arXiv:2304.02990v1 [math.AG] 6 Apr 2023

广义费马曲线典范模型上的表示及其几 syzygy

Kostas Karagiannis

Abstract. 我们研究射影直线的 $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$-覆盖的典范模型，这些覆盖恰在$n+1$ 个点处以指数 k温和分歧，其中 k、 $n \geq 2$ 且基域 K 的特征为零，或不整除 k。我们明确确定相应齐次坐标环的结构：首先将其视为分次 K-代数，其次视为 K上的 $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$-表示，然后视为多项式环上的分次模；对于后一种情形，我们给出其第一 syzygy 模的生成元，并将其分解为不可约表示的直和。

1. Introduction

1.1. 广义洪贝特曲线与费马曲线。在上个世纪之交，受椭圆积分和多重周期函数理论的启发，G. Humbert [Hum94] 和 H.F.Baker [Bak07]分别研究了亏格 5的复射影曲线族。这些曲线是射影直线的分歧覆盖，在5 个不同的阶为2 的点处分支，并且在 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$的作用下保持不变。Humbert关于寻求可能的推广的建议，自然地引出了这样一类射影直线的覆盖：它们具有固定数量的不同分支点，且所有分支点都具有相同的分歧指标。

这一概念在 [CGAHR08] 和 [GDHL09], 中得到了形式化；作者针对每一对整数 k、 $n \geq 2$，考察了复射影曲线 $F_{k,\ n}$ 它们允许 $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$ 的作用，其商同构于射影直线，且分支轨迹由 $n+1$ 个互不相同的点组成，每个点的阶均为 k。当 $(k,n) = (2,4)$ 时，得到经典洪贝特曲线；而对于 $k=2$ 和任意的 n ，作者将 $F_{2,\ n}$ 称为广义洪贝特曲线。若允许 k 任意变化而固定 $n=2$ ，则得到在三个互异点处分支的平面曲线；经过适当的 M¨obius 变换后，可假定这三个点为 $\{0,1,\infty\}$。这一性质刻画了经典费马曲线，它们由形如 $x^k+y^k+z^k=0$ 的方程定义；这促使人们将 $F_{k,\ n}$ 称为广义费马曲线。

自其15 年前问世以来，广义费马曲线已由R.Hidalgo及其合作者带领的多位数学家进行了深入研究。我们仅举例提及关于富克斯一致化和肖特基一致化 [CGAHR08], 模空间理论 [GDHL09], 雅可比簇 [CHQ16] 以及 [TN21],自同构群 [HKLAP17], 的结果，以及与绝对伽罗瓦群的辫群表示的 Ihara理论 [Iha86] 的关系 [KP20]。在最新进展中，我们特别指出 [Hid20], ，其中，除其他结果外，Hidalgo 为层$\Omega_{F_{k,n}}$ 的正则1-微分的整体截面找到了一个基，随后研究了 $F_{k,n}$的一个特殊射影嵌入。

这两个结果促成了本文的研究。本文讨论高阶微分$\Omega^{\otimes m}_{F_{k\ n}}$、由此诱导的曲线的典范嵌入，并将 $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$ 的作用纳入考量。费马曲线 $F_{k,2}$ 的情形最近已由作者在 [CKKK23] 中确立；当前工作可以视为：对于任意 n and，本文工作的同时推广，以及 Hidalgo的论文对于任意 m的推广。除了上文所讨论的广义费马曲线本身具有特殊意义之外，研究动机还来自齐次坐标环这一更广泛的主题，我们将在下一小节中简要介绍这一主题。

1.2.齐次坐标环。设 K 为任意特征的代数闭域。考虑三元组（X， G， $\mathscr{L}$），其中 X是 K上的光滑射影曲线， G 是$\mathrm{Aut}_k(X)$的有限子群，而 $\mathscr{L}$ 是一个非常充裕的 G-等变线丛。读者应始终牢记上一节中讨论的三元组（$F_{k,\ n}$， $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{\ n}$， $\Omega_{F_{k,\ n}}$），将其作为下文内容的一个玩具示例。

假设 X 不是双曲线的，且其亏格为 g （至少为 3），则有一个射影嵌入$X \hookrightarrow \mathbb{P}_k\left(H^0(X,\mathscr{L})\right)$, 根据构造，该嵌入必为 G-等变。齐次坐标环的

Date: 2023年4月7日。

X 相对于此嵌入（记作 $S_{X,\mathscr{L}}$）可以赋予多种代数结构，这些结构反映了三元组 $(X,G,\mathscr{L})$ 的几何性质和表示论性质。

(1) 它具有分次 K-代数的结构，因为 $S_{X,\mathscr{L}}=\bigoplus_{m\geq 0}H^0(X,\mathscr{L}^{\otimes m})$。(2) G 的作用扩展为每个 $H^0(X,\mathscr{L}^{\otimes m})$上的线性表示，并且保持分次结构，从而使 $S_{X,\mathscr{L}}$ 成为分次 KG-模。(3) 射影嵌入诱导出一个从 $S=\mathrm{Sym}\left(H^0(X,\mathscr{L})\right)$ 到$S_{X,\mathscr{L}}$的分次环同态，从而赋予后者作为前者上的分次模的结构。(4) G 在 S 和 $S_{X,\mathscr{L}}$ 上的作用满足必要的相容性条件，因此 $S_{X,\mathscr{L}}$ 成为分次 SG-模。

本文的主要目标是说明，可以同时研究全部四种结构，从（1）出发，逐步推进到（4），具体如下。首先，构造分次分量 $H^0(X,\mathscr{L}^{\otimes m})$ 在 K 上的显式基。接着，逐个分次分量地将 $S_{X,\mathscr{L}}$ 分解为不可分解的 KG-模的直和。然后，描述结构映射 $S\to S_{X,\mathscr{L}}$ 的核，并对 $S_{X,\mathscr{L}}$ 作解消，以得到其分次 syzygy 和 Betti 数。最后，将合冲模分解为不可分解对象的直和。

值得在此提及的是，确定每一种结构的问题已经在文献中以不同程度的普遍性得到了广泛研究，并且在近几十年推动了算术几何与表示论之间的大量互动。相关文献浩繁，我们仅限于提及其中一小部分相关结果。(2)的确定被称为层上同调的伽罗瓦模结构问题，其源头可以追溯到 Hecke [Hec28]。$\mathrm{char}(K)\nmid|G|$ 的情形已由 [EL80], 解决，该工作推广了 Chevalley 和 Weil [CWH34]的工作；然而，公式是用分歧点处的局部单值化给出的，而这通常很难计算，正如我们的工作 [CKKK22]所展示的那样。野分歧的情形仍未解决，目前只有部分结果，例如参见 [K¨oc04], [BC08], [Kar12] 以及 [BCK20]。这一问题属于等变欧拉示性数的一般背景 [Chi94]。从历史上看，(3)的起点是 K. Petri 对 M. Noether 和 Enriques 的经典定理 [SD73] 所作的分析 [Pet25] 。第一 syzygy 模的不同类型生成集已经被计算出来；本文采用的方法建立在作者先前的工作 [CKK23], 之上，并与 [CC15] 和 [Dok21]的方法密切相关。关于高阶合冲，最明确的结果是 Schreyer 算法[Sch91], ；关于 S_X、Ω_X的 Betti 表，已有更多研究，见 [Eis05, §9] 以及 [Far17]。该领域事实上最核心的问题一直是 M. Green 合冲猜想，该猜想由 Voisin 在特征零中通过[Voi02], [Voi05], 解决，随后在 [AFP$^+$19]中得到推广；这一课题仍是活跃的研究领域。多项式环上分次模的自由消解上的群作用，即(4)的一般框架，已经结合 Boij-S¨oderberg 理论 [EFW11], 、Veronese 子代数 [APP$^+$22]以及单项式理想的置换 [MR22], [Mur20]进行了研究。关于计算方面的概述，参见 [Gal22]。据作者所知，齐次坐标环的情形尚未得到充分探索。唯一相关的参考文献是 [KTT21]。

总之，到目前为止，不同结构大多是分别处理的，我们希望能在同一框架下统一这些主题，并探讨它们之间可能存在的联系。作者相信，这也有助于深入理解关于带自同构曲线提升问题的广义 Oort猜想[Obu17], settled for cyclic groups in [OW14] and [Pop14], but still open in its full generality.

1.3. 结构概述。第 2 节回顾 [Hid20] 中广义费马曲线的基本性质。主要内容包括：式 (1) 中对其自同构的描述、式 (3) 中将其描述为经典费马曲线的纤维积，以及式 (4) 中正则 1-微分整体截面的基。随后，我们研究高阶微分。首先在第 3 节将其视为基域上的向量空间（定理 1），然后将其视为表示（定理 2）。在第 4 节中，我们借助 M. Noether 和 Enriques 的经典结果，将它们的直和视为多项式环上的分次模。通过采用 [CKK23] 和 [CC15], 中技巧的一种变体，我们在定理 5 中证明，第一 syzygy 模由一组二项式和三项式生成，它们分别定义于式 (10) 和式 (11) 中。最后，我们将群作用扩展到上述多项式环和 syzygy 模上，并分别在命题 8 和推论 9 中将它们分解为不可约表示的直和。

致谢。作者谨此感谢 Ioannis Tsouknidas将Hidalgo 的论文介绍给作者，并建议运用 [CKK23] 的技术来证明定理 5，同时感谢 Aristides

感谢 Kontogeorgis 对本文早期版本提出的宝贵意见。本研究得到英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号为 EP/V036017/1。

2. Preliminaries on Generalized Fermat Curves

设 K 为特征为 $p \geq 0$ 的代数闭域，并设 k、$n \geq 2$ 为整数，使得 $(k-1)(n-1) > 1$ 且 $p \nmid k$。类型为 (k,n) 的广义费马曲线是一个非奇异射影代数曲线 $F_{k,n}$ 定义在 K 上，并具有一个 H，该自同构群同构于 $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$，且其商 $F_{k,n}/H$ 为射影直线 $\mathbb{P}^1_K$，具有 $n+1$ 个不同的分支点，每个分支点的阶均为 k。当 $n=2$ 时，便得到经典费马曲线的定义，即由 $X_0^k + X_1^k + X_2^k = 0$ 在 $\mathbb{P}^2_K$ 中的消失给出。

为了使其更加明确，考虑由（$n-1$）个经典费马曲线的纤维积给出的 $\mathbb{P}^n_K$ 中的完全交

$$C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}} : \left\{\lambda_i X_0^k + X_1^k + X_{i+1}^k = 0 : 1 \leq i \leq n-1\right\} \subset \mathbb{P}^n_K,$$

其中 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_i \in K - \{0,1,\infty\}$ 对于 $2 \leq i \leq n-1$两两不同。上面的每条经典费马曲线都在 0、∞ 和 λ_i 处分支；因此，通过令 $\lambda_0 = 0$ 和 $\lambda_n = \infty$，分支轨迹$\{\lambda_i : \ 0 \leq i \leq n\}$ 由 $C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}}$ 个互不相同的点组成。此外，如果 $\zeta = \zeta_k$ 是一个本原 k 次单位根，并且 H 是由自同构生成的群

$$\{\phi_j : 0 \leq j \leq n\} \text{ where } \phi_j X_i = \zeta^{\delta_{ij}} X_i, \tag{1}$$

于是有 $\phi_0 \cdots \phi_n = 1$，从而 $H \cong (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$。因此，$C^k_{\lambda_1,\ ...,\ \lambda_{n-1}}$是一个类型为$(k,n)$ 的广义费马曲线；其亏格可由黎曼-赫尔维茨公式直接计算

$$g_{k,n} = |H|\left(g_{\mathbb{P}^1_K} - 1\right) + 1 + \sum_{i=0}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1 + \frac{k^{n-1}}{2}\left[(k-1)(n-1) - 2\right]. \tag{2}$$

反过来说，任意类型为 (k,n) 的广义费马曲线都可以按上述方式得到，这一结论最初针对 $K = \mathbb{C}$ 在 [GDHL09, Theorem 5], 中得到证明，随后在 [Hid20, Theorem 2.2] 中推广到任意 K。下文中，我们将 $F_{k,n}$ 与完全交 $C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}}$等同起来。我们将使用通过令 $x = X_1/X_0$ 和 $y_i = X_i/X_0$（其中 $2 \leq i \leq n$）得到的仿射模型，

$$F_{k,n} : \left\{\begin{array}{rl} 1 + x^k + y_2^k & = 0 \\ \lambda_2 + x^k + y_3^k & = 0 \\ & \vdots \\ \lambda_{n-1} + x^k + y_n^k & = 0 \end{array}\right\}. \tag{3}$$

令 $\Omega_{F_{k,n}}$ 表示 $F_{k,n}$ 上的典范层。在 [Hid20, Theorem 3.1], 中，作者证明了这一组

$$\mathscr{B}_{k,n} = \left\{\frac{x^r dx}{y_2^{a_2} y_3^{a_3} \cdots y_n^{a_n}} : 0 \leq a_i \leq k-1 \text{ for all } 2 \leq i \leq n, \text{ and } 0 \leq r \leq \sum_{i=2}^{n} a_i - 2\right\} \tag{4}$$

构成向量空间 $H^0\left(F_{k,n} \text{ 的整体截面 } \Omega_{F_{k,n}}\right)$ 的一个 K-基。假设 $(n-1)(k-1) > 2$，根据 [GDHL09, Theorem 4]，可知 $F_{k,n}$ 不是双曲线的，因此，上述基 $\mathscr{B}_{k,n}$ 的选取给出了一个嵌入 $F_{k,n} \hookrightarrow \mathbb{P}^{g_k}{}_{,\ K}{}^{n-1}$。这些结果构成了我们分析的起点。

3. Holomorphic m-differentials

对于 $m \geq 1$，令$\Omega^{\otimes m}_{F_k\ ,n}$ 为正则 m-微分的层，在$F_{k,n}$上。整体截面 $V_m = H^0(F_{k,n}, \Omega^{\otimes m}_{F_k\ n,})$ 构成基域 K 上的向量空间，其维数为

$$d_m = \dim_K V_m = \begin{cases} g_{k,n} & , \text{ if } m = 1 \\ (2m-1)(g_{k,n} - 1) & , \text{ if } m \geq 2. \end{cases} \tag{5}$$

为了描述每个 V_m的显式基，考虑亚纯微分

$$\theta^{(m)}_{r,\mathbf{a}} = \frac{x^r dx^{\otimes m}}{y_2^{a_2} y_3^{a_3} \cdots y_n^{a_n}}, \text{ where } (r,\mathbf{a}) = (r, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n. \tag{6}$$

$\operatorname{div}(\theta^{(m)}_{r,\mathbf{a}})$ 可通过与 [Hid20, §3.2] 中所用的类似论证来计算：对于每个$0 \le j \le n$，令 ϕ_j 为式 (1) 中定义的自同构，令 $\{P_{j\ell} : 1 \le \ell \le k^{n-1}\}$ 表示其不动点集合，并令 $D_j = \sum_{\ell=0}^{k^{n-1}} P_{j,\ell}$ 为相应的除子。于是我们有

$$\operatorname{div}(x) = -D_0 + D_1 + \sum_{i=2}^{n} D_i, \quad \operatorname{div}(y_j) = -D_0 + D_j, \quad \operatorname{div}(dx) = -2D_0 + \sum_{i=2}^{n} (k-1)D_i,$$

因此，将和 $\sum_{i=2}^{n} a_i$ 记作 $|\mathbf{a}|$，我们得到

$$\operatorname{div}(\theta^{\otimes m}_{r,\mathbf{a}}) = (|\mathbf{a}| - 2m - r)\, D_0 + rD_1 + \sum_{i=2}^{n} [m(k-1) - a_i] D_i. \tag{7}$$

现在我们可以证明以下定理。

定理 1. 对于 $m \ge 1$，令

$$I^{(m)}_{k,n} = \{(r, \mathbf{a}) \in \mathbb{Z}^n : (m-1)(k-1) \le a_i \le m(k-1) \text{ for all } 2 \le i \le n, \text{ and } 0 \le r \le |\mathbf{a}| - 2m\}.$$

则集合

$$\mathscr{B}^{(m)}_{k,n} = \left\{ \theta^{(m)}_{r,\mathbf{a}} = \frac{x^r dx^{\otimes m}}{y_2^{a_2} y_3^{a_3} \cdots y_n^{a_n}} : (r, \mathbf{a}) \in I^{(m)}_{k,n} \right\}$$

是 $V_m = H^0\left(F_{k,n}, \Omega^{\otimes m}_{F_{k,n}}\right)$ 的一组基。

证明。根据式 (7)，$\mathscr{B}^{(m)}_{k,n}$，中的微分是全纯的。因此，只需证明$I^{(m)}_{k,n}$，的基数等于 d_m，如式 (5) 所示。我们对 m 进行归纳法。

对于 $m = 1$，我们取回式 (4) 中的集合 $\mathscr{B}_{k,n}$，结论由 [Hid20，定理 3.1] 得出。假设 $|I^{(m)}_{k,n}| = (2m-1)(g_{k,n}-1)$，并考虑集合

$$I^{(m+1)}_{k,n} = \{(r, \mathbf{a}) \in \mathbb{Z}^n : m(k-1) \le a_j \le (m+1)(k-1) \text{ and } 0 \le r \le |\mathbf{a}| - 2m - 2\}.$$

对于 $2 \le j \le n$ 令 $b_j = a_j - (k-1)$，使得 $|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - (n-1)(k-1)$。然后

$$I^{(m+1)}_{k,n} = \{(r, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}^n : (m-1)(k-1) \le b_j \le m(k-1) \text{ and } 0 \le r \le |\mathbf{b}| + (n-1)(k-1) - 2m - 2\}$$

可以写成这两个集合的不交并

$$\{(r, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}^n : (m-1)(k-1) \le b_j \le m(k-1) \text{ and } 0 \le r \le |\mathbf{b}| - 2m\}$$

and

$$\{(r, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}^n : (m-1)(k-1) \le b_j \le m(k-1) \text{ and } |\mathbf{b}| - 2m + 1 \le r \le |\mathbf{b}| + (n-1)(k-1) - 2m - 2\}$$

前者等于 $I^{(m)}_{k,n}$，因此根据归纳假设，其基数等于 $(2m-1)(g_{k,n}-1)$。对于后者的基数，注意到不等式 $(m-1)(k-1) \le b_j \le m(k-1)$ 由 k^{n-1}元组 $\mathbf{b}$满足，并且每个这样的元组恰好产生 $n-1)(k-1)-2$ 个 r 值。因此

$$|I^{(m+1)}_{k,n}| = (2m-1)(g_{k,n}-1) + k^{n-1}\left[(k-1)(n-1) - 2\right] = (2m-1)(g_{k,n}-1) + 2(g_{k,n}-1) = (2m+1)(g_{k,n}-1)$$

完成证明。 □

我们继续研究 $H \cong (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$ 对 V_m的作用。为与公式（6）中引入的指标记法保持一致，我们将$(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$ 的元素记为$(e_1, \mathbf{e})$，其中 $\mathbf{e} = (e_2, \ldots, e_n)$，而 H中对应的元素记为$\sigma_{(e_1,\mathbf{e})}$。回顾一下，$H$通过$\sigma_{(e_1,\mathbf{e})}(x, y_2, \ldots, y_n) = (\zeta^{e_1}x, \zeta^{e_2}y_2, \ldots, \zeta^{e_n}y_n)$作用于$F_{k,n}$，并由此在 V_m的基 $\mathscr{B}^{(m)}_{k,n}$上诱导出一个作用，具体如下

$$\sigma_{(e_1,\mathbf{e})}\theta^{(m)}_{r,\mathbf{a}} = \frac{(\zeta^{e_1}x)^r\, d(\zeta^{e_1}x)^{\otimes m}}{(\zeta^{e_2}y_2)^{a_2}(\zeta^{e_3}y_3)^{a_3}\cdots(\zeta^{e_n}y_n)^{a_n}} = \zeta^{e_1(r+m)-\sum_{j=2}^{n} a_j e_j}\theta^{(m)}_{r,\mathbf{a}} = \zeta^{e_1(r+m)-\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}}\theta^{(m)}_{r,\mathbf{a}}, \tag{8}$$

其中，我们将和 $\sum_{j=2}^{n} a_j e_j$ 记作 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}$。因此，这个表示的特征标为

$$\chi_{V_m} : H \to K,\ \sigma_{(e_1,\mathbf{e})} \mapsto \sum_{(r,\mathbf{a}) \in I^{(m)}_{k,n}} \zeta^{e_1(r+m)-\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}}. \tag{9}$$

我们将 H 的不可约表示与其不可约特征标群相对应 S

$$\mathscr{X}(H)=\left\{\chi_{(h_1,\mathbf{h})}:H\to K,\ \sigma_{(e_1,\mathbf{e})}\mapsto\zeta^{h_1e_1+\mathbf{h}\cdot\mathbf{e}}\mid(h_1,\mathbf{h})\in(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n\right\},$$

$\bigoplus$ $\nu_{m,(h_1,\mathbf{h})}\chi_{(h_1,\mathbf{h})}$ 对于.....的分解 V_m 为不可约表示的直和。$(h_1,\mathbf{h})\in(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$

并写下 $V_m=$

定理 2. $\nu_{m,\ (h_1,\mathbf{h})}=(n-1)(m-1)-\left\lceil\dfrac{|(h_1,\mathbf{h})|+m}{k}\right\rceil-\sum_{j=2}^{n}\left\lfloor\dfrac{m-1-h_j}{k}\right\rfloor+1.$

证明。利用等式（9）以及 $\nu_{m,(h_1,\mathbf{h})}=\langle\chi_{V_m},\chi_{(h_1,\mathbf{h})}\rangle$，我们得到

$$\nu_{m,(h_1,\mathbf{h})}=\frac{1}{|H|}\sum_{(e_1,\mathbf{e})\in(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n}\chi_{V_m}\left(\sigma_{(e_1,\mathbf{e})}\right)\overline{\chi_{(h_1,\mathbf{h})}\left(\sigma_{(e_1,\mathbf{e})}\right)}=\frac{1}{k^n}\sum_{\substack{(e_1,\mathbf{e})\in(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n\\(r,\mathbf{a})\in I_{k,n}^{(m)}}}\zeta^{e_1(r+m-h_1)-(\mathbf{a}+\mathbf{h})\cdot\mathbf{e}}.$$

对于固定的值 $(r,\mathbf{a})\in I_{k\ n}^{(m)}$,我们有

$$\sum_{(e_1,\mathbf{e})\in(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n}\zeta^{e_1(r+m-h_1)-(\mathbf{a}+\mathbf{h})\cdot\mathbf{e}}=\begin{cases}k^n & ,\ \text{if }\ (r+m-h_1,\mathbf{a}+\mathbf{h})\equiv\mathbf{0}\bmod k\\ 0 & ,\ \text{otherwise.}\end{cases}$$

因此 $\nu_{m,\ (h_1,\mathbf{h})}$ 等于 $\left\{(r,\mathbf{a})\in I_{k\ n}^{(m)},:\ (r+m-h_1,\mathbf{a}+\mathbf{h})\equiv\mathbf{0}\text{模 }k\right\}$。换言之，需要计算满足这些关系的元组 $(r,\mathbf{a})\in\mathbb{Z}^n$ 的数量

$$\left\{\begin{array}{cc}(m-1)(k-1)\le a_j\le m(k-1) & \\ 0\le r\le|\mathbf{a}|-2m & \text{and}\end{array}\begin{array}{c}\\ r+m\equiv h_1\bmod k\\ a_j\equiv-h_j\bmod k\end{array}\right\},$$

或等价地，令 $b_j=a_j-(m-1)(k-1)$，这些关系

$$\left\{\begin{array}{cc}0\le b_j\le k-1 & \\ 0\le r\le|\mathbf{b}|+(n-1)(m-1)(k-1)-2m & \text{and}\end{array}\begin{array}{c}\\ r+m\equiv h_1\bmod k\\ b_j\equiv m-1-h_j\bmod k.\end{array}\right\}.$$

恰有一个元组 $\mathbf{b}$ 满足 $0\le b_j\le k-1$ 且 $b_j\equiv m-1-h_j$ 模 k，即

$$b_j=m-1-h_j-\left\lfloor\frac{m-1-h_j}{k}\right\rfloor k.$$

将 $r+m$ 除以 k 所得的商记为 $r+m=qk+h_1$，并代入 r 所需满足的不等式中

$$\begin{aligned}0\le qk+h_1-m&\le(n-1)(m-1)-|\mathbf{h}|-\sum_{j=2}^{n}\left\lfloor\frac{m-1-h_j}{k}\right\rfloor k+(n-1)(m-1)(k-1)-2m\\ \Leftrightarrow 0\le qk&\le(n-1)(m-1)k-|(h_1,\mathbf{h})|-m-\sum_{j=2}^{n}\left\lfloor\frac{m-1-h_j}{k}\right\rfloor k\\ \Leftrightarrow 0\le q&\le(n-1)(m-1)-\left\lceil\frac{|(h_1,\mathbf{h})|+m}{k}\right\rceil-\sum_{j=2}^{n}\left\lfloor\frac{m-1-h_j}{k}\right\rfloor\end{aligned}$$

从而结论得出。 □

4. The canonical ring

令 $S_{F_{k,n}}$ 为 K-向量空间 $V_m=H^0(\Omega_{F_{k\ n},}^{\otimes m},F_{k,n})$（$m\ge0$）的直和。它带有分次环结构，其乘法定义为

$$V_m\times V_{m'}\to V_{m+m'},\ \left(fdx^{\otimes m},gdx^{\otimes m'}\right)\mapsto fgdx^{\otimes(m+m')}.$$

令 S 为对称代数 $\mathrm{Sym}(V_1)$；利用定理 1，我们将 S 识别为以 $\{z_{r,\mathbf{a}}$ 为变量的多项式环：$(r,\mathbf{a})\in I_k^{(1)}{}_{,\ n}\}$，由以下元素作为索引。

$$I_{k,n}^{(1)}=\{(r,\mathbf{a})\in\mathbb{Z}^n:0\le a_j\le k-1\text{ and }0\le r\le|a|-2\}.$$

映射 $z_{r,\mathbf{a}} \mapsto \theta^{(1)}_{r,\mathbf{a}}$ 可自然扩展为分次环的齐次同态ϕ： $S \to S_{F_{k,n}}$，从而赋予 $S_{F_{k,n}}$ 分次 S-模的结构。假设 $(n-1)(k-1) > 2$，根据 [GDHL09，引理 4] 可知$F_{k,n}$ 不是双曲线的。因此，我们可以援引 M. Noether、Enriques 和 Petri 的以下经典结果，参见[SD73]。

定理 3. 典范映射 ϕ: $S \to S_{F_{k,n}}$ 是满射。若 $F_{k,n}$ 既不是三次的，也不是平面五次曲线，则 ϕ 的核由次数为 2 的齐次元素生成。

下文中，我们假设 $F_{k,n}$ 既不是三次的，也不是平面五次曲线，并通过考虑 K-线性映射，来描述次数为 2 时 $\ker\phi$ 的生成集

$$\phi_2 : S_2 \twoheadrightarrow V_2,\ z_{r,\mathbf{a}} z_{s,\mathbf{b}} \mapsto \theta^{(2)}_{r+s,\mathbf{a}+\mathbf{b}}.$$

注意，$\phi(z_{r,\mathbf{a}} z_{s,\mathbf{b}}) = \phi(z_{t,\mathbf{c}} z_{u,\mathbf{d}}) \Leftrightarrow (r+s, \mathbf{a}+\mathbf{b}) = (t+u, \mathbf{c}+\mathbf{d})$，因此

$$\mathscr{G}_{\mathrm{bi}} = \{ z_{r,\mathbf{a}} z_{s,\mathbf{b}} - z_{t,\mathbf{c}} z_{u,\mathbf{d}} : (r+s, \mathbf{a}+\mathbf{b}) = (t+u, \mathbf{c}+\mathbf{d}) \} \subseteq \ker\phi. \tag{10}$$

注记 4. 为了对上述内容给出组合解释，回顾一下，在次数 1 时，S的变量、V_1 的基与 $I^{(1)}_{k,n}$ 的点之间存在一一对应关系。在次数 2 时，也有类似的对应关系，但并非双射。根据定理 1，V_2 的基与

$$I^{(2)}_{k,n} = \{ (r, \mathbf{a}) \in \mathbb{Z}^n : k-1 \le a_j \le 2(k-1) \text{ and } 0 \le r \le |a| - 4 \}.$$

S_2 在 ϕ 下的单项式像对应于闵可夫斯基和中的点

$$I^{(1)}_{k,n} + I^{(1)}_{k,n} = \left\{ (r,\mathbf{a}) + (s,\mathbf{b}) : (r,\mathbf{a}), (s,\mathbf{b}) \in I^{(1)}_{k,n} \right\} = \{ (r,\mathbf{a}) \in \mathbb{Z}^n : 0 \le a_j \le 2(k-1) \text{ and } 0 \le r \le |a| - 4 \},$$

该闵可夫斯基和严格包含 $I^{(2)}_{k,n}$，。当且仅当两个单项式生成 $\mathscr{G}_{\mathrm{bi}}$中的一个二项式时，它们才对应于同一点。

为得到其余生成元，对于 $1 \le i \le n-1$，令 $\mathbf{k}(i)$ 为向量 $(0, \ldots, k, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^{n-1}$，其中第$i$个坐标等于 k，其余坐标均为 0。设 $(r, \mathbf{a})$ 是 $I^{(1)}_{k,n} + I^{(1)}_{k,n}$ 中的一个点，使得 $(r+k, \mathbf{a}) \in I^{(1)}_{k,n} + I^{(1)}_{k,n}$ 且 $(r, \mathbf{a} - \mathbf{k}(i)) \in I^{(1)}_{k,n} + I^{(1)}_{k,n}$ 恰好对一个 $1 \le i \le n-1$ 成立。这三个点生成 V_2 中的一个关系

$$\lambda_i \theta^{(2)}_{r,\mathbf{a}} + \theta^{(2)}_{r+k,\mathbf{a}} + \theta^{(2)}_{r,\mathbf{a}-\mathbf{k}(i)} = \theta^{(2)}_{r,\mathbf{a}} \left(\lambda_i + x^k + y^k \right)$$

这是 由等式 (3) 可知为零。该关系在 ϕ 下的原像定义了 $\ker\phi$ 的一个子集，而 s o

$$\mathscr{G}_{\mathrm{tri}} = \left\{ \lambda_i z_{r,\mathbf{a}} z_{s,\mathbf{b}} + z_{t,\mathbf{c}} z_{u,\mathbf{d}} + z_{v,\mathbf{e}} z_{w,\mathbf{f}} : \begin{array}{l} t+u = r+s+k,\ \mathbf{c}+\mathbf{d} = \mathbf{a}+\mathbf{b} \\ v+w = r+s,\ \mathbf{e}+\mathbf{f} = \mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{k}(i) \end{array},\ 1 \le i \le n-1 \right\} \subseteq \ker\phi. \tag{11}$$

定理 5. $\ker\phi$ 由 $\mathscr{G}_{\mathrm{bi}} \cup \mathscr{G}_{\mathrm{trinom}}$ 生成。

定理 5 的证明将采用 [CKK23], [CC15] 和 [Dok21] 中介绍的技术变体。为此，我们从 [Stu96, §1] 回顾一些 Gr¨obner 理论的相关事实。设 $\prec$ 是 S 的单项式上的一个项序。对于 $f \in S$，令 $\mathrm{in}_\prec(f)$ 表示 f 关于 $\prec$ 的首项；对于 S 的一个理想 $\mathfrak{a}$ 和一个子集 $\mathscr{G} \subseteq \mathfrak{a}$，令 $\mathrm{in}_\prec(\mathfrak{a}) = \langle \mathrm{in}_\prec(f) : f \in \mathfrak{a} \rangle$，且 $\mathrm{in}_\prec(\mathscr{G}) = \{ \mathrm{in}_\prec(f) : f \in \mathscr{G} \}$。一般而言，$\langle \mathrm{in}_\prec(\mathscr{G}) \rangle \subseteq \mathrm{in}_\prec(\langle \mathscr{G} \rangle)$；当且仅当 $\mathscr{G}$ 是 $\langle \mathscr{G} \rangle$ 的 Gr¨obner 基时，等号成立。若一个单项式不属于 $\mathrm{in}_\prec(\mathfrak{a})$，则称它关于 $\mathfrak{a}$ 是标准的；标准单项式构成 $S/\mathfrak{a}$ 的一个 K-基。对于本文所关注的情形，即 $\mathfrak{a} = \ker\phi$ 且 $\mathscr{G} = \mathscr{G}_{\mathrm{bi}} \cup \mathscr{G}_{\mathrm{tri}}$，我们将按照注 4 的思路，把标准单项式与 $I^{(1)}_{k,n} + I^{(1)}_{k,n}$，中的一个子集对应起来。为方便起见，我们固定一个项序，尽管证明与选择无关；另见注 7。在下述定义中，我们扩展记号 $\mathbf{a} = (a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$，以涵盖 $\mathbb{Z}^{n-1}$ 中若干元素组成的集合；这些集合将记作 $\mathbf{a}_1 = (a_1, 2, \ldots, a_{1,n})$、$\mathbf{a}_2 = (a_2, 2, \ldots, a_{2,n})$ 等。

定义 6. 设 $\prec$ 为 S 的单项式上的项序，其定义如下：

$$z_{r_1,\mathbf{a}_1} z_{r_2,\mathbf{a}_2} \cdots z_{r_d,\mathbf{a}_d} \prec z_{s_1,\mathbf{b}_1} z_{s_2,\mathbf{b}_2} \cdots z_{s_{2},\mathbf{b}_{d'}} \text{ if and only if}$$

- $d < d'$ or
- $d = d'$ and $\sum r_i > \sum s_i$ or
- $d = d'$ and $\sum r_i = \sum s_i$ and $\sum_i a_{i,2} < \sum_i b_{i,2}$ or
- $d = d'$ and $\sum r_i = \sum s_i$ and $\sum_i a_{i,2} = \sum_i b_{i,2}$ and $\sum_i a_{i,3} < \sum_i b_{i,3}$ or

⋮

- $d = d'$ and $\sum r_i = \sum s_i$ and $\sum_i a_{i,j} = \sum_i b_{i,j}$ for all $2 \le j \le n$ and

$$z_{r_1,\mathbf{a}_1} z_{r_2,\mathbf{a}_2} \cdots z_{r_d,\mathbf{a}_d} \prec z_{s_1,\mathbf{b}_1} z_{s_2,\mathbf{b}_2} \cdots z_{s_2,\mathbf{b}_{d'}} \text{ lexicographically.}$$

定理5 的证明。根据构造， $\mathscr{G} = \mathscr{G}_{\mathrm{bi}} \cup \mathscr{G}_{\mathrm{tri}} \subseteq \ker \phi$，见方程（10）和（11）。根据定理 3，包含关系 $\phi \subseteq \langle \mathscr{G} \rangle$ can在次数 2 中即可检验；我们将证明（ $S/\langle \mathscr{G} \rangle$ ） 2 是（ $S/\ker \phi$ ） 2 的一个 K- 子空间。根据 Gr¨obner 理论，再次参照 [Stu96，第 1]，节，我们有

$$\dim_K \left(S/\langle \mathscr{G} \rangle\right)_2 = \dim_K \left(S/\mathrm{in}_\prec \langle \mathscr{G} \rangle\right)_2 \le \dim_K \left(S/\langle \mathrm{in}_\prec \left(\mathscr{G}\right) \rangle\right)_2 = |\mathbb{T}^2 \setminus \mathrm{in}_\prec \left(\mathscr{G}\right)|, \tag{12}$$

其中 $\mathbb{T}^2$ 表示 S中次数为 2 的单项式集合。为了给出 $|\mathbb{T}^2 \setminus$ 在$_\prec$ (G) |中的上界，我们考虑集合映射

$$\tau : I_{k,n}^{(1)} + I_{k,n}^{(1)} \to \mathbb{T}^2,\ (r, \mathbf{a}) \mapsto \min_{\prec} \left\{ z_{s,\mathbf{b}} z_{t,\mathbf{c}} \in \mathbb{T}^2 : (s+t, \mathbf{b}+\mathbf{c}) = (r, \mathbf{a}) \right\},$$

该映射定义良好，是一一映射，且其像等于 $\mathbb{T}^2 \setminus$ 在$_\prec$(G$_{\mathrm{bi}}$)中。因此， $\mathbb{T}^2 \setminus$ 在$_\prec$(G$_{\mathrm{bi}}$)中与$I_k^{(1)}$, $_n + I_{k\,n}^{(1)}$, 构成双射。对于 $2 \le i \le n$，考虑 $I_k^{(1)}$, $_n + I_{k\,n}^{(1)}$, 的子集，定义如下：

$$C_i = \left\{ (r, \mathbf{a}) \in I_{k,n}^{(1)} + I_{k,n}^{(1)} : (r+k, \mathbf{a}) \in I_{k,n}^{(1)} + I_{k,n}^{(1)} \text{ and } (r, \mathbf{a} - \mathbf{k}(i)) \in I_{k,n}^{(1)} + I_{k,n}^{(1)} \right\}. \tag{13}$$

The 三个单项式 τ(r, a)、 τ(r + k, a) 和 τ(r, a $-$ k(i)) 生成 $\mathscr{G}_{\mathrm{tr}}$中的一个元素 i

$$\lambda_i \tau\left(r, \mathbf{a}\right) + \tau\left(r+k, \mathbf{a}\right) + \tau\left(r, \mathbf{a} - \mathbf{k}(i)\right),$$

其初始项按构造为 τ(r, a)。因此 $|\bigcup_{i=2}^n C_i| \le |$在$_\prec$ (G$_{\mathrm{tri}}$) |中，所以

$$|\mathbb{T}^2 \setminus \mathrm{in}_\prec \left(\mathscr{G}\right)| \le |(I_{k,n}^{(1)} + I_{k,n}^{(1)}) \setminus \bigcup_{i=2}^n C_i| = |(I_{k,n}^{(1)} + I_{k,n}^{(1)}) \bigcap_{i=2}^n \overline{C}_i|.$$

利用 $I_k^{(1)}$,$_n + I_{k\,n}^{(1)}$, 的定义不等式，我们观察到

$$C_i = \{(r, \mathbf{a}) \in \mathbb{Z}^n : 0 \le a_j \le 2k-2 \text{ for } j \ne i,\ k \le a_i \le 2k-2 \text{ and } 0 \le r \le |\mathbf{a}| - (k+4)\}.$$

令 $b_i = a_i - k$ 和 $b_j = a_j$ 取为 $i \ne j$，得到

$$C_i = \{(r, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}^n : 0 \le b_j \le 2k-2 \text{ for } j \ne i,\ 0 \le b_i \le k-2 \text{ and } 0 \le r \le |\mathbf{b}| - 4\}$$

因此

$$\left(I_{k,n}^{(1)} + I_{k,n}^{(1)}\right) \bigcap_{i=2}^n \overline{C}_i = \{(r, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}^n : k-1 \le b_i \le 2(k-1) \text{ for } 2 \le i \le n-1 \text{ and } 0 \le r \le |\mathbf{b}| - 4\} = I_{k,n}^{(2)}.$$

Th我们 $|\mathbb{T}^2 \setminus$ 在$_\prec$ (G) | $\le |I_{k\,n}^{(2)}|$, 。定理 1 和定理 3 的第一部分随后意味着

$$|\mathbb{T}^2 \setminus \mathrm{in}_\prec \left(\mathscr{G}\right)| \le |I_{k,n}^{(2)}| = \dim_k V_2 = \dim_K \left(S/\ker \phi\right)_2,$$

因此，根据式(12)，$(S/\langle \mathscr{G} \rangle)_2$ 是 $(S/\ker \phi)_2$, 的 K-子空间，如所要求。 □

注 7. 定义 6 中的项次仅用于证明 τ 将式（13）的集合 C_i 映入 in$_\prec$(G$_{\mathrm{tri}}$)，这可以由单项式 τ(r, a) 关于 $\prec$ 大于 τ(r + k, a) 和 τ(r, a $-$ k(i)) 得出。若我们不作选择，也可以逐种情况证明：例如，如果 τ(r + k, a) 在这三个单项式中最大，我们就会用集合替换 C_i。

$$\left\{ (r, \mathbf{a}) \in I_{k,n}^{(1)} + I_{k,n}^{(1)} : (r-k, \mathbf{a}) \in I_{k,n}^{(1)} + I_{k,n}^{(1)} \text{ and } (r-k, \mathbf{a} - \mathbf{k}(i)) \in I_{k,n}^{(1)} + I_{k,n}^{(1)} \right\}$$

其基数与 C_i 相同，第三种情形也类似。

H 在 V_1 上的作用在 S =Sym(V_1) 上自然诱导出一个保持分次结构的作用：若 m 是次数为 d 的单项式，且 $\sigma_{(e_1,\mathbf{e})} \in H$ 是由 (e_1, e) $\in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$ 确定的自同构，则 $\sigma_{(e_1,\mathbf{e})}\mathfrak{m} = \zeta^{e_1(r+d) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}}\mathfrak{m}$，其中 (r, a) 是所有整除 m 的变量所对应指标之和。

这促使我们考虑，对于每个 $d \ge 1$， $I_{k\,n}^{(1)}$, 与自身的 d 重闵可夫斯基和

$$d \cdot I_{k,n}^{(1)} = \underbrace{I_{k,n}^{(1)} + I_{k,n}^{(1)} + \cdots + I_{k,n}^{(1)}}_{d\text{-times}}.$$

对于每个点 $(r,\mathbf{a}) \in d \cdot I^{(1)}_{k\ n}$，令 $S_{d,r,\mathbf{a}}$ 为 k-张成空间

$$\left\{ z_{r_1,\mathbf{a}_1} z_{r_2,\mathbf{a}_2} \cdots z_{r_d,\mathbf{a}_d} \in S_d \mid \sum_{i=1}^{d} (r_i, \mathbf{a}_i) = (r, \mathbf{a}) \right\},$$

即次数为 d 的单项式 $\mathfrak{m}$ 的集合，其中对应于整除 $\mathfrak{m}$ 的变量的指标之和等于 $(r, \mathbf{a})$。上述构造产生了一个直和分解

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \bigoplus_{(r,\mathbf{a}) \in d \cdot I^{(1)}_{k,n}} S_{d,r,\mathbf{a}}, \tag{14}$$

这决定了 S 作为 KG-模的结构。

命题 8。不可约表示 $\mu_{d,(h_1,\mathbf{h})}$ 的重数 $\chi_{(h_1,\mathbf{h})}$ 在 H 的分解中，S_d 在不可约表示的直和中的分解由下式给出

$$\mu_{d,(h_1,\mathbf{h})} = \sum_{(r,\mathbf{a}) \in J^{(d)}_{h_1,\mathbf{h}}} \dim_K \left(S_{d,r,\mathbf{a}} \right), \ \textit{where } J^{(d)}_{h_1,\mathbf{h}} = \left\{ (r,\mathbf{a}) \in d \cdot I^{(1)}_{k,n} \mid (r+d, -\mathbf{a}) \equiv (h_1, \mathbf{h}) \bmod k \right\}.$$

证明。一个自同构 $\sigma_{(e_1,\mathbf{e})} \in H$ 作用于 $S_{d,r,\mathbf{a}}$ 的元素，其标量为 $\zeta^{e_1(r+d)-\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}}$，因此 $S_{d,r,\mathbf{a}}$ 作为一个 KG-模，同构于由 $\dim_K(S_{d,r,\mathbf{a}})$个由$(r+d, -\mathbf{a}) \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$ 的类所确定的不可约表示构成的直和。因此，

$$S_d = \bigoplus_{(r,\mathbf{a}) \in d \cdot I^{(1)}_{k,n}} \dim_K \left(S_{d,r,\mathbf{a}} \right) \chi_{(r+d,-\mathbf{a})}$$

且结论随之成立，因为两个点 $(r,\mathbf{a})$、$(s, \mathbf{b}) \in d \cdot I^{(1)}_{k\ n}$,确定同一个不可约表示，当且仅当$(r, \mathbf{a}) \equiv (s, \mathbf{b})$ 模 k。□

最后，我们扩展 H 在定理 3 的理想 $\ker\phi$ 上的作用。这可以通过比较 H 在 S 上与在 $S_{F_{k,n}}$ 上的作用，并推导出典范映射 ϕ 是 H-等变的来完成；也可以直接验证，对于任意生成元 $f \in \mathscr{G}_{\mathrm{bi}} \cup \mathscr{G}_{\mathrm{tri}}$，都有 $\sigma_{(e_1,\mathbf{e})} f = \zeta^{e_1(r+2)-\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}} f$。此外，$\mathrm{char}(K) \nmid |H|$ 这一假设使我们可以应用 Maschke 定理，得出定理 3 中的序列 $0 \to \ker\phi \to S \xrightarrow{\phi} S_{F_{k,n}} \to 0$ 是 KG-模的分裂短正合列。

推论 9. 在将 $(\ker\phi)_d$ 分解为不可约表示的直和时，H 的不可约表示 $\chi_{(h_1,\mathbf{h})}$ 的重数由 $\mu_{d,(h_1,\mathbf{h})} - \nu_{d,(h_1,\mathbf{h})}$ 给出，其中 $\mu_{d,(h_1,\mathbf{h})}$ 如命题 8 中所述，$\nu_{d,(h_1,\mathbf{h})}$ 如定理 2 中所述。

最后，我们对本文所用技巧与代数组合学及组合交换代数之间的关系作几点评论。此举有双重目的：一是提出一些未来研究方向和开放问题；二是说明为何命题 8 中 $\mu_{d,(h_1,\mathbf{h})}$ 的公式不如定理 2 中给出的相应 $\nu_{d,(h_1,\mathbf{h})}$ 公式那样具体。

(1) 对于 $d = 1$，$\dim_K (S_{1,r,\mathbf{a}}) = 1$ 对于所有 $(r, \mathbf{a}) \in I^{(1)}_{k\ n}$，，因此 $\mu_{1,(h_1,\mathbf{h})} = \nu_{1,(h_1,\mathbf{h})}$，这反映了 $\ker\phi$ 在次数 1 中没有生成元这一事实。对于 $d \geq 1$，$\dim_K S_{d,r,\mathbf{a}}$ 可以解释为向量 $(r, \mathbf{a}) \in \mathbb{Z}^n$ 被划分为 d个部分的划分数，其中每个加数都属于 $I^{(1)}_{k\ n}$，。这类多部分划分的计数是代数组合学中一个经典但困难的问题，通常通过生成函数理论来处理，参见 [Stu95]。要求各加数必须属于 $I^{(1)}_{k\ n}$，则为获得显式公式增添了额外障碍。(2) 多项式环不变量理论中使用的标准生成函数是等变 Hilbert-Poincar´e 级数，例如参见 [Sta79] 或 [NS02, §3]。最著名且具体的结果是 Molien 公式，它将序列 $\{\mu_{d,(h_1,\mathbf{h})}\}_{d=0}^{\infty}$ 的生成函数表示为有理函数之和。将其应用于我们的情形，即使 $\chi_{(h_1,\mathbf{h})}$ 是平凡表示，也不会产生比命题 8 中所得公式更具启发性的公式。(3) 对于另一类相关的形式幂级数，我们提到 Ehrhart 理论 [MS05, §12], ，它处理凸多面体的膨胀中格点的计数问题。在我们的语境中，这些膨胀对应于集合 $d \cdot I^{(1)}_{k\ n}$，但按照集合 $J^{(d)}_{h_1}$,h 进行所需的分层在

命题 8 需要 Erhart 理论模 k 的一个版本。还值得一提的是，这与多面体的所谓整数分解性质有关，参见 [CHHH14]。无论如何，我们认为，在本文的背景下，三类生成函数之间可能存在的相互作用值得在未来的工作中加以探索。

(4) 多项式环 S 的不定元 $z_{r,\mathbf{a}}$ 由 $I_{k\,n}^{(1)}$ 的元素进行索引，这可以解释为 S 关于阿贝尔群 $\mathbb{Z}^{n+1}$ 的多重分次：单项式$\mathfrak{m} = z_{r_1,\mathbf{a}_1}\cdots z_{r_d,\mathbf{a}_d}$ 的多重次数为 $\mathrm{mdeg}(\mathfrak{m}) = (d, \sum r_i, \sum \mathbf{a}_i) \in \mathbb{Z}\times d\cdot I_k^{(1)}$，$_n \subset \mathbb{Z}^{n+1}$。因此，式(14) 的分解通过赋值 $(d,r,\mathbf{a}) \mapsto \dim_k S_{d,r,\mathbf{a}}$ 产生了一个多重分次希尔伯特函数，它是多项式环的经典希尔伯特函数 $d \mapsto \binom{d+g-1}{d}$ 的细化。对于 S, $S_{F_k,n}$ 的次数 d 部分以及 $\ker\phi$ 作为 KH-模的不可约直和项的重数，也可以作出类似的解释。这引向不变量希尔伯特概形和多重分次希尔伯特概形的理论，分别参见 [Bri13] 和 [HS04]；一个自然的问题是，为参数化具有上述多重分次希尔伯特函数的理想的希尔伯特概形寻找定义方程。

References

[AFP+19] Marian Aprodu、Gavril Farkas、S.tefan Papadima、Claudiu Raicu 和Jerzy Weyman。Koszul模与 Green猜想。 *Invent. Math.*，218(3):657–720，2019年。[APP+22] Ayah Almousa、Michael Perlman、Alexandra Pevzner、Victor Reiner 和 KellerVandeBogert。Veronese环上的等变自由消解。 *arXiv preprint:2210.16342*，2022年。[Bak07] H.F. Baker。 *An introduction to the theory of multiply periodic functions*。剑桥大学出版社，1907年。[BC08] Frauke M. Bleher、Ted Chinburg和 Aristides Kontogeorgis。齐次坐标环的伽罗瓦结构。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，360 12 6269( ): –6301，2008年。[BCK20] Frauke M. Bleher、Ted Chinburg和AristidesKontogeorgis。曲线全纯微分的伽罗瓦结构。 *J. Number Theory*，216:1–68，2020年。[Bri13] Michel Brion。不变希尔伯特概形。载于 *Handbook of moduli. Vol. I*， *Adv. Lect. Math. (ALM)*第 24 卷，页码64–117。Int. Press, Somerville，马萨诸塞州，2013年。[CC15] WouterCastryck和Filip Cools。非退化曲线典范理想的一组最小生成元。*J. Aust. Math. Soc.*，98(3):311–323，2015年。[CGAHR08] Angel Carocca、V ́ıctor Gonz ́alez-Aguilera、Rub ́enA.Hidalgo和Rub ́ıE. Rodr ́ıguez。广义洪贝特曲线。*Israel J. Math.*，164:165–192，2008年。[CHHH14] David A. Cox、Christian Haase、TakayukiHibi和 Akihiro Higashitani。膨胀多面体的整数分解性质。 *Electron. J. Combin.*，21(4):论文 4.28，17，2014年。[Chi94] TedChinburg。概形驯分歧覆盖的德拉姆上同调的伽罗瓦结构。 *Ann. of Math. (2)*，139(2):443–490，1994年。[CHQ16] Mariela Carvacho、Rub ́en J. Quispe。广义费马曲线的雅可比簇。，( ): –。[CKK23] Hara Charalambous、Kostas Karagiannis 和 Aristides Kontogeorgis。Artin-Schreier-Kummer-Witt 曲线族的相对典范理想。即将发表于 *in Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，2023年。[CKKK22] HaraCharalambous、Kostas Karagiannis、Sotiris Karanikolopoulos和Aristides Kontogeorgis。代数曲线典范环的等变希尔伯特级数的计算方面。载于 *Computer algebra in scientificcomputing*， *Lecture Notes in Comput. Sci.*第 13366卷，页码 83–102。施普林格，Cham， [2022] ©2022年。[CKKK23] HaraCharalambous、Kostas Karagiannis、Sotiris Karanikolopoulos和AristidesKontogeorgis。勘误：“费马曲线典范环的等变希尔伯特级数” [33 2022 1071 1101] *Indag. Math.* Indag. Math. ( ) - . , *(N.S.)* 34 1 198, 2023 ():。[CWH34] C. Chevalley、A. Weil和 E.Hecke。 ¨关于自同构下函数域积分 1 类的行为。¨。 *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*，10(1):358–361，1934年。[Dok21] Tim Dokchitser。离散赋值环上的曲线模型。 *Duke Math. J.*，170(11):2519–2574，2021年。[EFW11] David Eisenbud、Gunnar Fløystad和 Jerzy Weyman。等变纯自由解的存在性。 *Ann.* , ( ):– 。[Eis05] *Inst. Fourier (Grenoble)* 61 3 905 926, 2011 DavidEisenbud。 *The geometry of syzygies*， *Graduate Texts in Mathematics*第229 卷。施普林格出版社，纽约，2005年。交换代数与代数几何进阶课程。[EL80] G.Ellingsrud 和K. Lønsted。有限约化群的等变勒夫谢茨公式。 *Math. Ann.*，251 3253( ): –261，1980年。[Far17] Gavril Farkas。代数曲线几syzygy 研究进展。载于 *Moduli of curves* 21 *Lect. Notes Unione* , 第 卷，页码 –。施 *Mat. Ital.* 107 138 2017 普林格，Cham，。[Gal22] FedericoGaletto。自由解上的有限群特征。 *J. Symbolic Comput.*，113:29–38，2022年。[GDHL09] GabinoGonz ́alez-Diez、Rub ́enA.Hidalgo 和Maximiliano Leyton。广义费马曲线。 *J. Algebra*，321 616432009年 (): –1660，3 月15 日。[Hec28] E.Hecke。 ¨ *Abh. Math. Sem. Univ.* 关于椭圆模函数理论 *Hamburg* 6 1 235 257, 1928 中的一个基本问题。，( ): – 。

[Hid20] Rub´en A. Hidalgo. 广义费马曲线的全纯微分。 *J. Number Theory*，217:78–101，2020年。[HKLAP17] Rub´en A. Hidalgo、Aristides Kontogeorgis、Maximiliano Leyton-´Alvarez 和 Panagiotis Paramantzoglou。广义费马曲线的自同构。 *J. Pure Appl. Algebra*，221(9):2312–2337，2017年。[HS04] Mark Haiman 和 Bernd Sturmfels。多重分次希尔伯特概形。 *J. Algebraic Geom.*，13(4):725–769，2004年。[Hum94] Georges Humbert。论一个显著的圆锥曲线复形及三阶曲面。´ème ord *Journal del'École Polytechnique*，64:123–149，1894年。[Iha86] Yasutaka Ihara。有限生成辫群、伽罗瓦表示与复乘法。 *Ann. of Math. (2)*，123 1 43( ): –106，1986年。[Kar12] Sotiris Karanikolopoulos。正特征下的全纯多重微分。 *Math. Nachr.*，285(7):852– 877，2012年。[K¨oc04] Bernhard K¨ock。弱分歧曲线覆盖的扎里斯基上同调的伽罗瓦结构。 *Amer. J. Math.*，126 5 1085( ): –1107，2004年。[KP20] Aristides Kontogeorgis 和 Panagiotis Paramantzoglou。广义费马曲线同调上的伽罗瓦作用。 *Q. J. Math.*，71(4):1377–1417，2020年。[KTT21] Aristides Kontogeorgis、Alexios Terezakis 和 Ioannis Tsouknidas。自同构与典范理想。*Mediterr. J. Math.*，18(6):论文编号 261，15，2021年。[MR22] Satoshi Murai 和 Claudiu Raicu。

$\mathfrak{S}_n$ *J. Lond.* -不变单项式 *Math. Soc. (2)* 105 3 1974 2010, 2022

理想的等变 Hochster 公式。，( ): – 。[MS05] Ezra Miller 和 Bernd Sturmfels。

Combinatorial commutative algebra 227 *Graduate Texts in Mathe-*，第 卷，。 *matics* 2005

施普林格出版社，纽约，。[Mur20] Satoshi Murai。由变量置换固定的单项式理想的 Betti 表。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，373 10 7087 7107，2020( ): – 。[NS02] Mara D. Neusel 和 Larry Smith。

Invariant theory of finite groups 94 *Mathematical Surveys and*，第 卷，。 *Monographs* 2002

美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，。[Obu17] Andrew Obus。Oort 猜想的推广。 *Comment. Math. Helv.*，92(3):551–620，2017年。[OW14] Andrew Obus 和 Stefan Wewers。循环扩张与局部提升问题。 *Ann. of Math. (2)*，180(1):233– 284，2014年。[Pet25] K. Petri。 ¨论特殊曲线。I。 *Math. Ann.*，93(1):182–209，1925年。[Pop14] Florian Pop。关于曲线覆盖提升的 Oort 猜想。 *Ann. of Math. (2)*，180(1):285–322，2014年。[Sch91] Frank-Olaf Schreyer。典范曲线 syzygy 的标准基方法。 *J. Reine Angew. Math.*，421:83– 123，1991年。[SD73] B. Saint-Donat。论 Petri 对通过典范曲线的二次曲面线性系的分析。 *Math. Ann.*，206 157 175，1973 : – 。[Sta79] Richard P. Stanley。有限群的不变量及其在组合学中的应用。

Bull. Amer. Math. Soc.，( ): – 。[*(N.S.)* 1 3 475 511, 1979

Stu95] Bernd Sturmfels。论向量分拆函数。 *J. Combin. Theory Ser. A*，72(2):302–309，1995年。[Stu96] Bernd Sturmfels。 *Gröbner bases and convex polytopes*，第 8 卷， *University Lecture Series*。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996年。[TN21] Yerko Torres-Nova。广义费马曲线的周期。 *J. Pure Appl. Algebra*，225 106465，14，2021 1( ):论文编号 。[Voi02] Claire Voisin。关于位于

$K3$ *J. Eur. Math.* 曲面上的偶亏 *Soc. (JEMS)* 4 4 363 404, 2002

格曲线的 Green 一般 syzygy 猜想。，( ): – 。[Voi05] Claire Voisin。关于奇亏格一般曲线的 Green 典范 syzygy 猜想。 *Compos. Math.*，141(5):1163– 1190，2005年。

School of Mathematics, University of Manchester, Oxford Road Manchester M13 9PL United Kingdom
Email address: konstantinos.karagiannis@manchester.ac.uk