arXiv:2304.03005v1 [math.DG] 6 Apr 2023

芬斯勒流形上的里奇流

B. Bidabad*和 M. K. Sedaghat

摘要

本文研究芬斯勒流形上里奇流解的短时间存在性与唯一性。本文的主要结果是若干定理，证明了 n 维芬斯勒流形上流解的短时间存在性，以及各向同性芬斯勒流形上解的唯一性。文中还给出了两个例子来说明这些结果。

关键词：里奇流、里奇-德图克流、抛物型微分方程、芬斯勒空间。美国数学学会数学主题分类：53C60，53B40。

1 引言

几何流的主要目标之一，是通过将一般的初始度量变形为典范几何结构，构造出典范几何结构。里奇流理论及其应用已成为数学中发展迅速的一个分支，其中最引人注目的成就是 G. Perelman 对 Thurston几何化猜想的证明。Hamilton里奇流于1982年提出，是一种在物理学和现实问题中有诸多应用的几何流。里奇流通过共形变形，使黎曼度量趋向其诱导的曲率，从而使曲率张量按照一组扩散方程演化，将曲率均匀地分布到整个流形上。Hamilton证明，在闭流形上，里奇流在足够短的时间内存在唯一解；而对于具有初始

*通讯作者：bidabad@aut.ac.ir；behroz.bidabad@math.univ-toulouse.fr

正 Ricci 曲率度量的紧三维流形，里奇流在重新缩放以保持体积恒定后，会收敛到一个具有正恒定截面曲率的度量，从而证明该流形与三维球面 $\mathbb{S}^3$ 或三维球面的一个线性等距变换群商空间 $\mathbb{S}^3$ 微分同胚。

里奇流在几何学和物理学中展现出巨大的潜力，解决了许多难以通过其他方法处理的问题。在离散几何中，离散里奇流是计算一般曲面上具有指定高斯曲率的度量的有力工具。离散里奇流的相关应用包括计算机图形学和医学成像中的全局共形参数化、曲面匹配以及流形样条。

在芬斯勒几何这一黎曼几何的自然推广中，构造芬斯勒里奇流的问题引发了若干关于几何对象与物理对象及其最优构型相容性的新概念性和基础性问题。研究任何演化偏微分方程组的一个基本步骤，是证明解的短时间存在性和唯一性。一些合作研究考察了沿里奇流演化的一族芬斯勒度量，证明芬斯勒里奇流在短时间内存在，并收敛到一个极限度量（见 [9]）。S. Lakzian 进一步将芬斯勒–里奇流应用于热方程的 Harnack 估计，使用了 S. Ohta 和 K. Sturm 在 [17] 中提出的工具。

本文作者在 [6], 中证明了芬斯勒曲面上里奇流解的存在性与唯一性，扩展了 R. S. Hamilton 关于黎曼曲面的工作 [15]。这些结果在广义相对论中有诸多应用，此处不一一列举。然而，在维数为 $n > 2$时，解的唯一性不再成立， [8]。在 [7], 中还进一步证明，芬斯勒里奇流在有限时间内保持约化 hh-曲率的正性，且里奇标量的演化满足一个抛物型方程。此外，若初始芬斯勒度量具有正旗曲率，则只要解存在，旗曲率和里奇标量便始终为正。

本文研究闭 n维芬斯勒流形上的里奇流，其中 $n > 2$，并证明了解的短时间存在性。直观而言，由于里奇流方程组仅具有弱抛物性，无法使用抛物型方程的标准理论来证明其短时间存在性与唯一性。按照 D. DeTurck 在黎曼空间中提出的步骤 [13], ，我们通过方程（32）引入芬斯勒里奇-德图克流，并研究其解。随后，我们利用适当的微分同胚拉回里奇-德图克流的解，从而得到原里奇流的一个解，并证明短时间解的存在性。

Th定理1.设 M 是一个紧致芬斯勒流形。给定任意初始芬斯勒结构 F_0,

存在一个实数 $T>0$ 和一个光滑单参数族的芬斯勒结构 $\tilde{F}(t)$，对于所有 $t\in[0,T)$，使得 $F(t)$ 是芬斯勒–里奇-德特克流的解，并且 $F(0)=F_0$。

然后，通过适当的微分同胚对里奇-德图克流的解进行拉回，即可得到原里奇流的解。这一结果导出

定理 2. 设 M 是一个紧致芬斯勒流形。给定任意初始芬斯勒结构 F_0，存在一个实数 $T>0$ 和一个由芬斯勒结构组成的光滑单参数族 $F(t)$，对所有 $t\in[0,T)$，使得 $F(t)$ 是芬斯勒里奇流的一个解，且 $F(0)=F_0$。

通过要求芬斯勒流形具有各向同性，可以证明里奇流解的唯一性。

定理 3. 设 M 是一个紧致各向同性芬斯勒流形。给定任意初始芬斯勒结构 F_0，存在一个实数 $T>0$ 和一个由芬斯勒结构组成的光滑单参数族 $F(t)$，对所有 $t\in[0,T)$，使得 $F(t)$ 是芬斯勒里奇流的唯一解，且 $F(0)=F_0$。

2 预备知识与记号

2.1 Chern联络；一种整体方法

设 M 是一个实 n 维光滑流形，并记 TM 为切向量切丛，$\pi: TM_0\longrightarrow M$ 为非零切向量丛，$\pi^*TM\longrightarrow TM_0$ 为拉回切丛。设 F 是 TM_0 上的一个芬斯勒结构，g 为其相关的芬斯勒度量 [3]。本文将芬斯勒流形 记为有序对 (M,F)。TM_0 中的任意一点记为 $z=(x,y)$，其中 $x=\pi z\in M$ 且 $y\in T_xM$。

令 TTM_0 表示 TM_0 的切丛，ρ 表示典范线性映射 $\rho: TTM_0\longrightarrow\pi^*TM$，其中 $\rho=\pi_*$。对于所有 $z\in TM_0$，V_zTM 是 z 处所有竖直向量的集合，也就是与经过 z 的纤维相切的向量集合。考虑分解 $TTM_0=HTM\oplus VTM$，它允许将向量场 $X\in\mathcal{X}(TM_0)$ 唯一表示为水平部分与竖直部分之和，即 $\hat{X}=H\hat{X}+V\hat{X}$。相应的基在此记为 $\{\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial y^i}\}$，其中 $\frac{\delta}{\delta x^i}:=\frac{\partial}{\partial x^i}-N_i^j\frac{\partial}{\partial y^j}$，$N_i^j=\frac{1}{2}\frac{\partial G^j}{\partial y^i}$ 和 G^i 是由 $G^i=\frac{1}{4}g^{ih}(\frac{\partial^2F^2}{\partial y^h\partial x^j}y^j-\frac{\partial F^2}{\partial x^h})$ 定义的喷射系数。形式克里斯托费尔符号记为 $\gamma^i_{jk}=\frac{1}{2}g^{ih}(\partial_jg_{hk}+\partial_kg_{jh}-\partial_hg_{jk})$，其中 $\partial_k=\frac{\partial}{\partial x^k}$。对偶基记为 $\{dx^i,\delta y^i\}$，其中 $\delta y^i:=dy^i+N^i_jdx^j$。将 Chern 联络的整体表示记为 $\nabla: \mathcal{X}(TM_0)\times\Gamma(\pi^*TM)\longrightarrow$。

$\Gamma(\pi^*TM)$。考虑线性映射 μ: $TTM_0 \longrightarrow \pi^*TM$，其定义为 $\mu(\hat{X}) = \nabla_{\hat{X}}\mathsf{y}$，其中，$\hat{X} \in TTM_0$和 $\mathsf{y} = y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$是 π^*TM的典范截面。

在这些基下，Chern联络的联络1-形式为 $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k$其中，$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{ih}$（$\delta_j g_{hk} + \delta_k g_{jh} - \delta_h g_{jk}$）和 $\delta_k = \frac{\delta}{\delta x^k}$。下文中，$TM_0$ 上的所有向量场 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 均加上帽号，分别记为 X、Y 和 Z；除非另有说明，相应的 π^*TM 截面 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 分别记为 $X = \rho(X)$、$Y = \rho(Y)$ 和 $Z = \rho(Z)$。Chern联络的无挠性和近似度量相容性表示为

$$\nabla_{\hat{X}}Y - \nabla_{\hat{Y}}X = \rho[\hat{X}, \hat{Y}], \tag{1}$$

$$(\nabla_{\hat{Z}}g)(X, Y) = 2C(\mu(\hat{Z}), X, Y), \tag{2}$$

其中，C 是 Cartan张量，其分量为 $C_{ijk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$. 。在 TM 的局部坐标下，π^*TM上任意（1, 2）张量场 S的 Chern 水平和垂直协变导数，在 TM上的分量为 $S^i_{jk}(x,\ y)$，可表示为

$$\nabla_l S^i_{jk} := \delta_l S^i_{jk} - S^i_{sk}\Gamma^s_{jl} - S^i_{js}\Gamma^s_{kl} + S^s_{jk}\Gamma^i_{sl},$$
$$\dot{\nabla}_l S^i_{jk} := \dot{\partial}_l S^i_{jk},$$

其中，$\nabla_l := \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^l}}$ 且 $\dot{\nabla}_l := \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^l}}$。Chern 联络的水平度量相容性在局部坐标下可表示为 $\nabla_l g_{jk} = 0$，见 [3, 第 45]页。局部 *Chern*hh-曲率 张量定义为

$$R^{\ i}_{j\ kl} = \delta_k\Gamma^i_{jl} - \delta_l\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{hk}\Gamma^h_{jl} - \Gamma^i_{hl}\Gamma^h_{jk}, \tag{3}$$

参见[3, 第 52] 页。在各向同性情形下，收缩的 hh-曲率张量 $R^{\ i}_{j\ il}$ 在两个指标 j 和 l上是对称的。事实上，通过各向同性情形下Cartan联络中 $R^{\ i}_{j\ il}$ 的对称性，参见 [1, 第 152]，页，以及 Cartan 与 Chern hh- 曲率张量之间的关系，可以看出，在各向同性情形下，$R^{\ i}_{j\ il}$ 在 j 和 l上是对称的。更直观地说，它可以是一个对称二次型的一部分。

约化的 hh-曲率张量是一种与联络无关的张量场，某些作者也将其称为黎曼曲率。在 TM的局部坐标中，约化的 hh-曲率张量的分量为 $R^i_{\ k} := \frac{1}{F^2}y^j R^{\ i}_{j\ km}y^m$，它们完全用喷射系数 G^i 的 x 和 y 阶导数表示如下

$$R^i_{\ k} := \frac{1}{F^2}(2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k}y^j + 2G^j\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}), \tag{4}$$

参见[3,第 66]页。

设（x, y）是 TM 的一个元素，并且 P（y, X）$\subset T_x$（M）是由 T_x（M）中的向量 y 和 X 张成的一个二维平面。那么，相对于该平面的旗曲率 K（x, y, X）

点 $x \in M$ 处的 P（y, X）定义为

$$K(x, y, X) := \frac{g(R(X, y)y, X)}{g(X, X)g(y, y) - g(X, y)^2},$$

其中， $R(X, y)y$ 是 hh-曲率张量。若 K 与 X无关，则称芬斯勒流形（M, F）为各向同性流形或标量曲率空间。若 K 不依赖于 x 或 y，则称该芬斯勒流形具有常曲率。

2.2 芬斯勒度量的李导数

任意芬斯勒（0, 2）张量场 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{jk}(x, y)dx^j \otimes dx^k$ 在$\otimes^2\pi^*TM$上关于任意向量场$\hat{V}$（定义在 TM_0 上）的李导数为

$$(\mathcal{L}_{\hat{V}}\mathcal{T})(X, Y) = \hat{V}(\mathcal{T}(X, Y)) - \mathcal{T}(\rho[\hat{V}, \hat{X}], Y) - \mathcal{T}(X, \rho[\hat{V}, \hat{Y}]),$$

其中， $\rho(\hat{X}) = X$， $\rho(\hat{Y}) = Y$以及 $\hat{X}$， $\hat{Y} \in T_zTM_0$，参见 [5]。沿任意向量场 g 的方向，芬斯勒度量$\hat{V}$ 在 TM_0 上的李导数为

$$(\mathcal{L}_{\hat{V}}g)(X, Y) = \hat{V}(g(X, Y)) - g(\rho[\hat{V}, \hat{X}], Y) - g(X, \rho[\hat{V}, \hat{Y}]).$$

利用由（1）定义的 Chern联络的无挠性，Finsler度量 g 变为

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\hat{V}}g)(X, Y) &= \hat{V}(g(X, Y)) - g(\nabla_{\hat{V}}X - \nabla_{\hat{X}}V, Y) - g(X, \nabla_{\hat{V}}Y - \nabla_{\hat{Y}}V)\\ &= \hat{V}(g(X, Y)) - g(\nabla_{\hat{V}}X, Y) + g(\nabla_{\hat{X}}V, Y)\\ &\quad -g(X, \nabla_{\hat{V}}Y) + g(X, \nabla_{\hat{Y}}V).\end{aligned} \tag{5}$$

根据由（ g定义的 Chern联络的几乎 2）相容性，我们有

$$2C(\mu(\hat{V}), X, Y) = (\nabla_{\hat{V}}g)(X, Y) = \hat{V}(g(X, Y)) - g(\nabla_{\hat{V}}X, Y) - g(X, \nabla_{\hat{V}}Y).$$

因此,

$$\hat{V}(g(X, Y)) = 2C(\mu(\hat{V}), X, Y) + g(\nabla_{\hat{V}}X, Y) + g(X, \nabla_{\hat{V}}Y). \tag{6}$$

将方程（6）代入（5），得到

$$(\mathcal{L}_{\hat{V}}g)(X, Y) = 2C(\mu(\hat{V}), X, Y) + g(\nabla_{\hat{X}}V, Y) + g(X, \nabla_{\hat{Y}}V). \tag{7}$$

将 X 和 Y替换为典范截面 $\mathbf{y} = y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 代入（7）中，我们得到

$$(\mathcal{L}_{\hat{V}}g)(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 2C(\mu(\hat{V}), \mathbf{y}, \mathbf{y}) + g(\nabla_{\hat{\mathbf{y}}}V, \mathbf{y}) + g(\mathbf{y}, \nabla_{\hat{\mathbf{y}}}V),$$

其中，$\hat{\mathbf{y}}=y^i\frac{\delta}{\delta x^i}$。利用 $C(\mu(\hat{V}),\ \mathbf{y},\ \mathbf{y})=0$，参见 [3, 第 23], 以及$g(\nabla_{\hat{\mathbf{y}}}V,\ \mathbf{y})$ 的对称性可得

$$(\mathcal{L}_{\hat{V}}g)(\mathbf{y},\mathbf{y})=2g(\mathbf{y},\nabla_{\hat{\mathbf{y}}}V), \tag{8}$$

其中，$V=v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$是 π^*TM的一个截面。在局部坐标中，上述方程可表示为

$$y^iy^j\mathcal{L}_{\hat{V}}g_{ij}=2y^iy^jg_{ik}\nabla_jv^k.$$

利用 $\nabla_jg_{ik}=0$，我们得到

$$y^iy^j\mathcal{L}_{\hat{V}}g_{ij}=2y^iy^j\nabla_jv_i, \tag{9}$$

其中，$v_i=g_{ik}v^k$。

2.3 在 SM上的几何设置

设(M,F)为一个芬斯勒流形，SM为 TM_0在以下等价关系下的商：当且仅当 y、$\tilde{y}$ 彼此为正倍数时，$(x,y)\sim(x,\tilde{y})$。换言之，SM 是所有方向或射线组成的丛，称为（射影）球丛。M上的局部坐标 x^1，...，x^n 通过展开式 $y=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$在每个纤维 T_xM上诱导出全局坐标 y^1，...，y^n。因此，$(x^i;\ y^i)$是 SM上的一个坐标系，其中坐标 y^i 被视为射影空间中的齐次坐标。利用典范投影 $p:\ SM\longrightarrow M$，可以将切丛 TM拉回到 p^*TM，后者是在 SM这个（$2n-1$）流形上纤维维数为 n 的向量丛。向量丛 p^*TM具有一个全局截面 $l:=\frac{y^i}{F}(y)\frac{\partial}{\partial x^i}$，以及一个自然的黎曼度量，我们记为 $g:=g_{ij}(x,y)dx^i\otimes dx^j$。

设 $\{e_a=u_a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 是 p^*TM 上的一个 g-正交标架，满足 $e_n:=l$，且 $\{\omega^a=v_i^adx^i\}$是其余标架；因此 $\omega^a(e_b)=\delta_b^a$。显然，$\omega^n=\frac{\partial F}{\partial y^i}dx^i$ 是 p^*T^*M 的一个整体截面。此外，我们有 $\frac{\partial}{\partial x^i}=v_i^ae_a$ 和 $dx^i=u_a^i\omega^a$。(u_a^i) 与 (v_i^a) 之间的基本关系由 $v_i^au_b^i=\delta_b^a$ 和 $u_a^iv_j^a=\delta_j^i$ 给出。为方便起见，我们也将 e_a 和 ω^a 分别视为 SM 上的局部向量场和 1-形式。所有与 p^*TM 相关的指标均利用度量 g 升降，见 [4]。令

$$\hat{e}_a=u_a^i\tfrac{\delta}{\delta x^i},\quad \hat{e}_{n+a}=u_a^iF\tfrac{\partial}{\partial y^i}.$$
$$\omega^a=v_i^adx^i,\quad \omega^{n+a}=v_i^a\tfrac{\delta y^i}{F}.$$

此外，请回忆一下，拉丁指标的取值范围为1，...，n，而希腊指标的取值范围为1到 $n-1$。可以证明，$\{\hat{e}_a、\hat{e}_{n+\alpha}\}$ 是切丛TSM的局部基，而 $\{\omega^a,\omega^{n+\alpha}\}$ 是余切丛 T^*SM 的局部基。SM上被所有 $\{\omega^{n+\alpha}\}$'湮灭的切向量构成 TSM的水平子丛 HSM。HSM的纤维是 n 维的。另一方面，设 $VSM:=\cup_{x\in M}T(S_xM)$

是 TSM的垂直子丛；其纤维是 $n-1$维的。分解$TSM = HSM \oplus VSM$成立，因为 HSM和 VSM是直和项。球丛 $SM \subset TM$ 是一个（$2n-1$）维黎曼流形，配备了诱导的黎曼度量

$$\hat{g} := \delta_{ab}\omega^a \otimes \omega^b + \delta_{\alpha\beta}\omega^{n+\alpha} \otimes \omega^{n+\beta}.$$

特别地， HSM 和 VSM 关于$\hat{}g$正交。

2.4 可积性条件引理

这里，我们首先回顾，并非拉回丛各纤维上的所有黎曼度量都源自芬斯勒结构。事实上，任意对称正定的 (0, 2)-张量场 $g_{ij}(x, y)$都不一定来自芬斯勒结构 $F(x, y)$。直观地说，为了确保 $g_{ij}(x, y)$是芬斯勒结构的分量，关键的可积性判据是$(g_{ij})_{y^k} := \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$在三个指标 i、 j和 k 上全对称。事实上， $g_{ij}(x, y)$源自芬斯勒结构 $F(x, y)$，当且仅当$(g_{ij})_{y^k}$的三个指标全对称，见 [2, 第 56]页。$(g_{ij})_{y^k}$ 在三个指标 i、 j和 k 上对称，在文献中称为可积性条件。此外，我们必须确保在里奇流演化的每一步都满足可积性判据。为此，我们考虑如下的一般演化方程

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \omega(t), \quad g(0) := g_0, \tag{10}$$

其中， $\omega(t) := \omega(t, x, y)$是 π^*TM 上关于 y 的零次齐次对称 (0, 2)-张量族，并且 $(\omega_{ij})_{y_k} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial y^k}$ 在三个指标 i、 j 和 k上全对称。下面的引理建立了可积性条件，另见 [9, p. 749]。

引理 2.1。 设 $g(t)$ 是演化方程（*10*）的一个解。存在一族芬斯勒结构 $F(t)$ 在 TM上，使得，

$$g_{ij}(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(t)}{\partial y^i \partial y^j}. \tag{11}$$

证明。 设 M 是一个紧微分流形， $F(t)$ 是 TM_0上的一族光滑单参数芬斯勒结构，且 $g(t)$ 是 $F(t$的 Hessian矩阵，它在 π^*TM 上对每个 t都定义一个内积。设 $g(t)$ 是演化方程（10）的一个解。我们有

$$g(t) = g(0) + \int_0^t \omega(\tau)d\tau, \qquad \forall \tau \in [0, t). \tag{12}$$

我们证明度量 $g(t)$ 满足可积性条件，或者等价地，存在一个 $F(t$上的芬斯勒结构 TM_0 满足（11）。为此，我们将 g_{ij}乘以 y^i，并在（ y^j 12）中，

$$y^i y^j g_{ij}(t) = y^i y^j g_{ij}(0) + \int_0^t y^i y^j \omega_{ij}(\tau) d\tau.$$

由初始条件 $y^i y^j g_{ij}(0) = F^2(0)$，可得

$$y^i y^j g_{ij}(t) = F^2(0) + \int_0^t y^i y^j \omega_{ij}(\tau) d\tau. \tag{13}$$

根据 g_{ij} 的正定性假设，令 $F = (y^i y^j g_{ij})^{\frac{1}{2}}$。对（13）作两次垂直求导，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^k \partial y^l} = g_{kl}(0) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial y^k \partial y^l}(y^i y^j \omega_{ij}(\tau)) d\tau. \tag{14}$$

另一方面，通过直接计算可得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^k \partial y^l}(y^i y^j \omega_{ij}(\tau)) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega_{ij}(\tau)}{\partial y^k \partial y^l} y^i y^j + \Big(\frac{\partial \omega_{ik}(\tau)}{\partial y^l} - \frac{\partial \omega_{il}(\tau)}{\partial y^k}\Big) y^i + \omega_{kl}(\tau), \tag{15}$$

对所有 $\tau \in [0, t)$。由于 $(\omega_{ij})_{y_k}$ 关于三个指标 i、j 和 k 完全对称，我们得到 in

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega_{ij}(\tau)}{\partial y^k \partial y^l} y^i y^j = 0, \quad y^i \frac{\partial \omega_{ik}(\tau)}{\partial y^l} = 0, \quad y^i \frac{\partial \omega_{il}(\tau)}{\partial y^k} = 0.$$

因此，（15）化为

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^k \partial y^l}(y^i y^j \omega_{ij}(\tau)) = \omega_{kl}(\tau), \tag{16}$$

对所有 $\tau \in [0, t)$。最后，将（16）代入（14），得到

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^k \partial y^l} = g_{kl}(0) + \int_o^t \omega_{kl}(\tau) d\tau = g_{kl}.$$

因此，拉回丛纤维上的每个 $g_{ij}(t)$ 都源自一个芬斯勒结构，从而完成证明。

□

注 2.1. 设 $g(t)$是演化方程 (10) 的一个解。对 $g_{ij}(t)$ 的可积性验证也可以更简单地进行。为验证$(g_{ij})_{y_k} = (g_{ik})_{y_j}$，考虑$(g_{ij})_{y_k} - (g_{ik})_{y_j}$，对两项分别取偏导数并将其代入演化方程 (10)。因此，由 $(\omega_{ij})_{y_k}$ 在 i、j 和 k 中的完全对称性，我们有

$$\partial_t\Big((g_{ij})_{y_k} - (g_{ik})_{y_j}\Big) = (w_{ij})_{y_k} - (w_{ik})_{y_j} = 0.$$

因此，$(g_{ij})_{y_k} - (g_{ik})_{y_j}$ 不依赖于 t。在 $t = 0$处，$g_{ij}(0)$是初始数据 F_0的基本张量，因此$(g_{ij})_{y_k} - (g_{ik})_{y_j} = 0$ 在 $t = 0$处成立。对所有 t，同样如此。

3 SM上的半线性抛物方程

回顾一下，拟线性系统是一个偏微分方程组，其中主阶项的导数仅线性出现，且系数可以依赖于低阶项的导数。如果该系统是拟线性的，且主阶项的系数仅依赖于自变量而不依赖于解，则称其为半线性系统，参见[18, 第 45] 页。设 M 为一个 n维光滑流形，并且$u:\ M\longrightarrow\mathbb{R}$ 是定义在 M上的光滑函数。一个半线性严格抛物型方程是具有如下形式的偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^j}+h(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x^i}),$$

其中，a^{ij} 和 h 是 M 上的光滑函数，并且对于某个常数 $\lambda>0$ ，我们有抛物型假设

$$a^{ij}\xi_i\xi_j\geq\lambda\parallel\xi\parallel^2,\quad 0\neq\xi\in\chi(M),$$

也就是说，$A=(a^{ij})_{2\times 2}$ 的所有特征值均为正，或者等价地，A 是正定的。

定义3.1.设 M 是一个 n 维光滑流形，且 ϕ: $SM\longrightarrow\mathbb{R}$ 是球丛 SM 上的光滑函数。考虑 SM 上如下的严格抛物型半线性方程;

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=G^{AB}(x,y,t)\hat{e}_A\hat{e}_B\phi+h(x,y,t,\rho,\hat{e}_A\phi),\qquad A,B=1,2,...,(2n-1),$$

其中，$\hat{e}_A$ 是切丛 TSM 的局部标架，而SM表示偏导数。这里，G^{AB}和 h是 SM上的光滑函数，并且 $G=(G^{AB})$是正定的。

更准确地说，SM 上的严格抛物型半线性系统可写成以下形式。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t}=&p^{ab}(x,y,t)\hat{e}_a\hat{e}_b\phi+q^{\alpha\beta}(x,y,t)\hat{e}_{n+\alpha}\hat{e}_{n+\beta}\phi+m^{a\alpha}(x,y,t)\hat{e}_a\hat{e}_{n+\beta}\phi\\&+\text{lower order terms},\end{aligned}\tag{17}$$

其中，拉丁指标 a、b、.....和希腊指标 α、β、.....分别取值于 1，....., n 和 1，.....，$(n-1)$，而矩阵

$$G=\left(\begin{array}{c|c}P&\frac{1}{2}M\\\hline\frac{1}{2}M^t&Q\end{array}\right)_{(2n-1)\times(2n-1)},$$

其中为正定，$P=(p^{ab})_{n\times n},Q=(q^{\alpha\beta})_{(n-1)\times(n-1)},M=(m^{a\alpha})_{n\times(n-1)}$。

引理3.1. 设(M,F)是一个芬斯勒流形，且 $\phi: TM \longrightarrow \mathbb{R}$ 是切丛 TM 上的一个零次齐次光滑函数。半线性微分方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g^{ij}\frac{\delta^2\phi}{\delta x^i \delta x^j} + F^2 g^{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^i \partial y^j} + lower\ order\ terms, \tag{18}$$

是 SM上的严格抛物型方程。

证明。我们再次将 ϕ 在 SM 上的限制记为 ϕ。根据定义，我们有

$$\begin{aligned}
\hat{e}_a\phi &= u_a^i\frac{\delta\phi}{\delta x^i},\\
\hat{e}_b\hat{e}_a\phi &= u_a^i u_b^j\frac{\delta^2\phi}{\delta x^i\delta x^j} + \hat{e}_b(u_a^i)(\frac{\delta\phi}{\delta x^i}).
\end{aligned}$$

将上述方程两边同时乘以 g^{ab}，得到

$$\begin{aligned}
g^{ab}\hat{e}_b\hat{e}_a\phi &= g^{ab}u_a^i u_b^j\frac{\delta^2\phi}{\delta x^i\delta x^j} + g^{ab}\hat{e}_b(u_a^i)(\frac{\delta\phi}{\delta x^i})\\
&= g^{ij}\frac{\delta^2\phi}{\delta x^i\delta x^j} + g^{ab}\hat{e}_b(u_a^i)(\frac{\delta\phi}{\delta x^i}),
\end{aligned}$$

其中，$g_{ab} = g_{ij}u_a^i u_b^j$。记 $B^c := v_i^c g^{ab}\hat{e}_b(u_a^i)$，我们可以将关于$\hat{e}_a$的 $g^{ij}\frac{\delta^2\phi}{\delta x^i\delta x^j}$在 SM 上的表达式改写如下

$$g^{ab}\hat{e}_b\hat{e}_a\phi - B^c\hat{e}_c\phi = g^{ij}\frac{\delta^2\phi}{\delta x^i\delta x^j}. \tag{19}$$

根据定义，我们还有

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{n+\alpha}\phi &= Fu_\alpha^i\frac{\partial\phi}{\partial y^i},\\
\hat{e}_{n+\beta}\hat{e}_{n+\alpha}\phi &= \hat{e}_{n+\beta}(Fu_\alpha^i\frac{\partial\phi}{\partial y^i})\\
&= F^2u_\beta^j u_\alpha^i\frac{\partial^2\phi}{\partial y^j\partial y^i} + F(\hat{e}_{n+\beta}u_\alpha^i)(\frac{\partial\phi}{\partial y^i}) + Fu_\beta^j(\frac{\partial F}{\partial y^j})u_\alpha^i\frac{\partial\phi}{\partial y^i}.
\end{aligned}$$

利用$u_\beta^j\frac{\partial F}{\partial y^j} = 0$这一事实，参见 [1, 第 161], 我们有

$$\hat{e}_{n+\beta}\hat{e}_{n+\alpha}\phi = F^2u_\beta^j u_\alpha^i\frac{\partial^2\phi}{\partial y^j\partial y^i} + F(\hat{e}_{n+\beta}u_\alpha^i)(\frac{\partial\phi}{\partial y^i}).$$

两边乘以 $g^{\alpha\beta}$，并考虑到 $g^{\alpha\beta}u_\alpha^i u_\beta^j = g^{ij} - y^i y^j$，可得

$$g^{\alpha\beta}\hat{e}_{n+\beta}\hat{e}_{n+\alpha}\phi = F^2g^{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^j\partial y^i} + Fg^{\alpha\beta}(\hat{e}_{n+\beta}u_\alpha^i)\frac{\partial\phi}{\partial y^i},$$

其中， $g_{\alpha\beta}=g_{ij}u^i_\alpha u^j_\beta$。若记 $D^\gamma:=v^\gamma_i Fg^{\alpha\beta}\hat{e}_{n+\beta}u^i_\alpha$，则可将关于$\hat{e}_{n+\alpha}$的$F^2g^{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^j\partial y^i}$ 在 SM 上的表达式改写如下

$$g^{\alpha\beta}\hat{e}_{n+\beta}\hat{e}_{n+\alpha}\phi-D^\gamma\hat{e}_{n+\gamma}\phi=F^2g^{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^j\partial y^i}. \tag{20}$$

因此，主阶项 $g^{ij}\frac{\delta^2\phi}{\delta x^i\delta x^j}$和 $F^2g^{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^i\partial y^j}$分别变为 $g^{ab}\hat{e}_b\hat{e}_a\phi-B^c\hat{e}_c\phi$和 $g^{\alpha\beta}\hat{e}_{n+\beta}\hat{}$ $e_{n+\alpha}\phi-D^\gamma\hat{e}_{n+\gamma}\phi$在 SM上。另一方面，将式（18）中的低阶项用基 $\{\hat{e}_a,\ \hat{e}_{n+\alpha}\}$ 在 SM 上重写后，其阶数不变。因此，式（18）在 SM 上可写为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=g^{ab}\hat{e}_b\hat{e}_a\phi+g^{\alpha\beta}\hat{e}_{n+\beta}\hat{e}_{n+\alpha}\phi-B^c\hat{e}_c\phi-D^\gamma\hat{e}_{n+\gamma}\phi+\text{lower order terms}. \tag{21}$$

利用 g 为正定的事实，系数

$$G=\left(\begin{array}{c|c}g^{ab}&0\\\hline 0&g^{\alpha\beta}\end{array}\right)_{(2n-1)\times(2n-1)},$$

式（21）的主阶项在 SM上是正定的。因此，根据式（17），微分方程（21）在 SM上是半线性的严格抛物型方程。 □

4 在 SM 上定义一个算子和一个向量场

¯设 (M,F) 和 (N,F) 是两个 n 维芬斯勒流形，其对应的度量张量分别为 g 和 h。我们用上横线标记 N 上的几何对象。设 (x^i,y^i) 和 $(\bar{x}^i,\bar{y}^i)$ 分别是 TM和 TN 上的局部坐标系。考虑到 c 是 (M,F) 上的一条测地线， c 在 TM 上的自然提升为

$$\tilde{c}:t\in I\longrightarrow\tilde{c}(t)=(x^i(t),\frac{dx^i}{dt}(t))\in TM.$$

众所周知， $\tilde{c}$是 TM上的一条水平曲线，也就是说，其切向量场是一个水平向量场，其分量为 $\dot{\tilde{c}}(t)=\frac{dx^i}{dt}\frac{\delta}{\delta x^i}\in HTM$。考虑切丛 TM与 TN之间的一个微分同胚 φ，使得 $\bar{c}(t):=(\varphi\circ\tilde{c})(t)$是 TN上的一条水平曲线。

$$\begin{aligned}&\varphi:TM\longrightarrow TN,\\&(x^i,y^i)\mapsto\varphi(x^i,y^i)=(\varphi^\alpha(x^i,y^i)),\end{aligned} \tag{22}$$

其中， φ的分量 φ^α为（x^i, y^i上的φ^α） =: （x^i, y^i上的φ^j $\varphi^{n+j}x^i, y^i$），拉丁指标 $i, j, ...$ 的取值范围为 $1, \cdots, n$，希腊指标 α的取值范围为 $1, \cdots, 2n$。在本节中， φ将 TM上的水平曲线映射为 TN上的水平曲线。

分别记 Chern联络在 (M, F) 和 $(N, \bar{F})$ 上的系数为 $\Gamma^i{}_{jk}$ 和 $\bar{\Gamma}^i{}_{jk}$。显然

$$\bar{\nabla}_{\dot{\bar{c}}}\dot{\bar{c}} = \bar{\nabla}_{\dot{\bar{c}}}\frac{d\bar{x}^j}{dt}\frac{\delta}{\delta\bar{x}^j} = \frac{d^2\bar{x}^j}{dt^2}\frac{\delta}{\delta\bar{x}^j} + \frac{d\bar{x}^j}{dt}\bar{\nabla}_{\dot{\bar{c}}}\frac{\delta}{\delta\bar{x}^j} = (\frac{d^2\bar{x}^i}{dt^2} + \frac{d\bar{x}^j}{dt}\frac{d\bar{x}^k}{dt}\bar{\Gamma}^i{}_{jk})\frac{\delta}{\delta\bar{x}^i}, \tag{23}$$

其中， $\dot{\bar{c}}(t) := \frac{d\bar{x}^j}{dt}\frac{\delta}{\delta\bar{x}^j}$ 是 TN 上水平曲线 $\bar{c}(t)$ 的切向量。另一方面

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{\delta\varphi^i}{\delta x^p}\frac{dx^p}{dt}, \quad \frac{d^2\bar{x}^i}{dt^2} = \frac{\delta^2\varphi^i}{\delta x^p\delta x^q}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt} + \frac{\delta\varphi^i}{\delta x^p}\frac{d^2x^p}{dt^2}.$$

将最后几个方程代入（23）可得

$$\bar{\nabla}_{\dot{\bar{c}}}\dot{\bar{c}} = (\frac{\delta^2\varphi^i}{\delta x^p\delta x^q}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt} + \frac{\delta\varphi^i}{\delta x^h}\frac{d^2x^h}{dt^2} + \bar{\Gamma}^i{}_{jk}\frac{\delta\varphi^j}{\delta x^p}\frac{\delta\varphi^k}{\delta x^q}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt})\frac{\delta}{\delta\bar{x}^i}, \tag{24}$$

wh这里，所有指标 i、 j、 p、 q、 $\cdots$ 的取值范围均为 1， $\cdots$， n。测地线 c 在 (M, F) 上，sat满足

$$\frac{d^2x^h}{dt^2} + \Gamma^h{}_{pq}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt} = 0. \tag{25}$$

将 $\frac{d^2x^h}{dt^2}$ 由最后一个方程代入（24）可得

$$\bar{\nabla}_{\dot{\bar{c}}}\dot{\bar{c}} = \frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}(\frac{\delta^2\varphi^i}{\delta x^p\delta x^q} - \frac{\delta\varphi^i}{\delta x^h}\Gamma^h{}_{pq} + \bar{\Gamma}^i{}_{jk}\frac{\delta\varphi^j}{\delta x^p}\frac{\delta\varphi^k}{\delta x^q})\frac{\delta}{\delta\bar{x}^i}.$$

接下来，令

$$A^i_{pq} := \frac{\delta^2\varphi^i}{\delta x^p\delta x^q} - \frac{\delta\varphi^i}{\delta x^h}\Gamma^h{}_{pq} + \bar{\Gamma}^i{}_{jk}\frac{\delta\varphi^j}{\delta x^p}\frac{\delta\varphi^k}{\delta x^q} + F^2\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial y^p\partial y^q}.$$

将 A^i_{pq} 与 g^{pq} 缩并得到以下算子

$$(\Phi_{g,h}\varphi)^i := g^{pq}(\frac{\delta^2\varphi^i}{\delta x^p\delta x^q} + F^2\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial y^p\partial y^q} - \frac{\delta\varphi^i}{\delta x^h}\Gamma^h{}_{pq} + \bar{\Gamma}^i{}_{jk}\frac{\delta\varphi^j}{\delta x^p}\frac{\delta\varphi^k}{\delta x^q}), \tag{26}$$

其中，$(\Phi_{g,h}\varphi)^i = g^{pq}A^i_{pq}$和 $i = 1$,..., n。对于大于“n”的指标，我们考虑以下算子。

$$(\Phi_{g,h}\varphi)^{n+i} := g^{pq}(\frac{\delta^2\varphi^{n+i}}{\delta x^p\delta x^q} + F^2\frac{\partial^2\varphi^{n+i}}{\partial y^p\partial y^q} + \frac{\partial\varphi^{n+i}}{\partial y^k}\frac{\delta N^k_q}{\delta x^p}), \tag{27}$$

其中， $i = 1, \cdots, n$。总结上述定义，可得

$$(\Phi_{g,h}\varphi)^\alpha = \begin{cases} (\Phi_{g,h}\varphi)^i & \alpha = i \\ (\Phi_{g,h}\varphi)^{n+i} & \alpha = n+i, \end{cases}$$

其中， $i=1$， ....., n。接下来，我们证明算子 $(\Phi_{g,\ h}\varphi)^{\ \alpha}$ 在 TM上的所有微分同胚作用下保持不变。我们在 SM上定义上述算子的方法，以及下面的关键引理，都是对[11]中所述内容的推广。

¯引理 4.1. 设 (M,F) 和 (N,F) 是两个 n 维芬斯勒流形，其对应的度量张量分别为 g 和 h。若 ψ 是从 TM 到其自身的微分同胚，则它保持算子 $(\Phi_{g,\ h}\varphi)^{\alpha}$ 不变，即

$$(\Phi_{\psi^*(g),h}\psi^*\varphi)^{\alpha}\ |_{(\tilde{x},\tilde{y})}=(\Phi_{g,h}\varphi)^{\alpha}\ |_{(x,y)},$$

其中， $\tilde{x}^i=\psi^*x^i$, $\tilde{y}^i=\psi^*y^i$ 和 $\alpha=1,\cdots,2n$。

证明。设 $(x^i,\ y^i)$ 和 $(\bar{x}^i,\ \bar{y}^i)$ 分别是 TM 和 TN上的两个局部坐标系。令 $\tilde{x}^i=\psi^*x^i$, $\tilde{y}^i=\psi^*y^i$，并考虑式（ φ （22）中给出的 $\alpha=i$ 微分同胚，我们有

$$\begin{aligned}(\Phi_{g,h}\varphi)^i\ |_{(x,y)}&=g^{pq}(x,y)\Big(\frac{\delta^2\varphi^i}{\delta x^p\delta x^q}(x,y)+F^2(x,y)\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial y^p\partial y^q}(x,y)-\frac{\delta\varphi^i}{\delta x^k}(x,y)\Gamma^k_{pq}(x,y)\\&\quad+\bar{\Gamma}^i_{jk}(\bar{x},\bar{y})\frac{\delta\varphi^j}{\delta x^p}(x,y)\frac{\delta\varphi^k}{\delta x^q}(x,y)\Big).\end{aligned}$$

利用微分同胚 ψ 和拉回 ψ^* ，我们有

$$\begin{aligned}(\Phi_{g,h}\varphi)^i\ |_{(x,y)}&=g^{pq}(\psi(\tilde{x},\tilde{y}))\Big(\frac{\delta^2\varphi^i}{\delta x^p\delta x^q}(\psi(\tilde{x},\tilde{y}))+F^2(\psi(\tilde{x},\tilde{y}))\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial y^p\partial y^q}(\psi(\tilde{x},\tilde{y}))\\&\quad-\frac{\delta\varphi^i}{\delta x^k}(\psi(\tilde{x},\tilde{y}))\Gamma^k_{pq}(\psi(\tilde{x},\tilde{y}))+\bar{\Gamma}^i_{jk}(\bar{x},\bar{y})\frac{\delta\varphi^j}{\delta x^p}(\psi(\tilde{x},\tilde{y}))\frac{\delta\varphi^k}{\delta x^q}(\psi(\tilde{x},\tilde{y}))\Big)\\&=(\psi^*g)^{pq}(\tilde{x},\tilde{y})\Big(\frac{\delta^2(\psi^*\varphi)^i}{\delta\tilde{x}^p\delta\tilde{x}^q}(\tilde{x},\tilde{y})+(\psi^*F^2)(\tilde{x},\tilde{y})\frac{\partial^2(\psi^*\varphi)^i}{\partial\tilde{y}^p\partial\tilde{y}^q}(\tilde{x},\tilde{y})\\&\quad-\frac{\delta(\psi^*\varphi)^i}{\delta\tilde{x}^k}(\tilde{x},\tilde{y})\Gamma(\psi^*g)^k_{pq}(\tilde{x},\tilde{y})+\bar{\Gamma}^i_{jk}(\bar{x},\bar{y})\frac{\delta(\psi^*\varphi)^j}{\delta\tilde{x}^p}(\tilde{x},\tilde{y})\frac{\delta(\psi^*\varphi)^k}{\delta\tilde{x}^q}(\tilde{x},\tilde{y})\Big)\\&=(\Phi_{\psi^*(g),h}\psi^*\varphi)^i\ |_{(\tilde{x},\tilde{y})}\ .\end{aligned}$$

类似地，对于 $\alpha=n+i$，可以证明

$$(\Phi_{g,h}\varphi)^{n+i}\ |_{(x,y)}=(\Phi_{\psi^*(g),h}\psi^*\varphi)^{n+i}\ |_{(\tilde{x},\tilde{y})},$$

其中， $i=1$、 $\cdots$、 n. 这就完成了证明。 □

¯注 4.1。设(M,F) 和(N,F)是两个 n 维芬斯勒流形，其对应的度量张量分别为 g和 h。设 φ: $TM\longrightarrow TN$, $\varphi(x^i,y^i)$ $=(\varphi^\alpha(x^i,y^i))$, $\alpha=1,..,2n$ 是一个将水平曲线映射为水平曲线的微分同胚。给定 φ_0: $TM\longrightarrow TN$，我们考虑以下演化方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi^\alpha=(\Phi_{g,h}\varphi)^\alpha,\qquad\varphi_{(0)}=\varphi_0. \tag{28}$$

通过将 φ^{α}限制为 SM 并使用引理 *3.1*，可以看出（*28*）是一个严格抛物型系统。因此，（*28*）在短时间内存在唯一解。

~ ¯推论 4.1。设(M,F)和(N,F)是两个 n 维芬斯勒流形，其相应的度量张量分别为 $\tilde{g}$ 和 h。设 $N=M$ 和 φ 为恒等映射$\varphi=Id$： $TM\longrightarrow TM$, $\varphi(x^i,y^i)=(x^i,y^i)$，则有

$$(\Phi_{\tilde{g},h}Id)^{\alpha}=(\Phi_{\tilde{g},h}Id)^{i}=\tilde{g}^{pq}(-\tilde{\Gamma}^{i}_{pq}+\bar{\Gamma}^{i}_{pq}),\quad \alpha=i,$$

其中，$i=1$、$\cdots$、n和 $\tilde{\Gamma}^{i}_{pq}$、$\bar{\Gamma}^{i}_{pq}$分别是相对于度量 $\tilde{g}$ 和 h 的 Chern联络水平协变导数的系数。

设 ξ 是 TM 上的一个向量场，其分量

$$\xi:=(\Phi_{\tilde{g},h}Id)^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}=\tilde{g}^{pq}(-\tilde{\Gamma}^{i}_{pq}+\bar{\Gamma}^{i}_{pq})\frac{\partial}{\partial x^{i}}. \tag{29}$$

利用任意两个联络之差是张量场这一事实，ξ 是一个全局良定义的向量场。容易验证，ξ 的分量在 y上是零次齐次的。因此，ξ 可以被视为 SM上的向量场。

5 芬斯勒流形上的 Ricci-DeTurck 流

这里我们研究里奇-德图克流及其解的存在性。更直观地说，芬斯勒几何中有几种广为人知的 Ricci 张量定义。例如，H. Akbar-Zadeh 在其研究中考虑了芬斯勒流形上的两种 Ricci 张量，其中一种定义为 $Ric_{ij}:=[\frac{1}{2}F^2\mathcal{R}ic]_{y^iy^j}$其中，$\mathcal{R}ic$是由 里奇标量 定义的 $\mathcal{R}ic:=g^{ik}R_{ik}=R^{i}_{\ i}$而 $R^{i}_{\ k}$ 由（4）定义，参见 [3, 第 192] 页。另一种 Ricci 张量定义为$Rc_{ij}:=\frac{1}{2}(\mathrm{R}_{ij}+\mathrm{R}^{ji})$，其中 R^{ij}是由 $\mathrm{R}_{ij}=R_{i\ lj}^{\ l}$定义的 hh-曲率的迹。这两种 Ricci 张量的差别在于第一种定义中出现的附加项 $\frac{1}{2}y^k\frac{\partial \mathrm{R}_{\ jk}}{\partial y^i}$。更确切地说，我们有 $Ric_{ij}-Rc_{ij}=\frac{1}{2}y^k\frac{\partial \mathrm{R}_{\ jk}}{\partial y^i}$。</final>

在 [2], D. Bao 中，基于 Ricci张量的第一个定义，考虑了以下演化微分方程，将其视为芬斯勒几何中的 Ricci流方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{jk}(t)=-2Ric_{jk},\qquad g_{(t=0)}=g_0, \tag{30}$$

其中，$g_{jk}(t)$ 是定义在 $\pi^{*}TM\times[0,T$上的一族芬斯勒度量。将 (30) 与 y^jy^k通过欧拉定理进行缩并，得到 $\frac{\partial}{\partial t}F^2=-2F^2\mathcal{R}ic$。也就是说，

$$\frac{\partial}{\partial t}\log F(t)=-\mathcal{R}ic,\qquad F(t=0):=F_0, \tag{31}$$

其中， F_0 是初始芬斯勒结构，详情请参见 [2]。在本文中以及全文其他地方，我们均采用 Akbar-Zadeh 对 Ricci张量的第一种定义及相关的里奇流（31）。本文所使用的里奇量 Ric_{ij}的优势之一在于，它与 Cartan、Berwald 或 Chern联络的选择无关。

定义 5.1. 设 M 是一个带有固定背景芬斯勒结构 F及相关芬斯勒度量 h的紧流形。假设对于所有 $t \in [0,T)$， $F(t)$ 是定义在 TM上的单参数芬斯勒结构族，且 $\tilde{g}(t)$ 是与 $F(t)$ 相关的张量度量。若 $F(t)$ 满足以下条件，则称其为芬斯勒–里奇-德特克流的解。

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t) = -2\tilde{F}^2(t)\mathcal{R}ic(\tilde{g}(t)) - \mathcal{L}_\xi \tilde{F}^2(t), \tag{32}$$

其中， $\mathcal{L}_\xi$ 是关于向量场 $\xi = (\Phi_{\tilde{g}(t),\ h}Id)^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 在 SM如前文 (29)中所述。

以下定理表明，里奇-德图克流（32）定义良好，并且在一个短时间区间内存在解。

定理 1的证明。 设 M 是一个带有固定背景芬斯勒结构 F 以及相关芬斯勒度量 h的紧流形。这里，所有指标的取值范围为 1，……， n。里奇-德图克流（32）可以写成如下形式

$$y^p y^q \frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}_{pq}(t) = -2\tilde{F}^2(t)\mathcal{R}ic(\tilde{g}(t)) - \mathcal{L}_\xi y^p y^q \tilde{g}_{pq}(t), \tag{33}$$

其中， $\tilde{g}(t)$ 是与 $F(t)$ 相关的度量张量。此外，我们还有

$$\mathcal{L}_\xi(y^p y^q \tilde{g}_{pq}) = y^p y^q \mathcal{L}_\xi \tilde{g}_{pq} + 2y^p \tilde{g}_{pq}\mathcal{L}_\xi y^q.$$

因此，(33)变为

$$y^p y^q \frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}_{pq}(t) = -2\tilde{F}^2(t)\mathcal{R}ic(\tilde{g}(t)) - y^p y^q \mathcal{L}_\xi \tilde{g}_{pq} - 2y^p \tilde{g}_{pq}\mathcal{L}_\xi y^q. \tag{34}$$

利用李导数公式（9）沿着 ξ 可得

$$y^p y^q \mathcal{L}_\xi \tilde{g}_{pq} = 2y^p y^q \nabla_p \xi_q, \tag{35}$$

其中， ∇_p 是Chern联络中的水平协变导数。Chern联络与度量的 h相容性给出

$$\nabla_p \xi_q = (\nabla_p \tilde{g}_{ql}\xi^l) = \tilde{g}_{ql}(\nabla_p \xi^l).$$

如前所述，若将Chern联络相对于度量张量的水平协变导数系数 h 和 $\tilde{g}$ 分别记为 $\Gamma(h)$和 $\Gamma(\tilde{g})$，则根据 ξ 在（29）中的定义，上式可写为

$$\begin{aligned}\nabla_p\xi_q &= \tilde{g}_{ql}(\delta_p\xi^l + \Gamma(\tilde{g})^l_{pw}\xi^w)\\ &= \tilde{g}_{ql}[\delta_p(\tilde{g}^{mn}(\Gamma(h)^l_{mn} - \Gamma(\tilde{g})^l_{mn}))] + \tilde{g}_{ql}\Gamma(\tilde{g})^l_{pw}\xi^w\\ &= \tilde{g}_{ql}[(\delta_p\tilde{g}^{mn})(\Gamma(h)^l_{mn} - \Gamma(\tilde{g})^l_{mn}) + \tilde{g}^{mn}\delta_p(\Gamma(h)^l_{mn}) - \tilde{g}^{mn}\delta_p(\Gamma(\tilde{g})^l_{mn})]\\ &\quad + \tilde{g}_{ql}\Gamma(\tilde{g})^l_{pw}\xi^w.\end{aligned}$$

根据上一个方程中 $\Gamma(\tilde{g})^l_{mn}$ 的水平导数，我们得到

$$\begin{aligned}\nabla_p\xi_q =&\frac{1}{2}\tilde{g}^{mn}(\delta_p\delta_q\tilde{g}_{mn} - \delta_p\delta_n\tilde{g}_{qm} - \delta_p\delta_m\tilde{g}_{qn}) - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ql}\tilde{g}^{mn}(\delta_p\tilde{g}^{ls})(\delta_n\tilde{g}_{sm} - \delta_s\tilde{g}_{mn} + \delta_m\tilde{g}_{ns})\\ &+ \tilde{g}_{ql}(\delta_p\tilde{g}^{mn})(\Gamma(h)^l_{mn} - \Gamma(\tilde{g})^l_{mn}) + \tilde{g}_{ql}\tilde{g}^{mn}\delta_p(\Gamma(h)^l_{mn}) + \tilde{g}_{ql}\Gamma(\tilde{g})^l_{pw}\xi^w.\end{aligned}$$

利用上一个方程，(35) 可写为

$$\begin{aligned}y^py^q\mathcal{L}_\xi\tilde{g}_{pq} =&y^py^q\tilde{g}^{mn}(\delta_p\delta_q\tilde{g}_{mn} - \delta_p\delta_n\tilde{g}_{qm} - \delta_p\delta_m\tilde{g}_{qn})\\ &- y^py^q\tilde{g}_{ql}\tilde{g}^{mn}(\delta_p\tilde{g}^{ls})(\delta_n\tilde{g}_{sm} - \delta_s\tilde{g}_{mn} + \delta_m\tilde{g}_{ns})\\ &+ 2y^py^q\tilde{g}_{ql}(\delta_p\tilde{g}^{mn})(\Gamma(h)^l_{mn} - \Gamma(\tilde{g})^l_{mn})\\ &+ 2y^py^q\tilde{g}_{ql}\tilde{g}^{mn}\delta_p(\Gamma(h)^l_{mn}) + 2y^py^q\tilde{g}_{ql}\Gamma(\tilde{g})^l_{pw}\xi^w.\end{aligned} \tag{36}$$

此外，我们还有

$$-2\tilde{F}^2\mathcal{R}ic(\tilde{g}) = -2\tilde{F}^2R^n_{\ n} = -2\tilde{F}^2l^qR_q{}^n{}_{np}l^p, \tag{37}$$

其中，$R_q{}^n{}_{np}$ 是 hh-Chern联络曲率张量的分量，而$l^q = \frac{y^q}{\tilde{F}}$ 是刘维尔向量场的分量。将（3）代入（37），并利用 Γ（$\tilde{g}$）的定义，可得

$$\begin{aligned}-2\tilde{F}^2\mathcal{R}ic(\tilde{g}) &= -2\tilde{F}^2l^qR_q{}^n{}_{np}l^p\\ &= -2y^py^q(\delta_n\Gamma^n_{qp}(\tilde{g}) - \delta_p\Gamma^n_{qn}(\tilde{g}) + \Gamma^n_{mn}(\tilde{g})\Gamma^m_{qp}(\tilde{g}) - \Gamma^n_{mp}(\tilde{g})\Gamma^m_{qn}(\tilde{g}))\\ &= -2y^py^q[\delta_n(\frac{1}{2}\tilde{g}^{mn}(\delta_q\tilde{g}_{mp} + \delta_p\tilde{g}_{mq} - \delta_m\tilde{g}_{pq}))]\\ &\quad + 2y^py^q[\delta_p(\frac{1}{2}\tilde{g}^{mn}(\delta_q\tilde{g}_{mn} + \delta_n\tilde{g}_{qm} - \delta_m\tilde{g}_{qn}))]\\ &\quad - 2y^py^q(\Gamma^n_{mn}(\tilde{g})\Gamma^m_{qp}(\tilde{g}) - \Gamma^n_{mp}(\tilde{g})\Gamma^m_{qn}(\tilde{g})).\end{aligned}$$

对 δ_p 求导可得

$$\begin{aligned}-2\tilde{F}^2\mathcal{R}ic(\tilde{g}) =& y^p y^q \tilde{g}^{mn}(\delta_p\delta_q\tilde{g}_{mn} + \delta_n\delta_m\tilde{g}_{pq} - \delta_p\delta_m\tilde{g}_{qn} - \delta_n\delta_q\tilde{g}_{mp})\\ &- y^p y^q(\delta_n\tilde{g}^{nm})(\delta_q\tilde{g}_{mp} + \delta_p\tilde{g}_{qm} - \delta_m\tilde{g}_{pq})\\ &+ y^p y^q(\delta_p\tilde{g}^{mn})(\delta_q\tilde{g}_{mn} + \delta_n\tilde{g}_{qm} - \delta_m\tilde{g}_{qn})\\ &- 2y^p y^q(\Gamma^n_{mn}(\tilde{g})\Gamma^m_{qp}(\tilde{g}) - \Gamma^n_{mp}(\tilde{g})\Gamma^m_{qn}(\tilde{g})).\end{aligned} \tag{38}$$

将（36）和（38）代入（34），得到

$$\begin{aligned}y^p y^q\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}_{pq}(t) =& y^p y^q\tilde{g}^{mn}\delta_n\delta_m\tilde{g}_{pq}\\ &- y^p y^q(\delta_n\tilde{g}^{nm})(\delta_q\tilde{g}_{mp} + \delta_p\tilde{g}_{qm} - \delta_m\tilde{g}_{pq})\\ &+ y^p y^q(\delta_p\tilde{g}^{mn})(\delta_q\tilde{g}_{mn} + \delta_n\tilde{g}_{qm} - \delta_m\tilde{g}_{qn})\\ &- 2y^p y^q(\Gamma^n_{mn}(\tilde{g})\Gamma^m_{qp}(\tilde{g}) - \Gamma^n_{mp}(\tilde{g})\Gamma^m_{qn}(\tilde{g}))\\ &+ y^p y^q\tilde{g}_{ql}\tilde{g}^{mn}(\delta_p\tilde{g}^{ls})(\delta_n\tilde{g}_{sm} - \delta_s\tilde{g}_{mn} + \delta_m\tilde{g}_{ns})\\ &- 2y^p y^q\tilde{g}_{ql}(\delta_p\tilde{g}^{mn})(\Gamma(h)^l_{mn} - \Gamma(\tilde{g})^l_{mn})\\ &- 2y^p y^q\tilde{g}_{ql}\tilde{g}^{mn}\delta_p(\Gamma(h)^l_{mn}) - 2y^p y^q\tilde{g}_{ql}\Gamma(\tilde{g})^l_{pw}\xi^w\\ &- 2y^p\tilde{g}_{pq}\mathcal{L}_\xi y^q.\end{aligned} \tag{39}$$

利用欧拉定理可得

$$y^p y^q\frac{\partial^2\tilde{g}_{pq}}{\partial y^n\partial y^m} = \frac{\partial^2}{\partial y^n\partial y^m}(y^p y^q\tilde{g}_{pq}) - 2\tilde{g}_{nm} = 0. \tag{40}$$

为了得到严格抛物型系统，根据（40），我们在右端$\tilde{F}^2 y^p y^q\tilde{g}^{mn}\frac{\partial^2\tilde{g}_{pq}}{\partial y^n\partial y^m} = 0$（39）中加上零项。因此，我们有

$$\begin{aligned}y^p y^q\Big(&\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}_{pq}(t) - \tilde{g}^{mn}\delta_n\delta_m\tilde{g}_{pq} - \tilde{F}^2\tilde{g}^{mn}\frac{\partial^2\tilde{g}_{pq}}{\partial y^n\partial y^m}\\ &+ (\delta_n\tilde{g}^{nm})(\delta_q\tilde{g}_{mp} + \delta_p\tilde{g}_{qm} - \delta_m\tilde{g}_{pq})\\ &- (\delta_p\tilde{g}^{mn})(\delta_q\tilde{g}_{mn} + \delta_n\tilde{g}_{qm} - \delta_m\tilde{g}_{qn})\\ &+ 2(\Gamma^n_{mn}(\tilde{g})\Gamma^m_{qp}(\tilde{g}) - \Gamma^n_{mp}(\tilde{g})\Gamma^m_{qn}(\tilde{g}))\\ &- \tilde{g}_{ql}\tilde{g}^{mn}(\delta_p\tilde{g}^{ls})(\delta_n\tilde{g}_{sm} - \delta_s\tilde{g}_{mn} + \delta_m\tilde{g}_{ns})\\ &+ 2\tilde{g}_{ql}(\delta_p\tilde{g}^{mn})(\Gamma(h)^l_{mn} - \Gamma(\tilde{g})^l_{mn})\\ &+ 2\tilde{g}_{ql}\tilde{g}^{mn}\delta_p(\Gamma(h)^l_{mn}) - 2y^p y^q\tilde{g}_{ql}\Gamma(\tilde{g})^l_{pw}\xi^w + 2\frac{l_q}{F}\tilde{g}_{np}\mathcal{L}_\xi y^n\Big) = 0.\end{aligned} \tag{41}$$

On 另一方面，在度量张量的分量上两次应用向量场$\frac{\delta}{\delta x^n}$

$\tilde{g}_{pq}$ 产生

$$\delta_n\delta_m\tilde{g}_{pq} = \frac{\partial^2\tilde{g}_{pq}}{\partial x^n\partial x^m} - \frac{\partial N^k_m}{\partial x^n}\frac{\partial\tilde{g}_{pq}}{\partial y^k} - N^k_m\frac{\partial^2\tilde{g}_{pq}}{\partial x^n\partial y^k} - N^l_n\frac{\partial^2\tilde{g}_{pq}}{\partial y^l\partial x^m} + N^l_n\frac{\partial N^k_m}{\partial y^l}\frac{\tilde{g}_{pq}}{\partial y^k} + N^l_nN^k_m\frac{\partial^2\tilde{g}_{pq}}{\partial y^k\partial y^l}.$$

用 y^py^q 对最后一个方程进行对流，并利用(40)可得

$$y^py^q\delta_n\delta_m\tilde{g}_{pq} = y^py^q\frac{\partial^2\tilde{g}_{pq}}{\partial x^n\partial x^m}.$$

注意，在项 $y^py^q\tilde{g}^{mn}\delta_n\delta_m\tilde{g}_{pq}$ （39）中，不存在包含 $\tilde{g}$ 的导数的项，除了 $y^py^q\frac{\partial^2\tilde{g}_{pq}}{\partial x^n\partial x^m}$。可将（41）改写如下

$$y^py^q\Big(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}_{pq}(t) - \tilde{g}^{mn}\delta_n\delta_m\tilde{g}_{pq} - \tilde{F}^2\tilde{g}^{mn}\frac{\partial^2\tilde{g}_{pq}}{\partial y^n\partial y^m} + \text{lower order terms}\Big) = 0. \tag{42}$$

令（42）中括号内的项等于零，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}_{pq}(t) - \tilde{g}^{mn}\delta_n\delta_m\tilde{g}_{pq} - \tilde{F}^2\tilde{g}^{mn}\frac{\partial^2\tilde{g}_{pq}}{\partial y^n\partial y^m} + \text{lower order terms} = 0 \tag{43}$$

通过限制度量张量 $\tilde{g}$ 在 p^*TM 上，并利用引理 3.1 ，我们可以将（43）改写为关于基 $\{\hat{e}_a,\ \hat{e}_{n+\alpha}\}$ 在 SM 上的形式如下

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}_{pq} = \tilde{g}^{ab}\hat{e}_b\hat{e}_a\tilde{g}_{pq} + \tilde{g}^{\alpha\beta}\hat{e}_{n+\beta}\hat{e}_{n+\alpha}\tilde{g}_{pq} - B^c\hat{e}_c\tilde{g}_{pq} - D^\gamma\hat{e}_{n+\gamma}\tilde{g}_{pq} + \text{lower order terms} = 0, \tag{44}$$

其中， $B^c := v^c_i\tilde{g}^{ab}\hat{e}_b(u^i_a)$ 和 $D^\gamma := v^\gamma_i\tilde{F}\tilde{g}^{\alpha\beta}\hat{e}_{n+\beta}u^i_\alpha$ 如引理 3.1。

根据假设， M 是紧的，因此球丛 SM也是紧的。众所周知，度量张量 $\tilde{g}^{mn}$ 沿里奇流保持正定，参见 [9], 推论3.7。由于（44）的最高（二阶）阶项的系数是正定的，根据定义3.1，它在 SM上是一个严格抛物型半线性系统。因此，紧区域上抛物型系统的标准存在唯一性定理意味着，（44）在 SM上有唯一解。方程（44）是一般流方程（10）的一个特例，而 $\tilde{g}(t)$是一个解。因此，根据引理2.1， $\tilde{g}(t)$满足˜可积性条件，或者等价地，存在一个芬斯勒结构 $F(t)$定义在 TM上，使得 $\tilde{g}_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial y^i\partial y^j}$。因此， $\tilde{g}$ 是一个芬斯勒度量，并确定了一个芬斯勒结构$\tilde{F}^2 := \tilde{g}_{pq}y^py^p$ 是芬斯勒里奇-德图克流的一个解。定理1的证明至此完成。□

注 5.1. 定理 *1*中，正如预备知识部分前面所述，如果芬斯勒流形 M 是各向同性的，那么 $R_q{}^n{}_{np}$ 关于指标 p 和 q 对称。

因此，利用 $\mathcal{L}_\xi(y^p y^q \tilde{g}_{pq})$ 关于指标 p 和 q的对称性，我们得出，式（42）括号中的项关于指标 p和 q对称。如果一个对称双线性形式在对角线上为零，那么根据极化恒等式，它恒等于零。因此，由式（42）可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}_{pq}(t) - \tilde{g}^{mn}\delta_n\delta_m\tilde{g}_{pq} - \tilde{F}^2\tilde{g}^{mn}\frac{\partial^2\tilde{g}_{pq}}{\partial y^n\partial y^m} + lower\ order\ terms = 0. \tag{45}$$

正如定理 1的证明所示，通过限制 $\tilde{g}$ 在 p^*TM 上的度量张量，并使用引理3.1 ，我们可以将（43）在 SM 上重写为（44），这是 SM上的严格抛物型半线性系统。因此，紧区域上的抛物型系统的标准存在唯一性定理表明，（44）在 SM上有唯一解。因此，芬斯勒结构 $\tilde{F}^2 := \tilde{g}_{pq}y^p y^p$ 是芬斯勒里奇-德图克流的唯一解。因此，在各向同性情形下，（32）的解是唯一的。

6 芬斯勒流形上的里奇流短时解

在本节中，我们将证明，在芬斯勒流形上，里奇流的解与里奇-德图克流的解之间存在一一对应关系。在此，我们回顾一些将在后文中使用的结果。

引理A。 *[12, 第 82]* 设 $\{X_t : 0 \le t < T \le \infty\}$ 是紧流形 M上的连续时间依赖族向量场。存在单参数微分同胚族 $\{\varphi_t : M \longrightarrow M;\ 0 \le t < T \le \infty\}$ 定义在同一时间区间上，使得

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x) = X_t[\varphi_t(x)], \\ \varphi_0(x) = x, \end{cases}$$

对于所有 $x \in M$和 $t \in [0, T)$。

注 6.1。 设 M 是一个紧致芬斯勒流形。根据引理 A，存在唯一的单参数微分同胚族 $\tilde{\varphi}_t$ 在 SM上，使得

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z) = \xi(\varphi_t(z), t), \\ \varphi_0 = Id_{SM}, \end{cases}$$

其中， $z = (x, [y]) \in SM$和 $t \in [0, T)$。

注 6.2. 设 $\tilde{g}_{pq}$ 是里奇-德图克流的一个解， φ_t 是生成向量场 ξ 的单参数整体微分同胚群。由于 ξ 是一个向量场，位于

SM，然后 φ_t 是零次齐次的。 $\tilde{g}_{pq}$ 的零次齐次性意味着$\varphi_t^*(\tilde{g}_{pq})$也是零次齐次的。也就是说，

$$(\varphi_t^*\tilde{g}_{pq})(x,\lambda y)=\tilde{g}_{pq}(\varphi_t(x,\lambda y))=\tilde{g}_{pq}(\varphi_t(x,y))=(\varphi_t^*\tilde{g}_{pq})(x,y).$$

利用 $\tilde{g}_{pq}$ 是正定的且 φ_t^* 是微分同胚这一事实， $\varphi_t^*(\tilde{g}_{pq})$ 也是正定的。此外， $\varphi_t^*(\tilde{g}_{pq})$ 是对称的。更直观地，

$$(\varphi_t^*\tilde{g})(X,Y)=g(\varphi_{t_*}(X),\varphi_{t_*}(Y))=g(\varphi_{t_*}(Y),\varphi_{t_*}(X))=(\varphi_t^*\tilde{g})(Y,X).$$

因此， $\varphi_t^*(\tilde{g}_{pq})$ 如下确定一个芬斯勒结构

$$F^2:=g_{pq}\tilde{y}^p\tilde{y}^q,$$

其中， $g_{pq}:=\varphi_t^*(\tilde{g}_{pq})$ 以及 $\varphi_t^*y^p:=\tilde{y}^p$。

引理6.1. 设 φ_t 为与向量场 ξ 对应的全局单参数微分同胚群，且 $(\gamma^i_{jk})_{\tilde{g}}$ 和$(G^i)_{\tilde{g}}$ 分别是与芬斯勒度量 $\tilde{g}$相关的克里斯托费尔符号和喷射系数。则有

$$\varphi_t^*((\gamma^i_{jk})_{\tilde{g}})=(\gamma^i_{jk})_{\varphi_t^*(\tilde{g})}, \tag{46}$$

$$\varphi_t^*(G^i_{\tilde{g}})=G^i_{\varphi_t^*(\tilde{g})}, \tag{47}$$

其中，$(\gamma^i_{jk})_{\tilde{g}}=\tilde{g}^{is}\frac{1}{2}(\frac{\partial\tilde{g}_{sj}}{\partial x^k}-\frac{\partial\tilde{g}_{jk}}{\partial x^s}+\frac{\partial\tilde{g}_{ks}}{\partial x^j})$ 和 $G^i_{\tilde{g}}=\frac{1}{2}(\gamma^i_{jk})_{\tilde{g}}y^jy^k$。

证明。记 $\varphi_t^*x^i:=\tilde{x}^i$ 和 $\varphi_t^*y^i:=\tilde{y}^i$。根据定义，我们有

$$\begin{aligned}\varphi_t^*((\gamma^i_{jk})_{\tilde{g}})&=\varphi_t^*(\tilde{g}^{is}\frac{1}{2}(\frac{\partial\tilde{g}_{sj}}{\partial x^k}-\frac{\partial\tilde{g}_{jk}}{\partial x^s}+\frac{\partial\tilde{g}_{ks}}{\partial x^j}))\\&=\varphi_t^*(\tilde{g}^{is})\varphi_t^*(\frac{1}{2}(\frac{\partial\tilde{g}_{sj}}{\partial x^k}-\frac{\partial\tilde{g}_{jk}}{\partial x^s}+\frac{\partial\tilde{g}_{ks}}{\partial x^j}))\\&=\varphi_t^*(\tilde{g}^{is})\frac{1}{2}(\frac{\partial\varphi_t^*(\tilde{g}_{sj})}{\partial\tilde{x}^k}-\frac{\partial\varphi_t^*(\tilde{g}_{jk})}{\partial\tilde{x}^s}+\frac{\partial\varphi_t^*(\tilde{g}_{ks})}{\partial\tilde{x}^j})\\&=(\gamma^i_{jk})_{\varphi_t^*(\tilde{g})}.\end{aligned}$$

接下来，利用（46）可得

$$\begin{aligned}\varphi_t^*(G^i_{\tilde{g}})&=\varphi_t^*(\frac{1}{2}(\gamma^i_{jk})_{\tilde{g}}y^jy^k)=\frac{1}{2}\varphi_t^*((\gamma^i_{jk})_{\tilde{g}})\varphi_t^*y^j\varphi_t^*y^k\\&=\frac{1}{2}(\gamma^i_{jk})_{\varphi_t^*(\tilde{g})}\tilde{y}^j\tilde{y}^k=G^i_{\varphi_t^*(\tilde{g})}.\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

引理6.2.设 φ_t 是生成向量场 ξ 的全局单参数微分同胚群，且 $\mathcal{R}ic_{\tilde{g}}$ 是与芬斯勒度量 $\tilde{g}$ 相关的里奇标量，则有

$$\varphi_t^*(\mathcal{R}ic_{\tilde{g}})=\mathcal{R}ic_{\varphi_t^*(\tilde{g})}.$$

证明。考虑约化的 hh-曲率张量 $R^i{}_k$，它完全由喷射系数 $G^i_{\tilde{g}}$ 的 x 阶和 y 阶导数表示。

$$(R^i{}_k)_{\tilde{g}} := \frac{1}{\tilde{F}^2}(2\frac{\partial G^i_{\tilde{g}}}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^i_{\tilde{g}}}{\partial x^j \partial y^k}y^j + 2G^j_{\tilde{g}}\frac{\partial^2 G^i_{\tilde{g}}}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i_{\tilde{g}}}{\partial y^j}\frac{\partial G^j_{\tilde{g}}}{\partial y^k}).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\varphi_t^*((R^i{}_k)_{\tilde{g}}) &= \varphi_t^*(\frac{1}{\tilde{F}^2}(2\frac{\partial G^i_{\tilde{g}}}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^i_{\tilde{g}}}{\partial x^j \partial y^k}y^j + 2G^j_{\tilde{g}}\frac{\partial^2 G^i_{\tilde{g}}}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i_{\tilde{g}}}{\partial y^j}\frac{\partial G^j_{\tilde{g}}}{\partial y^k}))\\ &= \varphi_t^*(\frac{1}{\tilde{F}^2})\varphi_t^*(2\frac{\partial G^i_{\tilde{g}}}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^i_{\tilde{g}}}{\partial x^j \partial y^k}y^j + 2G^j_{\tilde{g}}\frac{\partial^2 G^i_{\tilde{g}}}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i_{\tilde{g}}}{\partial y^j}\frac{\partial G^j_{\tilde{g}}}{\partial y^k}).\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\varphi_t^*((R^i{}_k)_{\tilde{g}}) =& \frac{1}{\varphi_t^*(\tilde{F}^2)}(2\frac{\partial(\varphi_t^*(G^i_{\tilde{g}}))}{\partial \tilde{x}^k} - \frac{\partial^2(\varphi_t^*(G^i_{\tilde{g}}))}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{y}^k}\tilde{y}^j\\ &+ 2\varphi_t^*(G^j_{\tilde{g}})\frac{\partial^2(\varphi_t^*(G^i_{\tilde{g}}))}{\partial \tilde{y}^j \partial \tilde{y}^k} - \frac{\partial(\varphi_t^*(G^i_{\tilde{g}}))}{\partial \tilde{y}^j}\frac{\partial(\varphi_t^*(G^j_{\tilde{g}}))}{\partial \tilde{y}^k}).\end{aligned}$$

令 $i = k$ 代入最后一个方程并利用（47），可得

$$\varphi_t^*(\mathcal{R}ic_{\tilde{g}}) = \mathcal{R}ic_{\varphi_t^*(\tilde{g})},$$

正如我们所声称的。 □

现在我们可以证明以下命题了。

命题 6.1.固定一个紧致芬斯勒流形 (M, F)，其相关的芬斯勒度量张量为 h。令 $F(t)$ 为里奇 - 德图克流的一族解

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t) = -2\tilde{F}^2(t)\mathcal{R}ic(\tilde{g}(t)) - \mathcal{L}_\xi \tilde{F}^2(t), \tag{48}$$

其中，$\xi = (\Phi_{\tilde{g}(t),\ h}Id)^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $t \in [0, T)$。此外，设 φ_t 为满足条件的单参数微分同胚族。

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z) = \xi(\varphi_t(z), t),$$

对于 $z \in SM$ 和 $t \in [0, T)$。那么芬斯勒结构 $F(t)$ 构成芬斯勒里奇流的一个解（31），其中，$F(t)$ 定义为

$$F^2(t) := g_{pq}\tilde{y}^p\tilde{y}^q = \varphi_t^*(\tilde{F}^2(t)),$$

其中，$g_{pq} := \varphi_t^*(\tilde{g}_{pq})$ 和 $\varphi_t^* y^p := \tilde{y}^p$。

证明。为了证明 $F(t)$ 构成芬斯勒里奇流（31）的一个解，我们需要证明$\frac{\partial}{\partial t}(\log F(t))$ $= -\mathcal{R}ic.$对 $F^2(t) = \varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))$ 关于参数 t求导，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(\log F(t)) = \frac{1}{2}\frac{\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t)))}{\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))}. \tag{49}$$

术语 $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^*\tilde{F}^2(t))$ 变为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^*\tilde{F}^2(t)) &= \frac{\partial}{\partial s}(\varphi_{s+t}^*(\tilde{F}^2(s+t)))\mid_{s=0} \\
&= \varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t)) + \frac{\partial}{\partial s}(\varphi_{s+t}^*(\tilde{F}^2(t)))\mid_{s=0} \\
&= \varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t)) + \frac{\partial}{\partial s}((\varphi_t^{-1}\circ\ \varphi_{t+s})^*(\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))))\mid_{s=0} \\
&= \varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t)) + \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial s}(\varphi_t^{-1}\circ\ \varphi_{t+s})\mid_{s=0}}\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t)).
\end{aligned} \tag{50}$$

另一方面，我们有

$$\frac{\partial}{\partial s}(\varphi_t^{-1}\circ\ \varphi_{t+s})\mid_{s=0} = (\varphi_t^{-1})_*((\frac{\partial}{\partial s}\varphi_{s+t})\mid_{s=0}) = (\varphi_t^{-1})_*(\xi).$$

因此，(50) 可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^*\tilde{F}^2(t)) = \varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t)) + \mathcal{L}_{(\varphi_t^{-1})_*(\xi)}\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t)).$$

将（49）中的最后一个方程替换掉，并使用假设（48），得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\log F(t)) &= \frac{1}{2}\frac{\varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t)) + \mathcal{L}_{(\varphi_t^{-1})_*(\xi)}\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))}{\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\varphi_t^*(-2\tilde{F}^2(t)\mathcal{R}ic(\tilde{F}(t)) - \mathcal{L}_\xi\tilde{F}^2(t)) + \mathcal{L}_{(\varphi_t^{-1})_*(\xi)}\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))}{\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\varphi_t^*(-2\tilde{F}^2(t)\mathcal{R}ic(\tilde{F}(t))) - \varphi_t^*(\mathcal{L}_\xi\tilde{F}^2(t))) + \mathcal{L}_{(\varphi_t^{-1})_*(\xi)}\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))}{\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))} \\
&= \frac{1}{2}\frac{-2\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))\varphi_t^*(\mathcal{R}ic(\tilde{F}(t)))}{\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))}.
\end{aligned}$$

根据引理 6.2 我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\log F(t)) = -\varphi_t^*(\mathcal{R}ic(\tilde{F}(t))) = -\mathcal{R}ic_{\varphi_t^*(\tilde{F}(t))} = -\mathcal{R}ic_{F(t)}.$$

因此，芬斯勒结构 F（t）构成芬斯勒里奇流的一个解。因此，证明完成。

□

定理 **2**的证明。 我们考察芬斯勒里奇˜流解的存在性。回顾定理 1 断言，存在一个解 $F(t)$ 满足芬斯勒˜里奇-德图克流（32），该解定义在某个时间区间 $[0,T)$ 上，并满足 $F(0)=F_0$。令 φ_t 为常微分方程的解。

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z)=(\Phi_{\tilde{g}(t),h}Id)(\varphi_t(z),t)=\xi(\varphi_t(z),t),$$

满足初始条件 $\varphi_0(z)=z$，其中 $z\in SM$ 且 $t\in[0,T)$。根据命题 6.1，芬斯勒结构 $F^2(t)=\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))$ 构成芬斯勒里奇流（ 31 ）的一个解，其中 $F(0)=F_0$。定理 2 的证明至此完成。 □

在下面的命题中，我们假设存在一个芬斯勒里奇流的解，并由此构造一个里奇-德图克流的解。

¯命题 6.2。考虑一个固定的紧致芬斯勒流形（M,F），其相关的芬斯勒度量张量为 h。令 $F(t)$，$t\in[0,T)$，为里奇流的一族解，并且φ_t 为在 SM 上、在以下流作用下变形的单参数微分同胚族，

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t=\Phi_{g(t),h}\varphi_t.$$

那么，由 $F^2(t)=\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))$ 定义的芬斯勒结构 $\tilde{F}(t)$ 构成以下里奇-德图克流的一个解

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t)=-2\tilde{F}^2(t)\mathcal{R}ic(\tilde{g}(t))-\mathcal{L}_\xi\tilde{F}^2(t),$$

其中，$\xi=(\Phi_{\tilde{g}(t),\ h}Id)^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 且 $\tilde{g}(t)$ 是与 $\tilde{F}(t)$ 相关的度量张量。此外，对于所有 $z\in SM$ 和 $t\in[0,T)$，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z)=\xi(\varphi_t(z),t).$$

证明。利用引理4.1 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t&=\Phi_{g(t),h}\varphi_t=\Phi_{\varphi_t^*(\tilde{g}(t)),h}\varphi_t=\Phi_{\varphi_t^*(\tilde{g}(t)),h}Id\circ\varphi_t\\&=\Phi_{\varphi_t^*(\tilde{g}(t)),h}\varphi_t^*Id=\Phi_{\tilde{g}(t),h}Id=\xi,\end{aligned}$$

对所有 $z\in SM$和 $t\in[0,T)$ 。由于有 $F^2(t)=\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))$，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\log F(t))&=\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t)))}{\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))}\\&=\frac{1}{2}\frac{\varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t))+\mathcal{L}_{(\varphi_t^{-1})_*(\xi)}\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))}{\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))}\\&=\frac{1}{2}\frac{\varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t)+\mathcal{L}_\xi\tilde{F}^2(t))}{\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))}.\end{aligned}\tag{51}$$

根据假设， $F(t)$ 是芬斯勒里奇流（31）的一个解

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(\log F(t)) + \mathcal{R}ic_{F(t)}. \tag{52}$$

通过（51）、（52）以及引理6.2，我们得到

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t) + \mathcal{L}_\xi \tilde{F}^2(t))}{\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))} + 2\mathcal{R}ic_{F(t)} \\
&= \frac{\varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t) + \mathcal{L}_\xi \tilde{F}^2(t))}{\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))} + 2\mathcal{R}ic_{\varphi_t^*(\tilde{F}(t))} \\
&= \frac{\varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t) + \mathcal{L}_\xi \tilde{F}^2(t))}{\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))} + 2\varphi_t^*(\mathcal{R}ic_{\tilde{F}(t)}) \\
&= \frac{\varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t) + \mathcal{L}_\xi \tilde{F}^2(t)) + 2\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))\varphi_t^*(\mathcal{R}ic_{\tilde{F}(t)})}{\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))} \\
&= \frac{\varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t) + \mathcal{L}_\xi \tilde{F}^2(t) + 2\tilde{F}^2(t)\mathcal{R}ic_{\tilde{F}(t)})}{\varphi_t^*(\tilde{F}^2(t))}.
\end{aligned}$$

因此， $\varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t) + \mathcal{L}_\xi \tilde{F}^2(t) + 2\tilde{F}^2(t)\mathcal{R}ic_{\tilde{F}(t)}) = 0$，这意味着

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{F}^2(t) = -2\tilde{F}^2(t)\mathcal{R}ic_{\tilde{F}(t)} - \mathcal{L}_\xi \tilde{F}^2(t).$$

˜因此， $F(t)$ 是里奇-德图克流的一个解，正如我们所述。 □

定理 3 的证明。对于一般的芬斯勒结构，存在性陈述已在定理 2 中得到证明。对于各向同性情形下的唯一性陈述，假设$F_1(t)$ 和 $F_2(t)$ 都是在某个时间区间 $[0,T)$ 上定义的芬斯勒里奇流解，并且在点 $t = 0$ 处满足 $F_1(0) = F_2(0)$。我们断言，对于所有 $t \in [0,T)$，都有 $F_1(t) = F_2(t)$。为了证明这一事实，我们采用反证法。假设对于某个 $t \in [0,T)$，有 $F_1(t) \neq F_2(t)$。考虑实数 $\tau \in [0,T)$，其中$\tau = \inf\{t \in [0,T) : F_1(t) \neq F_2(t)\}$。容易看出， $F_1(\tau) = F_2(\tau)$。令 φ_t^1为该流的一个解

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^1 = \Phi_{g_1(t),h}\varphi_t^1,$$

满足初始条件 $\varphi_\tau^1 = Id$，且 φ_t^2 是该流的一个解

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^2 = \Phi_{g_2(t),h}\varphi_t^2,$$

满足初始条件 $\varphi_\tau^2 = Id$。根据抛物型微分方程的标准理论可知， φ_t^1和 φ_t^2定义在某个时间区间 $[\tau, \tau+\epsilon)$ 上，其中，ϵ 是正实数。此外，如果我们选择的 $\epsilon > 0$ 足够小，那么 φ_t^1 和 φ_t^2

对所有 $t \in [\tau, \tau+\epsilon)$都是微分同胚。对于每个 $t \in [\tau, \tau+\epsilon)$，我们通过$(F_1(t))^2 = (\varphi_t^1)^*(\tilde{F}_1(t))^2$ 和 $(F_2(t))^2 = (\varphi_t^2)^*(\tilde{F}_2(t))^2$ 定义两个芬斯勒结构 $\tilde{F}_1(t)$和 $\tilde{F}_2(t)$。由命题 6.2 可知，$F_1(t)$ 和 $F_2(t)$ 是芬斯勒–里奇-德特克流的解。由于 $F_1(\tau) = F_2(\tau)$，注5.1 中提到的各向同性芬斯勒流形上的芬斯勒–里奇-德特克流解的唯一性意味着，对于所有 $t \in [\tau, \tau+\epsilon)$，$\tilde{F}_1(t) = \tilde{F}_2(t)$。对于每个 $t \in [\tau, \tau+\epsilon)$，我们在 SM 上定义一个向量场 ξ，由

$$\xi = \Phi_{\tilde{g}_1(t),h} Id = \Phi_{\tilde{g}_2(t),h} Id.$$

根据命题6.2，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^1(z) = \xi(\varphi_t^1(z), t),$$

and

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^2(z) = \xi(\varphi_t^2(z), t),$$

对于 $z \in SM$ 和 $t \in [\tau, \tau+\epsilon)$。由于 $\varphi_\tau^1 = \varphi_\tau^2 = Id$，可知对所有$t \in [\tau, \tau+\epsilon)$，均有 $\varphi_t^1 = \varphi_t^2$。综合这些事实，我们得出结论：

$$(F_1(t))^2 = (\varphi_t^1)^*(\tilde{F}_1(t))^2 = (\varphi_t^2)^*(\tilde{F}_2(t))^2 = (F_2(t))^2,$$

对所有 $t \in [\tau, \tau+\epsilon)$。因此，$F_1(t) = F_2(t)$ 对所有 $t \in [\tau, \tau+\epsilon)$。这与 τ 的定义相矛盾。因此，唯一性成立。定理 3 的证明完成。□

例 6.1。设 (M, F_0) 是一个维数为 $n > 2$ 的爱因斯坦兰德斯流形。我们将得到里奇流(31)的一个解。利用爱因斯坦兰德斯度量的舒尔引理 *[19, 页 30]*，的里奇标量 $\mathcal{R}ic$ 是 F_0 必然为常数，即$\mathcal{R}ic_{F_0} = K$ 其中，K 是一个常数。考虑由下式定义的一族线性标量 $\tau(t)$：

$$\tau(t) := 1 - 2Kt > 0.$$

通过在 M 上定义一个光滑单参数族的芬斯勒结构

$$F^2(t) := \tau(t) F_0^2.$$

因此我们有

$$\log(F(t)) = \frac{1}{2}\log(\tau(t)F_0^2).$$

对 t 求导得

$$\frac{\partial}{\partial t}\log(F(t)) = -\frac{K}{\tau(t)} = -\frac{\mathcal{R}ic_{F_0}}{\tau(t)}. \tag{53}$$

另一方面，经过直接计算可得$\tau^{1}{}_{t()}\mathcal{R}ic_{F_0} = \mathcal{R}ic_{\tau(t)^{\frac{1}{2}}F_0}$，更多详~~情~~请参见*[10, 第 926]*页。将最后一个关系代入（*53*）可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\log(F(t)) = -\mathcal{R}ic_{\tau(t)^{\frac{1}{2}}F_0} = -\mathcal{R}ic_{F(t)}.$$

因此， $F(t)$ 是 Ricci流方程 (31)。

例6.2.设 (M, F_0)是一个芬斯勒流形，且 $V = V^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$是 M 上的一个向量场。若存在常数 λ使得，则三元组 (M, F_0, V) 称为芬斯勒Ricci孤立子。

$$2Ric_{ij} + \mathcal{L}_{\hat{V}}g_{ij} = 2\lambda g_{ij}, \tag{54}$$

ˆ其中， g_{ij} 是与芬斯勒结构相关的Hessian矩阵 F_0， V 是 V 的完全提升，且$\lambda \in \mathbb{R}$。将 $y^i y^j$ 两边同乘(54)，我们得到

$$2F_0^2\mathcal{R}ic + \mathcal{L}_{\hat{V}}F_0^2 = 2\lambda F_0^2.$$

根据 λ的符号，芬斯勒Ricci孤立子被称为收缩型（$\lambda > 0$）、稳态型（$\lambda = 0$）或膨胀型（$\lambda < 0$）。设（M, F_0, V）是一个紧致的芬斯勒Ricci孤立子。对于每个点 $p \in M$，我们将常微分方程（常微分方程）的唯一解记为 $\varphi_t(p)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = \frac{1}{1-2\lambda t}V|_{\varphi_t(p)},$$

满足初始条件 $\varphi_0(p) = p$。这定义了 M 上的一个单参数微分同胚族。可以如下定义 TM 上的光滑单参数芬斯勒结构族

$$F^2(t) = (1-2\lambda t)\tilde{\varphi}_t^*(F_0^2),$$

其中， $\tilde{\varphi}_t^*$是 TM 上与完全提升 $\frac{1}{1-2\lambda t}\hat{}V$相关联的单参数群。于是$F(t)$ 构成 Ricci流方程 (31)的一个解，参见 *[10, 第 928]*页。

总之，本文研究了维数为 n 的各向同性芬斯勒流形上里奇流解的短时间存在性和唯一性。我们证明了解的短时间存在性，并且当芬斯勒流形为各向同性时，该解是唯一的。本文的结果凸显了里奇流的多功能性：它不仅可应用于几何学和物理学的各个领域，也可用于计算机图形学、医学成像和曲面匹配。

参考文献

[1] H. Akbar-Zadeh，《全球芬斯勒几何入门》，第68卷，爱思唯尔科学出版社，2006年。

[2] D. Bao, 《黎曼-芬斯勒几何中由曲率驱动的两个问题：纪念松本诚》，《纯数学高级研究》，第48卷，日本数学会，东京，（2007），19-71。[3] D. Bao、S. Chern、Z. Shen, 《黎曼-芬斯勒几何导论》，《数学研究生教材》，第200卷，施普林格，2000年。[4] D. Bao 和 Z. Shen, 《芬斯勒流形中单位切球的体积》，《数学研究成果》，第26卷，（1994），第1-17页。[5] B. Bidabad、P. Joharinad, 《芬斯勒空间上的共形向量场》，《微分几何及其应用》，31，（2013），33-40。[6] B. Bidabad、M.K. Sedaghat, 《芬斯勒曲面上的里奇流》，《几何与物理学杂志》，129，（2018），238-254。[7] B. Bidabad、M.K. Sedaghat, 《芬斯勒里奇标量的演化》，《韩国数学会杂志》，55，第3期，（2018），749-761。[8]B. Bidabad、M.K. Sedaghat, 《芬斯勒空间上的Hamilton里奇流》，https://doi.org/10.48550/arXiv.1508.02893，1-19。[9] B. Bidabad、M. Yar Ahmadi, 《里奇流下芬斯勒度量的收敛性》，《中国科学：数学》，第59卷，（2016），741-750。[10] B. Bidabad、M. Yar Ahmadi, 《关于准爱因斯坦芬斯勒空间》，《伊朗数学会通报》，第40卷，第4期，（2014），921-930。[11] S. Brendle, 《里奇流与球面定理》，第III卷，《数学研究生进阶丛书》，美国数学学会，2010年。[12] B. Chow、D. Knopf, 《里奇流：导论》，《数学调查与专著》，第110卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2004年。[13] D. M. DeTurck, 《沿里奇张量方向变形度量》，《微分几何杂志》18(1)（1983），157–162。[14] R. S. Hamilton, 《具有正 Ricci 曲率的三维流形》，《微分几何杂志》17，（1982），255-306。[15] R. S. Hamilton, 《曲面上的里奇流》，《数学与广义相对论》，《当代数学》71，（1988），237-262。[16] S. Lakzian, 《芬斯勒-里奇流下热方程正解的微分哈纳克估计》，《太平洋数学杂志》，278，第2期，（2015），447-462。

[17] S. Ohta、K. Sturm，芬斯勒流形上的 Bochner-Weitzenb ¨ock 公式与 Li-Yau估计，《Adv. Math.》252（2014），429-448。[18] M. Renardy、R. C. Rogers，《偏微分方程导论》，应用数学丛书，第二版，施普林格，2004年。[19] C. Robles，Randers型爱因斯坦度量，博士论文，不列颠哥伦比亚大学，加拿大，2003年。

Behroz Bidabad[1,2], Maral Khadem Sedaghat[1],bidabad@aut.ac.ir；m sedaghat@aut.ac.ir 1. 阿米尔卡比尔理工大学（德黑兰理工学院）数学与计算机科学系，哈菲兹大道，15914，伊朗德黑兰。2. 图卢兹数学研究所（IMT），保罗·萨巴蒂埃大学，118 route de Narbonne - F-31062，法国图卢兹。
behroz.bidabad@math.univ-toulouse.fr