第三行中，我们使用

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r},t]=\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}]\mathrm{e}^{-i\omega t}\right\}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}]\mathrm{e}^{-i\omega t}+\bar{\boldsymbol{E}}[\boldsymbol{r}]\mathrm{e}^{i\omega t}\right)\text{ and }\boldsymbol{B}[\boldsymbol{r},t]=\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{B}[\boldsymbol{r}]\mathrm{e}^{-i\omega t}\right\}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{B}[\boldsymbol{r}]\mathrm{e}^{-i\omega t}+\bar{\boldsymbol{B}}[\boldsymbol{r}]\mathrm{e}^{i\omega t}\right).$$

值得展示一下圆偏振平面波的计算过程：

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{x}}+i\sigma\,\hat{\boldsymbol{y}})E_0\,\mathrm{e}^{ikz-i\omega t}\text{ and }\boldsymbol{B}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{y}}-i\sigma\,\hat{\boldsymbol{x}})B_0\,\mathrm{e}^{ikz-i\omega t}. \qquad (1.37)$$

因此：

$$
\begin{aligned}
C &= -\frac{\varepsilon_0\omega}{2}\,\mathrm{Im}\left(\bar{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{B}\right) \\
&= -\frac{\varepsilon_0\omega}{2}\,\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{x}}-i\sigma\,\hat{\boldsymbol{y}})E_0\,\mathrm{e}^{-ikz+i\omega t}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{y}}-i\sigma\,\hat{\boldsymbol{x}})B_0\,\mathrm{e}^{ikz-i\omega t}\right)\right) \\
&= \frac{\varepsilon_0\omega}{2}E_0B_0\sigma \\
&= \frac{\varepsilon_0\omega}{2c}E_0^2\sigma \\
&= \frac{I\omega\sigma}{c^2}. \qquad (1.38)
\end{aligned}
$$

将电场（1.26）和磁场（1.35）代入（1.36），可得到贝塞尔光束的光学手性密度：

$$
\begin{aligned}
C &= -\frac{\varepsilon_0\omega}{2}\operatorname{Im}\left(\bar{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{B}\right)\\
&= -\frac{\varepsilon_0\omega}{2}\operatorname{Im}\Bigg[\Bigg\{\left(\bar{\alpha}\,\hat{\boldsymbol{x}}+\bar{\beta}\,\hat{\boldsymbol{y}}\right)J_\ell-\hat{\boldsymbol{z}}\frac{ik_t}{2k_z}\left(\left\{\bar{\alpha}-i\bar{\beta}\right\}\mathrm{e}^{i\phi}\,J_{\ell-1}+\left\{-i\bar{\beta}-\bar{\alpha}\right\}\mathrm{e}^{-i\phi}\,J_{\ell+1}\right)\\
&\quad+\hat{\boldsymbol{x}}\frac{k_t^2}{4k^2}\left[2\bar{\alpha}J_\ell+J_{\ell-2}\left\{\bar{\alpha}-i\bar{\beta}\right\}\mathrm{e}^{2i\phi}+J_{\ell+2}\left\{\bar{\alpha}+i\bar{\beta}\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi}\right]\\
&\quad+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{k_t^2}{4k^2}\left[2\bar{\beta}J_\ell+J_{\ell-2}\left\{-i\bar{\alpha}-\bar{\beta}\right\}\mathrm{e}^{2i\phi}+J_{\ell+2}\left\{-\bar{\beta}+i\bar{\alpha}\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi}\right]\Bigg\}E_0\,\mathrm{e}^{-i(k_z z+\ell\phi)}\\
&\quad\cdot\Bigg\{\left(\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}}-\beta\,\hat{\boldsymbol{x}}\right)\frac{k_z}{k}J_\ell+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{ik_t}{2k}\left(\left\{i\alpha-\beta\right\}\mathrm{e}^{-i\phi}\,J_{\ell-1}+\left\{i\alpha+\beta\right\}\mathrm{e}^{i\phi}\,J_{\ell+1}\right)\\
&\quad+\frac{k_t^2}{4kk_z}\Big(\hat{\boldsymbol{x}}\left[-2\beta J_\ell+J_{\ell-2}\left\{i\alpha-\beta\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\left\{-i\alpha-\beta\right\}\mathrm{e}^{2i\phi}\right]\\
&\quad+\hat{\boldsymbol{y}}\left[2\alpha J_\ell+J_{\ell-2}\left\{-i\beta-\alpha\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\left\{i\beta-\alpha\right\}\mathrm{e}^{2i\phi}\right]\Big)\Bigg\}B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi)}\Bigg].
\end{aligned}
\tag{1.39}
$$

我们可以将这一计算拆分为若干不同的贡献：其中一类是在点积中涉及零阶横向场，且相对于小参数为零阶；一类涉及一阶纵向场，且相对于小参数为二阶；一类涉及零阶横向场和二阶横向场，且相对于小参数为二阶；最后一类涉及二阶横向电场与二阶横向磁场的耦合，且相对于小参数为四阶。

$$
\begin{aligned}
C\left(\mathrm{T}_0\cdot\mathrm{T}_0\right) &= -\frac{\varepsilon_0\omega}{2}\operatorname{Im}\left(\bar{\alpha}\,\hat{\boldsymbol{x}}+\bar{\beta}\,\hat{\boldsymbol{y}}\right)J_\ell E_0\,\mathrm{e}^{-i(k_z z+\ell\phi)}\cdot\left(\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}}-\beta\,\hat{\boldsymbol{x}}\right)\frac{k_z}{k}J_\ell B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi)}\\
&= -\frac{\varepsilon_0\omega}{2c}\frac{k_z}{k}E_0^2J_\ell^2\operatorname{Im}\left(\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta\right)\\
&= -\frac{I\omega}{c^2}\frac{k_z}{k}J_\ell^2\operatorname{Im}\left(\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta\right).
\end{aligned}
\tag{1.40}
$$

为进一步推广我们的结果，我们使用以下公式 和其中 是方位角（它表示线偏振光的取向，例如y-偏振、y-偏振、对角偏振等）θ，而是椭圆率。利用这一点，我们可以证明

$\alpha = \cos\eta\cos\theta - \sin\eta\sin\theta$

$\beta = -\cos\eta\sin\theta - \sin\eta\cos\theta$

η

$$
\begin{aligned}
\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta &= \left(\cos\eta\cos\theta - i\sin\eta\sin\theta\right)\left(-\cos\eta\sin\theta + i\sin\eta\cos\theta\right)\\
&\quad -\left(\cos\eta\cos\theta + i\sin\eta\sin\theta\right)\left(-\cos\eta\sin\theta - i\sin\eta\cos\theta\right)\\
&= -\cos^2\eta\cos\theta\sin\theta + i\sin\eta\cos\eta\cos^2\theta + i\sin\eta\cos\eta\sin^2\theta\\
&\quad +\sin^2\eta\sin\theta\cos\theta + \cos^2\eta\cos\theta\sin\theta + i\sin\eta\cos\eta\cos^2\theta\\
&\quad +i\sin\eta\cos\eta\sin^2\theta - \sin^2\eta\cos\theta\sin\theta\\
&= i\sin\eta\cos\eta\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) + i\sin\eta\cos\eta\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\\
&\quad -\left(\cos^2\eta+\sin^2\eta\right)\cos\theta\sin\theta + \left(\sin^2\eta+\cos^2\eta\right)\sin\theta\cos\theta\\
&= 2i\sin\eta\cos\eta\\
&= i\sin 2\eta.
\end{aligned}
\tag{1.41}
$$

从而 (1.40) 变为：

$$
C\left(\mathrm{T}_0\cdot\mathrm{T}_0\right) = -\frac{I\omega}{c^2}\frac{k_z}{k}J_\ell^2\sin 2\eta. \tag{1.42}
$$

现在计算纵向场贡献：

$$
\begin{aligned}
C\left(\mathrm{L}_1\cdot\mathrm{L}_1\right) &= -\frac{\varepsilon_0\omega}{2}\mathrm{Im}\left[-\hat{\boldsymbol{z}}\frac{ik_t}{2k_z}\left(\left\{\bar{\alpha}-i\bar{\beta}\right\}\mathrm{e}^{i\phi}J_{\ell-1} + \left\{-i\bar{\beta}-\bar{\alpha}\right\}\mathrm{e}^{-i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]E_0\,\mathrm{e}^{-i\left(k_z z+\ell\phi\right)}\\
&\quad\cdot\left[\hat{\boldsymbol{z}}\frac{ik_t}{2k}\left(\left\{i\alpha-\beta\right\}\mathrm{e}^{-i\phi}J_{\ell-1} + \left\{i\alpha+\beta\right\}\mathrm{e}^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\right]B_0\,\mathrm{e}^{i\left(k_z z+\ell\phi\right)}\\
&= -\frac{\varepsilon_0\omega}{2c}E_0^2\frac{k_t^2}{4kk_z}\mathrm{Im}\left(\left\{\bar{\alpha}-i\bar{\beta}\right\}\mathrm{e}^{i\phi}J_{\ell-1} + \left\{-i\bar{\beta}-\bar{\alpha}\right\}\mathrm{e}^{-i\phi}J_{\ell+1}\right)\left(\left\{i\alpha-\beta\right\}\mathrm{e}^{-i\phi}J_{\ell-1} + \left\{i\alpha+\beta\right\}\mathrm{e}^{i\phi}J_{\ell+1}\right)\\
&= -\frac{\varepsilon_0\omega}{2c}E_0^2\frac{k_t^2}{4kk_z}\mathrm{Im}\left(\begin{array}{l}\left\{i|\alpha|^2+\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+i|\beta|^2\right\}J_{\ell-1}^2 + \left\{\alpha\bar{\beta}-i|\alpha|^2+i|\beta|^2+\bar{\alpha}\beta\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi}J_{\ell-1}J_{\ell+1}\\ +\left\{i|\alpha|^2+\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta-i|\beta|^2\right\}\mathrm{e}^{2i\phi}J_{\ell-1}J_{\ell+1} + \left\{\alpha\bar{\beta}-i|\alpha|^2-i|\beta|^2-\bar{\alpha}\beta\right\}J_{\ell+1}^2\end{array}\right)\\
&= -\frac{\varepsilon_0\omega}{2c}E_0^2\frac{k_t^2}{4kk_z}\mathrm{Im}\left(\begin{array}{l}\left\{\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+i\right\}J_{\ell-1}^2 + \left\{\alpha\bar{\beta}-i|\alpha|^2+i|\beta|^2+\bar{\alpha}\beta\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi}J_{\ell-1}J_{\ell+1}\\ +\left\{i|\alpha|^2+\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta-i|\beta|^2\right\}\mathrm{e}^{2i\phi}J_{\ell-1}J_{\ell+1} + \left\{\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta-1\right\}J_{\ell+1}^2\end{array}\right)\\
&= -\frac{\varepsilon_0\omega}{2c}E_0^2\frac{k_t^2}{4kk_z}\mathrm{Im}\left(\left\{\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+i\right\}J_{\ell-1}^2 + \left\{\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta-i\right\}J_{\ell+1}^2\right)\\
&= -\frac{I\omega}{c^2}\frac{k_t^2}{4kk_z}\left(\left\{\sin 2\eta+1\right\}J_{\ell-1}^2 + \left\{\sin 2\eta-1\right\}J_{\ell+1}^2\right).
\end{aligned}
\tag{1.43}
$$

最后一步是因为和对于任意和的值均为零。

现在，我们计算零阶和二阶横向场之间叉积中的混合项。必须纳入所有相关项：零阶电场与二阶磁场的点积；零阶磁场与二阶电场的点积：

$$
\begin{aligned}
C(\mathrm{T}_0\cdot\mathrm{T}_2) = -\frac{\varepsilon_0\omega}{2}\,\mathrm{Im}\Bigg[& \left(\bar{\alpha}\,\hat{\mathbf{x}}+\bar{\beta}\,\hat{\mathbf{y}}\right)J_\ell E_0\,\mathrm{e}^{-i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}\cdot\frac{k_t^2}{4kk_z}\Big(\hat{\mathbf{x}}\Big[-2\beta J_\ell + J_{\ell-2}\left\{i\alpha-\beta\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi} + J_{\ell+2}\left\{-i\alpha-\beta\right\}\mathrm{e}^{2i\phi}\Big] \\
& + \hat{\mathbf{y}}\Big[2\alpha J_\ell + J_{\ell-2}\left\{-i\beta-\alpha\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi} + J_{\ell+2}\left\{i\beta-\alpha\right\}\mathrm{e}^{2i\phi}\Big]\Big)B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi)} \\
& + \left(\alpha\,\hat{\mathbf{y}}-\beta\,\hat{\mathbf{x}}\right)\frac{k_z}{k}J_\ell B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi-\omega t)}\cdot\frac{k_t^2}{4k^2}\Big(\hat{\mathbf{x}}\Big[2\bar{\alpha}J_\ell + J_{\ell-2}\left\{\bar{\alpha}-i\bar{\beta}\right\}\mathrm{e}^{2i\phi} + J_{\ell+2}\left\{\bar{\alpha}+i\bar{\beta}\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi}\Big] \\
& + \hat{\mathbf{y}}\Big[2\bar{\beta}J_\ell + J_{\ell-2}\left\{-i\bar{\alpha}-\bar{\beta}\right\}\mathrm{e}^{2i\phi} + J_{\ell+2}\left\{-\bar{\beta}+i\bar{\alpha}\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi}\Big]\Big)E_0\,\mathrm{e}^{-i(k_z z+\ell\phi)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= -\frac{\varepsilon_0\omega}{2c}E_0^2\,\mathrm{Im}\Bigg[& \frac{k_t^2}{4kk_z}\Big\{-2\bar{\alpha}\beta J_\ell^2 + J_\ell J_{\ell-2}\left\{i|\alpha|^2-\bar{\alpha}\beta\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi} + J_\ell J_{\ell+2}\left\{-i|\alpha|^2-\bar{\alpha}\beta\right\}\mathrm{e}^{2i\phi} \\
& + 2\alpha\bar{\beta}J_\ell^2 + J_\ell J_{\ell-2}\left\{-i|\beta|^2-\alpha\bar{\beta}\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi} + J_\ell J_{\ell+2}\left\{i|\beta|^2-\alpha\bar{\beta}\right\}\mathrm{e}^{2i\phi}\Big) \\
& + \frac{k_z k_t^2}{4k^3}\Big\{2\alpha\bar{\beta}J_\ell^2 + J_\ell J_{\ell-2}\left\{-i|\alpha|^2-\alpha\bar{\beta}\right\}\mathrm{e}^{2i\phi} + J_\ell J_{\ell+2}\left\{-\alpha\bar{\beta}+i|\alpha|^2\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi} \\
& - 2\bar{\alpha}\beta J_\ell^2 + J_\ell J_{\ell-2}\left\{-\bar{\alpha}\beta+i|\beta|^2\right\}\mathrm{e}^{2i\phi} + J_\ell J_{\ell+2}\left\{-\bar{\alpha}\beta-i|\beta|^2\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi}\Big\}\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
= -\frac{\varepsilon_0\omega}{2c}E_0^2 J_\ell^2\,\mathrm{Im}\left[\frac{k_t^2}{2kk_z}\left\{\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta\right\} + \frac{k_z k_t^2}{2k^3}\left\{\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta\right\}\right]
$$

$$
= -\frac{I\omega}{2c^2}J_\ell^2\left[\frac{k_t^2}{kk_z}+\frac{k_z k_t^2}{k^3}\right]\sin 2\eta.
$$

(1.44)

最后，我们计算纯二阶横向贡献，其在小参数中为四阶。

$$
\begin{aligned}
C\left(\mathrm{T}_2\cdot\mathrm{T}_2\right)=&-\frac{\varepsilon_0\omega}{2}\,\mathrm{Im}\Bigg[\hat{\boldsymbol{x}}\,\frac{k_t^2}{4k^2}\Big[2\bar{\alpha}J_\ell+J_{\ell-2}\left\{\bar{\alpha}-i\bar{\beta}\right\}\mathrm{e}^{2i\phi}+J_{\ell+2}\left\{\bar{\alpha}+i\bar{\beta}\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi}\Big]\\
&+\hat{\boldsymbol{y}}\,\frac{k_t^2}{4k^2}\Big[2\bar{\beta}J_\ell+J_{\ell-2}\left\{-i\bar{\alpha}-\bar{\beta}\right\}\mathrm{e}^{2i\phi}+J_{\ell+2}\left\{-\bar{\beta}+i\bar{\alpha}\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi}\Big]E_0\,\mathrm{e}^{-i(k_z z+\ell\phi)}\\
&\cdot\frac{k_t^2}{4kk_z}\Big(\hat{\boldsymbol{x}}\Big[-2\beta J_\ell+J_{\ell-2}\left\{i\alpha-\beta\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\left\{-i\alpha-\beta\right\}\mathrm{e}^{2i\phi}\Big]\\
&+\hat{\boldsymbol{y}}\Big[2\alpha J_\ell+J_{\ell-2}\left\{-i\beta-\alpha\right\}\mathrm{e}^{-2i\phi}+J_{\ell+2}\left\{i\beta-\alpha\right\}\mathrm{e}^{2i\phi}\Big]\Big)B_0\,\mathrm{e}^{i(k_z z+\ell\phi)}\Bigg]\\
=&-\frac{\varepsilon_0\omega}{2c}E_0^2\,\mathrm{Im}\Bigg[\frac{k_t^4}{16k^3k_z}\Big(-4\bar{\alpha}\beta J_\ell^2+\left\{\bar{\alpha}-i\bar{\beta}\right\}\left\{i\alpha-\beta\right\}J_{\ell-2}^2+\left\{\bar{\alpha}+i\bar{\beta}\right\}\left\{-i\alpha-\beta\right\}J_{\ell+2}^2\\
&+4\alpha\bar{\beta}J_\ell^2+\left\{i\alpha-\beta\right\}\left\{-i\beta-\alpha\right\}J_{\ell-2}^2+\left\{-i\alpha-\beta\right\}\left\{i\beta-\alpha\right\}J_{\ell+2}^2\Big]\\
=&-\frac{\varepsilon_0\omega}{2c}E_0^2\,\mathrm{Im}\Bigg[\frac{k_t^4}{16k^3k_z}\Big(4\left(\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta\right)J_\ell^2+\left\{i|\alpha|^2+\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+i|\beta|^2\right\}J_{\ell-2}^2\\
&+\left\{-i|\alpha|^2+\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta-i|\beta|^2\right\}J_{\ell+2}^2+\left\{-\bar{\alpha}\beta+i|\beta|^2+i|\alpha|^2+\alpha\bar{\beta}\right\}J_{\ell-2}^2+\left\{-i|\beta|^2-\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}-i|\alpha|^2\right\}J_{\ell+2}^2\Big]\\
=&-\frac{I\omega}{c^2}\frac{k_t^4}{8k^3k_z}\,\mathrm{Im}\Big[\left(2\left(\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta\right)J_\ell^2+\left\{i|\alpha|^2+\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+i|\beta|^2\right\}J_{\ell-2}^2+\left\{-i|\alpha|^2+\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta-i|\beta|^2\right\}J_{\ell+2}^2\Big]\\
=&-\frac{I\omega}{c^2}\frac{k_t^4}{8k^3k_z}\Big[\left(2\left(\sin 2\eta\right)J_\ell^2+\left\{\sin 2\eta+1\right\}J_{\ell-2}^2+\left\{\sin 2\eta-1\right\}J_{\ell+2}^2\Big].
\end{aligned}
\tag{1.45}
$$

因此，将(1.42)、(1.43)、(1.44) 和 (1.45) 相加可得到总光学手性密度：

$$
\begin{aligned}
C=&-\frac{I\omega}{c^2}\Bigg[\frac{k_z}{k}J_\ell^2\sin 2\eta+\frac{k_t^2}{4kk_z}\Bigg(\left(1+\frac{k_z^2}{k^2}\right)2J_\ell^2\sin 2\eta+\left\{\sin 2\eta+1\right\}J_{\ell-1}^2+\left\{\sin 2\eta-1\right\}J_{\ell+1}^2\Bigg)\\
&+\frac{k_t^4}{8k^3k_z}\Big[\left(2J_\ell^2\sin 2\eta+\left\{\sin 2\eta+1\right\}J_{\ell-2}^2+\left\{\sin 2\eta-1\right\}J_{\ell+2}^2\Big]\Bigg].
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

(1.46)是一个二次场量，因此可以表示为偏振部分和非偏振部分之和。我们可以引入偏振度 使得 $0\le\ \le 1\mathrm{P}$

$$
\begin{aligned}
C=&-\frac{I\omega}{c^2}\Bigg[\frac{k_z}{k}PJ_\ell^2\sin 2\eta+\frac{k_t^2}{4kk_z}\Bigg(\left(1+\frac{k_z^2}{k^2}\right)2PJ_\ell^2\sin 2\eta+\left\{P\sin 2\eta+1\right\}J_{\ell-1}^2+\left\{P\sin 2\eta-1\right\}J_{\ell+1}^2\Bigg)\\
&+\frac{k_t^4}{8k^3k_z}\Big[\left(2PJ_\ell^2\sin 2\eta+\left\{P\sin 2\eta+1\right\}J_{\ell-2}^2+\left\{P\sin 2\eta-1\right\}J_{\ell+2}^2\Big]\Bigg].
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

我们注意到本质上是部分偏振光的第三斯托克斯参数。其他不依赖于椭圆率的项与偏振无关，无论入射光是线偏振、椭圆偏振、圆偏振，还是未偏振光，这些项都存在，正如我们在正文中所强调的。

例如，很容易证明，完全二维偏振光束 得到与 (1.46) 相同的结果，而二维非偏振光束 具有以下手性密度

$$C = -\frac{I\omega}{c^2}\left[\frac{k_t^2}{4kk_z}\left(J_{\ell-1}^2 - J_{\ell+1}^2\right) + \frac{k_t^4}{8k^3k_z}\left[J_{\ell-2}^2 - J_{\ell+2}^2\right]\right]. \tag{1.48}$$

显然，它也不依赖于椭圆率，本来就不应该依赖于椭圆率。

纯偏振光的其他手性密度分布 *P*=1

这里补充展示了与主文第 2.1 节相关的纯偏振贝塞尔光束空间分布图。具体而言，图 S1 和图 S2 展示了主文公式 (6) 所示光学手性密度的空间分布，针对，即展示入射光束轨道角动量增大的影响。

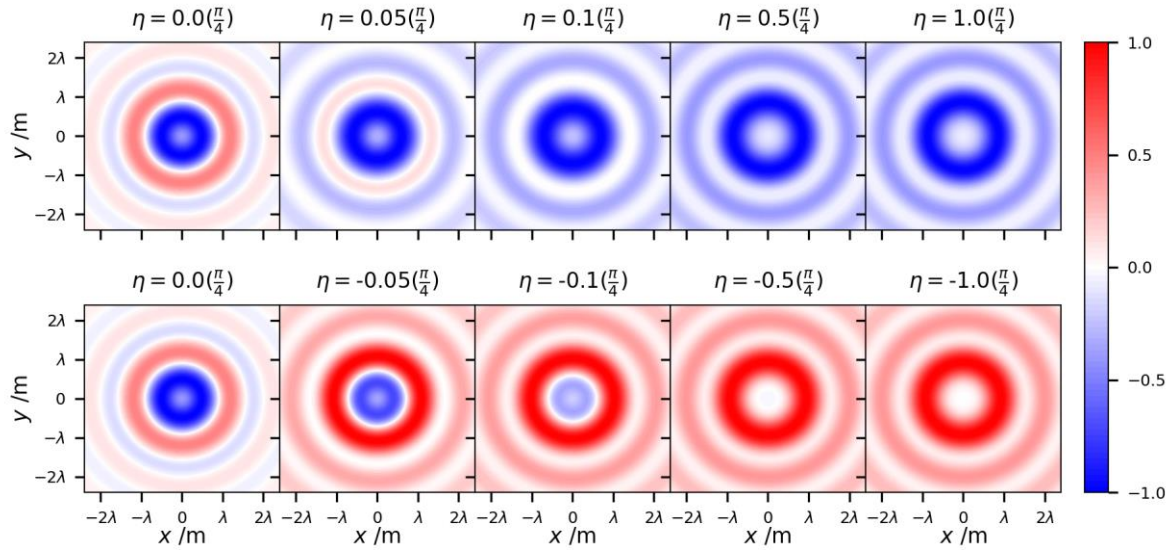


图 S1： 焦平面中 贝塞尔光束的光学手性密度随二维偏振椭圆率变化的演化 。输入偏振从线偏振 逐渐变为不同程度的椭圆偏振 直至达到纯圆偏振 。顶行依次为右旋偏振；底行为左旋偏振。在所有图中 每幅图均单独进行归一化。

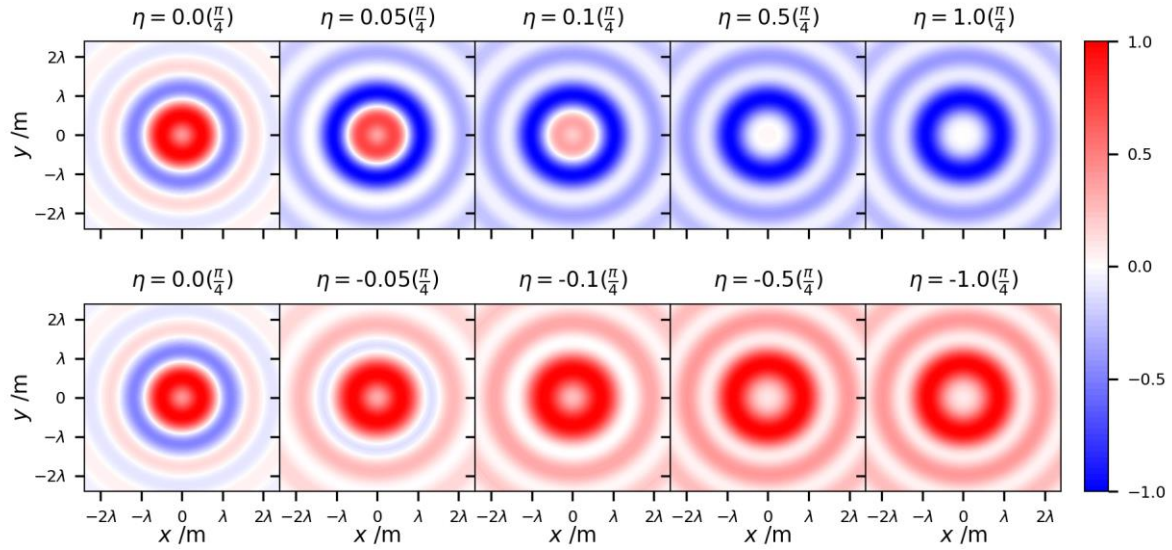


图 S2： 焦平面中贝塞尔光束的光学手性密度随二维偏振椭圆率 η 变化的演化。输入偏振从线偏振（$\eta = 0$）逐渐过渡到不同程度的椭圆偏振，直至达到纯圆偏振（$\eta = \pm\pi/4$）。顶排依次为右旋偏振；底排为左旋偏振。所有图中 $k_t = 0.6315\,k_z$ 且每幅图均单独归一化。

部分偏振光的其他手性密度分布

图 S3 对应主文中的图 5–7，其中 $\eta = +\pi/4$。对于 $P = 0$，结果并无变化，只是在所有 P 的取值下重复呈现二维线偏振/二维非偏振空间分布。

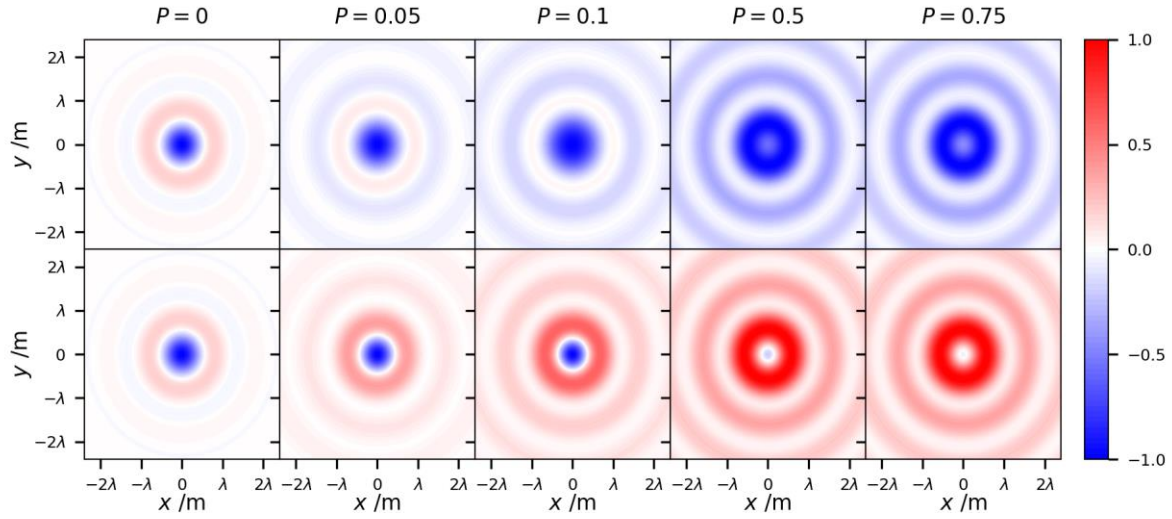


图 S3： 椭圆偏振光束的贝塞尔光束在焦平面内的光学手性密度随偏振度 P 变化的演化。顶排依次为右旋偏振；底排为左旋偏振。所有图中 $\eta = +\pi/4$ 且每幅图均单独归一化。$k_t = 0.6315\,k_z$

图S4-S7 对应主文稿中的图5-7和图S3，但针对 $\ell = -1$.

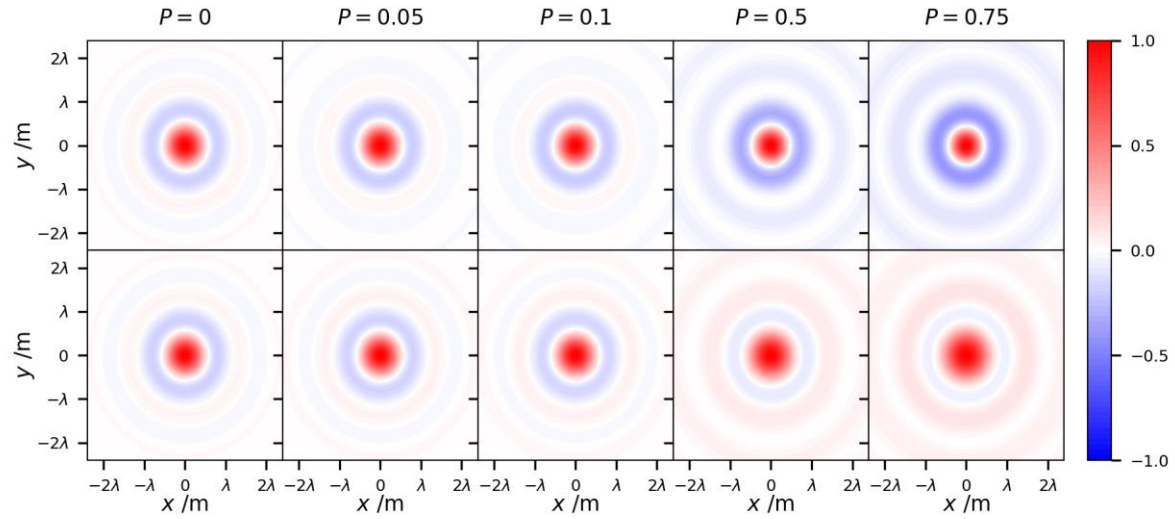


图 S4：椭圆偏振光束的偏振度 变化时焦平面内贝塞尔光束的光学手性密度P演化。顶排依次显示右旋偏振；底排显示左旋偏振。所有图中 各图均单独归一化。 $\ell = -1$ $/\eta = \pm\pi$ 80

$/_{t}$ = 0 6315.z轴

k k

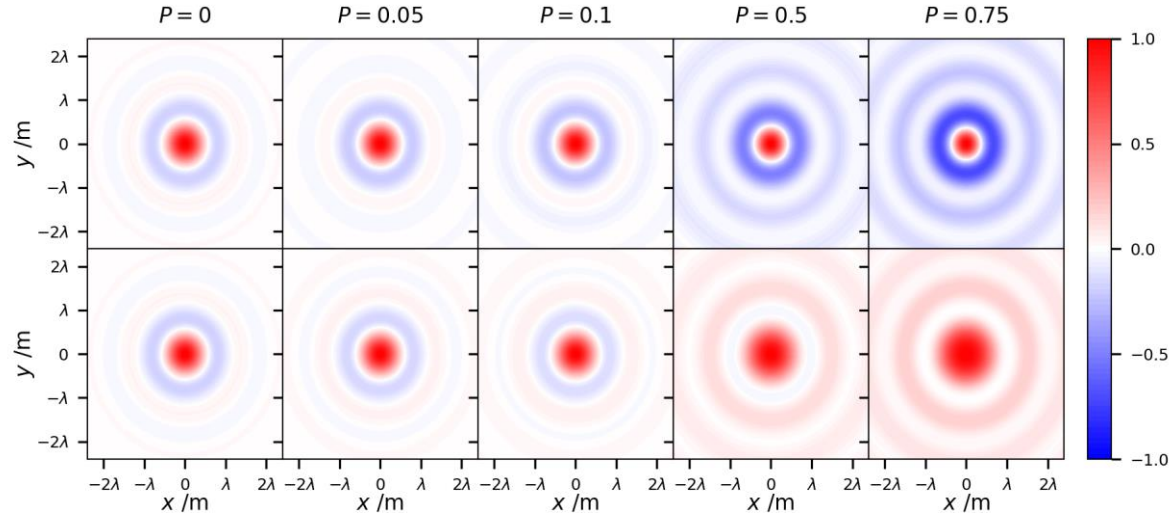


图 S5： 椭圆偏振光束的光学手性密度在焦平面内随偏振度变化的演化 贝塞尔光束P 。顶排依次为右旋偏振；底排为左旋偏振。在所有图中 ，每幅图均单独归一化。 $\ell = -1$ $/\eta = \pm\pi$ 40

$/_{t}$ = 0 6315.z轴

k k

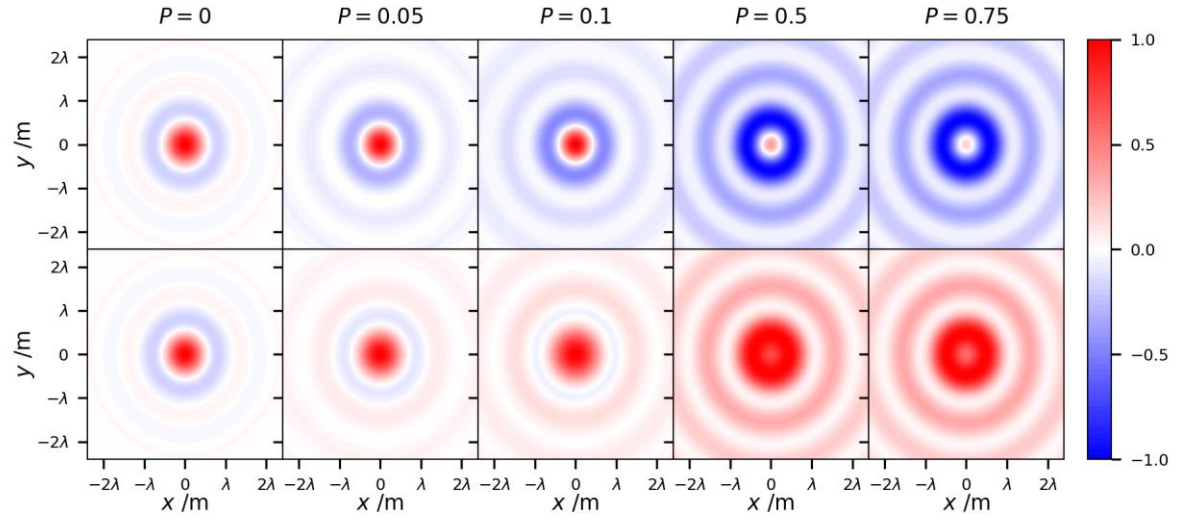


图 S6： 椭圆偏振光束的 贝塞尔光束在焦平面内的光学手性密度随偏振度变化的演变 P 。顶排依次展示右旋偏振；底排为左旋偏振。所有图中， 每幅图均单独归一化。

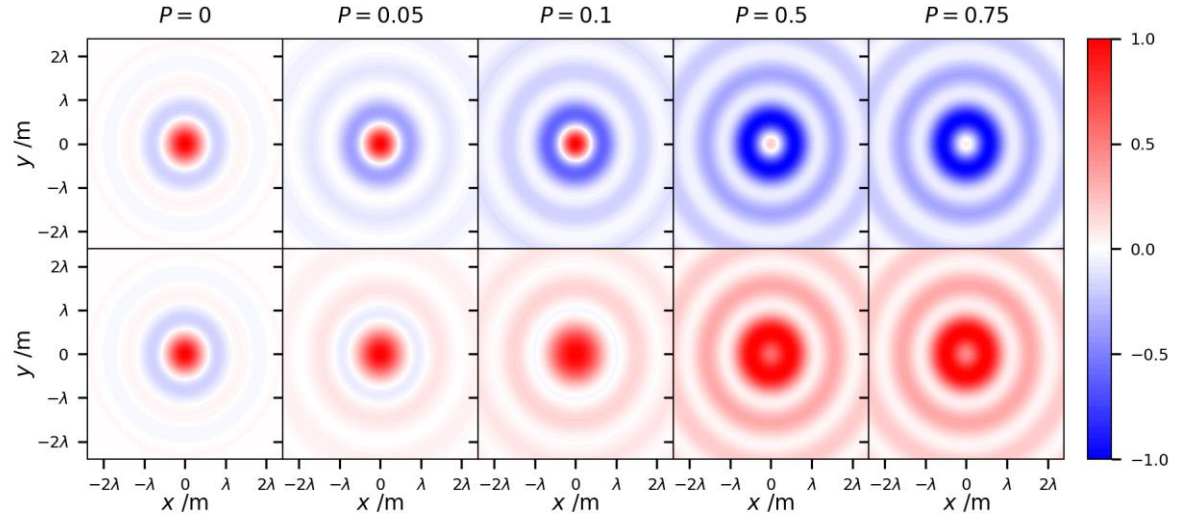
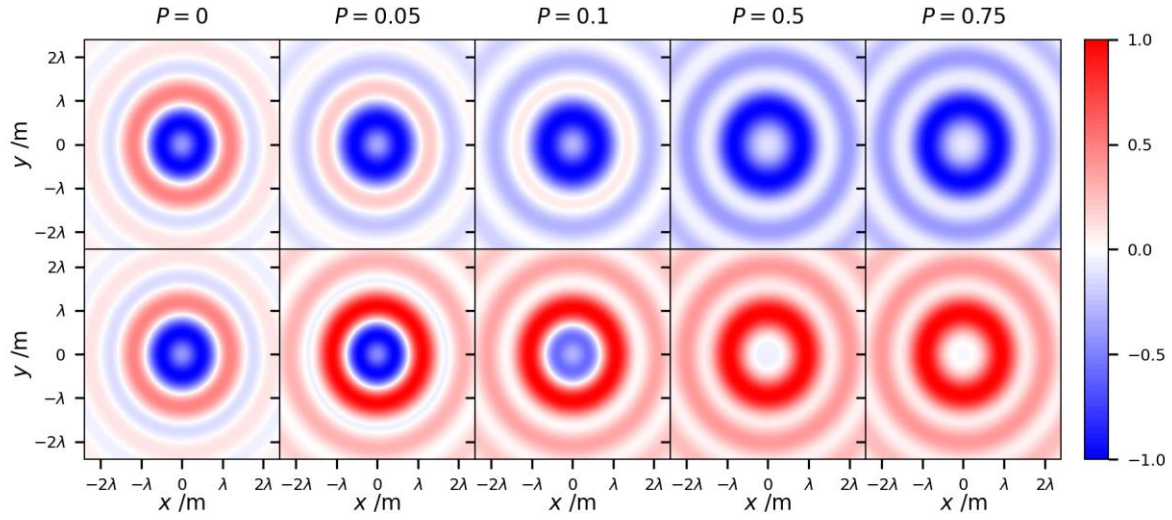


图 S7： 椭圆偏振光束的 贝塞尔光束在焦平面内的光学手性密度随偏振度变化的演变 P 。顶排依次展示右旋偏振；底排为左旋偏振。所有图中， 每幅图均单独归一化。

最后，下面的图示展示了一些示例，说明增大其幅度 以及改变偏振度，会如何影响光学手性密度。



图S8：焦平面中光学手性密度的演化， 随着椭圆偏振光束的偏振度 *P* 的变化，贝塞尔光束 。顶行依次显示 右旋偏振；底行显示左旋偏振。在所有图中 ，且每幅图均进行了单独归一化。

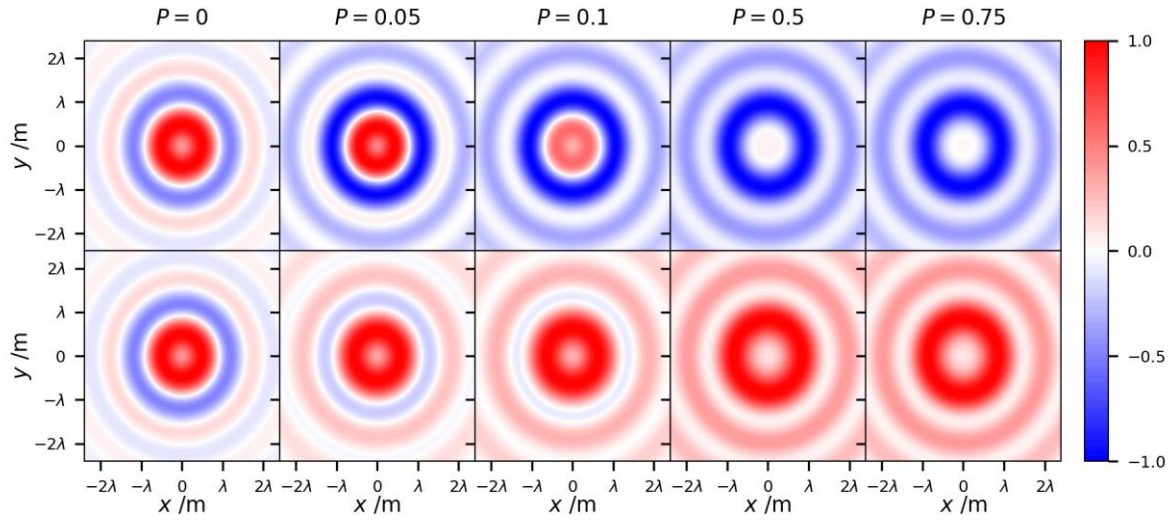


图 S9：椭圆偏振光束在焦平面内的 贝塞尔光束的光学手性密度随偏振度变化的演化 *P* 。顶排依次为右旋偏振；底排为左旋偏振。所有图中 每幅图均单独归一化。

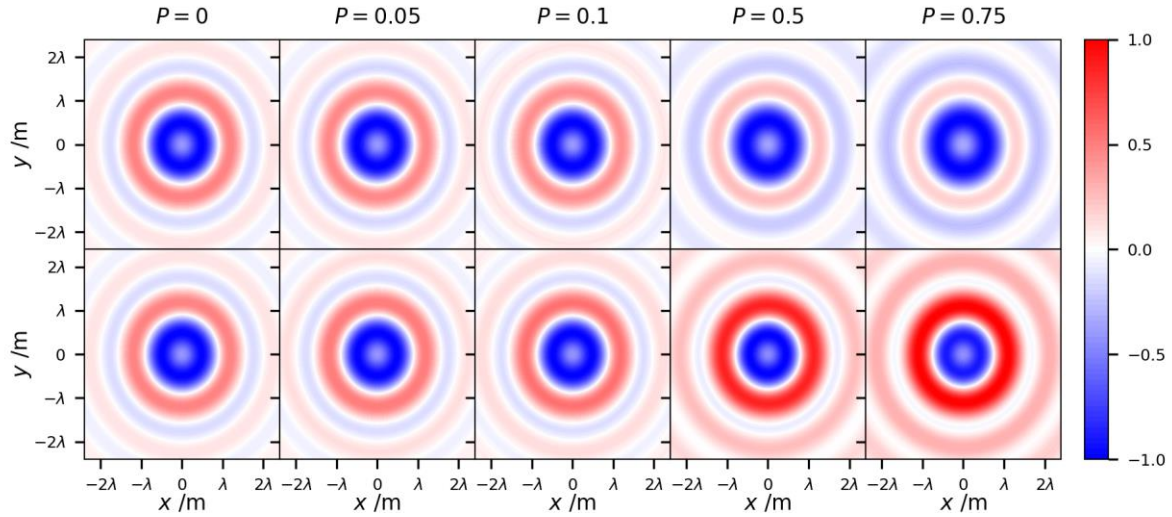


图 S10： 椭圆偏振光束的 贝塞尔光束在焦平面内光学手性密度随偏振度*P*变化的演化。顶行依次显示右旋偏振；底行显示左旋偏振。在所有图中，每个图均进行了单独归一化。

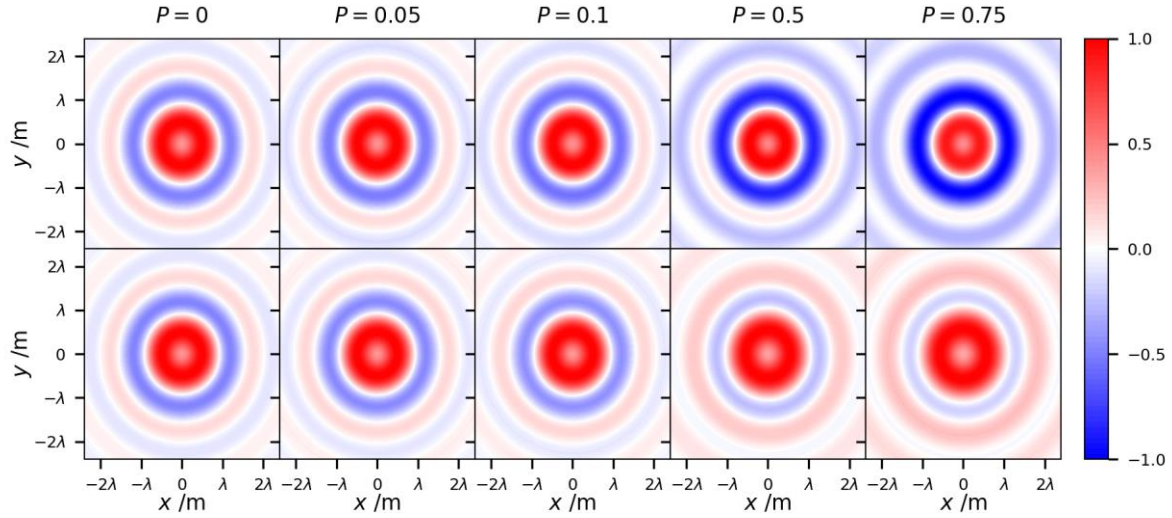


图 S11： 椭圆偏振光束的 贝塞尔光束在焦平面内光学手性密度随偏振度*P*变化的演化。顶行依次显示右旋偏振；底行显示左旋偏振。在所有图中，每个图均进行了单独归一化。

参考文献

(1) Lax, M.; Louisell, W. H.; McKnight, W. B. 从麦克斯韦到近轴波动光学。*Physical Review A* **1975**，*11* (4)，1365。