潜在位置网络模型

Hardeep Kaur[1,2], Riccardo Rastelli[1], Nial Friel[1,2], 和 Adrian E. Raftery[3]

[1]数学与统计学院，都柏林大学学院，爱尔兰；[2]Insight：数据分析中心，
都柏林大学学院，爱尔兰；[3]统计系，华盛顿大学，美国西雅图。

arXiv:2304.02979v1 [stat.ME] 6 Apr 2023

摘要

本章回顾了网络的潜在位置模型。我们综述了该领域的最新文献，并阐释了这一建模框架的基本方面和性质。通过若干说明性示例，我们重点展示了潜在位置模型如何捕捉观测网络的重要特征。我们强调了该模型的经典设计如何凭借其为复杂网络交互提供可解释的可视化结果的能力而广受欢迎。最后，我们概述了针对该模型提出的主要扩展，并说明其灵活性和适用性。

关键词： 社会网络分析；潜在位置模型；贝叶斯推断；网络可视化。

1 引言

统计网络分析近年来已成为一个重要的研究领域，应用遍及社会科学、生物学、金融和物理学等多个领域。社交网络用于研究行动者及其之间的成对交互。针对这类网络数据构建统计模型，对于描述网络的全局拓扑并提供易于解释的数据表示，发挥着重要作用。网络分析的一些开创性工作可追溯至 Erdös 和 Rényi（1959），他们提出了著名的 Erdős-Rényi模型，其中包含两个相互关联的变体，用于生成随机图或模拟随机网络的演化。如今所称的潜在位置模型，其早期版本不久后由 Gilbert（1961）提出，他引入了所谓的空间嵌入随机网络。这些模型的关键之处在于，它们基于节点在欧几里得空间中的位置，为图的边定义了一个生成框架。

Hoff 等人（2002）将类似的概念和思想应用于社会网络分析，提出了一种称为潜在位置模型（LPM）或潜在空间模型（LSM）的新框架。

这项工作重新激发了人们对空间嵌入模型的兴趣，使其成为对众多应用领域中涌现的复杂网络进行建模的工具。因此，相关文献迅速增加，潜在位置模型已成为网络分析中广泛使用的统计模型。该模型已用于分析公司治理（Friel 等人，2016）、金融风险（Tafakori 等人，2021）、营养级食物网（Chiu 和 Westveld，2014；Chiu 和 Westveld，2011）、蛋白质序列数据（Ding 等人，2019）、银行间网络（Linardi 等人，2019）、贸易网络（Ward 等人，2013）、社会影响（Sweet 和 Adhikari，2020；McFowland III 和 Shalizi，2021）、音乐竞赛（D'Angelo 等人，2019）、迁移流量（Xiao 等人，2022）、异常检测（Lee 等人，2021）、政治网络（Ng 等人，2021）、冲突网络（Westveld 和 Hoff，2011）、管制物质的流通（Berlusconi 等人，2017）等。它也应用于许多其他研究领域，包括神经科学（Durante 等人，2017；Wilson 等人，2020）、项目反应理论（Jin 和 Jeon，2019）、中介分析（Liu 等人，2021）、教育研究（Sweet 等人，2013）和流行病学（Chu 等人，2021）。

关于潜在位置模型的文献也曾在以往关于网络分析的文章中得到综述，包括 Rastelli 等人（2016）、Salter-Townshend 等人（2012）、Matias 和 Robin（2014）、Raftery（2017）、Smith 等人（2019）、Kim 等人（2018）以及 Sosa和 Buitrago（2021）。本文综述了潜在位置模型以及源自 Hoff等人（2002）开创性论文的近期文献。我们在第 3节中解释了建模框架，并在第 5节中展示了一个原始数据集的应用。随后，我们在第 6 节中对相关文献进行了详细综述。

2 符号约定

在本文中，我们考虑一组节点 $N \in \{1, \ldots, n\}$之间关系的数据。这些关系由边的集合 $\mathcal{E}$ 描述。我们将观测到的无向网络的 $n \times n$ 邻接矩阵记为 $Y = (y_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$，其中 y_{ij} 是节点 i 和 j之间的边值。这些边值通常是二元、离散或连续的。可能会有一组特定于二元组的协变量。我们将其记为 $X = (x_{i,j,k})$，其中(i, j) 是一对有序节点，而 $k = 1, \ldots, p$ 对协变量进行索引。我们将不涉及边或节点的参数集合记为 $\boldsymbol{\theta}$；我们称之为全局参数。我们将未观测到的潜在变量记为 Z，即与节点相关联的潜在位置。这里，z_i 表示相应节点在 d 维潜在空间中的未知位置。

3 潜在位置模型

3.1 原始距离模型与投影模型

潜在位置模型（也称为潜在空间模型）由 Hoff 等人（2002）针对无向二元网络提出。这引入了一类新的网络数据潜变量模型，旨在通过潜在几何结构将关系数据集可视化。

社会空间。至关重要的是，作者引入了一个推断框架，用于估计这一模型，适用于中等规模的网络（约有几百个节点）。

作者引入的社会空间由一组 n 节点组成，每个节点在 z_i 一个 d维的潜在空间中具有一个未知位置，通常为 $\mathbb{R}^d$。在贝叶斯框架下，假设这些位置根据多元高斯分布 $\mathcal{MND}(\mathbf{0}, \Sigma)$独立同分布。该模型的一个基本属性是，在给定潜在位置 Z的条件下，关系 $y_{i,j},\ \forall\ i,j\ =\ 1,\ldots,n$ 彼此独立。具体而言，如公式 1 所示，一条一般边存在的概率$y_{i,j}$ 被建模为所涉及两个节点的潜在位置z_i 和 z_j 的某个函数。

$$\mathbb{P}(Y|Z, X, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i<j} \mathbb{P}(y_{i,j}|z_i, z_j, x_{i,j}, \boldsymbol{\theta}), \tag{1}$$

其中，乘积取遍所有对 (i, j)，其中 $i < j$，对于 $i, j = 1, \ldots, n$.

得益于其几何框架，这些模型能够自然地表示常见的网络特征，例如互惠性、传递性和同质性。换言之，具有相似特征（即位置）的节点往往具有更高的概率形成关系。潜在特征的相似性可以通过不同方式定义：Hoff 等人（2002）提出的两种方法分别称为距离模型和投影模型。

3.1.1 距离模型

Hoff 等人（2002）提出的潜在距离模型假设，每个节点在欧几里得潜在空间中都有一个不可观测的潜在位置 z_i，通常位于平面 $\mathbb{R}^2$中。随后，两个节点的潜在位置彼此越接近，它们之间存在连接的概率就越高。相反，随着节点之间的距离增加，连接概率会降低。最常使用的是欧几里得距离，但也可以考虑任何其他距离函数。该框架便于对潜在社会空间进行可视化和解释。Hoff 等人（2002）的模型将节点 i 和 j 之间存在关系的对数优势比定义为：

$$\eta_{i,j} = \text{logodds}(y_{i,j} = 1|z_i, z_j, x_{i,j}, \alpha, \beta) = \alpha + \beta' x_{i,j} - |z_i - z_j|, \tag{2}$$

其中，α 和 β 为实值，$|\cdot|$ 表示欧几里得范数。

此参数化适用于具有 $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \boldsymbol{\beta})$ 的逻辑回归模型，其中 α 是截距项，$\boldsymbol{\beta}$ 是协变量效应的系数向量。距离模型尤其适用于具有无向或有向关系且表现出强互惠性的网络。

3.1.2 投影模型

Hoff 等人（2002）提出投影模型，作为距离模型的一种替代方案。该模型认为，如果两个节点各自的潜在位置方向相同（$z_i' z_j > 0$），那么它们建立连接的概率更高；反之，如果它们的方向

相反（$z_i'z_j < 0$），建立连接的可能性就较低。换言之，如果两个节点相对于空间中心的夹角较小，它们就更可能形成关系；如果夹角为钝角，形成关系的可能性则较低。投影模型定义如下：

$$\eta_{i,j} = \text{logodds}(y_{i,j} = 1|z_i, z_j, x_{i,j}, \alpha, \beta) = \alpha + \beta' x_{i,j} - \frac{|z_i'.z_j|}{|z_j|} \tag{3}$$

潜在效应取决于 $\frac{|z_i'z_j|}{|z_j|}$，它是~~z_i~~沿着 z_j方向的投影的带符号大小。这个量可以解释为节点 i 和 j 之间共享特征的程度，再乘以节点 i的活动水平。

与距离模型类似，投影模型提供了社会空间的潜在视角。在这种情况下，潜在空间更容易用极坐标来理解：节点的位置被解释为一个方向和一个大小，分别表示社会取向和社会性效应。距离模型自然只能产生对称的边概率，而投影模型还可以表示非对称的边概率，因此可能更适用于有向网络。不过还应注意，距离模型通常能更清晰、直观地呈现潜在空间，而且可以说在表示某些网络拓扑结构（例如社区结构）时更具灵活性。

3.2 带聚类的潜在距离模型

Handcock 等（2007）提出了潜在空间模型的一种扩展，并引入了潜在位置聚类模型（LPCM）。他们的创新之处在于通过潜在混合模型对网络中连接紧密的节点进行聚类建模。其他研究者也对该模型进行了扩展，包括 Krivitsky 等人（2009）、Krivitsky 和 Handcock（2008）、Salter-Townshend 和 Murphy（2013）、Ryan 等人（2017）、Gormley 和 Murphy（2010）、Sewell 和 Chen（2017），以及 Aliverti 和 Durante（2019）。该模型将潜在空间距离模型与节点的基于模型的聚类相结合，因此与随机区块模型的相关文献相联系（Wang 和 Wong，1987；Snijders 和 Nowicki，1997）。

在论文中，潜在距离模型的定义如下：

$$\text{logodds}(y_{i,j} = 1|z_i, z_j, x_{i,j}, \beta) = \beta_0' x_{i,j} - \beta_1 |z_i - z_j|. \tag{4}$$

先验结构通过假设潜在位置 $z_i \in \mathbb{R}^d$ 来自一个包含 G 个成分的有限混合多元正态分布而被修改：

$$z_i \sim \sum_{g=1}^{G} \lambda_g MND_d(\mu_g, \sigma_g^2 I_d),$$

其中， λ_g 是节点属于第 g个群组的概率，而 $\sum_{g=1}^{G} \lambda_g = 1$。所提出的模型能够捕捉网络特征，例如传递性和同质性，同时也能够以更加明确且自然的方式表示聚类。

本工作提出了一种基于模型的准则，用于联合选择最佳的簇数量 G 和潜在维度数量 d 。该准则受到贝叶斯信息准则（贝叶斯信息准则，Fraley和 Raftery1998）的启发，并结合了两种有原则的近似：一种由 d（潜在空间的维度）决定，另一种由 G（潜在簇或混合成分的数量）决定。虽然这通过为模型选择提供一种有原则的方法弥补了文献中的空白，但它也强调，该方法本身（尤其是贝叶斯信息准则）可能并不适合用于选择维度数量 d，因为尚未证明底层的渐近近似结果在此情况下成立。

3.3 带有节点特定随机效应的潜在距离模型

Krivitsky 等人（2009）将 Handcock 等（2007）提出的方法（对潜在空间位置进行基于模型的聚类）与 Hoff（2005）提出的方法（采用行动者特定随机效应）相结合，构建了一种称为潜在位置聚类随机效应模型（LPCMRE）的新模型。该模型为

$$\eta_{i,j} = \text{logodds}(y_{i,j} = 1 | z_i, z_j, x_{i,j}, \beta) = \sum_{k=1}^{p} \beta_k x_{k,i,j} - |z_i - z_j| + \delta_i + \gamma_j, \tag{5}$$

其中，除了采用 Handcock 等（2007）的设定外，还引入了 δ_i, γ_j，作为行动者特定的发送者效应和接收者效应。这些参数旨在表示节点不同程度的社会性，从而能够刻画更丰富多样的度分布。

4 LPM 的推断

4.1 估计

Hoff 等人（2002）讨论了对 LPM 进行推断的两种主要方法。第一种基于最大似然最大化，包含两个步骤。第一步，计算所有节点之间成对距离的最大似然估计量。对数似然是行动者之间距离的凸函数，因此可以通过数值过程轻松地将其最大化，从而得到估计值。第二步，利用最优距离推导节点在潜在空间中的实际位置。作者提出使用多维尺度分析完成这一步。两步法无法保证得到似然函数的全局最大值，但实证结果表明，该方法表现良好，且计算需求较低。这一点颇具吸引力，因为推断出的位置集可以作为后续方法的起点；这些方法可能效果更好，但计算开销也更大。

Hoff 等人（2002）提出的第二种方法是基于马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）的贝叶斯方法。为模型参数指定先验分布，然后使用 MCMC 从后验分布中获取参数的近似样本。对于

在距离模型中，先验分布通常指定为：

$$z_i \overset{\text{iid}}{\sim} MVN(0, \Sigma),$$
$$\theta_k \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),$$

其中 Σ 为协方差矩阵， σ^2 为方差参数。

将先验分布与似然函数结合，即

$$\mathbb{P}(Y|Z,\theta) = \prod_{i \neq j} \mathbb{P}(y_{i,j} = 1|Z,\theta)^{y_{i,j}} \mathbb{P}(y_{i,j} = 0|Z,\theta)^{1-y_{i,j}} = \prod_{i \neq j} \frac{\exp(y_{i,j}\eta_{i,j})}{1 + \exp(\eta_{i,j})}, \tag{6}$$

以获得模型的后验分布：

$$\pi(Z,\theta|Y) \propto \mathcal{L}_Y(Z,\theta)\pi(\theta)\pi(Z).$$

MCMC 方法采用标准的 Metropolis-within-Gibbs 算法，并使用随机游走提议；模型的每个参数依次从其全条件分布中抽样。参数的全条件分布不属于标准形式，具体如下：

$$\pi(z_i|Z_{-i},\theta,Y) \propto \pi(z_i) \prod_{i \neq j} \mathbb{P}(y_{i,j} = 1|Z,\theta)^{y_{i,j}} \mathbb{P}(y_{i,j} = 0|Z,\theta)^{1-y_{i,j}}, \tag{7}$$

$$\pi(\theta_k|\theta_{-k},Z,Y) \propto \pi(\theta_k)\mathcal{L}_Y(Z,\theta), \tag{8}$$

其中，下标中的负号表示除被取反参数之外的所有参数。

潜在位置模型面临的一项挑战是计算复杂度高，正如公式 7 和公式 8 所示。这些更新使该过程所需的计算量随节点数量的平方增长。这种二次成本难以扩展，并可能限制原始模型的适用性。

马尔可夫链蒙特卡洛采样过程如下：

1. 为所有模型参数 Z 和 θ 选择一个初始猜测值。

2. 对于每个节点 $i = 1, \ldots\ldots, N$：

   (a) 从以该节点当前位置为中心的多元高斯提议 $q(z_i^* \to z_i)$ 中采样一个向量 z_i^*。(b) 计算全条件分布 $r_Z = {}^{\pi(z_i^*|Z_{-i},\boldsymbol{\theta})}\,\pi(z_i|Z_{-i},\boldsymbol{\theta})$ 之间的比值。(c) 新提议的值以 $\min(1, r_Z)$ 的概率被接受，否则在样本中保留当前值。 ————

对于每个节点 $k = 1, \ldots, K$：

(a)从以该参数当前值为中心的高斯提议分布 $q(\theta_k^* \to \theta_k)$ 中采样一个新的参数 θ_k^*。(b) 计算全条件分布 $r_\theta = {}^{\pi(\theta_k^*|\boldsymbol{\theta}_{-k},Z)}\ \pi(\theta_k|\boldsymbol{\theta}_{-k},Z)$ 之间的比值。(c) 以 $\min(1, r_\theta)$ 的概率接受新提出的值，否则在样本中保留当前值。 ————

该算法生成一个马尔可夫链，其平稳分布即为所求的后验分布。

4.2 后验样本的解读

Hoff 等人（2002）定义的似然函数仅通过节点之间的成对距离依赖于潜在位置。因此，对于任何保持潜在位置距离不变的变换，模型参数都不可辨识。这些变换包括对潜在位置进行旋转、反射和平移。原则上，如果我们只关注从后验分布中抽取的参数的一种单一配置，那么不可辨识问题可能可以忽略，因为对这些点进行平移、反射或旋转，不会影响我们对潜在空间的解释。

然而，在贝叶斯框架下，我们会得到一个后验样本 $\{Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots\}$，并希望对该样本进行汇总，以获得后验均值等估计量。在这种情况下，对样本中的任一配置应用变换（例如平移）都会直接影响后验汇总值。关键在于，我们无法确定潜在空间在采样过程中是否发生了旋转、平移或反射。因此，后验样本不可识别，我们无法据此得出有意义的汇总结果。

作为解决这一问题的方法，Hoff 等人（2002）考虑了普罗克鲁斯特匹配。这种方法通过比较两组点的坐标矩阵来比较两组点的配置（本节中，我们将这些矩阵记为 A 和 B ）。在普罗克鲁斯特匹配中，对 A 进行刚性变换，使其尽可能接近参照对象 B。对矩阵 A进行旋转、反射和平移，以使其与参照矩阵 B达到最佳匹配；所谓最佳匹配，是指对应点之间距离平方和最小的匹配。其表示如下：

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}(b_{i,k} - a_{i,k})^2.$$

我们可以通过指定矩阵A的以下变换来构建一个优化问题：

$$\mathbf{a}_i' = \mathbf{O}^\top \mathbf{a}_i + \mathbf{t},$$

其中，$\mathbf{a}_i$ 是矩阵 A中点 i 的坐标向量，$\mathbf{O}$ 是一个用于旋转和/或反射的正交矩阵，$\mathbf{t}$ 是一个平移向量。然后，$\mathbf{O}$,的最优值

且$\mathbf{t}$ 可以是 $\mathbf{c}$ 通过最小化点之间距离的平方和计算得出，即

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{b}_i - \mathbf{O}^\top \mathbf{a}_i + \mathbf{t})^\top (\mathbf{b}_i - \mathbf{O}^\top \mathbf{a}_i + \mathbf{t}).$$

然后将所得的最优值应用于原始的 A 配置，从而得到最小的 R^2 值（称为 Procrustes 平方和）。投影模型的计算与距离模型略有不同。由于投影模型不具有平移不变性，涉及矩阵 A 变换的优化问题可化为：

$$\mathbf{a}_i' = \mathbf{O}^\top \mathbf{a}_i.$$

因此，修改后的距离平方和为

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{b}_i - \mathbf{O}^\top \mathbf{a}_i)^\top (\mathbf{b}_i - \mathbf{O}^\top \mathbf{a}_i).$$

Shortreed 等人（2006）在 Hoff 等人（2002）工作的基础上，进一步研究了可识别性问题。他们针对节点的位置考虑了三种点估计量，即最大似然估计量、后验众数估计量和后验均值估计量（在 Procrustes 匹配之后定义）。他们认为，这三种估计量可能会对节点给出不准确的点估计，因为它们完全依赖估计距离来推导位置。他们提出了第四种原创方法，旨在最小化由拟合位置所隐含的分布与由使期望后验损失最小化的参数所隐含的分布之间的 Kullback-Leibler 散度。第四种方法是最常用的方法（Handcock 等人 2007；Krivitsky 等人 2009），并已在 latentnet R 软件包中实现。

4.3 其他推断方法

式 6 中对数似然函数的计算复杂度与节点数量的平方同阶。推断潜在位置模型时，这会带来问题，因为基于似然的方法需要二次计算成本，无法很好地适应数据规模的增长。基于马尔可夫链蒙特卡罗的完整贝叶斯方法尤其缓慢，对于拥有数百个以上节点的网络而言，实际上难以应用。另一方面，最大似然估计方法通常更快，但仍需要二次成本，因此也无法很好地适应规模增长。

已有不少论文专门探讨了这一研究瓶颈，提出了各种策略，以加快推断过程，从而使算法能够更好地扩展到大型数据集。Salter-Townshend 和 Murphy（2013）提出的变分贝叶斯推断方法，建议用变分后验分布替代潜在位置聚类模型中模型参数的后验分布。由此得到的近似方法已广泛应用于各种含有潜变量的场景（Jordan 等，1999；Blei 等，2017）。

这种近似方法的优势在于，无须采用马尔可夫链蒙特卡罗等抽样方法（这类方法的计算量可能大得多），便能刻画所关注的后验分布。另一方面，这种方法引入的近似误差难以量化，而且研究表明，在评估所提供点估计的不确定性时，这种误差可能不可忽视。

Raftery 等人（2012）提出了另一种方法，通过病例-对照抽样引入似然近似。该方法利用了这样一个事实：节点的位置主要由节点之间的边决定，而非缺失的边。这一点在稀疏网络中尤为明显，因为少数存在的边能够告诉我们哪些节点应彼此靠近。相比之下，缺失的边通常提供的信息较少，因此可以采用病例-对照抽样策略对其进行抽稀。因此，在似然计算中只考虑一部分缺失的边，并对它们的贡献重新加权，使其能够代表所有缺失的边。这种近似可对似然函数给出无偏估计，同时将该过程扩展至包含数千个节点的网络。

Ryan 等人（2017）通过在模型设定中纳入共轭先验，扩展了距离LPCM模型。这种方法的主要优势在于，得益于共轭性，许多模型参数可以从后验分布中积分消去。由此得到的边际后验分布可通过马尔可夫链蒙特卡罗采样器进行刻画。这种方法的优势在于，由于许多模型参数已从后验分布中积分消去，因此能够加快采样过程。采样器可在一次运行中探索具有不同数量潜在簇的多个模型。这是一项关键优势，因为它使人们能够对群组数量进行模型选择，而无须分别拟合每个模型。

这些方法学思想最初是针对二元图提出的，但后来已扩展并应用于多种具有动态特征和多视图网络的不同场景。近期，研究者又提出了一些其他方法学思想（Aliverti 和Russo 2021；Rastelli 等人，2018；Spencer 等人，2020；Liu 和 Chen 2021），这表明这一研究问题仍然备受关注。

5 距离潜在位置模型的一个说明性示例

现在，我们描述一个基于原始合著网络的动机示例。数据（于2022年1月17日从Scopus收集）包括所有引用 Hoff等人（2002）的书目条目。该数据集共包含929篇文章，涉及1,758位独特作者。基于这些数据，我们为这些论文的所有作者构建了一个合著网络：如果两位作者至少共同撰写过一篇论文，则在他们之间建立连接。我们删除了所有总共仅发表过一篇论文的作者，以聚焦于最活跃的作者并减轻计算负担。最终得到一个包含279个节点的无向二元网络。

随后，我们使用R 软件包 latentnet 对这些数据拟合了一个距离LPM。我们使用latentnet 中实现的 BIC准则比较了多个模型。所得的潜在空间

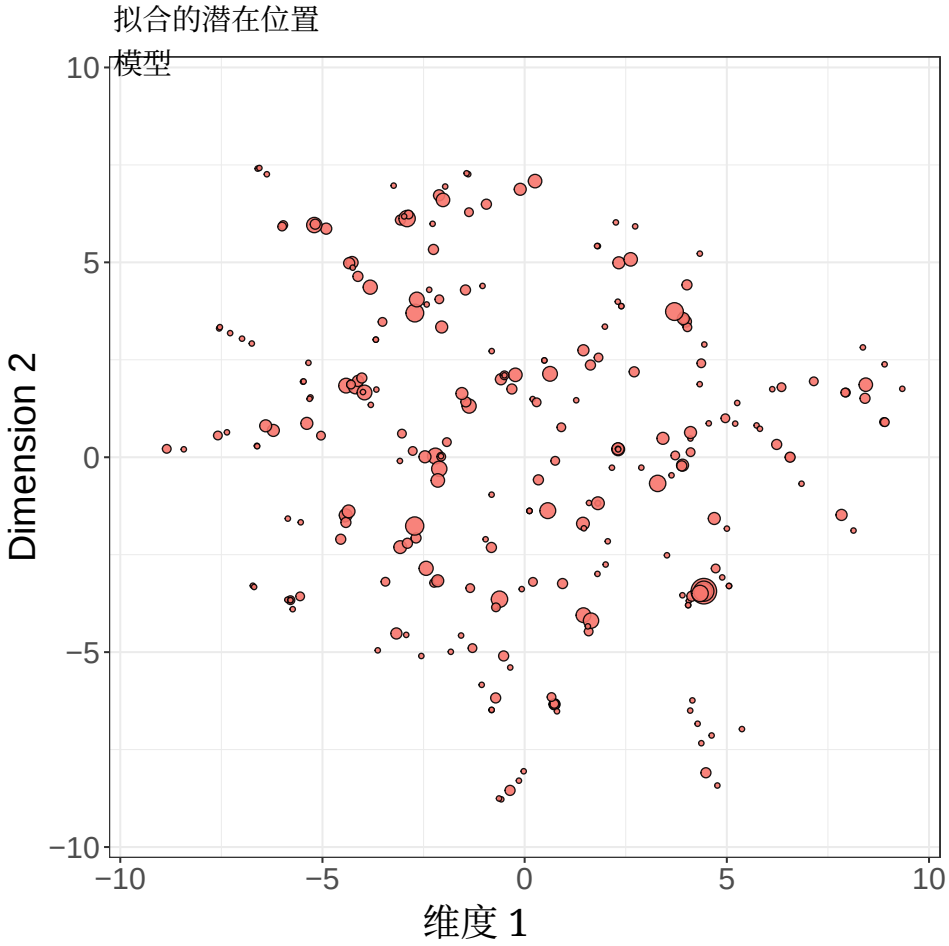


图 1：在合著数据上拟合的距离LPM。每个节点代表一位不同的作者。节点的大小表示该作者参与的出版物数量。

如图1所示，更详细的结果可通过 GitHub 上公开提供的交互式图表查看。

[1]

结果凸显了社区的强烈存在，这反映了各种研究小组的存在。一些作者往往处于重叠的位置，这表明研究合作者之间具有很强的相似性。另一些作者位于社区之间，凸显了他们可能与不止一个研究小组建立了联系，或拥有更多样化的合作者。在图2 中，我们展示了截距参数的后验样本，以及所有边的对数优势分布。

这些图显示 w 表明潜在空间在决定存在方面发挥着重要作用 of

[1]GitHub 地址：https://github.com/riccardorastelli/CoauthorshipsLPM

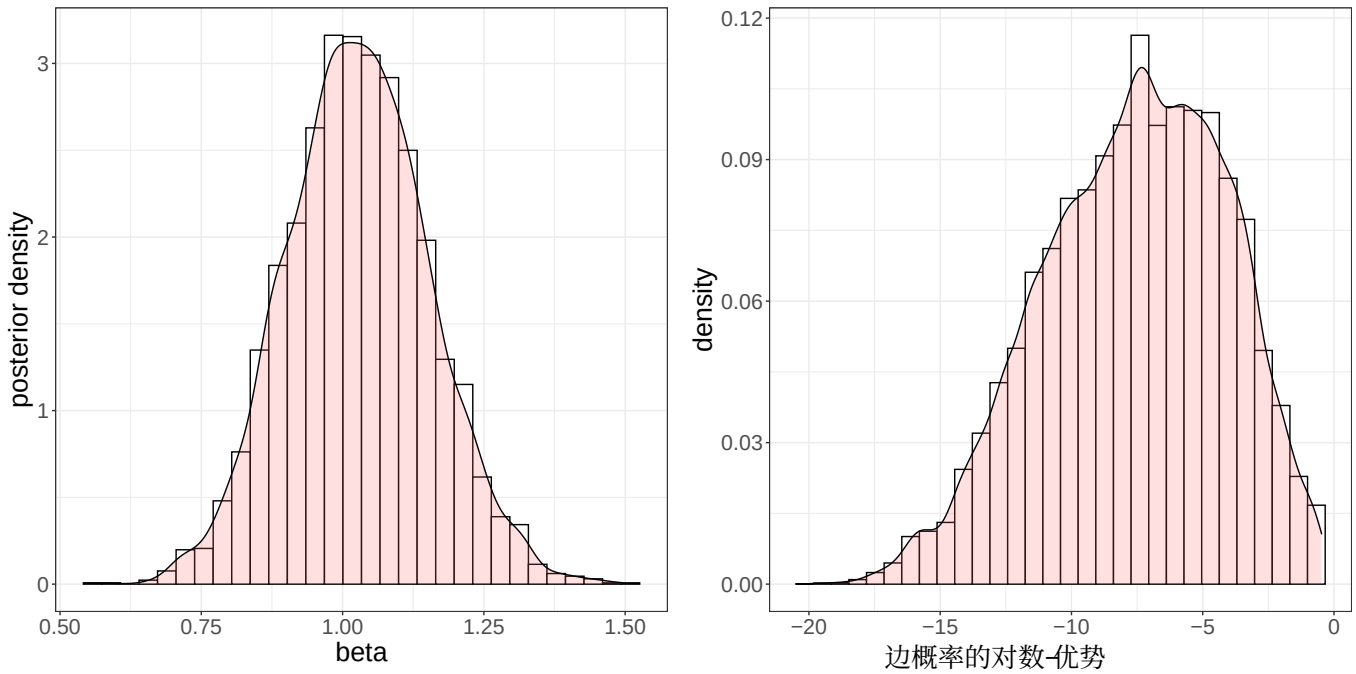


图 2：左侧面板显示截距参数（称为β）的近似后验样本。右侧面板则显示表示边出现的对数优势的 η 参数。该分布表示所有二元组中的这些值。

边。左侧面板显示，截距参数集中在数值 1 附近，表明潜在空间具有显著影响。同一图中的右侧面板证实了这一点，我们可以看到，对数优势呈现出较大的变异性，这意味着边概率的范围为 0.00 到 0.38。这意味着，该模型能够利用潜在位置模型所诱导的几何框架来表示数据中的异质性。

在图 1 的拟合潜在位置模型中，我们可以通过研究潜在空间的“聚类”程度来探索社区的存在情况。然而，潜在位置聚类模型允许直接在建模中纳入这项信息，从而将节点划分为不同的组。因此，我们还拟合了一个最多包含 30 个组的潜在位置聚类模型，并使用 Handcock 等（2007）所提倡的 BIC准则选出了最佳模型。结果（27 个组）如图 3 所示。在这种情况下，我们注意到节点划分与潜在空间中各点的聚类高度一致。研究小组得到了较好的呈现，也为数据提供了一个有趣的、基于模型的视角。

此外，我们还使用 Krivitsky 等人（2009）的模型提供了第三个示例。在这个例子中，我们同样针对不同数量的群组拟合模型，并使用贝叶斯信息准则选择拟合效果最佳的模型。最佳模型的结果（见图 4）显示，选择一个群组时效果最好。这是合理的，因为模型中使用的随机效应可以解释数据中相当大一部分变异，代价则是潜在空间所能解释的变异减少。尽管如此，该模型提供的可视化仍包含有关模型参数的所有信息，因为节点的社会性通过其大小呈现。

在这个例子中，我们观察到，潜在空间中心的大多数节点具有相似的社会性。这些节点的潜在位置足以很好地刻画它们，模型无需借助任何随机效应来“修正”其连通模式。一些位置相对居中的节点也具有较高的社会性参数。这反映出，有些作者会与不同的研究小组合作，因此可能需要建立长距离边。社会性参数能够应对这种情况，帮助弥合这一差距，从而不受成对距离的限制建立连接。另一方面，潜在空间边缘的节点中也出现了一些社会性参数值最高的节点。这些作者的连接不多，因此很难将他们安排在中心位置或其他节点附近。结果，他们被推到了潜在空间的边缘。不过，由于他们确实与位置更居中的节点存在连接，较大的社会性参数可以弥补其位置较为偏远的问题，从而很好地解释观察到的连接。

6 研究现状

Hoff等人（2002）的工作催生了一系列聚焦于潜在位置模型及其扩展的文献。本节将回顾一些从不同方向拓展 Hoff 等人（2002）工作的 methodologicalcontributions。我们按照论文所涉及的网络数据类型对其进行分类，以此组织本文的论述。然而，其中许多论文可推广至多个情境，并以多种不同方式提供了创新。

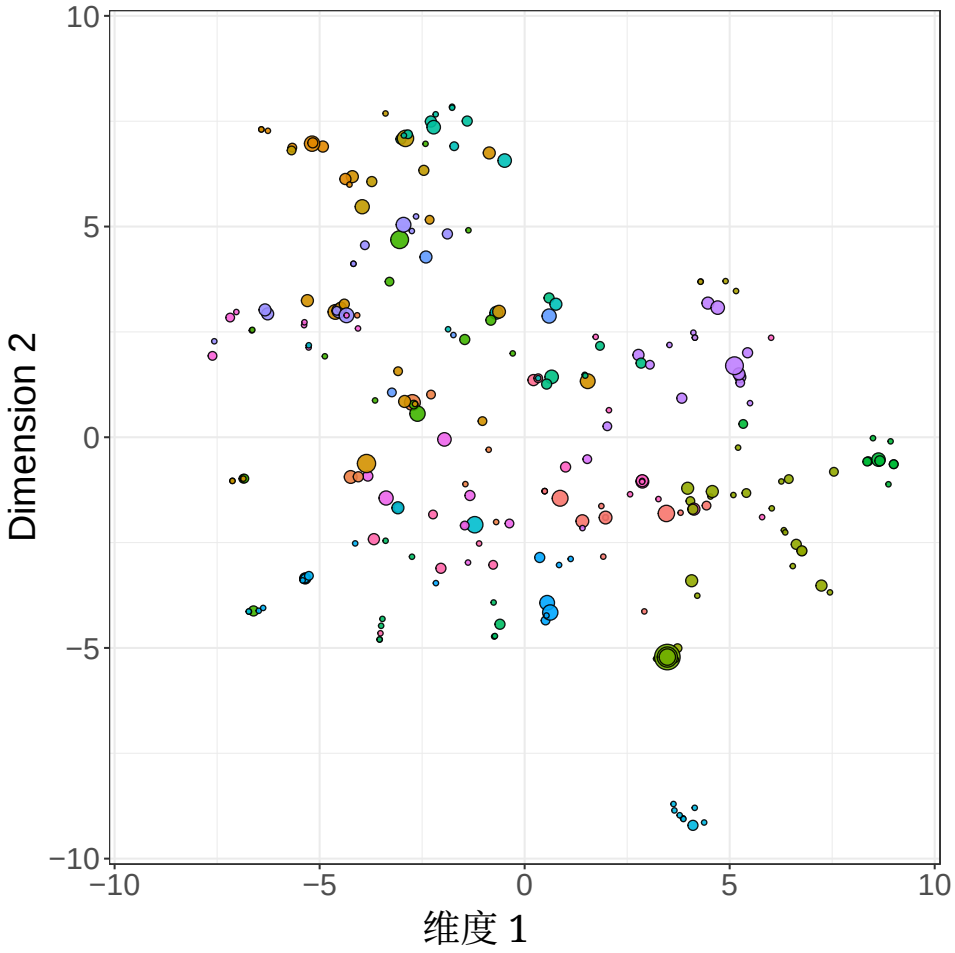


图 3：在合著数据上拟合的距离LPCM模型。节点大小表示作者参与的出版物总数。节点颜色表示其划分。

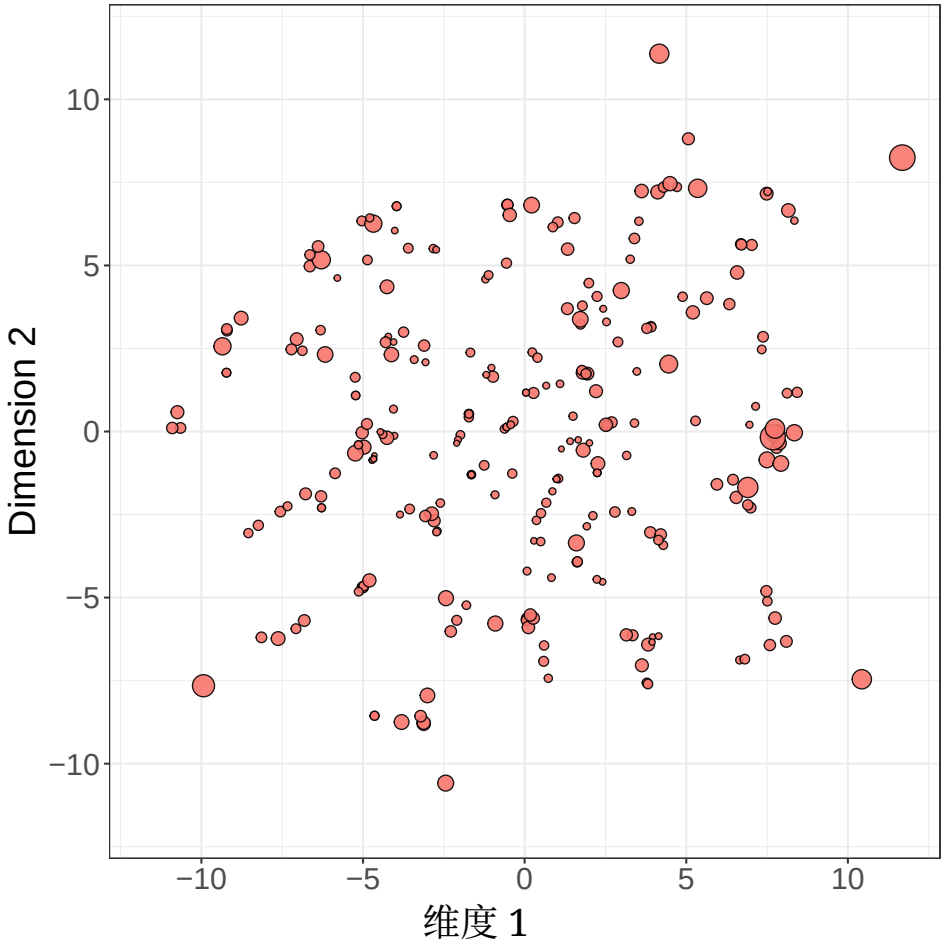


图 4：基于合著数据拟合的距离 LPCMRE。节点的大小表示其“社会性”随机效应参数。

6.1 多视图网络的潜在位置模型

当同一组节点之间存在多种关系时，我们观察到的就是多视图网络或多重网络，因此这类网络也称为多关系网络。一个例子是社交网络，其中我们观察行动者之间的各种关系类型，例如职业关系、家庭关系或友谊关系。此外，时序网络与多视图网络密切相关，因为时序网络可以看作一种特殊情形：通过引入时间依赖关系，将连续的网络视图连接起来。

多篇论文将潜在位置模型扩展到了多视图框架。Gollini 和 Murphy（2016）提出了联合潜空间模型，将同一组节点之间的不同关系纳入同一个潜在空间。该模型还引入了一种可扩展变分方法，以加快潜在空间模型的估计。另一项创新是，他们在模型中使用欧几里得距离平方，而非绝对距离。

相较之下，Durante 等人（2017）采用一种新颖的非参数贝叶斯方法，对 Hoff 等人（2002）的潜投影模型进行扩展，用以建模潜在空间和节点的聚类。他们将该方法应用于一个脑连接网络总体，其中节点对应脑解剖区域，边对应这些区域之间的结构性连接。他们考察了从多个不同样本／个体收集的数据，这正是其分析具有多视图特性的原因。随后的一篇论文（Durante 和 Dunson，2018）展示了该模型的应用，用于描述脑连接网络的特征并检验其中的差异。Aliverti 和 Durante（2019）的另一篇论文也沿着类似方向展开。

Salter-Townshend 和 McCormick（2017）提出了一种用于多视图网络的新模型，该模型关注不同网络视图中二元组之间的相互关系。他们采用多元伯努利似然，其参数由多个潜空间以及不同视图中节点之间的距离决定。该框架允许基于模型的评估多重边之间的相关性，从而为各种网络视图之间的关联提供一种度量。然而，为获得这种额外的灵活性所付出的代价是更高的计算需求以及更具挑战性的模型选择任务。

D’Angelo 等人（2019）和 D’Angelo 等人（2020年）提出了一种用于多视图网络的欧几里得距离潜空间模型，以刻画欧洲歌唱大赛中的投票模式。作者指定一个共同的潜在空间来表示各节点的位置，但允许其他参数在不同的网络视图之间有所不同。这是该模型的一个关键特征，因为它可以直接量化潜在空间对数据生成的影响。与公式 4 类似，若潜在距离的系数趋近于零，就意味着潜在距离的影响并不显著，因此数据可以通过齐次模型得到很好的表示。作者利用潜在位置模型的这一特征，确定潜在空间的影响，并以此衡量各国的投票偏差。

Sewell（2019）介绍了一种基于潜在位置模型分析认知社会结构的新方法。这些数据指的是每个节点对网络的感知，因此与多视图网络相关，因为观测数据对应于一组网络。他推导出一个潜在位置模型。

一种结合潜在空间可视化优势的方法，并加入额外的模型参数，用于衡量节点感知网络时的偏差。

6.2 动态网络的潜在位置模型

动态网络或时序网络是指随时间演变的网络。通常，动态网络描述同一组节点之间的交互，并通过网络快照进行观测，也就是说，在某些特定时间点进行观测。因此，它们可以形式化地表示为一组图 $Y_{(1)}\ldots,Y_{(K)}$。Hoff 等人（2002）提出的潜在位置模型已通过多种方式扩展到动态网络。Sarkar 和 Moore（2005）将其扩展，使模型参数包含时间动态。他们提出将该模型应用于一组友谊关系数据，并研究这些关系如何随时间变化。该模型以一种特殊方式将节点嵌入潜在空间：在每个时间点对节点的位置进行正则化，以确保其位置不会发生太大变化。

Sewell 和 Chen（2015b）提出了一种新模型，对 Sarkar 和 Moore（2005）的模型进行了扩展。在他们的框架中，纵向网络数据通过潜在欧几里得空间中的时间轨迹进行建模。这项工作的一个关键创新之处在于，所构建的模型引入了一个社会触达参数，它类似于 Krivitsky 等人（2009）的节点随机效应。这些参数旨在表示节点不同的活跃度和社交性，而不受潜在位置的影响。

Friel 等人（2016）定义了一个二分动态网络模型，并将其方法应用于爱尔兰的公司及其董事网络。该模型旨在基于模型评估，在2008年危机期间，董事任命至多个董事会这一现象可能与金融不稳定存在怎样的关联。作者将二部网络的节点嵌入单一潜在空间中，这与 Gormley 和 Murphy（2007）的方法类似。他们假设节点可以沿轨迹移动，从而捕捉数据中的时间依赖性。此外，他们指出，数据中的边和非边表现出很强的持续性。这指的是二元组往往不会随时间改变其状态。为了处理数据的这一特征——它在许多动态网络数据集中都很常见——作者还引入了一个状态转换框架，该框架根据先前的网络实现选择不同的截距参数。通过对截距参数的结构进行建模，该模型利用潜在位置和持续性特征，非常好地捕捉了数据所呈现的异质性。

Durante 和 Dunson（2016）进一步扩展了潜在位置模型，通过嵌套高斯过程允许节点的位置随时间连续演化，从而产生时变平滑性。作者引入局部自适应动态，以研究面对面动态接触网络，凸显其方法在捕捉以不等间隔观测的数据以及节点轨迹中的结构变化方面的灵活性。

沿着类似的思路，Rastelli 和 Corneli（2021）提出了一种完全连续的潜在位置模型，将潜在位置模型的应用扩展到带时间戳的交互数据。他们仅利用节点之间的成对连接频率，来考察并推断节点在二维潜在空间中的连续轨迹。

6.3 加权网络的潜在位置模型

加权网络的特征是其边携带额外的数值信息。通常，这些网络的边携带一个实数值，例如表示交互的强度或长度。尽管二元网络更易于研究，但加权网络在实践中经常出现。Hoff（2005）和Hoff（2021）提出了一个通用框架，其中包括各种类型的潜变量模型作为特殊情形，包括距离LPM和投影潜在位置模型。网络变量被视为回归模型的响应变量，其特征由节点效应、二元组效应以及其他类型的网络衍生信息共同决定。Westveld和 Hoff（2011）将这一框架扩展到国际贸易和冲突网络的建模。

Sewell 和 Chen（2016）提出了一个动态加权网络框架。他们通过马尔可夫性质定义时间依赖关系，并针对权重考虑了两种模型：用于计数数据的泊松模型，以及用于非负连续数据的 Tobit 模型。他们还采用了与 Sewell 和 Chen（2015b）类似的节点随机效应，为每个节点定义可能不同的社会影响范围。

6.4 用于排名数据的潜在位置模型

排名网络数据可用于表示各节点对物品或实体的排序。二部网络可用于表示一组节点如何排列各类物品，或如何排列其他节点。Gormley 和 Murphy（2007）将 Hoff 等人（2002）的潜在位置模型与 Plackett-Luce 模型（Plackett 1975）相结合，提出了一种可用于研究二部排名网络的新型潜在位置模型，并将该方法应用于 2002 年爱尔兰选举中选民的偏好分析。

Sewell 和 Chen（2015a）进一步扩展了 Gormley和 Murphy（2007）的方法，以解释网络中的时间变化以及对节点的社会影响范围效应。他们的潜在位置模型是动态的，因为节点沿着轨迹移动，并且利用节点的位置来刻画不同时刻的各种网络快照。这使得对潜在空间演化的分析成为可能；此外，得益于节点特定参数，该模型还能够评估各个行动者的受欢迎程度和稳定性。在这两篇论文中，推断均采用贝叶斯框架和 Procrustes匹配完成。就可扩展性而言，所提出的方法尤其具有挑战性，因为其所需的复杂度甚至高于原始潜在位置模型。这为未来沿这一方向的研究提出了一个重要问题。

6.5 潜在位置模型理论

本节所考虑的论文具有一般性，因为它们并不局限于某一种特定的网络类型。我们首先重点介绍一些理论论文，这些论文研究了潜在位置模型框架或某些与之密切相关的变体。Rastelli 等（2016）通过考察模型结构所产生的一些理论和实证方面的问题，对潜在位置模型框架进行了详细分析。他们探讨了潜在位置模型如何捕捉一些值得关注的相关网络特征，例如聚类，

重尾度分布、小世界行为和同配混合。他们还提出了式 2 的一种变体，将逻辑斯蒂表达式替换为高斯核。这种选择使得能够详细分析模型的理论性质，并与该主题的物理学文献建立联系（Newman 2018）。

Smith 等人（2019）重点探讨潜在空间的几何在潜在位置模型中的作用。他们构建了一个通用框架，涵盖多种潜变量模型，并研究改用双曲几何如何带来更灵活的网络模型，从而更好地表示观测数据。具体而言，他们表明，空间中的负曲率能够在无需改变模型其他任何方面的情况下容纳更高的复杂性，因此提供了一种更简约的建模选择。

Caron和Fox（2017）考虑了一个一般的潜在变量框架，并指出，诸如潜在位置模型（LPM）等常用框架可能并不适用于大型网络，因为它们无法在渐近情形下捕捉网络稀疏性。随后，他们提出了一种基于可交换随机测度的新框架，该框架能够在保持可交换性的同时，维持网络稀疏性等理想特征。

6.6 投影潜在位置模型的扩展

Hoff等人（2002）提出的距离LPM和投影潜在位置模型催生了两组截然不同的文献。一方面，距离LPM凭借其清晰的表示方式和易于解释性得到了广泛应用。另一方面，投影模型由于其易处理性，以及与其他类型的潜在因子模型的相似性，也得到了深入研究。在投影潜在位置模型文献中，Hoff（2005）的工作开创了一条研究路径（Hoff 2007；Hoff 2011；Hoff 2021），并逐渐发展成为一个灵活且广泛适用于网络分析的框架。

Nickel（2008）以及 Young 和 Scheinerman（2007）提出了一种通用的潜变量乘法结构，它与投影模型密切相关，并将其称为随机点积图模型。该模型的原始形式并未为乘法效应引入逻辑连接函数。不过，这反而成为一种优势，因为它使模型具有很强的可处理性，从而可以通过解析方法推导出许多网络性质。近年来，不少论文扩展了随机点积图，并将这一框架用于网络应用（Athreya 等（2021）；Passino 等（2021）；Ng 和 Murphy（2019）；Xie 和 Xu（2021）；Zhang 等（2020））。

6.7 潜在位置聚类模型的扩展

Handcock 等（2007）提出的距离LPCM模型影响尤为深远，因为它继承了 Hoff 等人（2002）提出的基本潜在位置模型的优点，同时通过聚类结构增强了灵活性和可解释性。这促成了大量关于该模型及其应用的研究。

Fosdick 等人（2019）提出了一种受潜在位置聚类模型启发的新型潜变量网络模型。他们认为，当不同的统计模型

以不同的分辨率层次相结合时，或许能更好地捕捉网络的复杂性。这意味着模型可以堆叠成不同的层次化层级，也可以分别对数据的不同方面进行建模。他们提出了一种新模型——潜在空间随机区块模型，以此阐释这一方法。该模型将 Wang 和 Wong（1987）的随机区块模型与 Hoff 等人（2002）的潜在位置模型结合起来。节点按照随机区块模型的结构聚类成组，而同组节点之间形成关系的概率则由特定于该组的潜在位置模型决定。这样便在模型中形成了不同的分辨率层次，其中由潜在位置模型表示的内层可以进一步细分，并捕捉组内异质的连通模式。最终得到的框架比 Handcock 等（2007）提出的框架更具可扩展性，同时保留了潜在位置模型的灵活性和可解释性。

结合潜在位置模型和聚类的另一种方法是Sewell（2020年）提出的方法。他考虑的是在边上而非节点上进行聚类的框架。这反映了这样一种思想：边是在其所指向的特定情境中确定的，例如节点在该情境中发生了互动。随后，他引入潜在空间，以形式化表示驱动边形成的这些情境。因此，涉及某条特定边的节点，是根据它们相对于该边情境的相对位置来选择的。该方法能够对边和节点提供潜在空间表示（以及聚类），从而与潜在位置聚类模型建立紧密联系。然而，与潜在位置聚类模型不同，该方法的计算复杂度随图中边的数量增长，因此可能特别适用于稀疏网络。

Sewell 和 Chen（2017）提出了 LPCM 的一种动态扩展。在这项研究中，作者考察了一种动态 LPM，其中节点的潜在位置及其簇分配都可以随时间变化。节点的位置会受到其先前位置和先前簇归属的影响。假设聚类变量具有马尔可夫结构，并且取决于其先前的取值。作者提出了一种基于变分推断的估计策略（适用于大型网络），以及另一种基于马尔可夫链蒙特卡罗的策略（由于计算成本较高，适用于较小的网络）。此外，他们使用贝叶斯信息准则选择簇的数量，并使用偏差信息准则选择潜在维度的数量。

Gormley 和 Murphy（2010）扩展了 Handcock 等（2007）的框架，将节点协变量纳入其中。虽然潜在位置聚类模型可以通过逻辑连接函数，直接将边协变量纳入边概率，但纳入节点信息则没有那么简单。Gormley 和 Murphy（2010）通过提出将专家混合模型用作潜在位置先验，弥补了这一不足；借此，可以利用节点的协变量来刻画与节点相关的群组分配概率。这建立了一个框架，既可通过似然引入协变量，也可将其纳入模型结构，从而提高灵活性，并可能对数据作出不同的解释。

7 软件

潜在位置建模的一个重要方面是方法的实施，包括马尔可夫链蒙特卡罗、变分方法和其他程序。R 软件包 latentnet 可用于对一系列潜在位置网络模型进行马尔可夫链蒙特卡罗估计（Krivitsky 和 Handcock 2008；Krivitsky 等人 2020年）。该软件包实现了 Hoff 等人（2002年）、Shortreed 等人（2006年）、Handcock 等（2007）和 Krivitsky 等人（2009年）概述的方法。本文中的示例均使用该软件包生成。

8 开放研究问题

过去二十年来，潜在位置模型取得了巨大成功，这得益于它们能够捕捉一些常见的网络性质，例如传递性、同质性和聚类。关于这些模型的研究仍然十分活跃，也还有一些方法论问题有待解决。

一个关键问题涉及计算效率和可扩展性。虽然这是整个网络科学领域都关注的话题，但在潜在位置模型的背景下尤其重要。如前所述，原始潜在位置模型具有二次成本，这是由似然计算带来的。该模型需要网络中每个二元组的信息，而这些二元组信息可能各不相同，由此产生二次成本。尽管已有多种解决思路，目前的方法仍只能扩展到数千个节点，而实际观测到的数据集规模可能大得多。这一差距凸显了定义模型和方法的必要性：在提供稳固的统计分析框架的同时，直接将计算效率纳入考量。

潜在位置模型研究的另一个方面，是模型在捕捉感兴趣特征方面的灵活性。与之密切相关的一种潜变量模型——随机区块模型——能够捕捉节点的同配行为和异配行为。原始潜在位置模型在这方面有所不足，因为它能够捕捉同配混合，却无法捕捉异配混合。社会网络通常呈现同配混合，而生物网络等其他类型的网络则可能表现出强烈的异配模式（Newman 2018）。因此，近期研究者考虑了潜在位置模型的变体，以提高模型在这方面的灵活性，例如将其与随机区块模型结合（Fosdick et al. 2019；Ng et al. 2021；Rastelli 2018）。

另一个关键的开放研究问题涉及模型选择，尤其是潜在空间维数的选择。最常见的做法是将潜在位置模型拟合为二维模型，因为这样更容易解释，也能获得更清晰的可视化效果。不过，许多论文指出，可以将这一参数——潜在维度的数量——作为模型选择问题来处理。Handcock 等（2007）引入了 BIC准则，以联合选择簇的数量和潜在维度的数量。然而，作者指出，在选择维数时，BIC 的渐近性质可能并不成立。Friel 等人（2016）、D’Angelo 等人（2019）以及 Sewell 和 Chen（2017）使用了偏差信息准则（DIC，Spiegelhalter 等人，2002）。不过，模型选择问题仍需进一步研究。

9 致谢

本出版物源自一项研究，该研究部分得到了洞察数据分析中心的资助；该中心由爱尔兰科学基金会根据资助编号$12/RC/2289_P2$提供支持。

参考文献

Aliverti, E. 和 Durante, D. (2019).“通过带节点聚类的潜在距离模型对脑连接数据进行空间建模”。载于：《统计分析与数据挖掘：美国统计学会数据科学期刊》12.3，页码 185–196。Aliverti, E. 和 Russo, M. (2021).“面向高维网络因子模型的分层随机变分推断”。载于：《计算与图形统计学杂志》，页码 1–10。Athreya, A.、Tang, M.、Park, Y. 和 Priebe, C.E. (2021).“潜在结构随机图的估计与推断”。载于：*Statistical Science* 36.1，页码 68–88。Berlusconi, G.、Aziani, A. 和 Giommoni, L. (2017).“欧洲海洛因流通的决定因素：一种潜在空间方法”。载于：社会网络51，页码 104–117。Blei, D.M.、Kucukelbir, A. 和 McAuliffe, J.D. (2017).“变分推断：面向统计学家的综述”。载于：*Journal of the American statistical Association* 112.518，页码 859–877。Caron, F. 和 Fox, E.B. (2017).“利用可交换随机测度构造稀疏图”。载于：《皇家统计学会杂志*B*辑：统计方法学》79.5，页码 1295。Chiu, G.S. 和 Westveld, A.H. (2011).“一种统一的食物网、系统发育、社会网络与统计学研究方法”。载于：《美国国家科学院院刊》108.38，页码 15881–15886。doi: 10.1073/pnas.1015359108。Chiu, G.S. 和 Westveld, A.H. (2014).“营养级食物网消费数据的统计社会网络模型”。载于：《统计方法学》17.C，页码 139–160。doi: 10 . 1016 / j . stamet . 2013.09.001。Chu, A.M、Chan, T.W.、So, M.K 和 Wong, W-K. (2021).“利用潜在疫情空间模型对新冠肺炎进行动态网络分析”。载于：《国际环境研究与公共卫生杂志》18.6，页码 3195。D’Angelo, S.、Alfò, M. 和 Murphy, T.B. (2020).“多维网络潜在空间模型中的节点异质性建模”。载于：《荷兰统计学》74.3，页码 324–341。doi: 10. 1111/stan.12209。D’Angelo, S.、Murphy, T.B. 和 Alfò, M. (2019).“多维网络的潜在空间建模及其在欧洲歌唱大赛选票交换中的应用”。载于：《应用统计年鉴》13.2，页码 900–930。doi: 10.1214/18-AOAS1221。Ding, X.、Zou, Z. 和 Brooks III, C.L. (2019).“利用潜在空间模型解读蛋白质进化与适应度景观”。载于：《自然通讯》10.1。doi: 10.1038/s41467-019-13633-0。Durante, D. 和 Dunson, D.B. (2016).“局部自适应动态网络”。载于：《应用统计年鉴》10.4，页码 2203–2232。doi: 10.1214/16-AOAS971。

Durante, D. 和 Dunson, D.B. (2018).“脑网络组间差异的贝叶斯推断与检验”。载于：贝叶斯分析 13.1，页码 29–58。doi: 10.1214/16-BA1030。Durante, D.、Dunson, D.B. 和 Vogelstein, J.T. (2017).“回应：网络总体的非参数贝叶斯建模”。载于：*Journal of the American Statistical Association* 112.520，页码 1547–1552。doi: 10.1080/01621459.2017.1395643。Erdös, P. 和 Rényi, A. (1959).“随机图 I”。载于：德布勒森数学出版物6，页码 290。Fosdick, B.K.、McCormick, T.H.、Murphy, T.B.、Ng, T.L.J 和 Westling, T. (2019).“多分辨率网络模型”。载于：《计算与图形统计学杂志》28.1，页码 185–196。Fraley, C. 和 Raftery, A.E. (1998).“有多少个簇？采用哪种聚类方法？基于模型的聚类分析给出的答案”。载于：计算机期刊41.8，页码 578–588。Friel, N.、Rastelli, R.、Wyse, J. 和 Raftery, A.E. (2016).“使用二部网络潜在空间模型分析爱尔兰公司的交错董事任职”。载于：《美国国家科学院院刊》113.24，页码 6629–6634。doi: 10.1073/pnas.1606295113。Gilbert, E.N. (1961).“随机平面网络”。载于：工业与应用数学学会期刊9.4，页码 533–543。Gollini, I. 和 Murphy, T.B. (2016).“多重网络视图的联合建模”。载于：《计算与图形统计学杂志》25.1，页码 246–265。doi: 10 . 1080 / 10618600 . 2014 . 978006。Gormley, I.C. 和 Murphy, T.B. (2007).“秩数据的潜在空间模型”。载于：计算机科学讲义（含人工智能讲义和生物信息学讲义子系列）4503 LNCS，页码 90–102。doi: 10.1007/978-3-540-73133-7_7。Gormley, I.C. 和 Murphy, T.B. (2010).“用于社会网络数据的专家混合潜在位置聚类模型”。载于：《统计方法学》7.3，页码 385–405。doi: 10.1016/j.stamet.2010.01. 002。Handcock, M.S.、Raftery, A.E. 和 Tantrum, J.M. (2007).“社会网络的基于模型的聚类（附讨论）”。载于：《皇家统计学会杂志*A*辑：社会统计学》170.2，页码 301–354。doi: 10.1111/j.1467-985X.2007.00471.x。Hoff, P.D. (2005).“ 二元组数据的双线性混合效应模型”。载于：*Journal of the american Sta-tistical association* 100.469，页码 286–295。Hoff, P.D. (2007).“对称关系数据中的同质性与随机等价建模”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:0711.1146*。Hoff, P.D. (2011).“多维数据的分层多线性模型”。载于：计算统计与数据分析 55.1，页码 530–543。Hoff, P.D. (2021).“加性与乘性效应网络模型”。载于：*Statistical Science* 36.1，页码 34–50。Hoff, P.D.、Raftery, A.E. 和 Handcock, M.S. (2002).“社会网络分析的潜在空间方法”。载于：*Journal of the American Statistical Association* 97.460，页码 1090–1098。doi: 10. 1198/016214502388618906。

Jin, I.H. 和 Jeon, M. (2019). “一种用于项目反应数据分析中局部项目依赖和个体依赖的双重潜在空间联合模型”。载于：*Psychometrika* 84.1，第 236–260 页。doi: 10.1007/s11336-018-9630-0。Jordan, M.I.、Ghahramani, Z.、Jaakkola, T.S. 和 Saul, L.K. (1999). “图模型变分方法简介”。载于：*Machine learning* 37.2，第 183–233 页。Kim, B.、Lee, K.H.、Xue, L. 和 Niu, X. (2018). “含潜变量的动态网络模型综述”。载于：*Statistics Surveys* 12，第 105–135 页。doi: 10.1214/18-SS121。Krivitsky, P.N. 和 Handcock, M.S. (2008). “使用 latentnet 拟合社会网络的位置潜在聚类模型”。载于：*Journal of Statistical Software* 24.5。doi: 10.18637/jss.v024.i05。Krivitsky, P.N.、Handcock, M.S.、Raftery, A.E. 和 Hoff, P.D. (2009). “使用潜在聚类随机效应模型表示社会网络中的度分布、聚类和同质性”。载于：*Social networks* 31.3，第 204–213 页。Krivitsky, P.N.、Handcock, M.S.、Shortreed, S.M.、Tantrum, J.、Hoff, P.D.、Wang, L.、Li, K.、Fisher, J. 和 Bates, J.T. (2020). “软件包 ‘latentnet’”。载于。Lee, W.、McCormick, T.H.、Neil, J.、Sodja, C. 和 Cui, Y. (2021). “使用潜在空间模型检测大规模网络中的异常”。载于：*Technometrics* 即将刊出，第 1–23 页。Linardi, F.、Diks, C.、Leij, M. van der 和 Lazier, I. (2019). “使用潜在空间模型进行动态银行间网络分析”。载于：*Journal of Economic Dynamics and Control*。doi: 10.1016/j. jedc.2019.103792。Liu, H.、Jin, I.H、Zhang, Z. 和 Yuan, Y. (2021). “社会网络中介分析：一种潜在空间方法”。载于：*Psychometrika* 86.1，第 272–298 页。Liu, Y. 和 Chen, Y. (2021). “动态网络潜在空间模型的变分推断”。载于：*arXiv preprint arXiv:2105.14093*。Matias, C. 和 Robin, S. (2014). “通过潜在空间模型刻画随机图中的异质性：选择性综述”。载于：*ESAIM: Proceedings and Surveys* 47，第 55–74 页。McFowland III, E. 和 Shalizi, C.R. (2021). “通过推断潜在位置估计同质性社会网络中的因果同伴影响”。载于：*Journal of the American Statistical Association*，第 1–12 页。Newman, M. (2018).网络。牛津大学出版社。Ng, T.L.J. 和 Murphy, T.B. (2019). “广义随机点积图”。载于：*Statistics & Probability Letters* 148，第 143–149 页。Ng, T.L.J、Murphy, T.B.、Westling, T.、McCormick, T.H. 和 Fosdick, B. (2021). “使用广义潜在空间随机区块模型刻画爱尔兰政界人士的社交媒体关系”。载于：*The Annals of Applied Statistics* 15.4，第 1923–1944 页。Nickel, C.L.M. (2008). “随机点积图：一种社会网络模型”。博士论文。约翰斯·霍普金斯大学。Passino, F.S.、Bertiger, A.S.、Neil, J.C. 和 Heard, N.A. (2021). “使用随机点积图进行动态网络中的链接预测”。载于：*Data Mining and Knowledge Discovery* 35.5，第 2168–2199 页。

Plackett, R.L.（1975）。《排列的分析》。载于：英国皇家统计学会期刊：*C*辑（应用统计）24.2，第193–202页。Raftery,A.E.（2017）。《评论：扩展网络的潜在位置模型》。载于：*Journalof the American Statistical Association* 112.520，第1531–1534页。doi:10.1080/01621459.2017. 1389736。Raftery, A.E.、Niu, X.、Hoff,P.D.和Yeung, K.Y.（2012）。《使用病例-对照近似似然对潜在空间网络模型进行快速推断》。载于：《计算与图形统计学杂志》21.4，第901–919页。doi: 10.1080/10618600.2012.679240。Rastelli, R.（2018）。《非负加权网络的稀疏潜在位置模型》。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:1808.09262*。Rastelli, R.和Corneli, M.（2021）。《瞬时交互的连续潜在位置模型》。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:2103.17146*。Rastelli, R.、Friel,N.和Raftery, A.E.（2016）。《潜变量网络模型的性质》。载于：*Network Science* 4.4，第407–432页。doi:10.1017/nws.2016.23。Rastelli,R.、Maire,F.和Friel, N.（2018）。《潜在位置网络模型的计算高效推断》。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:1804.02274*。Ryan, C.、Wyse, J.和Friel, N.（2017）。《社会网络潜在位置聚类模型的贝叶斯模型选择》。载于：*Network Science* 5.1，第70–91页。doi: 10.1017/nws.2017.6。Salter-Townshend, M.和McCormick,T.H.（2017）。《多视图网络数据的潜在空间模型》。载于：《应用统计年鉴》11.3，第1217–1244页。doi: 10.1214/16-AOAS955。Salter-Townshend,M.和Murphy,T.B.（2013）。《网络数据潜在位置聚类模型的变分贝叶斯推断》。载于：计算统计与数据分析57.1，第661–671页。doi: 10.1016/j.csda.2012.08.004。Salter-Townshend,M.、White,A.、Gollini,I.和Murphy,T.B.（2012）。《统计网络分析综述：模型、算法与软件》。载于：统计分析与数据挖掘5.4，第243–264页。doi: 10.1002/sam.11146。Sarkar, P.和Moore, A.W.（2005）。《使用潜在空间模型进行动态社会网络分析》。载于：第1145–1152页。Sewell, D.K.（2019）。《网络感知数据的潜在空间模型》。载于：*Network Science* 7.2，第160–179页。doi:10.1017/nws.2019.1。Sewell, D.K.（2020年）。《基于模型的边聚类》。载于：《计算与图形统计学杂志》30.2，第390–405页。doi: 10.1080/10618600.2020.1811104。Sewell,D.K.和Chen, Y.（2015a）。《使用排序动态网络的潜在空间模型分析社会网络结构的形成》。载于：英国皇家统计学会期刊。*C*辑：应用统计64.4，第611–633页。doi:10.1111/rssc.12093。Sewell, D.K.和Chen, Y.（2015b）。《动态网络的潜在空间模型》。载于：*Journal of theAmerican Statistical Association* 110.512，第1646–1657页。doi: 10.1080/01621459.2014.988214。Sewell,D.K.和Chen, Y.（2016）。《带加权边的动态网络潜在空间模型》。载于：社会网络44，第105–116页。doi: 10.1016/j.socnet.2015.07.005。

Sewell, D.K. and Chen, Y. (2017).“动态网络社区检测的潜在空间方法”。载于：贝叶斯分析12.2，第 351–377 页。Shortreed, S., Handcock, M.S., and Hoff, P.D. (2006).“网络潜在空间模型中的位置估计”。载于：方法学2.1，第 24–33 页。doi: 10.1027/1614-2241.2.1.24。Smith, A.L., Asta, D.M., and Calder, C.A. (2019).“网络数据连续潜在空间模型的几何”。载于：*Statistical Science* 34.3，第 428–453 页。doi: 10.1214/19-STS702。Snijders, T. and Nowicki, K. (1997 年 1 月).“ 具有潜在块结构的图随机区块模型的估计与预测 ”。载于：***Journal of Classification***14，第 75–100 页。doi: 10.1007/ s003579900004。Sosa, J. and Buitrago, L. (2021).“社会网络潜在空间模型综述 [社会网络潜在空间模型综述]”。载于：*Revista Colombiana de Estadistica* 44.1，第 171–200 页。doi: 10.15446/rce.v44n1.89369。Spencer, N.A., Junker, B., and Sweet, T.M. (2020).“高斯潜在位置网络模型的快速马尔可夫链蒙特卡罗”。载于：***arXiv*** 预印本 ***arXiv:2006.07687***。Spiegelhalter, D.J., Best, N.G., Carlin, B.P., and Van Der Linde, A. (2002).“模型复杂度与拟合度的贝叶斯度量”。载于：英国皇家统计学会期刊：***B***辑（统计方法学）64.4，第 583–639 页。Sweet, T. and Adhikari, S. (2020).“社会影响潜在空间网络模型”。载于：心理计量学85.2，第 251–274 页。doi: 10.1007/s11336-020-09700-x。Sweet, T.M., Thomas, A.C., and Junker, B.W. (2013).“教育研究的层次网络模型：层次潜在空间模型”。载于：*Journal of Educational and Behavioral Statistics*38.3，第 295–318 页。doi: 10.3102/1076998612458702。Tafakori, L., Pourkhanali, A., and Rastelli, R. (2021).“衡量欧洲金融网络中的系统性风险与传染效应”。载于：*Empirical Economics*。doi: 10.1007/s00181-021-02135-y。Wang, Y.J. and Wong, G.Y. (1987).“有向图随机区块模型”。载于：*Journal of theAmerican Statistical Association* 82.397，第 8–19 页。Ward, M.D., Ahlquist, J.S., and Rozenas, A. (2013).“ Gravity’s Rainbow：世界贸易网络的动态潜在空间模型”。载于：*Network Science* 1.1，第 95–118 页。doi: 10.1017/nws. 2013.1。Westveld, A.H. and Hoff, P.D. (2011).“纵向关系数据与网络数据的混合效应模型及其在国际贸易和冲突中的应用”。载于：*The Annals of Applied Statistics*5.2A，第 843–872 页。Wilson, J.D., Cranmer, S., and Lu, Z.-L. (2020).“用于功能连接人口研究的层次潜在空间网络模型”。载于：*Computational Brain and Behavior* 3.4，第 384–399 页。doi: 10.1007/s42113-020-00080-0。Xiao, T., Oppenheimer, M., He, X., and Mastrorillo, M. (2022).“网络模型揭示气候与网络效应对南非国内移民的复杂影响”。载于：人口与环境，第 1–30 页。Xie, F. and Xu, Y. (2021).“通过单步程序高效估计随机点积图”。载于：*Journal of the American Statistical Association*，第 1–14 页。

Young, S.J. 和 Scheinerman, E.R.（2007）。《社会网络的随机点积图模型》。载于：国际网络图算法与模型研讨会。Springer，第 138–149 页。Zhang, X., Xue, S., 和 Zhu, J.（2020年）。《一种用于多层网络的灵活潜在空间模型》。载于：第 PartF168147-15 卷，第 11225–11234 页。