Draft version April 10, 2023 使用 LaTeX 排版 **预印本** 样式（AASTeX631）

arXiv:2304.03009v2 [physics.space-ph] 7 Apr 2023

地球辐射带中的线性、准线性和非线性径向输运

Adnane Osmane ,[1] Emilia Kilpua ,[2] Harriet George ,[3] Oliver Allanson ,[4,5,6] and Milla Kalliokoski [7]

[1]赫尔辛基大学，物理系，赫尔辛基，芬兰，*00014*[2]赫尔辛基大学，物理系，赫尔辛基，芬兰[3]科罗拉多大学博尔德分校大气与空间物理实验室，美国博尔德[4]伯明翰大学，工程学院，英国伯明翰[5]埃克塞特大学，地球与环境科学系，英国彭林[6]埃克塞特大学，数学与统计系，英国埃克塞特[7]日本宇宙航空研究开发机构，日本东京

摘要

对地球辐射带的观测研究表明，频率范围为 2-25 mHz 的阿尔芬涨落会将磁俘获电子加速至相对论能量。数十年来，地球辐射带的统计模型一直以准线性扩散模型来量化阿尔芬波的影响。然而，准线性模型不足以量化发生时间尺度与 $0.1-10\,\mathrm{MeV}$电子方位漂移周期相当的阿尔芬径向输运。随着观测方法不断进步，如今已能在快速时间尺度上对地球辐射带进行空间和时间覆盖，因此，首次也可以利用原位测量检验一种能够区分快速径向输运与扩散径向输运的理论框架。在本报告中，我们提出一种用于描述行星辐射带径向输运的漂移动力学描述。我们刻画了快到无法用准线性模型建模的线性过程，并确定非线性变得具有显著动力学影响的条件。在线性区域中，波粒相互作用被分为共振响应和非共振响应。我们证明，斑马条纹现象属于非共振现象，可能源于内辐射带中的粒子注入。我们针对一个满足法拉第定律的场模型推导出径向扩散系数，该系数包含两项：一项随与方位模数 m无关的L^{10} 缩放，另一项随 m^2L^6 缩放。在非线性区域中，我们表明，性质与原位测量结果一致的方位对称波能够在不到一个漂移周期内为 10-100 keV电子提供能量。这一相干过程提供了新的证据，表明辐射带中阿尔芬波引起的加速无法完全纳入扩散模型。

通讯作者：Adnane Osmaneadnane.osmane@helsinki.fi

关键词：范艾伦辐射带（1758）；等离子体物理学（2089）；等离子体天体物理学（1261）；阿尔芬波（23）；太阳—地球相互作用（1473）

目录

1. 引言 3 1.1. 研究动机与背景 3 1.2. 准线性模型在地球辐射带中的优势 4 1.3. 关于径向输运新理论框架的必要性 6 1.4. 新一代辐射带径向输运模型 8 1.5. 主要结果总结 8

2. 方法 9 2.1. 漂移动力学 9 2.2. 径向扩散模型所用电磁场综述 14 2.2.1. Mead场 14 2.2.2. 非对称背景场 15

3. 径向输运的线性、准线性和非线性极限 17 3.1. 多尺度动力学与慢变量和快变量的分离 17 3.2. 线性理论与快时间尺度上的径向输运 19 3.2.1. 弹道解与斑马条纹的形成 20 3.2.2. 线性波粒相互作用的解 23 3.3. 径向扩散的准线性理论 27 3.4. 超越径向输运的准线性理论：非线性区域 32 3.4.1. 判定非线性径向输运何时变得显著的标准 33 3.4.2. 对称扰动在快时间尺度上的非线性影响 34

4. 讨论 36 4.1. 何时可以使用准线性径向扩散？ 36 4.2. 快速径向输运 40 4.2.1. 区分漂移共振相互作用与非共振相互作用 40 4.2.2. 斑马条纹形成机制 41 4.3. 非线性帕克机制 42

5. 结论 43

A. 准线性方程的推导 46 B. 非线性扰动方程（32）的推导 47 C. 线性响应中忽略背景分布时间变化的合理性说明（32）

D. 符号表 49

1. 引言

1.1. 研究动机与背景

辐射带是由行星磁场约束的环状等离子体环境。由于多孔边界以及太阳风的能量-动量沉积，地球辐射带持续偏离局域热力学平衡（LTE）状态。由于粒子密度极低[1]，且碰撞之间的平均自由时间为数月至数年，地球辐射带属于弱碰撞环境，但会通过维持大范围的等离子体不稳定性，对偏离 LTE 迅速作出响应；这些不稳定性模拟碰撞并使等离子体热化。等离子体不稳定性会产生广泛的涨落谱，在数小时至数天的时间尺度上将粒子加速至相对论能量。电子能量跨度几乎达到七个数量级，最高可达数兆电子伏（MeV）；地球辐射带是距离我们最近的天然实验室，在这里带电粒子能够被加速到接近光速（Roederer & Zhang 2014年）。

从基础物理学的角度来看，行星辐射带以及大量天体物理等离子体环境都是高效的粒子加速器，这是一个观测事实。地球辐射带构成了最易开展详细原位研究的环境，可用于探讨一系列基础物理学问题，例如宇宙射线的加速（Cronin 1999年）、中高层大气气候学（Turunen 等，2009年），乃至吸积盘的微观物理（Quataert & Gruzinov 1999年；Sironi & Narayan 2015）。吸积盘中的电子压强与磁压之比（$\beta_e = 2\mu_0 n_e k_B T_e / B^2 \simeq 0.1 - 0.01$）以及相对论性电子能量（$\gamma m_e c^2 \simeq 10$ 兆电子伏）与地球辐射带中的相应数值（$\beta_e \simeq 10^{-3} - 10^{-1}$ & $\gamma m_e c^2 \simeq 1 - 10$兆电子伏）相当，因此，黑洞附近（但远离事件视界）的动理学等离子体物理就在我们身边！从应用物理学的角度来看，由于辐射带粒子具有高能量，且被约束在地球静止轨道周围，因此会对环绕地球运行的卫星构成威胁，进而成为通信与军事工业的研究重点。在基础科学问题以及通信基础设施风险缓解需求的推动下，辐射带研究旨在量化高能电子的加速与损失约束过程（Cannon 2013；Horne 等，2018；Hands 等，2018）。

自发现地球辐射带以来超过60年的研究（VanAllen等，1958年），等离子体物理学家确定了两种导致带电粒子输运和加速的主导机制：1）由小尺度动理学涨落驱动的局域化波粒相互作用（Thorne，2010年），以及2）大尺度电磁涨落，这些涨落由全球磁层电流诱发，并纳入径向扩散的形式体系中（Lejosne & Kollmann，2020年）。在近周期性哈密顿系统中，这两种机制都可以根据绝热不变量理论来理解（Cary & Brizard，2009年）。在不存在碰撞的情况下，磁俘获电子的运动可以完全分解为三种截然不同时间尺度的独立运动：

[1]电子的热成分粒子密度约为 $n \leq 1$ cm^{-3}。数十和数百千电子伏的较暖电子群体稀薄得多，其密度低了几个数量级。

1. 围绕局部磁场的拉莫尔运动（$\Omega \simeq 1-10\,\mathrm{kHz}$），2.在磁镜点之间的弹跳运动（$\omega_b \simeq 0.1-1\,\mathrm{Hz}$），3. 围绕地球中平面的方位漂移（$\Omega_d \simeq 0.1-1\,\mathrm{mHz}$）。

要破坏三种周期运动之一，必须有频率与其中一种周期运动相当的波与粒子相互作用。由于地球辐射带存在宽带涨落，其频率范围为 10^{-4} Hz 至 10^{4} Hz（Murphy等 2020年），三个不变量都可能被反复破坏。如果两个第一绝热不变量之一 $\mu = E_{k\perp}/B$ 和 $\mathcal{J} = \int p_{\parallel}\, ds_{\parallel}$（以垂直动能 $E_{k\perp} = |\mathbf{p}_{\perp}|^2/m$、局地磁场强度 B以及沿局地平均磁场方向的相对论动量 $p_{\parallel} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{B}/B = m\gamma v_{\parallel}$定义）遭到破坏，小尺度动理学涨落就会加速电子。另一方面，第二种主要机制——径向扩散——源于大尺度 Alfv´én 波，其频率处于 Pc4（$\omega \sim 8-25\,\mathrm{mHz}$）和 Pc5（$\omega \sim 2-7\,\mathrm{mHz}$）范围内，可破坏第三绝热不变量，即磁通量 $\Phi = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}$（Kulsrud 2005年；Roederer 和 Zhang 2014年）。

在偶极磁场中，磁通量的倒数可以更简洁地表示为中平面上的归一化径向距离 $L = r/R_E$，其中 R_E 为地球半径 [2]。因此，与 Pc5 范围内的 Alfv´én 涨落发生漂移共振的一群粒子会沿径向距离发生散射。这种散射可以用福克–普朗克方程进行统计建模，其观测特征是分布函数沿径向距离呈扩散性展平 L^*。在第一和第二绝热不变量守恒的情况下，被带向更靠近地球处的粒子会经历 β振荡过程而获得能量（Kulsrud 2005），因为它们所处的磁场更强；而扩散至更大径向距离的粒子会处于较弱的磁场中，损失能量，并且更可能在外磁层顶边界处损失（Turner 等，2012年；George 等，2022年）。

同样，对于一组粒子，其第一和第二绝热不变量遭到破坏的情况，也采用福克-普朗克方程来建模（Lichtenberg & Lieberman 1983）。与径向扩散不同，与前两个不变量相关的散射会在径向距离上造成局部增强。因此，从观测角度来看，可以利用卫星数据计算以三个绝热不变量表示的分布函数，从而推断哪种加速机制占主导地位，即$f(\mu,\ \mathcal{J},\ L^*)$（Green & Kivelson 2004）。如图（1）所示，如果径向扩散占主导地位，分布函数会沿径向距离趋于平坦；但如果小尺度波是主要驱动因素，则应能观测到沿径向距离的局部增强。当前对辐射带的观测和建模研究依赖这一概念框架，以判断两种机制中哪一种占主导地位，作用时间尺度从数小时到数天（Chen et al. 2007；Reeves et al.2013；Jaynes et al.2018）。

1.2. 准线性模型在地球辐射带中的优势

用于量化和解读辐射带在几小时至数天时间尺度上的动力学演化的理论框架，完全依赖于准线性理论（Kennel & Engelmann

[2]应当牢记，当背景偶极磁场在相对于漂移周期较长的时间尺度上发生变形时，第三绝热不变量并不映射为归一化径向距离。本通信中使用的背景磁场模型为偶极型，因此第三绝热不变量可以解释为径向距离。

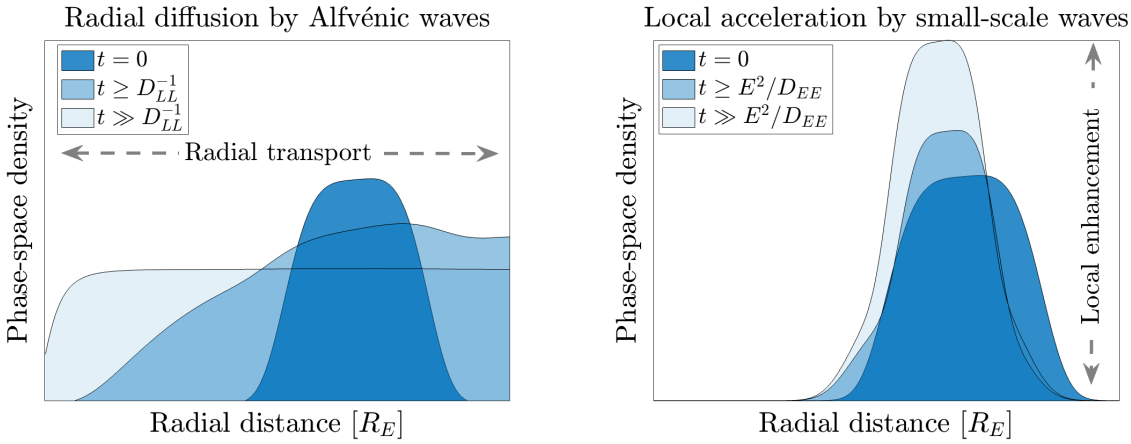


图 1. 行星辐射带中带电粒子加速概念框架示意图。在 $t = 0$ （较深阴影区域）注入粒子并产生等离子体不稳定性后，相空间密度将发生形变。左图中，阿尔芬¨涨落驱动径向扩散，使相空间密度沿赤道径向距离趋于平坦（Lejosne &Kollmann 2020）。散射至较小径向距离的粒子会进入磁场更强的区域，并通过 β 振荡过程获得能量。相比之下，小尺度波动的特征是在径向距离方向上出现局部增强（Green& Kivelson 2004），如右图所示。右图中峰值的径向偏移说明，第一和/或第二绝热不变量的破坏¨也会导致第三绝热不变量发生变化（Ozt¨urk & Wolf2007；O'Brien 2014；Desai 等人 2021）。这两种框架均以福克-普朗克方程表示。Pc4 和 Pc5 阿尔芬¨波引起的输运由径向扩散系数 D_{LL}表征。小尺度相互作用引起的输运由能量扩散系数 D_{EE} 表征（Summers 2005；Shprits 等人 2006）。

1966； F¨althammar 1965； Diamond 等人 2010； Brizard & Chan2022年）。对辐射带研究中准线性模型的压倒性依赖并非偶然，因为它提供了两项替代理论方法和计算方法所不具备的优势：

1. **计算成本低廉的简化模型**
   完整的粒子运动需要一个 7维描述（三个绝热不变量及其对应的三个相位，再加上时间）。由于高能电子的能量跨度达四个数量级，时间和空间跨度均超过六个数量级，因此需要简化统计模型来描述发生在至少数小时时间尺度上的地磁暴。用于小尺度波粒相互作用的准线性模型（Summers 2005；Shprits等人2006）和径向扩散（Lejosne & Kollmann2020年）采用福克-普朗克方程的形式，计算成本低廉，并且可以轻松地应用于全球磁层模型中。

2. **可推广性**
   由于负责破坏三个绝热不变量的电磁场测量数据稀疏，准线性模型将波粒相互作用编码为具有简单代数形式的扩散系数。例如，径向扩散系数可根据地面磁力计的测量结果进行参数化（Brautigam & Albert2000），这些测量结果与驱动辐射带动态变化的涨落相关。因此，现有准线性模型可以推广到无法获取原位测量数据的时段。

准线性模型与数据的比较表明，在若干事件中，能够准确估算电子通量（Reeves 等人 2013年；Thorne 等人 2013年；Jaynes 等人 2015年）。然而，准线性模型占据主导地位也源于这样一个事实：构建偏离准线性假设的统计模型是一项突出的理论挑战，因为这属于多尺度非线性问题的范畴（Dupree 1966年；Orszag & Kraichnan 1967年；Dupree 1972年；Schekochihin等人 2008年；Diamond等人 2010年；Davidson 2012年）[3]。此外，直到最近，随着采用范艾伦探测器校准的140千电子伏-4兆电子伏电子全球定位系统通量，才发展出能够量化时间尺度与漂移周期相当的高能粒子通量演化的多点卫星方法（Morley等人 2016年；Kalliokoski 等人 2023年）。全球定位系统仪器与范艾伦探测器相结合，首次提供了前所未有的大量测量点，从而实现了对辐射带更广泛的空间覆盖，并在漂移壳层方面提供了更高的时间分辨率。根据全球定位系统电子计数推断、并通过搭载于范艾伦探测器上的 MagEIS 和 REPT 仪器进行校准的高能电子通量（Morley等人 2017年）可用于量化快到无法通过径向扩散进行量化的过程。因此，目前已经能够通过观测研究漂移周期时间尺度上的辐射带过程，而能够量化 Pc4和Pc5 波在与漂移周期相当的快速时间尺度上影响的统计模型仍然缺失。

为了纳入全球模型，能够补充并取代准线性模型的辐射带新工具必须具备上述优势。在本文中，我们提供了一个理论框架，以解决径向扩散模型的局限性，并将径向输运扩展至准线性描述之外。但在此之前，我们将介绍准线性理论的局限，以及它如何限制对辐射带观测研究的解读。

1.3. 关于建立新的径向输运理论框架的必要性

辐射带中的准线性模型是平均场理论，假设电子与小振幅波之间的平均 相互作用能够准确描述粒子在长时间尺度上的演化，并且可以忽略由模态间耦合或粒子轨道引起的非线性效应。因此，辐射带中的准线性模型包含以下固有约束[4]：

1. **快速时间尺度与扩散时间尺度之间的尺度分离**
   在准线性模型中，许多波对分布函数的累积影响是缓慢且具有扩散性的（Vanden Eijnden 1997年）。这种缓慢的扩散时间尺度与单次波同粒子相遇/传播时间所对应的快速时间尺度形成对比。当扩散的时间尺度变得与波粒相互作用的传播时间相当时，准线性层级便会失效（Kennel &Engelmann 1966）。

2. **不存在非线性过程**
   快速响应 o　　若假设分布函数未受扰动且为非线性

[3] 对动理学等离子体物理中非线性多尺度问题的研究由来已久，但直到最近，我们才获得足够的计算能力，能够在等离子体聚变和天体物理环境中对这些问题进行研究（Schekochihin等 2016年；Adkins & Schekochihin 2018年；Kawazura等 2019年；Meyrand等 2019年）。[4]当前的径向扩散模型还假设涨落在空间上具有统计均匀性。通过对辐射带的观测可知，这一假设是不正确的（Murphy等 2020年； Sandhu等2021年），但在准线性框架下仍可对其进行修改，因此我们没有将其列为径向扩散模型固有的局限性。

粒子俘获等过程（Bernstein 等，1957年；Artemyev 等，2012年；Osmane 等，2016年）或模态耦合（Schekochihin 等，2016年；Adkins 和 Schekochihin，2018年）均被忽略。

基于第一项约束，以福克-普朗克方程表示的慢扩散不能用于描述时间尺度与单次相互作用或穿越时间相当的快速时间尺度上的粒子加速。然而，在高地磁活动期间，用于径向输运的当前扩散系数会变得足够大（Brautigam & Albert 2000；Ozeke 等 2014年；Sandhu 等2021年），从而违反尺度分离准线性约束。例如，Ozeke 等 (2014年的图 4 显示，扩散系数 D_{LL} 可能达到 $10^2 - 10^3$ 天$^{-1}$，对于Kp > 5。因此，粒子跨越一个漂移壳层所需的扩散时间ΔL^* 介于 $\tau_D \simeq 15$ 几分钟到数分钟之间。同样，如果粒子在与一个方位漂移周期相当或更短的时间尺度上耗减，那么就无法使用准线性模型量化径向输运对损失的影响。Olifer 等(2018年）通过观测表明，在强烈磁暴期间可能会发生时间尺度短至半小时的快速损失。这类输运时间尺度与准线性理论不一致，因为后者依赖于快速和慢速时间尺度之间的尺度分离，而快速时间尺度与方位漂移轨道的时间相当，约为几十分钟至数小时。

第二个约束可以这样解释：大振幅涨落在统计上很少见；电子在遇到大振幅波之前，会受到小振幅涨落的数百次散射。然而，从理论角度来看，要使非线性效应与线性项相当并导致准线性理论失效，波的振幅无需很大。天体物理学和流体湍流领域的专家熟知非线性系统的这一性质，它也是临界平衡假设的基础；在临界平衡中，穿越时间变得与非线性交互时间相当（Goldreich & Sridhar 1995)[5]。

在过去15年里，关于地球辐射带核心区域中快速非线性过程的观测证据和理论研究已大量涌现，但通常都与电子尺度的哨声波和合声波有关（Cattell 等人，2008；Cully 等人，2008；Bortnik 等人，2008；Albert 等人，2012；Mozer 等人，2013；Malaspina 等人，2014；Santol´ık 等人，2014；Artemyev 等人，2012、2015；Agapitov 等人，2015；Osmane 等人，2016、2017；Tao 等人，2020；Omura，2021），以及离子尺度的 EMIC 波（Hendry 等人，2019；Grach 等人，2022；Bortnik 等人，2022）。除 Degeling 等人（2008）和 Li 等人（2018）的数值研究，以及 Kanekal 等人（2016）报告的极端驱动事件外，快速非线性径向输运鲜少得到考虑，也尚未纳入全球模型。然而，观测研究证实了大振幅涨落的存在，这些涨落能够维持径向输运。例如，Hartinger 等人（2013）证明，在中等地磁活动期间，短暂的前震区扰动会产生超低频（ULF）电磁场，其强度分别高达 10 mV/m 和 10 nT。Simms 等人（2018）开展的一项统计研究，以及 Osmane 等人（2022）进行的一项信息论分析，刻画了高能电子通量的统计依赖关系。

[5]在临界平衡中，线性穿越时间尺度（阿尔芬波包穿越另一个阿尔芬波包所需的时间）变得与非线性交互时间相当。在非线性径向输运问题中，穿越时间尺度（磁俘获粒子穿越／采样一个阿尔芬波所需的时间）变得与非线性效应显现所需的时间相当。第3.4节对此进行了量化。

在地球辐射带中，基于地面和地球静止轨道测得的超低频波功率开展研究。两项研究均表明，超低频波功率与高能电子通量之间存在非线性耦合[6]。随着非线性效应变得显著，准线性模型的尺度分离约束也会失效。在本文中，我们提出了一个理论框架，用于区分准线性扩散与快速线性和非线性过程。

1.4. 下一代辐射带径向输运模型

地球辐射带的物理学具有非线性、高维和多尺度特征，在持续数小时至数天的地磁暴期间，对时间跨度从毫秒到数小时的高能粒子运动进行解析在计算上是不可行的。因此，人们开发了依赖准线性理论的简化统计模型，根据物理驱动因素（即太阳风和磁层中的物理驱动因素）预测高能电子的动力学演化。随着卫星观测及其覆盖范围不断增加，我们现在知道，大振幅的阿尔夫´维波动和发生在超出准线性径向扩散能力的时间尺度上的快速过程，在辐射带中十分常见（Li 等人 1993年；Turner等人 2012年；Hartinger等人 2013年；Kanekal等人 2016年；Olifer 等人 2018年）。因此，当前的建模工具无法量化快速和/或非线性径向输运对高能电子的影响，也无法将其与小尺度波粒相互作用区分开来。图（2）展示了径向扩散所涵盖的空间和时间尺度，并将其与特征波和粒子运动进行了比较。为了刻画在快速时间尺度上发生的过程，我们需要使用一种能够考虑漂移运动期间变化的简化统计框架。漂移动力学模型几十年来一直在发展，主要用于实验室聚变等离子体（Goldston 和 Rutherford 1995年；Parra 和 Catto2008年），但它也是量化Pc4和Pc5超低频波对高能电子影响的理想起点；这些电子属于长波长（$k\rho_e \ll 1$）和低频极限（$\omega/\Omega_e \ll 1$）。

1.5. 主要结果总结

- 用于量化径向输运的磁场模型选择对于径向输运模型至关重要，并且需要遵循麦克斯韦方程组。如果违反法拉第方程，我们证明刘维尔定理也无法得到遵循，因此相空间密度不守恒。这一结果也对全球磁层模拟中的试验粒子实验有影响（Tu 等，2012年）。如果模拟区域中不遵循法拉第方程，根据粒子轨迹构建分布函数可能会违反刘维尔定理。

- 分布函数对单一 Alfv´én 超低频模的线性波粒响应由三个独立项组成，其中两个是非共振过程，一个是共振过程：1）按超低频波频率 ω 对分布函数进行非共振调制；2）按粒子的漂移频率 Ω_d 对分布函数进行非共振调制，称为漂移回波；3）当超低频波的频率与粒子的漂移频率相对应时，即 $\omega \simeq \Omega_d$，产生漂移共振响应。以上三者皆丁香五月

[6]出乎意料的是，研究发现，100 千电子伏的高能电子与超低频波之间具有最强的统计依赖关系，而这些波本应只与相对论性电子 > 1 兆电子伏共振。在第 3.4.2 节中，我们提出了一种准线性径向扩散未考虑的非共振机制，可以解释以下研究结果：Simms 等人 (2018年) 和Osmane 等人(2022年) 的结果，这些结果是由超低频波驱动的 100–400 千电子伏电子的脉冲式加速所致。

响应是背景分布函数径向梯度的函数，而根据超低频波频率进行的调制，有时被解释为漂移共振的证据（Claudepierre 等人 2013年），也可能是非共振相互作用的产物。

• 斑马条纹的形成不需要漂移共振相互作用；在不存在超低频波和分布函数径向梯度的情况下，它们可能是内辐射带中注入粒子的标志。我们认为，Zhao 和 Li (2013年) 报告的注入事件提供了形成斑马条纹所需的所有要素。

• 我们从漂移动力学方程推导出一个由两项组成的准线性径向扩散系数。第一项与波的方位波数无关， m 并按L^{10}缩放；第二项是方位波数的函数，并按 L^6缩放。该扩散系数考虑了满足法拉第方程的电场和磁场涨落，因此，将扩散系数拆分为电场和磁场两部分 D_{LL}（如文献中常见的做法（Fei 等人 2006；Ozeke 等人 2014年；Sandhu 等人 2021年））已无必要。仅凭磁场波功率即可计算我们推导出的扩散系数。

• 我们提出了判定标准，用以确定非线性径向输运过程在何种条件下会变得显著，其时间尺度与漂移周期相当。我们证明，考虑非线性效应后，对称的压缩性超低频波可通过使电子向内对流，将能量约为 10 至数百千电子伏的电子加速。该过程是对Parker (1960) 所提出机制的非线性推广，且不需要漂移共振。

2. 方法

2.1. 漂移动力学

在强磁化等离子体中，带电粒子的运动可分解为绕局部磁场的快速回旋运动，以及其导引中心的运动。当假设电场和磁场（分别为$\mathbf{E}$ 和$\mathbf{B}$）在时间上恒定、空间上均匀时，拉莫尔运动可解析求解。不过，这一解也可推广至更一般的电磁场：在与拉莫尔周期 $\Omega_s^{-1} = m_s/q_sB$相当的时间尺度上近似恒定，并在拉莫尔半径 $\rho = v/\Omega_s$量级的空间尺度上近似恒定；其中， v 是采样该场的粒子的特征速度， q_s 是电荷量， m_s 是粒子种类的静止质量（质子对应$s = p$ ，电子对应 e ）。

我们考虑一个具有特征尺度 l 和频率 $\omega \sim v/l$ 的系统。系统的时间尺度和空间尺度可根据电磁场的导数进行估算：

$$\nabla\mathbf{E} \sim \frac{\mathbf{E}}{l}, \quad \nabla\mathbf{B} \sim \frac{\mathbf{B}}{l}, \quad \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \sim \omega\mathbf{E}, \quad \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \sim \omega\mathbf{B}. \tag{1}$$

对于足够强的背景磁场，可以将小参数 ε 定义为：

$$\varepsilon = \frac{\rho}{l} = \frac{mv}{qBl} \ll 1, \quad \frac{\omega}{\Omega} = \frac{m\omega}{qB} \sim \varepsilon \ll 1. \tag{2}$$

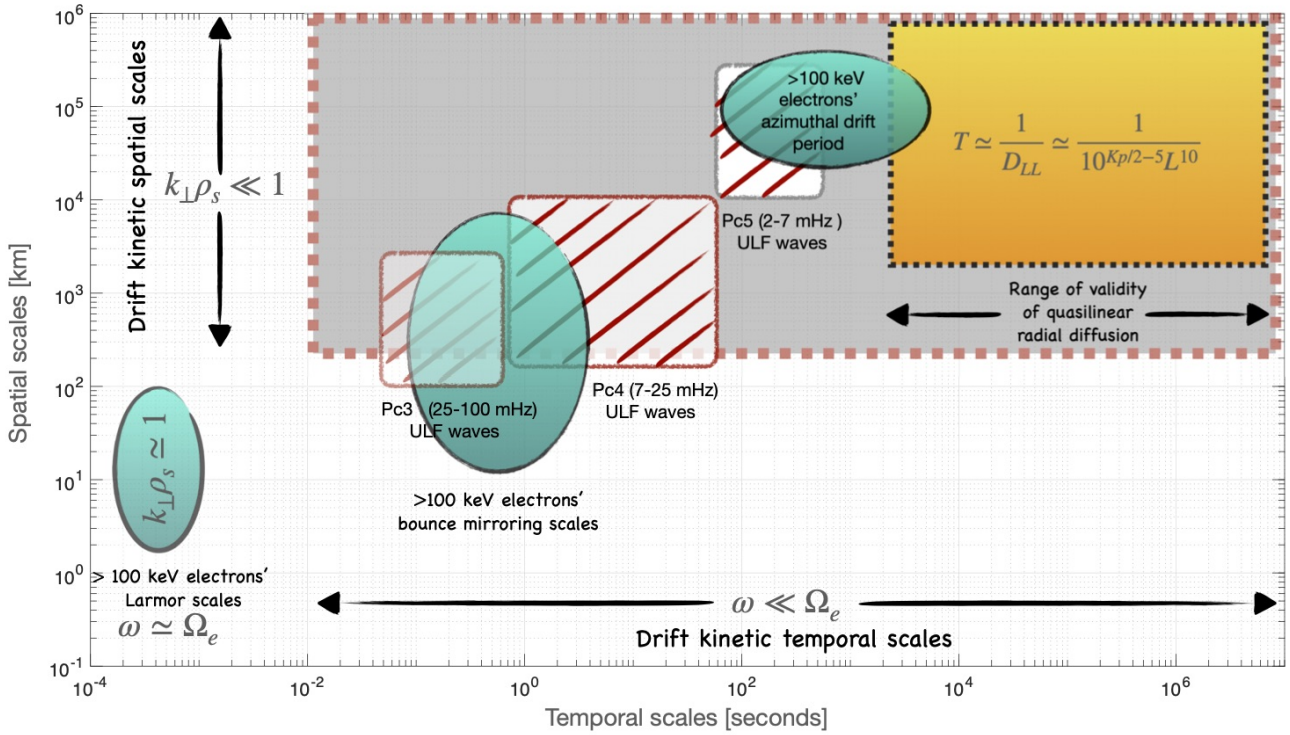


图2。 地球辐射带中电磁场和粒子运动的空间和时间尺度
辐射带及其与理论极限的关系。拉莫尔运动、反弹镜像运动和方位角
漂移运动以青绿色椭圆表示。频率范围为 2-100 mHz 的超低频波以阴影显示
矩形。准线性径向扩散的有效范围以黄色表示，而其覆盖的范围为
漂移动力学（包括准线性径向扩散）以灰色表示。准线性娱乐官方网站的左边界
区间由从Brautigam &Albert 获得的径向扩散系数的倒数计算得出。
(2000) 对于 $L = 8$ 和Kp= 6，这对应于强地磁条件。一个 D_{LL} 在 $L = 8$ 和
Kp= 6 表示在30分钟的时间尺度内跨越一个L壳层的径向输运。对于一个 > 4 兆电子伏电子，
漂移周期约为 3 分钟，经过 10 次方位漂移后，一个漂移壳层上的径向扩散
周期非常短，但或许可以通过准线性扩散实现。对于能量较低的电子，例如 400
千电子伏时，一次完整的方位漂移大约需要 20 分钟，而在不到一个漂移壳层内的扩散
两个方位漂移与在快速时间尺度上发生小变化的准线性假设不一致。它
因此，应牢记，准线性径向扩散的有效范围会变小。
对于能量较低的粒子。

在此极限下，粒子在特征拉莫尔时间和空间尺度内不会感受到电磁场的显著变化。通过选择适当的坐标，可以将快速回旋

可以忽略导引中心周围的运动，并由此构建磁化等离子体中一群粒子的动理学理论（Parra2019）。换言之，从洛伦兹方程或哈密顿方程出发，计算粒子在缓慢变化的电磁场中的运动，可以建立一种统计描述，描述受大尺度非均匀磁场约束的粒子（Goldston & Rutherford 1995；Parra & Catto 2008；Cary & Brizard 2009；Hazeltine & Meiss 2013）。因此，在地球辐射带中，这种描述适用于拉莫尔周期为 $\Omega_e^{-1} \sim 0.1 - 1$ ms、并与 Pc4（$\omega \sim 8-25$ mHz）和 Pc5（$\omega \sim 2-7$ mHz）超低频（ULF）范围内的电磁涨落相互作用的高能电子[7]。

在本研究中，我们采用一种称为漂移动力学的导引中心动理学理论，量化与超低频波动相互作用的高能粒子的径向输运。我们的出发点是由 Hazeltine （1973年）[8]递归推导出的守恒漂移动理学方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}(B\langle f\rangle) + \nabla\cdot(B\dot{\mathbf{r}}\langle f\rangle) + \frac{\partial}{\partial v_\parallel}(B\dot{v}_\parallel\langle f\rangle) + \frac{\partial}{\partial \mu}(B\dot{\mu}\langle f\rangle) = 0, \tag{3}$$

以陀螺平均分布函数 $\langle f\rangle$ 定义如下

$$\langle f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}, v_\parallel, \mu, \theta_g, t)d\theta_g, \tag{4}$$

导引中心位置矢量 $\mathbf{r}$、平行速度 $v_\parallel$、陀螺相位 θ_g及第一绝热不变量μ,

$$\mu = \frac{1}{2}\frac{m_e c^2(\gamma^2-1)}{B}\sin^2(\alpha). \tag{5}$$

方程 (5) 中的 μ 以平行速度 $v_\parallel$、俯仰角 $\alpha = \tan^{-1}(v_\perp/v_\parallel)$ 和相对论洛伦兹因子 $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ 表示，以考虑动能 $E_c = m_e c^2(\gamma - 1)$ 与电子静止质量 $m_e c^2 = 511$千电子伏 [9] 相当的粒子所出现的相对论修正。

方程 (3) 中出现磁场强度 B ，源于将变量从 $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ 变换为 $(\mathbf{r}\ \mu, v_\parallel, \theta_g)$ 时产生的雅可比行列式。在没有碰撞的情况下，对于一组导引中心粒子，相空间密度守恒要求满足以下方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}(B) + \nabla\cdot(B\dot{\mathbf{r}}) + \frac{\partial}{\partial v_\parallel}(B\dot{v}_\parallel) + \frac{\partial}{\partial \mu}(B\dot{\mu}) = 0, \tag{6}$$

方程（6）是刘维尔定理的表述，是电磁场模型和导引中心粒子轨迹的函数。在开放系统中，电磁涨落的影响自然会导致输运至边界，从而造成不可逆损失。

[7]地球和行星辐射带还会维持高频电磁涨落，其特征频率 ω 与拉莫尔频率 Ω_s相当，例如地球上的哨声模波支（极低频/甚低频）（参见Ukhorskiy & Sitnov (2012年，了解更多细节）。因此，依赖于小参数排序（2）的漂移动力学描述无法推广到与此类模的波粒相互作用，而需要求助于完整的麦克斯韦-弗拉索夫系统（Kulsrud 2005）。[8]Hazeltine （1973）结果的教学式逐步推导可见于Parra （2019年）的讲义中。这些讲义可访问 http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/FelixParra/CollisionlessPlasmaPhysics/CollisionlessPlasmaPhysics.html。[9] 在地球辐射带中，粒子以约1-100千电子伏的能量注入，但会被加速到与静止质量相当的能量，最高可达数兆电子伏（Turner et al. 2017年）。因此，跟踪相对论效应至关重要。在我们仅限于赤道俘获粒子的特定问题中，相对论效应出现在第一绝热不变量中，但若要扩展到非赤道俘获粒子，则需要用平行动量表示漂移动力学方程的相对论形式$p_\parallel = m_e\gamma v_\parallel$。

地球和行星辐射带并非封闭系统，内边界和外边界允许粒子注入和损失（Millan 和Thorne 2007年；Aryan 等 2020年；Walton 等 2022年）。然而，在不存在边界效应的情况下，与超低频波的波粒相互作用必须守恒相空间密度。因此，方程（6）表达的是另一种与多孔边界是否存在无关的陈述，并确定在封闭相空间体积中相空间密度以及粒子数是否守恒。选择会破坏相空间密度的场模型是不符合物理的，并且必然会导致错误的准线性扩散系数。例如，如果选择了一个不守恒相空间密度的场模型，并加入边界效应，则产生的损失将被放大或低估。因此，刘维尔定理可以用作电磁场的约束条件，如第（2.2）节所示。

对于给定的问题，$(\mathbf{r}^{v_\parallel}, \mu)$ 相空间中的粒子导引中心描述，取决于电场相对于磁力的强弱。如果粒子特征速度与 $E \times B$ 漂移相当，就可以忽略垂直漂移的其他来源。例如，在无碰撞磁流体力学近似中，离子和电子流体的垂直速度在一阶近似下与 $E \times B$ 漂移相当，因此可以通过将垂直速度近似为 $E \times B$(Hazeltine 2018年)，从动理学方程推导出磁流体力学流体方程。然而，如果额外漂移的大小与 $E \times B$ 漂移相当，或者粒子群的特征速度远大于 $E \times B$ 漂移，离子和电子的垂直速度就会彼此解耦，因此必须考虑额外漂移。

Hazeltine (1973) 提出两种区制，以描述给定问题中 $E \times B$ 的排序：高流速区制，此时垂直电场 $|\mathbf{E}_\perp| \simeq vB$ 较强；以及低流速区制，此时电场较弱，$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移远小于粒子特征速度。因此，在高流速区制中，垂直电场可与磁力相当，$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移是主导漂移。在低流速排序中，垂直电场无法平衡磁力；由于 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移不是主导漂移，因此必须考虑额外的磁漂移，例如曲率漂移和磁场梯度漂移 $-\mu \nabla B$ 。

对于应用于地球辐射带中动能在数百千电子伏至数兆电子伏之间、并与超低频波相互作用的高能电子的情况，低流速区制是正确的极限，因为它考虑了磁场梯度漂移相对于 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移的主导作用。由于磁场梯度漂移占主导，地球辐射带中的高能电子完成一次完整方位环绕所需的时间，从兆电子伏电子的几分钟到能量为 50 至数百千电子伏电子的几小时不等。相比之下，方程（7）中的额外漂移在这些时间尺度上较弱。不过，我们仍追踪额外漂移，因为它们经过累积，会在数小时至数天的较长时间尺度上导致粒子不可逆地跨越漂移壳层输运（Lejosne & Kollmann 2020）。

在低流速区制下，位置在小参数 ε 的一阶近似下按[10]演化：

$$\dot{\mathbf{r}} = \left(v_\parallel + \frac{\mu}{q_s}\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b}\right)\mathbf{b} - \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{b}}{B} + \frac{v_\parallel^2}{\Omega_s}\mathbf{b}\times(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{b} + \frac{\mu}{q_s B}\mathbf{b}\times\nabla B, \tag{7}$$

以局部磁场方向 $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ 表示。这五项依次为平行于磁场的速度、Ba˜nos 平行漂移、 E 叉乘 B 漂移、曲率漂移和磁场梯度漂移。结合粒子的位置，平行速度的演化方程为

$$\dot{v}_\parallel = \left[\frac{q_s}{m_s}\mathbf{E} - \left(\frac{\mu+\tilde{\mu}}{m_s}\right)\nabla B\right]\cdot\mathbf{b} + \frac{v_\parallel}{\Omega_s}\left[\mathbf{b}\times(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{b}\right]\cdot\left(\frac{q_s}{m_s}\mathbf{E} - \frac{\mu}{m_s}\nabla B\right) - v_\parallel\frac{\mu}{q_s}\mathbf{b}\cdot\nabla\left[\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b}\right], \tag{8}$$

以第一绝热不变量的修正表示

$$\tilde{\mu} = -(v_\parallel\mu/q_s B)\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b}. \tag{9}$$

第一绝热不变量的演化方程为

$$\dot{\mu} = -m_s v_\parallel\mathbf{b}\cdot\nabla\tilde{\mu} - (q_s\mathbf{b}\cdot\mathbf{E} - \mu\mathbf{b}\cdot\nabla B)\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial v_\parallel}. \tag{10}$$

将方程 (3)、(7)、(8)、(10) 与符合刘维尔定理（方程 6）的电磁场模型结合起来，可以量化行星磁层中一群高能粒子分布函数的演化；其时间尺度远短于准线性时间，因此与磁场约束粒子的方位漂移周期相当。因此，漂移动力学方法为多种模型（线性、准线性、非线性，以及带有或不带多孔边界的模型）奠定了基础，用于描述粒子的 ULF径向输运。

先验地 漂移动理学方程组是非线性的，因此难以进行解析求解。然而，在研究局限于地球磁层赤道处的高能粒子时，可以对方程进行简化。赤道俘获粒子的俯仰角$\alpha = \tan^{-1} v_\perp/v_\parallel \simeq \pi/2$ ，因此 $v_\parallel = 0$。此外，由于不存在超低频波平行电场，因此 $\dot{\mu} = 0$、 $\dot{v}_\parallel = 0$，对于固定磁矩 μ_c，分布函数 f（$\mathbf{r}$ $v_\parallel = 0$， $\mu = \mu_c$）的守恒动理学方程的演化可简化为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(B\langle f\rangle) + \nabla\cdot(B\dot{\mathbf{r}}\langle f\rangle) = 0. \tag{11}$$

在本通讯的其余部分，我们将使用动理学方程 (11) 描述赤道俘获粒子，并将推广至非赤道粒子 ($\alpha \neq \pi/2$) 留待未来工作[11]。但在求解动理学方程之前，我们需要为其补充一个电磁场模型。

[10]阶数为 $\varepsilon^2 \simeq (\rho/l)^2$ 的项被忽略。[11]由于超低频波传播到赤道平面之外（Sarris 等，2022年），因此必须将额外漂移纳入非赤道粒子的考虑范围。

2.2. 径向扩散模型所用电磁场综述

在本节中，我们回顾用于模拟ULF径向输运的电磁场。我们仅关注可用解析形式表示、且已用于模拟福克-普朗克方程系数的电磁模型。本节的目的还在于说明，任意选择电磁场可能会违反方程（6）所给出的相空间密度守恒。

2.2.1. *Mead场*

Mead场（Mead1964年）由两个扰动的叠加构成：振幅为 $S(t)$ 的方位对称扰动，以及方位非对称扰动 $A(t)r\cos(\varphi)$，叠加于振幅为 $B_E R_E^3/r^3$的背景磁偶极场之上。Mead模型的优点在于数学上简单，同时通过引入非对称扰动，包含了磁俘获粒子集合所经历的第三绝热不变量破坏所需的全部要素。因此，Mead场自然成为早期径向扩散模型的选择（F¨althammar 1965年；Schulz & Eviatar 1969年；Schulz & Lanzerotti1974年），并在过去几十年中被用作准线性径向扩散经验研究（Brautigam & Albert 2000年；Cunningham 2016年；Sarma等人 2020年）和理论研究（Lejosne 2019年；Osmane & Lejosne2021年）中的场模型。

在我们的分析中，我们将论证，选择Mead场更适合用于解析研究。如第2.1节所述，我们在此将专门关注赤道俘获粒子，但请注意，也可以将其推广至非赤道粒子。我们还将Mead场推广至具有方位波数 $m \neq 1$ 的反对称扰动。由于各种 m 模态所导致的扰动分布函数彼此独立，因此这种对Mead场的推广对线性和准线性径向输运方程影响甚微。而在径向输运的非线性区域中，如第（3.4）节所示，各种 m 模态的模态耦合则可以相互作用。

因此，赤道粒子的磁场可用柱坐标（r，φ，z）表示，其中 r 为径向距离，φ 为方位角，而 z 为柱轴方向：

$$\mathbf{B} = -\left(\frac{B_E R_E^3}{r^3} - S(t) - \sum_m A_m(t) r e^{im\varphi}\right)\hat{z} \tag{12}$$

以磁场偶极矩 B_E 和地球半径 R_E表示。令 $m = 1$ 并取傅里叶求和分解的实部，即可还原原始的简化Mead场。将Mead场推广至任意数量的 m模态，是基于观测测量结果；这些结果表明，地球辐射带能够维持涵盖超低频波的宽频谱 m （Sarris 2014年；Barani等人 2019年），并且在地磁Kp指数大于4所表征的强驱动条件下，$m = 1$ 模型并不准确（Lejosne等人 2013年）。

利用法拉第定律，感应电场可写为：

$$\delta\mathbf{E} = \left(\frac{1}{7}r^2\sum_m \frac{i\dot{A}_m}{m}e^{im\varphi}\right)\hat{r} - \left(\frac{r\dot{S}}{2} + \frac{8r^2}{21}\sum_m \dot{A}_m e^{im\varphi}\right)\hat{\varphi}. \tag{13}$$

上述Mead场会产生两种漂移，即 $E \times B$ 漂移，

$$-\frac{\delta \mathbf{E} \times \mathbf{b}}{B} = \left(\frac{r\dot{S}}{2B} + \frac{8r^2}{21B} \sum_m \dot{A}_m e^{im\varphi} \right) \hat{r} + \left(\frac{1}{7} \frac{r^2}{B} \sum_m \frac{i\dot{A}_m}{m} e^{im\varphi} \right) \hat{\varphi} \tag{14}$$

以及针对电子电荷 $e = -q$ 写出的磁场梯度漂移[12]：

$$\frac{\mu}{q\gamma} \frac{\nabla B \times \mathbf{b}}{B} = \left(\frac{3\mu B_0}{qB\gamma r} + \frac{\mu}{q\gamma B} \sum_m A_m e^{im\varphi} \right) \hat{\varphi} - \left(\frac{\mu}{q\gamma B} \sum_m imA_m e^{im\varphi} \right) \hat{r}, \tag{15}$$

用背景磁偶极子大小 $B_0 = B_E R^3/r^3$ 和大小$B = B_0 - S(t) - \sum_m A_m(t) r e^{im\varphi}$表示。

一组被俘获在磁偶极场中并与超低频波动相互作用的粒子的相空间密度守恒可写为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \cdot (B\dot{\mathbf{r}}) + \cancelto{0}{\frac{\partial (B\dot{v}_\parallel)}{\partial v_\parallel}} + \cancelto{0}{\frac{\partial (B\dot{\mu})}{\partial \mu}} &= \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\delta \mathbf{E} \times \hat{z} - \frac{\mu}{q\gamma} \nabla B \times \hat{z} \right) \\ &= \hat{z} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \delta \mathbf{E} \right)}_{=0, \text{ by Faraday's law.}} - \frac{\mu}{q\gamma} \underbrace{\nabla \cdot (\nabla B \times \hat{z})}_{=0, \text{ identically.}} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

其中，方程（16）右侧的第一项是法拉第定律沿背景磁场方向**b**的投影。由于我们仅关注Mead场中的赤道俘获粒子，因此可以转换到柱坐标（r，φ，$\theta = z$）。因此，只要满足法拉第定律在平均磁场方向上的投影，约束于磁偶极子中的粒子的相空间密度就始终守恒。由此可推论，不满足法拉第定律的时变电场选择不满足麦克斯韦方程，并且还会带来一个额外的不良后果，即无法保持相空间密度守恒。由于Mead 模型中的电场满足法拉第方程，Mead场能够保持相空间密度守恒。因此，选择Mead场来建立径向扩散的动理学理论是恰当的。

2.2.2. 非对称背景场

Elkington 等人 (2003)认为，通过考虑归因于高太阳风压力和太阳风速度时期的非对称背景磁场，可以发生增强的径向扩散。在他们的模型中，Elkington 等人 (2003) 选择了叠加扰动的背景偶极磁场 ΔB:

$$B^{EK}(r, \varphi) = \frac{B_E R^3}{r^3} + \Delta B(r) \cos(\varphi) \tag{17}$$

[12]另一方面，非赤道面俘获粒子（$\alpha \neq \pi/2$）将经历Ba˜ños漂移和曲率漂移。

这里将方位角的正午值设为零，并将该模型记作 B^{EK}，以区别于Mead场。除了背景场，电场和磁场中的超低频波扰动取为方位角傅里叶分量之和：

$$\delta\mathbf{E} = \sum_m \delta\mathbf{E}_m(r,t)e^{im\varphi} \tag{18}$$

$$\delta\mathbf{B} = \sum_m \delta\mathbf{B}_m(r,t)e^{im\varphi} \tag{19}$$

上述扰动没有特定的极化，其环向（$\delta E_{r,\ m}$）和极向（$\delta E_{\varphi,\ m}$）电场分量均未指定，且忽略磁场分量与电场分量之间的关系。为了使这些场保持相空间密度不变，必须分别满足两个约束：第一个约束适用于式（17）给出的静态背景磁场，

$$\nabla\cdot\left(\nabla B^{EK}\times\hat{z}\right)=0, \tag{20}$$

对于沿径向存在一阶导数的扰动 $\Delta B(r)$，该约束成立。第二个约束是针对随时间变化的电场和磁场扰动（18）—（19）的法拉第定律，由此得到以下关于电场和磁场强度的三个约束：

$$\frac{\partial}{\partial z}\delta E_{m,\varphi} = \frac{\partial}{\partial t}\delta B_{m,r} \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\delta E_{m,r} = -\frac{\partial}{\partial t}\delta B_{m,\varphi} \tag{22}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\delta E_{m,\varphi}) - im\delta E_{m,r} = -\frac{\partial}{\partial t}\delta B_{m,z} \tag{23}$$

为简单起见，我们假设磁场扰动不含极向（$B_\varphi = 0$）或环向（$B_r = 0$）分量，因此只需满足约束（23）。将时间依赖关系作傅里叶分解（$\delta B_{m,\ z}\sim e^{-i\omega t}$）后，方程（23）可写为：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\delta E_{m,\varphi}) - im\delta E_{m,r} = i\omega\delta B_{m,z}. \tag{24}$$

最后这个方程限制了极向或环向电场的选择。对于纯环向电场（$\delta E_{m,r}\neq 0,\ \delta E_{m,\varphi}=0$），复系数必须满足以下约束：$\delta E_{m,r} = -\omega\delta B_{m,z}/m$。对于不随径向变化的纯极向电场（$\delta E_{m,\varphi}\neq 0,\ \delta E_{m,\ r}=0$），必须满足以下等式：$\delta E_{m,\varphi}/r = \omega\delta B_{m,z}/m$。因此，我们得出结论：Fei 等人（2006）用于计算径向扩散系数的不对称模型不守恒相空间密度，并且基于该电场模型推导出的扩散系数会产生不符合物理实际的结果。Lejosne（2019年）已指出，Fei 等人（2006）的模型违反了法拉第定律，并证明这会使扩散系数增大一倍。通过对这一问题进行动力学处理，我们还证明该模型违反了刘维尔定理。

方程（24）还对 Falthammar（1965）的静电模型（$\nabla\times\delta\mathbf{E}\ =0$）施加了约束。对于纯极向分量，法拉第方程要求 $\frac{1}{r}\partial(r\delta E_{m,\ \varphi})/\partial r = 0,$

因此 $\delta E_{m,\ \varphi} \sim 1/r$。F¨althammar (1965) 所采用的极向磁场与径向距离无关这一假设，同样违反刘维尔定理，并导致不符合物理实际的径向输运系数。

我们注意到，Fei 等人 (2006) 电磁模型以及 F¨althammar(1965)静电模型尽管如此仍可通过考虑法拉第定律进行修正。在计算扩散系数时，无论是否考虑由Elkington 等人 (2003)引入的不对称性，都可以通过强制满足方程（24）来完成此修正。基于本节和上一节的内容，我们选择使用Mead模型，因为它能够为赤道俘获粒子守恒相空间密度，并且已经包含了对地球辐射带中的径向输运进行建模所需的所有关键要素 [13]。

3. 径向输运的线性、准线性和非线性极限

3.1. 多尺度动力学 & 慢变量和快变量之间的分离

在本节中，我们将从漂移动理学方程(3) 出发，针对局限于磁偶极子中并与由 Mead场 (2.2.1) 给出的超低频波动相互作用的电荷，建立一种平均场理论。我们将仅关注局限于赤道平面($\alpha = \pi/2$)中的粒子，并将粒子在较高和较低纬度处从镜点反弹的更复杂情形留待未来研究。为了建立平均场理论，我们将分布函数[14]中第三绝热不变量 L^* 和背景量的缓慢变化，与相关不变相位和涨落时间尺度部分的快速变化分离开来：

$$f(r, \varphi, t) = f_0(r, \varepsilon^a \varphi, \varepsilon t) + \delta f(r, \varphi, t) \tag{25}$$

其中，r 是赤道处的径向距离，φ 是方位角 $\varphi \in [0, 2\pi]$，小参数 ε 刻画了分布中大尺度部分与小尺度部分之间的尺度分离。我们注意到，可以构建具有方位角依赖性的背景分布函数。例如，当存在随时间缓慢演化、相较于粒子方位漂移周期变化更慢的方位角依赖源项或损失项时，就可以考虑这种方位角依赖性：对于 $a > 0$，可用 $\varepsilon^a \varphi$来描述，并得到 $\partial f_0/\partial\varphi = \varepsilon^a f_0$。不过，为简便起见，并与先前的径向输运模型进行比较，我们假设背景分布函数不依赖于方位角，即，

$$f_0 = f_0(r, \varepsilon t) \tag{26}$$

形式上，这个平衡分布可以定义为精确分布函数在方位角范围内，以及在介于快、慢时间尺度之间的时间尺度上的平均值：

$$f_0 = f_0(r, t) = \langle f(r, \varphi, t) \rangle = \frac{1}{2\pi\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} dt' \int_0^{2\pi} d\varphi f(r, \varphi, t') \tag{27}$$

[13]读者或许会想，为什么不直接使用Fei 等人（2006）提出的场，并施加方程（24）给出的约束呢？简而言之，使用非对称场的主要好处在于，它会使扩散系数产生量级为 $\Delta B^2/B^2 \ll 1$的变化。因此，这种变化可以忽略不计。

[14]快慢运动之间的尺度分离是天体物理等离子体中准线性理论的基础（Kulsrud2005；Schekochihin 2017；Diamond 等人 2010）。这种方法与Kennel & Engelmann（1966）所采用的方法相同，后者针对磁化带电粒子与频率可与拉莫尔频率相比的等离子体波相互作用，建立了准线性理论。若没有这种尺度分离，就无法将所得扩散模型写成福克-普朗克方程的形式；尺度分离也限制了准线性理论适用的时间尺度。

对于 $\omega^{-1} \ll \Delta t \ll t_{eq}$，其中 $\omega \sim \frac{1}{A_m}\frac{dA_m}{dt} \sim \frac{1}{S}\frac{dS}{dt}$ 表示超低频波动的频率，而$t_{eq} \sim \frac{1}{f_0}\frac{\partial f_0}{\partial t}$ 表示分布达到平衡所需的时间尺度。对 f_0的这一定义限制了计算背景分布函数所依据的时间和空间尺度。第3.2节表明，方位漂移频率为 Ω_d（如公式（29）所定义）的粒子，当该频率与方位模数为 m 的超低频波频率相当时，会发生共振。因此，由于共振要求 $\omega \simeq m\Omega_d$，公式（27）也限制了背景背景分布函数 f_0 的演化，使其时间尺度远大于 $1/m\Omega_d$。对于模态 $m = 1$，这意味着准线性理论中的扩散不能在与方位漂移周期相当的时间尺度上发生。

对于第一绝热不变量 μ 守恒且与 Mead场相互作用的赤道粒子，动理学方程 (11) 的形式为:

$$gB_0\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{3\mu B_0}{q\gamma r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \sum_m e^{im\varphi}\left[\frac{\mu A_m}{q\gamma r} + i\frac{r\dot{A}_m}{7m}\right]\frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\left[\frac{r\dot{S}}{2} + \sum_m e^{im\varphi}\left(\frac{8r^2\dot{A}_m}{21} - im\frac{\mu A_m}{q\gamma}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial r} \tag{28}$$

其中函数为 $g(r,\varphi,t) = 1 - S(t)/B_0 - \sum_m e^{im\varphi} r A_m(t)/B_0$。现在我们定义赤道俘获粒子的漂移频率

$$\Omega_d = 3\mu/q\gamma r^2 \tag{29}$$

用第一绝热不变量 μ 表示，并将扰动波动沿方位角方向分解到傅里叶空间[15]:

$$f(r,\varphi,t) = f_0(r,t) + \sum_m e^{im\varphi}\delta f_m(r,t). \tag{30}$$

将分解式 (30) 代入关于 $m = 0$（方位平均）的方程 (28)，并按照 (27) 对时间取平均，得到准线性方程；推导过程见附录A:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -\sum_m\left[\frac{im\mu}{qB_0\gamma r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\langle A_m^*\delta f_m\rangle\right) - \frac{r}{B_0}\frac{\partial}{\partial t}\langle A_m^*\delta f_m\rangle + \frac{8}{21}\frac{1}{rB_0}\frac{\partial}{\partial r}\langle r^3\dot{A}_m^*\delta f_m\rangle\right] \tag{31}$$

(31) 右端描述了涨落作用下背景分布的慢演化。与空间等离子体和天体物理等离子体中的常见情况一样，我们需要一个封闭方程来描述背景分布的演化。若能写出扰动 δf_m的方程，将其代入方程 (31)，并按照 (27) 所定义的方式取平均，就可以计算相关性 $\langle\delta f_m A_m^*\rangle$[16] 。这一计算的详细过程见附录B，结果得到如下扰动的非线性方程:

$$\frac{\partial \delta f_m}{\partial t} + \underbrace{im\Omega_d\delta f_m}_{\text{particle streaming}} = \underbrace{\frac{A_m r}{B_0}\frac{\partial f_0}{\partial t} - \left(\frac{8r^2\dot{A}_m}{21B_0} - im\frac{\mu A_m}{qB_0\gamma}\right)\frac{\partial f_0}{\partial r}}_{\text{Linear wave-particle interaction}} \underbrace{-\sum_{m'}\mathcal{Q}[S, A_{m-m'}; \delta f_{m'}]}_{\text{Nonlinear wave-particle interaction}}. \tag{32}$$

[15]第（2.2.1）节中 Mead 场的推广已经用傅里叶模态表示反对称扰动。[16]由于磁场强度为实数，我们可以将傅里叶系数写为 $A_{-m} = A_m^*$。

控制式（32）中受扰分布演化的三个项分别表示自由弹道运动（或流动）、线性波粒相互作用以及非线性波粒相互作用。由方程B8 给出的项 $\mathcal{Q}$在 $m\Omega_d\delta f_m \gg \mathcal{Q}$的极限下可以忽略，否则必须将其计入，并且即使将超低频波振幅视为很小，即 $\delta B \simeq rA_m \ll B_0$ 和 $S(t) \ll B_0$，也会导致模态间耦合。在接下来的章节中，我们将在线性和准线性区制下求解这些方程，并描述非线性过程变得显著的条件。

3.2. 快速时间尺度上的线性理论与径向输运

在线性理论中，我们考虑平衡态的小扰动，其演化时间尺度很短，与漂移周期相当。因此可以忽略所有非线性项，并假设背景分布不随时间变化，即 $f_0(t) = \text{const}$。线性方程因此为：

$$\frac{\partial \delta f_m}{\partial t} + im\Omega_d \delta f_m = -\left(\frac{8r^2\dot{A}_m}{21B_0} - im\frac{\mu A_m}{qB_0\gamma}\right)\frac{\partial f_0}{\partial r}. \tag{33}$$

方程（33）是线性的，可根据初始条件 $\delta f_m(r, t = 0)$，利用杜哈梅原理求解，得到：

$$\delta f_m(r,t) = \underbrace{\delta f_m(r,0)e^{-im\Omega_d t}}_{\text{Ballistic response}} \underbrace{-\frac{\partial f_0(r)}{\partial r}\int_0^t dt'\; e^{im\Omega_d(t'-t)}\left(\frac{8r^2\dot{A}_m(t')}{21B_0} - im\frac{\mu A_m(t')}{qB_0\gamma}\right)}_{\text{Linear wave-particle response}}. \tag{34}$$

等式（34）右侧的第一项是弹道模，我们将看到它会导致相空间（r，φ）中瞬态结构的形成。右侧的第二项是分布函数对超低频波的线性波粒响应。这个问题与Landau (1946)所求解的自洽静电问题几乎完全相同；在该问题中，背景分布的扰动会导致涨落增长或衰减。然而，等式（34）所描述的线性区域径向输运问题比Landau (1946)所求解的问题更简单，因为共振高能电子的密度约为0.1 %或更低，它们是被动示踪粒子，因此可以非常准确地忽略自洽效应[17]。因此，只要遵守法拉第定律，就可以自由地以符合原位观测的方式对超低频涨落进行建模。对于给定为单一傅里叶模（$A_m(t) \sim e^{-i\omega t}$）或某种随机噪声的超低频涨落，可以解析求解该线性系统。据我们所知，等式（33）的解析解，即等式（34），此前尚未出现在关于地球径向输运的同行评审研究中，因此下文将对此进行详细分析。

[17] 基本的量纲分析表明，超低频波可以显著加速高能电子，但高能电子的密度过低，无法充当超低频波的能量汇。超低频波的磁场振幅为$\delta B \geq 0.01$ nT，有时甚至可达数 nT（Hartinger 等人 2013年）；高能电子的动能为 100 至 1000 千电子伏，密度为 $n_e \leq 10^{-3}$ cm^{-3}，则动能密度与超低频波磁场能量密度之比的标度关系为 $2\mu_0 n_e m_e c^2(\gamma - 1)/\delta B^2 \leq 10^{-6}$。

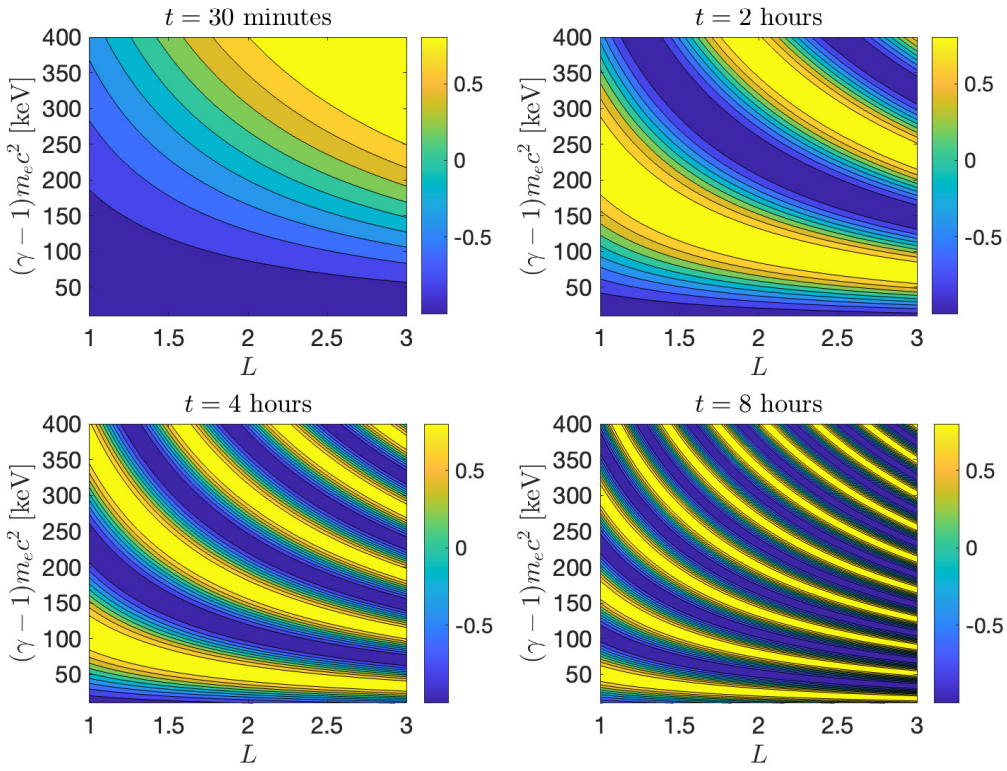


图 3。 偶极场中受困粒子的弹道运动导致斑马条纹的形成。左上、右上、左下和右下分别是 $\varphi_0 = 0$ 下经过 $t = 30$ 分钟、1 小时、2 小时和 8 小时的解。初始分布在 L 和动能 E_c中是均匀的。

3.2.1. 弹道解与斑马条纹的形成

将弹道解代入受扰分布，即将（34）中的项 $\delta f_m(r,0)e^{-im\Omega_d t}$ in 代入方程（30），在线性极限下，总分布表示为：

$$f(r,\varphi,t) = f_0(r) + \sum_m \delta f_m(r,0)e^{-im\Omega_d t}e^{im\varphi}. \tag{35}$$

我们可以将弹道解与线性波粒响应分开考虑，因为前者与 f_0 的径向梯度无关，而后者则与之相关。因此，当分布函数中的径向梯度非常小时，弹道响应是唯一可能观测到的响应。

如果我们考虑单个傅里叶模 $m = 1$，可以注意到，初始扰动 $\delta f(r, t = 0, \varphi)$ 将在(r, φ) 空间中形成精细结构，随着 $t \longrightarrow \infty$。空间中精细结构的形成，是因为初始扰动 $\delta f_m(r,0)$将沿径向位置 r 经历差分剪切。我们可以使用解（35）来量化磁偶极场 $B = B_E/L^3$中由弹道运动产生的结构对参数的依赖关系。对于初始相位 φ_0，

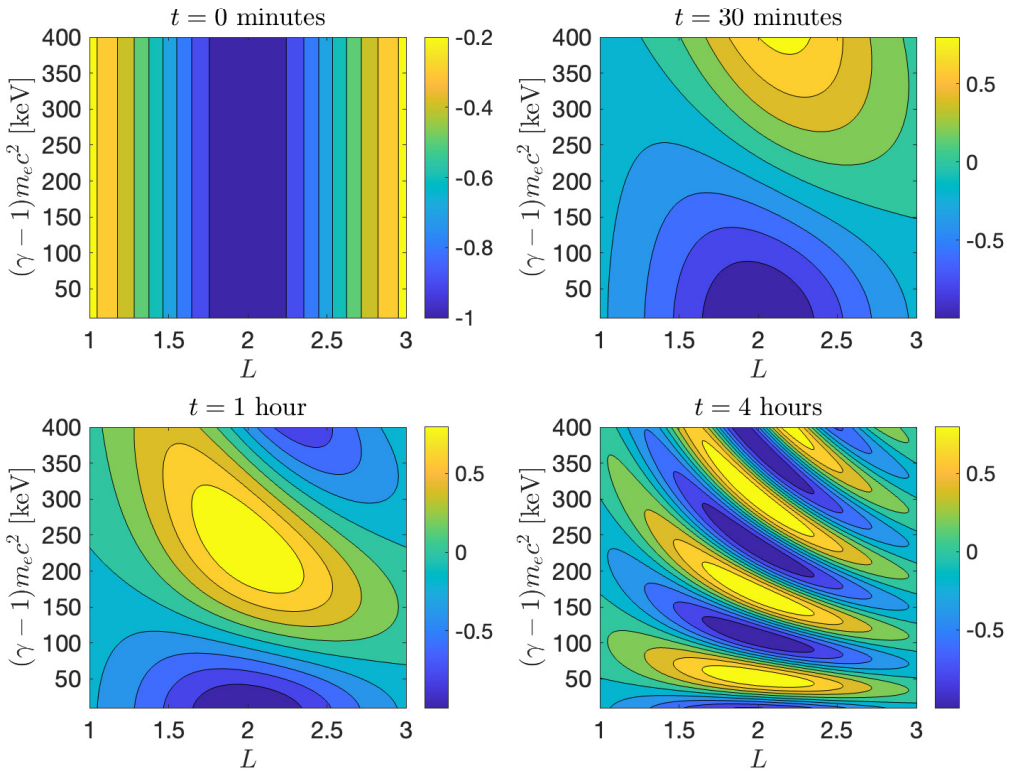


图 4. 以 $L = 2$ 为中心、径向距离分布范围为 $\Delta L = 0.75$ 的粒子注入后形成的斑马条纹。

受扰分布， δf 沿曲线为常数

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi_0 &= \Omega_d t \\ &= \frac{3}{2}\frac{m_e c^2(\gamma^2 - 1)}{q\gamma B_E R_E^2} Lt \\ &= \frac{3}{2}\frac{m_e c^2}{qB_E R_E^2}\frac{E_c/m_e c^2 + 2}{E_c + m_e c^2} E_c Lt \\ &\sim \frac{E_c + 2m_e c^2}{E_c + m_e c^2} E_c Lt \\ &\simeq E_c Lt \end{aligned} \tag{36}$$

其中，我们用动能 $E_c = m_e c^2(\gamma - 1)$ 替换了洛伦兹因子 γ。对于固定时间 $t \neq 0$，方程（36）表明，高能粒子的相空间结构具有与径向距离成反比的动能，即 $E_c \sim 1/L$。

扰动分布函数的时间演化如图（3）所示，图中给出了10分钟、1小时、2小时和8小时的时间快照。能量介于 $50-400$ 千电子伏之间的高能粒子经历一次完整的方位漂移所需的时间约为数小时。图（3）显示，相空间结构可以在一个漂移周期左右的时间尺度上形成，也就是说，其形成时间尺度远快于径向扩散效应所能解释的范围。经过数个漂移周期后，相空间结构在

(E_c, L)即使数量增加，也会变得更薄。这种弹道解的行为与地球辐射带内侧常见的斑马条纹现象一致（Imhof 和 Smith 1965年；Datlowe 等人1985年）。斑马条纹是短暂的结构化峰谷，在能量范围从几十到数百千电子伏的内辐射带电子能谱图上可以观测到。在原位测量中，斑马条纹还表现为能量峰和能量谷，其变化与径向距离的倒数成正比，即 $E_c \sim 1/L$。它们还与亚暴的发生相关，并与各种地磁指数（如 Kp 和 Dst）相关，但也能够在地磁条件平静时形成（Sauvaud等人 2013年；Lejosne 和 Roederer 2016年；Lejosne 和 Mozer 2020年a、b）。因此，解释斑马条纹形成的机制必须再现 $E_c \sim 1/L$ 依赖关系，并解释导致其短暂性质以及在广泛地磁条件下出现的过程。

关于斑马条纹形成的机制可分为两类。第一类中，粒子感受到的电场变化时间尺度与其漂移运动相一致 [例如参见Lejosne 等人 (2022年)以及其中关于该主题最新进展的参考文献]。因此，一群磁俘获粒子可能与该电场发生漂移共振，并且当共振粒子被散射到不同的漂移壳层时，形成斑马条纹结构。第二类机制以Ukhorskiy 等人 (2014年)的研究为例，斑马条纹同样取样于电场，但属于非共振现象。该机制下斑马条纹的形成类似于相位混合过程。对于能量更高的粒子，磁俘获粒子的漂移速度更快。当将通量投影到能量和径向距离空间时，分布的剪切会导致一种 $E_c \sim 1/L$ 依赖关系。。

然而，我们对弹道运动的分析还表明，相空间结构原位观测到的斑马条纹可以在不存在漂移共振和电场扰动的情况下形成。这一形成过程发生在与高能粒子漂移周期相当的时间尺度上，并且等价于Ukhorskiy 等人(2014年)提出的相混合情景，因为该情景不需要漂移共振。然而，我们推导出的弹道解假设分布函数的扰动 $\delta f_m(t = 0, r$发生在某个任意时刻。这一分布函数扰动可能是由于粒子损失 $\delta f_m(t = 0, r) < 0$，例如损失至边界，也可能是由于粒子注入 $\delta f_m(t = 0, r) > 0$。尽管内辐射带比外辐射带更为宁静，但即使在中等强度的地磁暴期间，内辐射带也会经历高能电子注入事件（Zhao 和 Li 2013年）[18]。

要将电子注入内辐射带，需要径向输运机制，例如对流电场。但注入内辐射带后，弹道项表明，即使没有任何超低频扰动，也会形成斑马条纹。图（4）展示了高能电子在 $L = 2$ 处发生局域损失后斑马条纹的形成过程；其径向分布以标准差 $\Delta L = 0.75$扩展。局域注入和损失也会产生条纹，其时间尺度与漂移周期相当；但分布函数的剪切会使结构扩展至注入或损失位置之外的径向距离。

[18] 反照中子的衰变也是内带中高能粒子注入的一个恒定源（Li等，2017年），但其密度可能太低，无法通过观测测量高能电子或质子中斑马条纹的形成。

将弹道解投影到赤道平面，也能体现斑马条纹的瞬态特性。图（5）展示了 100 keV电子注入（位于$\varphi \in [0,\pi]$）和损失（位于 $\varphi \in [\pi,2\pi]$）的时间演化。100 keV电子在 $L=1$和$L=3$ 之间的漂移周期为 2.6 小时至 8 小时。经过一个漂移周期后，分布函数仍保持其初始形状，尚未发生相位混合。相比之下，图（6）展示了 400 keV电子注入（位于 $\varphi \in [0,\pi]$）和损失（位于 $\varphi \in [\pi,2\pi]$）的时间演化。400 keV电子在 $L=1$ 和 $L=3$ 之间的漂移周期为 45 分钟至 2.3 小时。对于能量更高的粒子，由于漂移周期较短，初始分布的剪切会使分布在更短的时间尺度内发生相位混合。4 小时后，赤道平面上的 400 keV斑马条纹呈现出非常精细的结构。

因此，粒子的注入或损失能够导致斑马条纹的形成，而无需漂移共振或电场的存在。注入和损失被编码在弹道解中，但由于分布函数的剪切会在几个漂移周期的时间尺度上发生，能量最高的电子会迅速在分布函数中形成精细尺度结构，而这些结构可能无法被航天器仪器分辨。尽管如此，弹道解并不排除斑马条纹作为共振或非共振粒子对超低频电场响应而形成的可能性。在下一节中，我们将计算线性解，以纳入超低频波对分布函数的影响，并区分共振响应与非共振响应。

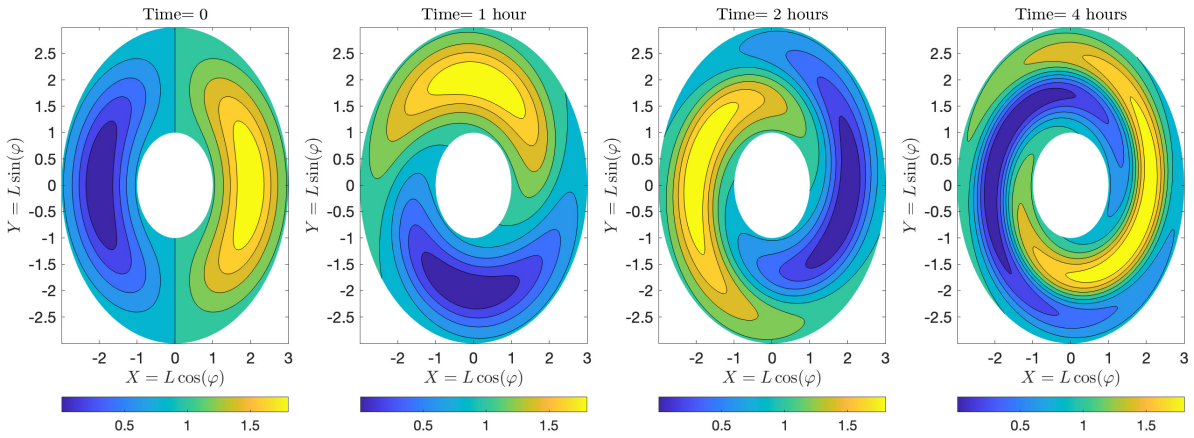


图 5. 以 $(L-\varphi)$ 表示的 100 千电子伏赤道俘获电子的斑马条纹形成过程。初始分布对应于中心位于 $L=2$ 、宽度为 $\varphi \in [0,\pi]$ 的高斯分布束流，以及中心位于 $L=2$ 、宽度为 $\varphi \in [\pi,2\pi]$ 的高斯分布降落。四小时后，斑马条纹仍清晰可见。

3.2.2. 线性波粒相互作用的解

在上一节中，我们描述了分布函数中弹道项的时间演化，并指出当分布函数中的径向梯度较小时，弹道项应主导粒子的响应。然而，在没有相空间注入和/或损失项的情况下，

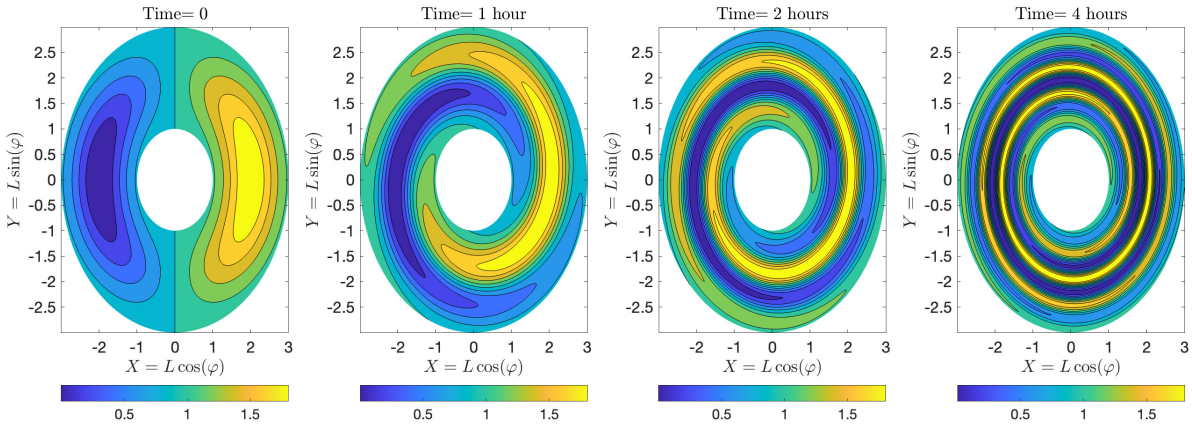


图6. 以（$L-\varphi$）表示的400千电子伏赤道俘获电子斑马条纹形成过程。初始分布对应于一个以 $L = 2$ 为中心、针对 $\varphi \in [0, \pi]$ 的高斯分布束流，以及一个以 $L = 2$ 为中心、针对 $\varphi \in [\pi, 2\pi]$的高斯分布降落。四小时后，斑马条纹已发生相位混合。

因此，在弹道项为零的情况下，即 $\delta f(t = 0, r) = 0$ 和 $\partial f_0/\partial r \neq 0$，线性波粒响应应占主导。

本节介绍方程（34）中得到的线性波粒解。为简便起见，我们假设超低频波只有一个傅里叶模：

$$A_m(t) = a_m e^{-i\omega_m t + \gamma_m t} \tag{37}$$

初始振幅为 a_m，频率为 ω，增长/阻尼率为 γ_m。我们可以将此解推广到傅里叶模态谱，但由于该解是线性的，各模态彼此独立。当增长率足够小时，涨落的振幅仍足够小且非线性效应可以忽略，此时线性解有效（Davidson 2012年）[19]。将方程（37）代入方程（34），得到以下线性波粒响应 $\delta f_m^L(r,\ t)$：

$$\begin{aligned}\delta f_m^L &= -a_m e^{-im\Omega_d t}\left[\frac{8r^2}{21B_0}(\gamma_m - i\omega_m) - \frac{im\mu}{qB_0\gamma}\right]\frac{\partial f_0}{\partial r}\int_0^t dt' e^{im\Omega_d t' - i\omega_m t' + \gamma_m t'} \\ &= -a_m e^{-im\Omega_d t}\left[\frac{8r^2}{21B_0}(\omega_m + i\gamma_m) + \frac{m\mu}{qB_0\gamma}\right]\frac{\partial f_0}{\partial r}\left(\frac{e^{im\Omega_d t - i\omega_m t + \gamma_m t} - 1}{\omega_m - m\Omega_d + i\gamma_m}\right).\end{aligned} \tag{38}$$

方程（38）包含一个共振部分，表明漂移频率为 Ω_d 的粒子可以被频率为 ω_m 的超低频波高效地散射到不同的漂移壳层。我们可以将方程（38）分解为一个随时间增长的线性波粒共振部分和两个振荡部分

[19]请参见第3.4节，其中我们量化了线性区域失效的条件。对于熟悉太阳风湍流问题的读者而言，小振幅电磁涨落可能在动力学上变得十分重要，这并不令人意外。在磁流体力学极限下，这一条件与流体尺度上的临界平衡状态相关（Goldreich & Sridhar 1995），但也已被推广到空间等离子体中的动力学问题（Schekochihin 等 2016年；Meyrand 等 2019 年）。对于径向输运问题，即使在超低频波振幅和扰动分布函数都很小的极限下，也能达到非线性区域，即 $\delta B/B_0 \ll 1$，以及 $\delta f/f_0 \ll 1$，分别。

如下：

$$\delta f_m^L = -\frac{a_m r^2}{21 B_0}\frac{\partial f_0}{\partial r}\left[\underbrace{8e^{-i\omega_m t+\gamma_m t}}_{\text{具有增长/衰减的超低频调制}} - \underbrace{8e^{-im\Omega_d t}}_{\text{弹道运动}} + \underbrace{15m\Omega_d e^{-im\Omega_d t}\left(\frac{e^{im\Omega_d t - i\omega_m t+\gamma_m t}-1}{\omega_m - m\Omega_d + i\gamma_m}\right)\Omega}_{\text{波粒漂移共振}}\right] \tag{39}$$

公式（39）右侧的第一项是一个非共振振荡模，它可以随超低频波以 γ_m 的速率增长或衰减，并以 ω_m 的频率调制分布函数。公式（39）右侧的第二项是一个非共振弹道项，表明任意频率为 ω_m 的超低频扰动都能在频率 Ω_d 处引起分布函数波动，而不涉及漂移共振。在过去60年中，观测到的粒子通量时间序列若具有与漂移周期相当的时间频率，便被称为漂移回波（Lanzerotti 等人，1967）。例如，Kokubun 等人 （1977）的图6显示，横向超低频波模与高能离子通量以及能量为79、158和266千电子伏的高能电子通量振荡同时出现。低能通量受到超低频波调制，且调制相位取决于能量。Kokubun 等人 （1977）报告的振荡发生在与高能粒子群漂移周期相当的时间尺度上，因此产生得过快，无法由准线性径向扩散过程维持。这个导致漂移回波的第二项，也是非共振粒子形成斑马条纹（3.2.1）的另一种来源，对应于Ukhorskiy 等人（2014年）所解释的机制。第二项与（3.2.1）中推导出的斑马条纹来源的区别在于，后者需要相空间损失（$\delta f(t=0) < 0$）或粒子注入（$\delta f(t=0) > 0$），且不需要电场[20]；而前者则需要振幅为 a_m 的超低频扰动对分布函数产生扰动，并且要求分布函数具有梯度，即 。

(39)右侧的第三项表示频率为 ω_m 的超低频波动与漂移频率为Ω_d 的粒子之间的线性波粒共振。可以证明，在极限 $m\Omega_d \sim \omega_m$ 下，以及在我们在此称为中间时刻的时间范围内，该最后一项会随时间增长：

$$\frac{1}{m\Omega_d} \ll t \ll \frac{1}{\gamma_m}. \tag{40}$$

由方程（40）定义的中间时间范围意味着，超低频波已有时间振荡，但扰动尚未显著衰减或明显增长，线性效应也尚未失效（Schekochihin 2017年）。在此极限下，公式（39）中的共振项占主导地位，而分布函数线性响应中的扰动具有如下形式：

$$\delta f_m^L \simeq m\Omega_d e^{-i\omega_m t}\frac{\left(e^{\gamma_m t} - e^{im\Omega_d t - i\omega_m t+\gamma_m t}\right)}{m\Omega_d - \omega_m - i\gamma_m} \simeq m\Omega_d e^{-i\omega_m t}\frac{1-e^{i(m\Omega_d t-\omega_m)t}}{m\Omega_d - \omega_m} \tag{41}$$

方程（41）在由（40）给出的中间时刻成立，并假设 $m\Omega_d - \omega_m \gg \gamma_m$。当 $m\Omega_d - \omega_m \ll 1/t$ 时，方程（41）中的指数项可展开为泰勒

[20]需要指出的是，在地球辐射带中，注入和损失可分为绝热与非绝热两类。可逆损失与绝热扰动有关，而不可逆损失则与非绝热效应有关，例如粒子在大气层中的散射（Millan 和 Thorne，2007年）。弹道振幅 $\delta f(t=0)$可同时考虑可逆和不可逆损失。

se级数，而扰动分布函数的主导项为 :

$$\delta f_m^L \simeq m\Omega_d t e^{-i\omega_m t}, \tag{42}$$

因此表明，涨落会因共振相互作用而随时间线性增长。公式（41）是一个*Case-Van Kampen* 模态的实例，该模态最初是在 Vlasov-Poisson 等离子体中推导出来的（Van Kampen 1955年; Case 1959），但本文在径向输运的背景下重新推导了它。当 $t \longrightarrow \infty$ 但 $\gamma_m t \ll 1$ 必须满足（40）时，公式（41）右侧趋于一个狄拉克δ函数[21]。

本节所述的共振线性响应发生在与漂移周期相当或更长、但短于 $1/\gamma_m$的时间尺度上，而相位混合和斑马条纹则发生在与漂移周期相当的时间尺度上。对于有限的 ULF 阻尼率 $\gamma_m < 0$，共振部分会在 $e^{\gamma_t \longrightarrow 0}$ 时间尺度内 $|\gamma_m|t \gg 1$衰减，公式（39）中与 $e^{-i\Omega_d t}$ 成正比的弹道响应则占主导地位。由于非共振与共振漂移粒子相互作用都要求磁地方时平均分布函数具有径向梯度，因此可依据这一判据，从航天器数据中区分二者 f_0。给定高能粒子群的 f_0 中存在非零径向梯度，是观测相空间结构的一项实验限制，Hartinger 等人（2020年）和Sarris 等人（2021年）报告了这一点，第四章第二节将进一步讨论。

对于记录能量相关通量的仪器，还可以通过观测来区分共振与非共振粒子的响应。漂移共振与能量有关，共振能量下的共振特征应与非共振粒子明显不同，尽管方程（41）表明，两者都会经历频率与超低频波频率 ω_m 相当的振荡。图（7）展示了 $L = 8$ 处 1.1 兆电子伏电子的扰动分布函数，并与能量为 700 和 900 千电子伏时粒子的响应进行了比较。因此，能量的变化可能使粒子脱离共振，并导致扰动分布函数的振幅减小到原来的五分之一以下。

因此，漂移共振是超低频波与高能电子交换能量的有效机制。在图（8）中，我们绘制了漂移周期随动能变化的关系，并以径向距离 L进行参数化。顶部面板对应45度俯仰角，底部面板对应90度俯仰角。阴影矩形和虚线矩形界定了共振频率ω_m/m ，对应于方位模数为 $m = 1$、2和 $m = 3$的Pc5超低频波频率。从图（8）中我们注意到，动能大于200千电子伏且最高达数兆电子伏的高能电子，能够在广泛的漂移壳层上发生漂移轨道共振。图（9）与图（9）相同，但界定的矩形是针对方位波数为 $m = 4$、7和10的Pc4波绘制的。在Pc4波的情况下，它们能够使动能低于400千电子伏的高能电子维持漂移共振，但需要更大的方位波数（Barani等人2019年）。尽管漂移共振强烈依赖于能量，图（8）和图（9）表明，在整个辐射带中，广泛范围的能量和俯仰角都可以实现这种共振。

[21]这些非本征模不仅具有理论意义。为了量化动力学系统中的熵产生，必须追踪非本征模。关于以 Vlasov–Poisson系统为例的介绍，可参见 Schekochihin (2017 年) 第 5.6 节；关于可用于辐射带中波粒相互作用的应用，参见 Zhdankin(2022年)。

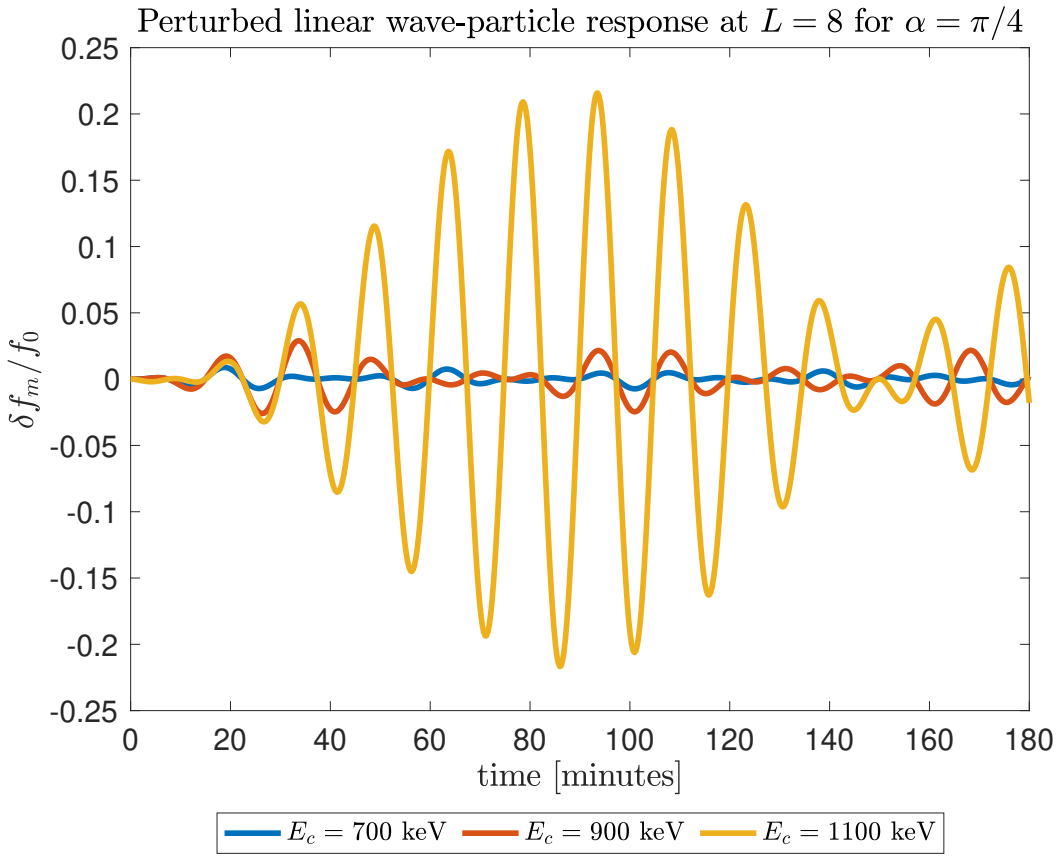


图 7. 电子分布函数中共振响应和非共振响应的示例。该超低频波的频率为 $\omega = 7$ mHz，模数为 $m = 1$。粒子位于 $L = 8$，俯仰角为 $\alpha = 45$ 度。动能约为 $\simeq 1.2$ 兆电子伏（$2\pi/\Omega_d \simeq 15$ 分钟）的粒子处于共振状态，而能量低于 1 兆电子伏（$2\pi/\Omega_d \geq 17$ 分钟）的粒子则不处于共振状态。与动能相近的非共振粒子相比，共振粒子经历的涨落幅度几乎大一个数量级。

因此，我们通过指出以下几点结束本节：由 ULF 电磁涨落、粒子注入（$\delta f(r, t = 0) > 0$）或损失（$\delta f(r, t = 0) < 0$）引起的分布函数线性扰动，都会在与漂移周期相当的非扩散时间尺度上，形成相空间漂移结构。对于较低能的电子（$E_c < m_e c^2$），假设存在粒子注入或背景分布梯度，其中一些相空间结构可能会在内辐射带中呈现为斑马条纹。尽管公式（39）表明，δf 的共振部分也会经历相混合，但对于非共振漂移频率 $m\Omega_d \neq \omega_m$，仍会形成漂移回波和斑马条纹。因此，严格的共振条件 $m\Omega_d \simeq \omega_m$ 并非形成漂移回波和斑马条纹的必要条件。

3.3. 径向扩散的准线性理论

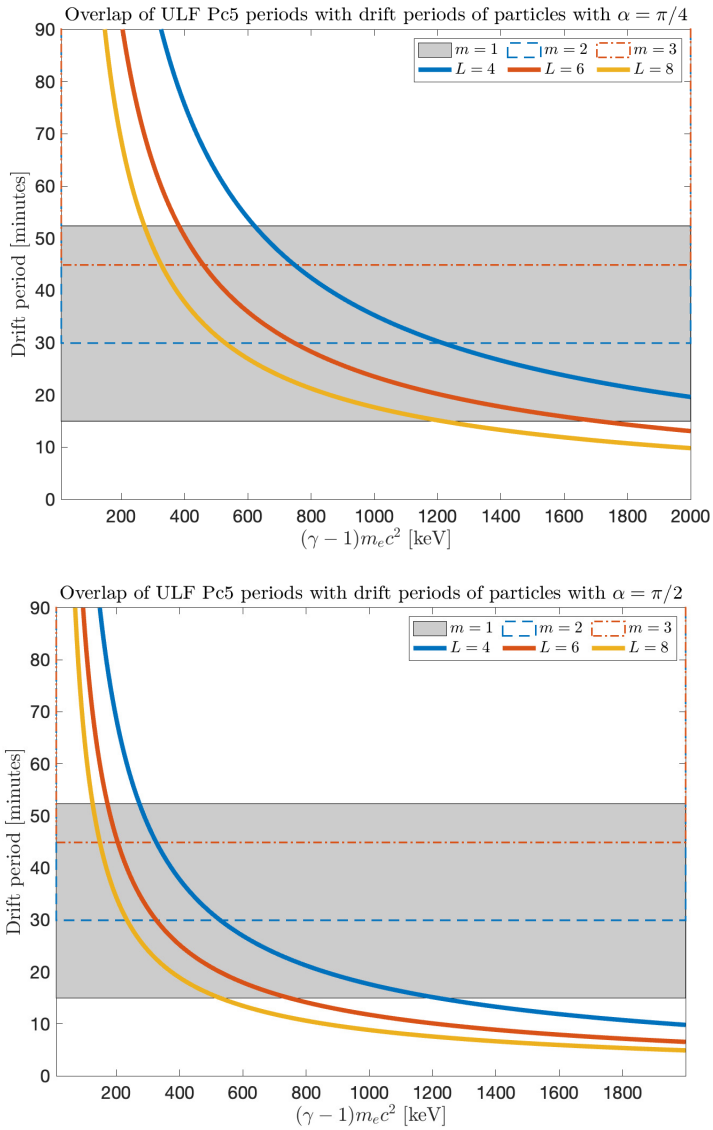


图 8. </style}方位漂移周期（$2\pi/\Omega_d$）与动能 $E_c = [50 - 2000]$ 千电子伏和归一化径向距离 $L = r/R_E = [4, 6, 8]$的关系。上图对应 $\alpha = 45$ ，下图对应$\alpha = 90$。灰色阴影区域表示漂移频率与频率为 $\omega = [2, 7]$毫赫兹的 Pc5 超低频波动相匹配，因此可能发生共振相互作用。虚线和点线所围区域分别表示 $m = 2$ 模和 $m = 3$ 模的共振边界。

上一节中，我们描述了受扰分布函数对电磁超低频波的快速线性响应。我们假设背景分布 f_0 与时间无关，这相当于说它在快速时间尺度上没有经历显著变化。在本节中，我们根据准线性假设计算背景分布函数的演化（Kennel & Engelmann 1966；Diamond 等人 2010；Schekochihin2017；Allanson 等人 2022）。准线性理论假设，扰动在达到非线性振幅之前就开始改变平衡态。换言之，当非线性效应的特征时间长于达到平衡态所需的时间时，方程（32）中的非线性项 $\mathcal{Q}$可以忽略。我们也忽略了右侧的线性项 $\frac{A_m r}{B_0}\frac{\partial f_0}{\partial t}$

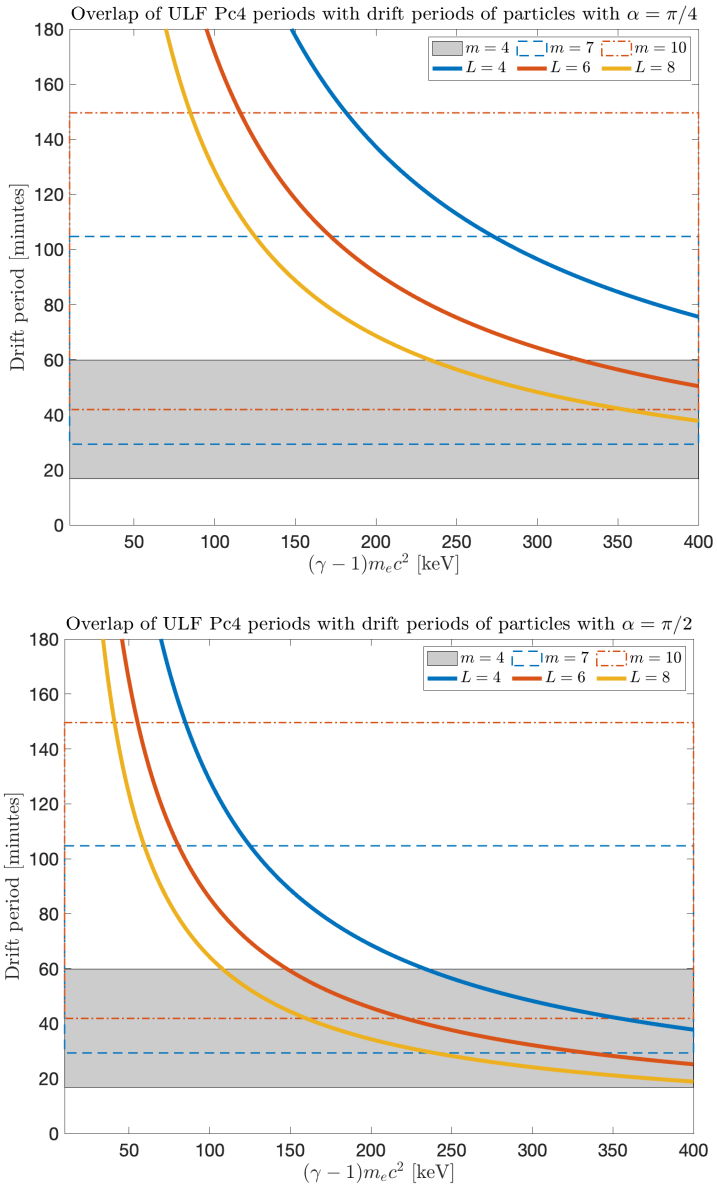


图 9. </style}方位漂移周期（$2\pi/\Omega_d$）与动能 $E_c = [50 - 400]$ 千电子伏和归一化径向距离 $L = r/R_E = [4, 6, 8]$的关系。上图对应 $\alpha = 45$ ，下图对应$\alpha = 90$。灰色阴影区域表示漂移频率与 $m = 4$ Pc4 超低频波动相匹配的区域，其中频率为$\omega = [7, 25]$ 毫赫兹，可能发生共振相互作用。虚线和点线围成的区域分别表示 $m = 7$ 和 $m = 10$ Pc4 模式的共振边界。

（32）中的该项，因为在准线性极限下，它会带来$|\delta B|^2/B_0^2 \ll 1$ 阶的修正，如附录 C 所示。因此，就我们的目的而言，我们假设扰动的演化由方程（33）决定。与上一节类似，这个线性方程可以通过杜哈梅原理求解，初始条件为 $\delta f_m(r,\ t = 0) = 0$:

$$\delta f_m(r,t) = -e^{-im\Omega_d t}\int_{-\infty}^{t} dt'\ e^{+im\Omega_d t'}\left(\frac{8r^2\dot{A}_m(t')}{21B_0} - im\frac{\mu A_m(t')}{qB_0\gamma}\right)\frac{\partial f_0}{\partial r}. \tag{43}$$

随后，可将方程（43）给出的线性解与以下准线性方程结合，以描述 f_0的时间演化：

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -\sum_m \left[\frac{im\mu}{qB_0\gamma r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\langle A_m^* \delta f_m\rangle\right) + \frac{8}{21}\frac{1}{rB_0}\frac{\partial}{\partial r}\langle r^3 \dot{A}_m^* \delta f_m\rangle - \frac{r}{B_0}\langle A_m^* \frac{\partial}{\partial t}\delta f_m\rangle - \frac{r}{B_0}\langle \dot{A}_m^* \delta f_m\rangle \right] \quad (44)$$

我们注意到，方程（44）右侧的前两项会产生扩散项，而后两项则会产生平流项。将 δf_m 的线性解代入（44），以计算相关项 $\langle A_m^*(t)\delta f_m(t)\rangle$ 和 $\langle A_m^*(t)\delta f_m(t)\rangle$，可得以下两个积分：

$$\langle A_m^*(t)\delta f_m(t)\rangle = -\int_{-\infty}^{t} dt'\ e^{+im\Omega_d(t'-t)} \left(\frac{8r^2\langle A_m^*(t)\dot{A}_m(t')\rangle}{21B_0} - im\frac{\mu\langle A_m^*(t)A_m(t')\rangle}{qB_0\gamma} \right) \frac{\partial f_0}{\partial r}. \quad (45)$$

$$\langle \dot{A}_m^*(t)\delta f_m(t)\rangle = -\int_{-\infty}^{t} dt'\ e^{+im\Omega_d(t'-t)} \left(\frac{8r^2\langle \dot{A}_m^*(t)\dot{A}_m(t')\rangle}{21B_0} - im\frac{\mu\langle \dot{A}_m^*(t)A_m(t')\rangle}{qB_0\gamma} \right) \frac{\partial f_0}{\partial r}. \quad (46)$$

为了以解析方式计算自相关，我们需要对超低频振幅的性质作出一些假设 A_m（t）。为考虑有限和零相关时间，我们选择将涨落建模为奥恩斯坦-乌伦贝克过程的不同实现（Papoulis1991），其时间演化方程如下[22]：

$$\frac{\partial A_m}{\partial t} = -A_m/\tau_c + \sqrt{2D}\chi(t), \quad (47)$$

其中，τ_c 是相关时间，$\sqrt{2D}$ 是 $\overline{A_m}$ 均方根值的度量，而 $\chi(t)$是单位高斯白噪声，$\langle\chi(t)\chi(t')\rangle = \delta(t-t')$。假设 $A_m(t=0) = 0$，A_m的解为

$$A_m(t) = \sqrt{2D}e^{-t/\tau_c}\int_{-\infty}^{t} dt'\ e^{t'/\tau_c}\chi(t'). \quad (48)$$

利用公式（48），我们 可以计算有限相关时间 $\tau_c \neq 0$ 下的以下量：

$$C_1(t,t') = \langle A_m(t)A_m(t')\rangle = \tau_c D e^{-|t-t'|/\tau_c} \quad (49)$$

$$C_2(t,t') = \langle \dot{A}_m(t)\dot{A}_m(t')\rangle = \frac{D}{\tau_c}e^{-|t-t'|/\tau_c} + 2D\delta(t-t') \quad (50)$$

$$C_3(t,t') = \langle A_m(t)\dot{A}_m(t')\rangle = -De^{-|t-t'|/\tau_c} \quad (51)$$

[22]地球辐射带中的高能电子是被动示踪粒子，因此可以忽略对场的自洽响应。这使我们能够以符合原位测量的经验方式对超低频波振幅进行建模。

上述相关函数仅是时间差 $t-t'$ 的函数，而非特定时刻 t 和 t' 的函数，这表明奥恩斯坦-乌伦贝克过程是平稳的，或具有时间齐次性。

回到积分 (45) 和 (46)，需要强调的是，积分中背景分布函数的梯度是时间的函数，即 $f_0 = f_0(r,t)$。求解积分前的最后一步是假设存在一个短的去相关时间 τ_c，使得当 $t-t' > \tau_c$ 时，相关函数$C_i(t-t') \ll C_i(0)$。因此，我们可以基于以下事实，将 $f(r,t') = f(r,t-\tau)$ 替换为 $f(r,t)$：在背景分布发生显著变化之前，$C_i(\tau = t-t')$ 已发生明显变化（Vanden Eijnden 1997）。这一准线性假设表明，超低频波振幅无法在与超低频波周期和漂移周期相当的时间尺度上改变背景分布函数。因此，接下来几行给出的扩散系数不会导致与方位漂移周期相当的时间尺度上的变化，这也证明了方程 (27) 所定义的系综平均是合理的。

为简化起见，我们现在假设相关时间为零[23]，这意味着 $e^{-|t-t'|/\tau_c} \longrightarrow \tau_c\delta(t-t')$，其中 $D = |A_m|^2/\tau_c$。利用上述表达式，我们计算得到以下相关函数：

$$\langle A_m(t)\delta f_m(t)\rangle = \left(\frac{8r^2 D\tau_c}{21B_0} + im\frac{\mu D\tau_c}{\gamma_d q B_0 \gamma}\right)\frac{\partial f_0}{\partial r} \tag{52}$$

$$\langle \dot{A}_m(t)\delta f_m(t)\rangle = -\left(\frac{8r^2 D}{21B_0} + im\frac{\mu D\tau_c}{qB_0\gamma}\right)\frac{\partial f_0}{\partial r} \tag{53}$$

因此，准线性扩散方程的一般形式为：

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \sum_m \left[\left(\frac{m\mu r}{\gamma q B_E R_E}\right)^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{D\tau_c^2 r^4}{R_E^4}\frac{\partial f_0}{\partial r}\right) + \left(\frac{8}{21}\right)^2 \frac{r^2}{R_E^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Dr^8}{B_E^2 R_E^4}\frac{\partial f_0}{\partial r}\right) - \frac{1}{3}m^2\Omega_d^2\tau_c^2\frac{Dr^9}{B_E^2 R_E^6}\frac{\partial f_0}{\partial r}\right] \tag{54}$$

我们对准线性方程（54）中的时间和径向距离进行归一化，令其分别为 $\tau = t/\tau_c$ 和 $L = r/R_E$，并写作 $|\delta B_m|^2 = r^2|A_m|^2$，可得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_0}{\partial \tau} &= \sum_m \left[L^2\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{1}{9}m^2\Omega_d^2\tau_c^2 L^6\frac{|\delta B_m|^2}{B_E^2}\frac{\partial f_0}{\partial L}\right) + L^2\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{8^2}{21^2}L^8\frac{|\delta B_m|^2}{B_E^2}\frac{\partial f_0}{\partial L}\right)\right] \\ &= L^2\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{D_{LL}}{L^2}\frac{\partial f_0}{\partial L}\right),\end{aligned} \tag{55}$$

其中，扩散系数 D_{LL} 以 τ_c 归一化后为

$$D_{LL} = \sum_m \left(\frac{1}{9}m^2\Omega_d^2\tau_c^2 + \frac{64}{441}\right)\frac{|\delta B_m|^2}{B_E^2}L^8. \tag{56}$$

方程 (55) 守恒限制在有界体积内的粒子，因为粒子的总变化率为 $dN/dt \simeq \int_{L_{min}}^{L_{max}} B\ L\ dL\ \partial f/\partial t \simeq \frac{D_{LL}}{L^2}\frac{\partial f_0}{\partial L}\Big|_{L_{min}}^{L_{max}}$。此外，由于这种扩散

[23]通过保持 τ_c 有限但很小（$\Omega_d\tau_c \ll 1$），准线性极限下的扩散系数会按因子$1+\Omega_d^2\tau_c^2$重新缩放，从而使径向输运呈现能量依赖性，如 Osmane & Lejosne (2021年) 所示。

对于满足法拉第定律的电磁场模型，系数可由磁场中的波功率单独表示，无需将其拆分为电场 D_{LL}^{E} 和磁场 D_{LL}^{B} 扩散系数，这种拆分在径向输运研究中很常见（Ozeke 等，2014年；Sandhu 等，2021年）。

扩散系数取决于包含在方位漂移频率 Ω_d中的第一绝热不变量 μ 。我们注意到，对于较大的 $m \gg 1$ 方位波数，扩散系数取决于能量，并且具有径向距离依赖性，其变化形式为 L^6，尽管短相关时间假设会约束 $\Omega_d\tau_c \ll 1$。对于 $m \simeq 1$ 和 $\Omega_d\tau_c \ll 1$，扩散系数与能量无关，并具有 L^{10} 标度：

$$D_{LL} = \begin{cases} \frac{m^2\mu^2}{q^2\gamma^2}\tau_c^2\frac{|\delta B_m|^2}{B_E^2}L^4 \sim L^6, & \text{if } 0.77m^2\Omega_d^2\tau_c^2 \gg 1, \\ \frac{8^2}{21^2}\frac{|\delta B_m|^2}{B_E^2}L^8 \sim L^{10}, & \text{if } 0.77m^2\Omega_d^2\tau_c^2 \ll 1. \end{cases} \tag{57}$$

这种对于 D_{LL} 高方位波数和低方位波数的区分对于地球辐射带的建模非常重要，因为太阳风扰动可能导致宽广和狭窄的超低频波方位波数谱（Murphy等2020年）。例如，行星际激波可导致方位波数呈现宽广的谱，其中 $\{m \in \mathbb{Z}^+ : \ m < 20\}$ （Sarris 2014年；Barani等人 2019年）。在这种情况下，模型预测出一个依赖能量的 D_{LL} ，其可按 L^6 进行标度，前提是高 m 模态的波功率与低 m模态中的波功率相当。另一方面，沿方位波数 $m = 1$的窄超低频波谱应导致与能量无关的扩散，并且其径向标度依赖性对径向距离更加敏感。换言之， D_{LL} 的参数依赖性取决于超低频波谱在 m中的宽度。如果磁层等离子体由一个$m = 1$ 模态主导，而 $m > 1$ 模态中的功率低数个数量级，则应选择具有 L^{10} 依赖性的扩散系数准线性建模。如果选择具有 L^6 依赖性的准线性模型，并且在 D_{LL} 中的能量依赖性能够提供更高的精度，那么它仍将与上述从Mead场推导出的径向扩散系数不一致。

3.4. 超越径向输运的准线性理论：非线性区域

在前文各节中，我们描述了扰动分布函数的线性响应δf ，并为集合平均分布函数 $f_0(L, \ t)$ 的准线性演化写出了福克-普朗克方程。即使在准线性极限下，扰动分布函数仍被假定为线性的，而背景分布的演化则是非线性的，因为它取决于相关器 $\langle \delta B_m \delta f_m \rangle$。然而，方程（32）给出的扰动响应包含一个非线性项，本节旨在确定径向输运的线性假设何时失效，以及非线性过程何时会在动力学上变得重要。

我们区分两种非线性状态。第一种状态中，与超低频波相关的非线性结构会产生，但彼此孤立，也就是说它们无法相互作用。在ULF径向输运的Case中，Li等人（2018年）；Wang等人（2018年）已经讨论了这类结构，其观测特征表现为电场势阱中出现被俘获的通量。这种孤立俘获结构状态等价于形成

伯恩斯坦–格林–克鲁斯卡尔（BGK）模的 Vlasov–Poisson系统（Bernstein等，1957），并且需要足够大振幅的涨落，将粒子限制在各自的相空间中。

第二种类型中，由于存在多个超低频模，分布函数中的涨落会相互作用，从而产生非线性效应。与第一种不同，这种非线性可以因大振幅涨落的存在而得到促进，但并不依赖于它们。这一情形等同于Dupree (1972)针对 Vlasov–Poisson系统提出的情形，并与相空间颗粒化结构的形成相关。这些相空间颗粒化结构可以由弹道轨迹引起的线性涨落构成，例如漂移回波；也可以由非线性的俘获涨落构成，后者等同于 BGK 模。理论和观测研究表明，这种由非孤立结构组成的非线性区域在弱碰撞等离子体中可能很常见（Schekochihin 等，2008年；Schekochihin 等，2016年；Meyrand 等，2019年；Servidio 等，2017年；Kunz 等，2018年），能够阻止朗道阻尼耗散涨落（Wu 等，2019年），并可能产生相空间湍流级联，这与流体和磁流体动力学湍流系统中的观测结果相似（Goldreich & Sridhar 1995）。

尽管我们承认，地球辐射带中的超低频波振幅可能足够大，能够维持由 Li 等人 (2018年)；Wang 等人 (2018年) 推导出的俘获结构，但沿磁地方时的俘获并不会使俘获粒子群获得不可逆的能量增益。下文将重点讨论第二种非线性区域，该区域依赖于一个以上的超低频 Pc4 和 Pc5 模式的存在。下文将表明，第二种非线性区域能够导致粒子沿磁漂移壳层输运，从而使原本无法经历漂移共振的粒子群获得不可逆的能量。我们还将证明，与对称超低频涨落相关的非线性效应纳入后，尽管这些效应在线性和准线性区制中没有影响，却可能突然成为加速和损失的驱动因素。

3.4.1. 确定非线性径向输运何时变得显著的标准

$\mathcal{Q}$ 中包含的非线性项由方程（B8）给出，可以理解为耦合项：方位波数为 $p = m - m'$ 的模式与模式 $q = m'$ 耦合，从模式编号 m 中泵入或吸收能量。例如，与方位波数 $m = 3$ 互动并编码于 $\delta f_{m=3}$ 中的粒子集合，可与编码于 $\delta f_{m'=1}$ 中、方位波数为 $m' = 1$ 的另一粒子集合，通过具有 $p = 2$ 的超低频模式以 $A_{p=2}$ 相互耦合。这种非线性波粒耦合能够加速相对于 Pc4 和 Pc5 超低频频率具有较慢方位漂移周期的非共振高能粒子，即 $m\Omega_d \ll \omega$。

然而，仅满足条件 $p + q = m$ 并不足以使非线性效应在径向输运的动力学过程中变得显著。当非线性耦合项与经历方位漂移的粒子的线性渡越项相当时，非线性耦合项便会变得显著；该线性渡越项由公式（39）左侧的第二个表达式给出。例如，若考虑与对称超低频振幅相关的非线性项 $S(t)$，其模数为 $p = 0$，以及粒子对模态 $q = m$，$\frac{S}{B_0}\frac{\partial \delta f_m}{\partial t} \simeq \omega \frac{S}{B_0}\delta f_m$的响应，则可得到以下两个判据

$$I_1 = \frac{\text{symmetric nonlinear term \# 1}}{\text{linear transit time}} \simeq \frac{\omega_m}{m\Omega_d}\frac{S}{B_0} \simeq 1, \tag{58}$$

$$I_2 = \frac{\text{symmetric nonlinear term } \#2}{\text{linear transit time}} \simeq \frac{L}{2}\frac{\omega}{m\Omega_d}\frac{S}{B_0}\frac{\partial}{\partial L}\log \delta f_m \simeq 1, \tag{59}$$

其中，频率 ω_m 与扰动分布函数δf_m 的时间变化相关，而频率 ω 与对称超低频波振幅 $S(t)$相关。我们注意到，公式（39）给出的扰动分布函数的线性弹道响应会产生频率为 $\omega_m = m\Omega_d$的时间变化，因此，只要对称超低频振幅与局部磁场相当，就会产生非线性效应。然而，在对称超低频涨落振幅较小的极限下，即 $S(t)/B_0 \ll 1$，若 $\omega_m \gg m\Omega_d$，判据 I_1 也可能满足。对于判据 I_2，即使在极限 $S \ll B_0$下，扰动分布的梯度较大（$\partial\log(\delta f_m)/\partial L \gg 1$）时，非线性效应也会变得显著。

我们可以通过用非线性项定义另外两个判据 I_3 和 I_4，来考虑与反对称扰动 $\frac{rA_{m-m'}}{B_0}\frac{\partial \delta f_{m'}}{\partial t} \simeq -\omega_{m'}\frac{rA_{m-m'}}{B_0}\delta f_{m'}$ 相关的非线性效应

$$I_3 = \frac{\text{anti-symmetric nonlinear term } \#\ 1}{\text{linear transit time}} \simeq \frac{\omega_{m'}}{m\Omega_d}\frac{rA_{m-m'}}{B_0}\frac{\delta f_{m'}}{\delta f_m} \simeq 1, \tag{60}$$

$$I_4 = \frac{\text{anti-symmetric nonlinear term } \#\ 2}{\text{linear transit time}} \simeq L\frac{8}{21}\frac{\omega_{m-m'}}{m\Omega_d}\frac{rA_{m-m'}}{B_0}\frac{\delta f_{m'}}{\delta f_m}\frac{\partial}{\partial L}\log \delta f_{m'} \simeq 1. \tag{61}$$

我们再次指出，由于扰动部分 $\delta f_{m'}$ 的线性响应可能导致频率为 $\omega \simeq m'\Omega_d$的时间变化，因此只要 $\frac{m'}{m}\frac{\delta B}{B_0}\frac{\delta f_{m'}}{\delta f_m} \simeq 1$，就可以感知到非线性效应。如果 $m = 1$、 $m' > m$，或者存在较大梯度，即使是小振幅的超低频波动$rA_{m-m'} = \delta B_{m-m'} \ll B_0$ 也可能产生在动力学上具有重要意义的非线性效应。

3.4.2. 快速时间尺度上对称扰动的非线性影响

在上一节中，我们定义了四项标准，用于论证即使超低频波动的振幅很小，非线性效应也可能变得显著。在本节中，我们将重点讨论由对称扰动 $S(t)$ 引起的非线性。受扰分布函数 δf_m 的非线性方程(32) 可以在与粒子漂移周期相当的快速时间尺度上进行解析求解。方程(32)的线性解与对称扰动 $S(t)$无关。但非线性项 $\mathcal{Q}$ 包含对称扰动与 δf_m之间的耦合项。粒子对具有模式 m 的响应所呈现的这种非线性响应，是由对称扰动中包含的 $m = 0$ 超低频模式与其自身之间的耦合引起的。如果我们假设由 $S(t)$ 引起的非线性耦合大于由反对称超低频波 $S \gg rA_m$ 引起的耦合，则方程 (32) 变为：

$$\frac{\partial \delta f_m}{\partial t} + im\Omega_d\delta f_m = -\left(\frac{8r^2\dot{A}_m}{21B_0} - im\frac{\mu A_m}{qB_0\gamma}\right)\frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{S}{B_0}\frac{\partial \delta f_m}{\partial t} - \frac{r\dot{S}}{2B_0}\frac{\partial \delta f_m}{\partial r}. \tag{62}$$

为了单独考察由非线性耦合引起的对称扰动的影响，我们将受扰分布分解为由公式（39）给出的线性部分 δf_m^L 和可从以下公式中提取的非线性部分 δf_m^{NL}：

$$\frac{\partial \delta f_m^{NL}}{\partial t} + im\Omega_d\delta f_m^{NL} = \frac{S}{B_0}\frac{\partial \delta f_m^L}{\partial t} - \frac{r\dot{S}}{2B_0}\frac{\partial \delta f_m^L}{\partial r}. \tag{63}$$

在方程（63）中，我们假设非线性扰动仍小于线性响应$|\delta f_m^{NL}| < |\delta f_m^L|$，因此可以使用扰动法求解非线性方程，从而舍弃与 $\delta f_m^{NL} S(t)$成正比的耦合项。方程（63）关于 δf_m^{Nl}是线性的，现在只要为线性响应 δf_m^L指定一个解即可求解。

为简化起见，并为了强调 ULF 径向输运会在与漂移周期相当或更短的快速时间尺度上影响非共振粒子，我们假设线性扰动 δf_m^L 由符合线性解的 100 千电子伏电子注入或损失构成，并设 $A_m = 0$[24]。赤道平面内归一化径向距离为 $L \leq 8$ 的 100 千电子伏电子，其方位漂移周期约为 90 至 120 分钟。因此，频率约为 $\omega \simeq 1$ 毫赫兹时，所需的方位波数为 $m \geq 10$ (Barani 等人, 2019年）。

我们假设注入的 50 千电子伏电子服从高斯分布，其中心位于径向距离 L_c 处，径向展宽为 ΔL

$$\begin{aligned} \delta f_m^L(L,t) &= \delta f_m(0,L) e^{-im\Omega_d t} \\ &= e^{-\frac{(L-L_c)^2}{\Delta L^2}} e^{-im\Omega_d t}. \end{aligned} \tag{64}$$

对称扰动被建模为磁场压缩，其衰减时间为τ_c^S，

$$S(t) = \delta b \; e^{-t/\tau_c^S}. \tag{65}$$

高斯分布形状的注入和衰减的对称超低频模作用下，分布函数 $\delta f_m^L + \delta f_m^{NL}$的扰动解为

$$\delta f_m^L + \delta f_m^{NL} = \delta f_m(0,L) e^{-im\Omega_d t} \left[1 - \frac{\delta b}{B_0} \left(1 - e^{-t/\tau_c^s} \right) \left(im\Omega_d \tau_c^S + \frac{L(L-L_c)}{\Delta L^2} \right) \right]. \tag{66}$$

式（66）给出的 $m = 1$ 模的非线性响应如图（10）所示，对称超低频波振幅为 $\delta b = 0.12 B_0$。左上图对应线性响应。在 $L_c = 5$处注入粒子后，分布函数随时间振荡，并沿着L发生剪切。然而，当引入衰减时间小于漂移周期的对称扰动（其中 $\tau_c^s < \Omega_d$）时，分布函数会在注入点处分裂。图（10）右上图和左下图展示了这种非绝热行为。相比之下，当超低频模以 $\tau_c^S \geq \Omega_d$ 绝热衰减时，对分布函数没有影响，如图（10）右下图所示。

该机制所涉及的物理过程如图（14）所示。振幅为 $S(t)$的对称超低频压缩会产生一个 $E \times B$ 差分梯度，其在较高漂移壳层处的振幅大于较低漂移壳层处。具有负（正）梯度的漂移壳层会导致粒子向内（向外）运动。如果超低频压缩是绝热的，粒子会沿 L 发生相位混合，但如果

[24] 线性响应取为弹道响应 $\delta f_m = \delta f_m(t = 0, r) e^{-im\Omega_d t}$。纳入 $A_m \neq 0$ 的线性波粒响应会产生相同的物理过程，因此留待未来对高阶径向输运开展更详细的研究。

当压缩为非绝热过程，且 $E \times B$ 漂移衰减或增长过快（相对于方位漂移周期），以至于无法发生相位混合时，净径向漂移方向向内。图（11）和图（12）展示了粒子向内的净运动，其中 ULF 对称振幅分别为 $L = 5$ 处背景场的 25% 和 62%。向内运动的粒子为保持第一绝热不变量而能量增加，而向外运动的粒子则损失能量。即使不存在与 ULF 模的漂移共振，这一过程也可能导致粒子快速、不可逆的加速，以及与遮蔽相关的损失。这些结果表明，纳入高阶效应可能会在较短时间尺度上导致非扩散性、不可逆的径向输运。准线性径向扩散无法模拟这一过程。

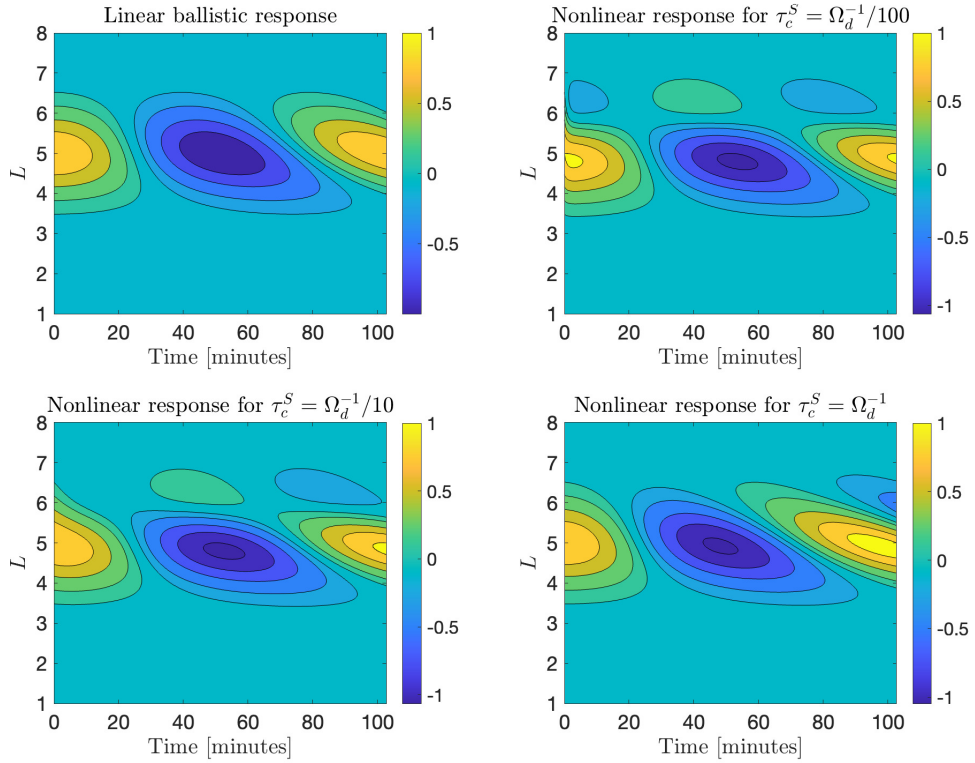


图 10。在 $L = 5$ 处，振幅为$\delta b = 0.12 B_0$ 的对称扰动在短于一个漂移周期的时间尺度内产生的对称扰动，对 $L = 5$ 注入的 100 千电子伏电子的扰动分布函数的影响。颜色刻度表示扰动分布幅度。

4. 讨论

4.1. 何时可以使用准线性径向扩散？

采用漂移动力学描述来刻画超低频波与高能粒子的相互作用，是界定准线性径向扩散问题有效范围的一种便捷方法。相比之下，以粒子轨迹为基础的推导（F¨althammar 1965；Elkington 等人 1999年；Lejosne 2019年）在数学上比第 3.3 节所述的推导更加直观；但由于它不需要计算受扰轨道，因此无法明确区分分布函数中受扰的快速变化部分

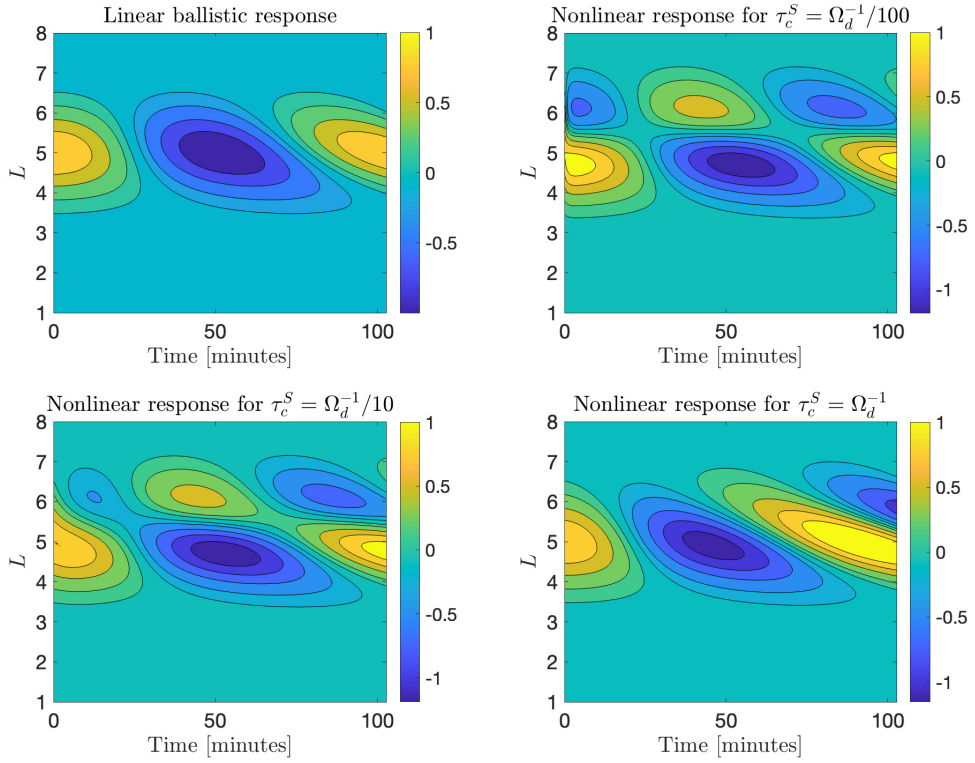


图 11。 与图 10 相同，但在 $L = 5$ 处施加振幅为 $\delta b = 0.25 B_0$ 的对称扰动。

与缓慢变化的背景部分 .

推导径向扩散系数的过程与实验室和天体物理等离子体中所采用的其他准线性理论相同（Kennel & Engelmann 1966；Diamond 等人 2010；Schekochihin 2017年）。准线性理论要求将分布函数在时间和空间尺度上分离为缓慢的系综平均背景分量和快速扰动分量。快速分量可以在与负责波粒相互作用的电磁涨落周期相当的时间尺度上演化。例如，对于与高频哨声波相互作用的 10-100 千电子伏种子电子，Kennel & Engelmann (1966）的准线性理论明确指出，扰动分量在量级为哨声波周期的时间尺度上演化，因此也在拉莫尔周期的时间尺度上演化，因为 $\omega \simeq \Omega_s$。分布函数的扩散演化需要与哨声波进行大量相互作用，因此是在对大量哨声波周期取平均后的时间尺度上计算的。扰动部分以线性方式计算，因此准线性理论假设可以忽略与大振幅相关的俘获和模态间耦合等非线性效应。

为了使径向输运的准线性理论保持自洽，必须维持方程（25）和（27）所定义的尺度分离。背景分布函数不仅与磁地方时无关，因此也与 φ 无关，而且在时间尺度上不能发生显著变化compa-

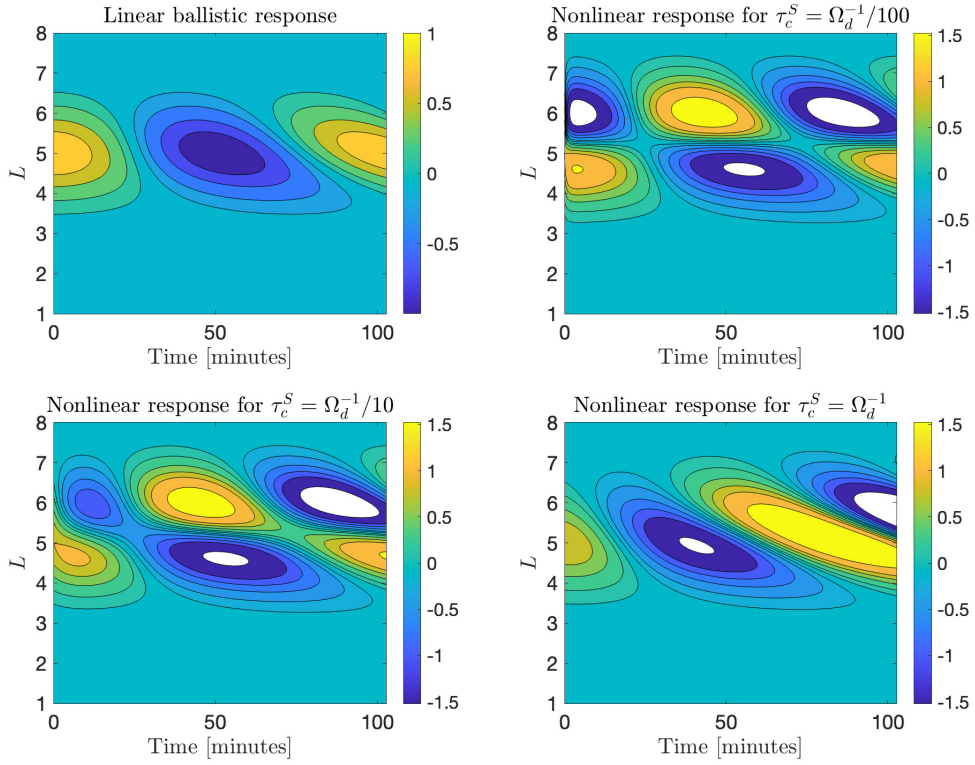


图12。 与图10相同，但采用振幅为 $\delta b = 0.62 B_0$ 、位于 $L = 5$ 的对称扰动。

与漂移周期 Ω 相当$_d$。径向扩散系数若达到与漂移周期（$D_{LL} \simeq \Omega_d$）相当的量级，则表明一群粒子能够在单个漂移周期内穿越一个漂移壳层（$\sqrt{\langle \Delta L^2 \rangle} \simeq 1$）。这一论点源于这样一个事实：从量纲上看，径向扩散系数的尺度为 $D_{LL} \simeq \langle \Delta L^2 \rangle / t$，而扩散系数的倒数给出了粒子穿越一个漂移壳层输运的特征时间。考虑到推导准线性扩散系数需要超低频波振幅具有较短的去相关时间，并且观测表明超低频波具有长寿命和相干性（Hartinger 等人 2013年），很难想象沿漂移壳层的扩散散射能够在单个漂移周期内发生 [25]

准确确定径向扩散系数不仅具有学术意义，而且对空间天气模型以及旨在区分局部和全球加速过程的辐射带研究具有重要影响 Green & Kivelson (2004年)。目前考虑径向扩散的全球磁层模型依赖于 D_{LL} 系数，这些系数与被困在地球辐射带中的高能电子的漂移周期相当；在地磁活动较强时，其数值甚至更大（Brautigam & Albert 2000年；Ozeke 等人 2014年）。例如，Ozeke 等人 (2014年)的径向扩散系数在 10^2 天为单位$^{-1}$ 时，对于 Kp¿5，可能达到如此大的数值，这对应于能量为1兆电子伏的电子的漂移周期。此外，推导出的径向扩散系数假设超低频波相关性 $\langle \delta \mathbf{B}(t) \delta \mathbf{B}(t+\tau) \rangle$ 在时间和空间上

[25]这一启发式论证在某种程度上是任意的，但由于缺乏更好的替代方案，它为径向扩散系数提供了合理且可靠的约束。

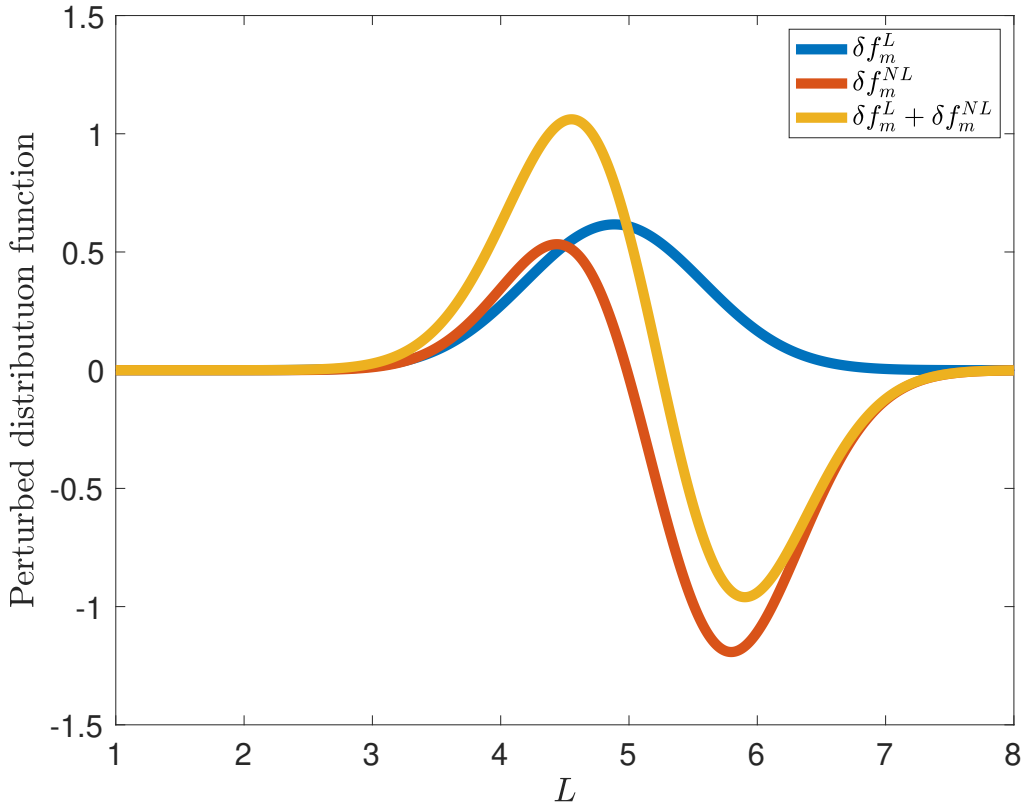


图13. 图12中 $\varphi = 0$ 处线性和非线性扰动分布函数的截面。非绝热对称扰动通过将粒子向内和向外推动，使分布函数发生分裂。

沿粒子轨道均匀分布。然而，超低频波由多种空间位置各异的过程持续激发，包括开尔文-亥姆霍兹不稳定性（Mills & Wright 1999年）、太阳风中的压力脉冲（Takahashi & Ukhorskiy 2007年）、前震瞬变（Hartinger 等人 2013年）、磁层亚暴（Volwerk 2016年）以及不稳定等离子体分布（Southwood等 1969年）。因此，超低频波在磁层中并非均匀分布（Murphy等 2020年），除非超低频波相较于漂移周期衰减得非常快，否则必须推导出能够考虑非均匀统计特性的准线性径向扩散系数[26]。

上述关于准线性径向扩散的局限性并不意味着超低频波无法在与漂移周期相当的时间尺度上维持输运。相反，所论证的是，当前的准线性径向扩散模型存在明显局限，不应在其有效范围之外使用。编码超低频波对快速时间尺度影响的径向输运系数需要采用非准线性模型。径向输运的漂移动力学方法并不局限于理论或建模研究。借助由范艾伦探测器的仪器校准的全球定位系统通量测量，现在可以对时间尺度大致为

[26]Osmane & Lejosne (2021年)表明，相关时间有限且与漂移周期相当的空间均匀超低频波会导致次扩散径向输运，并使径向扩散减缓。据我们所知，目前径向扩散模型尚未纳入非均匀效应。

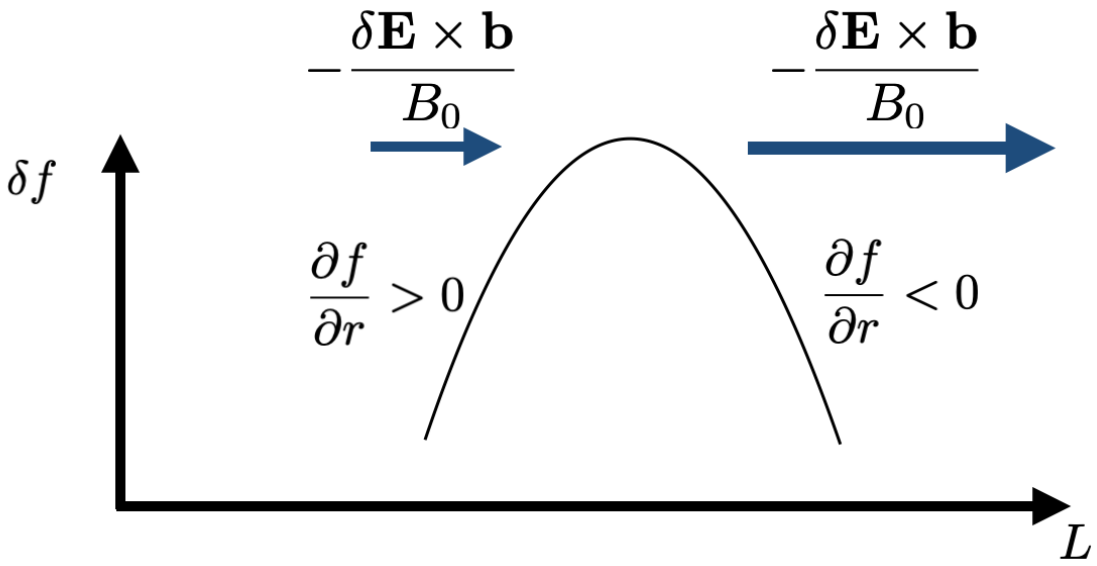


图14. 第3.4.2节所述非线性机制的解释。振幅为 $S(t)$的对称超低频压缩会产生 $E \times B$ 微分梯度，其振幅在较高漂移壳层处大于较低漂移壳层处。梯度为负（正）的漂移壳层会使粒子向内（向外）运动。如果超低频压缩是绝热的，粒子会沿 L发生相位混合；但如果压缩是非绝热的，且 $E \times B$ 漂移衰减得太快，以致相位混合无法发生，那么净漂移将向内。

单个漂移周期内能量低于 1 兆电子伏的电子（Morley 等，2016年；Morley 等，2017年；Kalliokoski 等，2023）。

4.2. 快速径向输运

4.2.1. 区分漂移共振与非共振相互作用

第（3.1）节所述的尺度分离构成了推导径向输运准线性理论的基础，同时也适用于量化分布函数在快速时间尺度（与几个漂移周期相当）上发生的线性和非线性响应。第（3.2）节描述了与频率为 ω_m、增长或阻尼率为 γ_m、方位波数为 m的超低频波相关的三种不同线性响应。其中三种响应是非共振的，一种对应于以频率$\Omega_d \simeq \omega_m/m$漂移、穿过地球磁场的粒子的漂移共振。第一种非共振响应是分布函数以超低频波的频率 ω_m发生调制，第二种非共振响应则是分布函数以漂移频率Ω_d振荡。尽管对超低频波的共振和非共振响应都取决于背景分布函数的局部梯度，但共振粒子具有能量依赖性，且受扰分布的幅度最多可放大一个数量级，因此可与非共振响应区分开来。

超低频漂移共振模型预测，卫星应在与共振能量相对应的能量处观测到粒子通量的最大调制，而在较低或较高能量处的调制则较小（Southwood 和 Kivelson 1981）。方程（41）证实了这一共振特征，但也表明，非共振粒子和共振粒子一样，都可能以超低频波频率振荡。原位观测到分布函数或通量以超低频频率振荡 ω_m 应

因此，不应将其视为漂移共振的特征，除非这种响应在能量谱图中局限于特定能量范围。对于漂移共振，与共振相互作用及其宽度相关的时间尺度是增长率的函数。我们在此强调，对于单色超低频波谱，如果在多个能级上观测到幅度相近的调制，则表明这种相互作用是非共振的。

在Claudepierre 等人 (2013年)的研究中，20 至 500 千电子伏高能电子的通量被认定为与超低频波发生局域漂移共振相互作用的明确标志。然而，该研究未提供分析来量化各相应能量通量的分布函数径向梯度。如本报告所示，粒子通量随超低频波频率的调制并不需要漂移共振，非共振粒子也能出现这种现象。不同通量间的振幅差异可用高能通量之间的径向梯度差异来解释。随时间变化的局域调制可由以 γ_m的速率衰减的超低频波解释；而在一台范艾伦探测器上观测到、但第二台探测器未能观测到的空间局域调制，可能表明分布函数的径向梯度具有高度空间局域性。已有案例研究报告了分布函数存在较大且局域化的径向梯度。例如，Hartinger 等人 (2020年)指出，在 $L = 4.5$ 和 $L = 6.6$ 处，200 千电子伏对应数值的径向相空间密度梯度比 1 兆电子伏对应数值的大 30 至 300 倍。因此，在这一特定案例中，200 千电子伏电子的残余通量振荡将比 1 兆电子伏电子的大 30 至 300 倍。因此，在未考虑径向梯度的情况下表征通量振荡，可能会导致对波粒过程的错误解读，因为径向梯度已知会变化数个数量级。

如图（8）和（9）所示，Pc4和Pc5频段的超低频波可与能量范围为100千电子伏至数兆电子伏的电子发生共振，但兆电子伏能量最高的粒子群中，漂移共振的迹象十分罕见。Hartinger 等人 (2020年探讨了观测结果与理论假设之间的这一矛盾。基于Southwood 和 Kivelson (1981）的理论研究，要观测到漂移共振，背景分布函数必须具有非零径向梯度。漂移共振相互作用仍可能发生，但会被背景分布函数较小的径向梯度所掩盖。我们认同Hartinger 等人(2020年）的结论，即要探测到漂移共振，必须存在可观测的梯度；此外，我们对共振响应的分析还揭示了另一项限制。如公式（41）所示，漂移共振特征会导致粒子响应增强，这种增强局限于一段时间内，其持续时间可与一个漂移周期相当。此外，如果超低频波快速衰减，即衰减时间尺度仅为几个漂移周期，那么共振交换可能过弱，无法观测，或无法与非共振交换区分。考虑到Hartinger 等人(2020年）关于径向梯度重要性的结论，我们的分析还为少数航天器观测到漂移共振特征的情况为何如此罕见提供了另一种解释。漂移共振是一个瞬态过程；当一艘航天器探测时，另一艘航天器即使采样同一轨道，若采样时间相隔超过几个漂移周期，也可能完全错过该过程。

4.2.2. 斑马条纹形成机制

尽管辐射带中的相空间结构并不一定表明第三绝热不变量遭到破坏，因而也不一定意味着发生了加速，但其观测特征可用于检验径向输运模型的有效性，也可作为诊断电场或粒子注入的依据。在第3.2节中，我们展示了俘获电子的相混合可形成被称为斑马条纹的结构。斑马条纹是瞬态的结构化峰谷，出现在内辐射带电子的能谱图中，其能量范围从数十千电子伏至数百千电子伏。在原位测得的斑马条纹原位还具有这样的特征：能量峰和能量谷随径向距离的倒数而变化，即 $E_c \sim 1/L$ (Sauvaud 等人 2013年;Lejosne 和 Roederer 2016年; Lejosne 和 Mozer 2020年a,b）。由于斑马条纹可在数个漂移周期左右的时间尺度内形成，因此应立即排除径向扩散机制。我们的分析还表明，斑马条纹无需通过超低频波的漂移共振也能形成，而是可由针对非共振粒子所描述的相混合过程产生。本报告所述的相混合过程由辐射带中的粒子注入或损失触发，因此，Ukhorskiy 等人(2014年）提出的维持漂移共振所需的电场条件并非必要。与非共振相混合机制相比，通过漂移共振相互作用产生斑马条纹的条件限制更多，因为共振要求超低频波具有一组狭窄的参数，并且具有非零的径向梯度 f_0 [27]。

我们如何区分斑马条纹的形成机制？需要注意的是，第一个相混合机制在第3.2.1节中有所描述，它需要粒子的注入或损失，但不需要电场。第二种类型以公式（39）中的弹道项形式出现，需要超低频波动以及分布函数中有限的径向梯度。第三种类型由Ukhorskiy 等人(2014年）描述，但在公式（39）中表现为漂移共振项，需要能够与广泛能量范围发生共振的超低频波动，同时还需要分布函数中有限的径向梯度。对于这三种类型，形成和剪切发生在相同的时间尺度上。为了区分这两种相混合机制，需要测量相空间密度中的径向梯度，并确定超低频波动的振幅是否能够产生所观测到的条纹结构的振幅。如果此类检验无法得出明确结论，则可能更倾向于采用需要注入的相混合过程，例如Zhao 和 Li (2013年中详细描述的过程。如果未来的观测研究表明，内辐射带中的粒子注入或损失与相混合结构相关，则可以将斑马条纹用作注入和损失的替代指标。同样，如果相混合过程主要由超低频波动驱动，则可以将斑马条纹的出现用作替代指标，以提取内辐射带中电场的性质。

4.3. 非线性帕克机制

首个能够导致粒子不可逆加速的径向输运模型由Parker(1960)提出，无需漂移共振过程。在Parker (1960)提出的情景中，受磁场约束的粒子会因磁场扰动不对称而经历非绝热输运。由于同一漂移壳层上不同磁地方时扇区的粒子感受到的扰动不同，它们共同经历了净径向输运。第3.4.2 节提出的机制是对Parker (1960)机制的高阶推广，因为它不需要

[27] 基于奥卡姆剃刀原则，我们倾向于认为，非共振粒子的相混合机制可以解释斑马条纹的形成（波普尔 2005）。

与超低频波发生漂移共振。这种非线性机制同样由非绝热扰动产生，但不需要不对称的磁场涨落。相反，这一非线性过程要实现不可逆径向输运，所需的仅有两个要素是

1. 大振幅对称扰动 $\delta B/B_0 \simeq 10\%$以非绝热方式衰减或增长；2. 分布函数具有相反的径向梯度，换言之，分布函数沿径向距离存在局部极小值或极大值。

同一漂移壳层上的粒子感受到相同的电磁场和径向漂移速度，而不同漂移壳层上的粒子则以不同速度漂移。在存在相反梯度的情况下，向内和向外输运共同作用，导致不可逆加速，因为被推向内侧的粒子多于被推向外侧的粒子。如果与漂移周期相比，波的去相关过程非常缓慢（即绝热），粒子就会发生径向相位混合，而不是净注入到内侧，最终沿径向距离形成一个平台。

在地球辐射带中是否观测到对称超低频涨落？在最近一项观测研究中，Takahashi等人(2022年)首次描述了对称压缩性超低频涨落，其磁场强度与背景磁场相当。这些对称超低频波在等离子体层外激发，并局限于特定的磁地方时和径向距离范围。Takahashi等人（(2022年)所描述的涨落具有大振幅（$\delta B/B_0 \geq 0.1$）和压缩性，这与第3.4节所介绍的加速过程所采用的涨落特征一致。此外，这些波与粒子注入相关联地被观测到，因此，对称涨落与粒子的局部径向增强有关。尽管此时判断这种机制是否普遍发生于辐射带中还过于推测，但我们要强调的是，这种非线性机制发生所需的两个条件已在辐射带中观测到。与在较长时间尺度上起作用、需要大量漂移共振相互作用的径向扩散不同，快速的非线性加速机制可能较少发生，但效率更高。

5. 结论

在本报告中，我们介绍了地球辐射带中ULF径向输运的漂移动力学描述。采用漂移动力学形式体系，特别便于区分发生在慢时间尺度上的准线性扩散，以及与线性或非线性过程相关的快速波粒相互作用。从理论上讲，目前地球磁层的全球模型仅以准线性扩散模型的形式描述ULF径向输运。我们的分析表明，发生在与漂移周期同量级的时间尺度上、且具有磁地方时空间依赖性的线性和非线性过程，无法用准线性扩散来建模。从观测角度看，快速且局域化的径向输运数十年来已为人所知，但此前仅限于极端驱动事件或偶然获得的卫星观测（Li等，1993年；Kanekal等，2016年）。近年来，利用范艾伦探测器的仪器对全球定位系统电子通量测量进行标定，首次为我们提供了前所未有的地球辐射带空间和时间覆盖范围，其时间尺度与方位漂移周期相当（Morley等，2016年；Morley等，2017年；Kalliokoski等，2023年）。因此，一个建模框架

区分快速和慢速径向输运不仅具有理论意义，而且还可以首次利用原位测量在广泛的地磁驱动条件下进行检验。

过去二十年间，地球辐射带中的主要加速过程被归类为局部波粒相互作用或全局超低频径向扩散。局部波粒过程在相空间密度中的观测特征是局部增强，而超低频径向扩散则会使相空间密度沿径向距离变得平坦（Green & Kivelson2004；Reeves etal.2013）。在径向输运方程中纳入高阶项后，我们发现，注入外辐射带、能量为 $50-100$ 千电子伏的种子电子，在存在对称超低频波振幅（其振幅与 Takahashi 等人 (2022年) 报告的数值相当）时，可能经历额外的磁禁闭加速。这一脉冲式非线性过程不需要漂移共振，却能在远短于漂移周期的时间尺度内造成相空间密度局部增强。因此，这一理论结果对辐射带观测研究尤为重要，因为超低频波也能够产生局部特征，而这些特征通常被归因于小尺度波粒相互作用。随着卫星覆盖范围不断扩大，且测量电子通量的时间尺度已可与漂移周期相当，过去几十年发展起来的二元准线性框架有必要重新审视。

本文主要关注地球辐射带中高能电子的径向输运。不过，基于（Hazeltine1973）的工作建立的漂移动力学描述，也可用于描述高能环电流质子（>100 千电子伏），其拉莫尔频率为 $\Omega_p \sim 1-10$ Hz，并响应超低频波动 $\omega \sim 1$ mHz（Murphy等 2014）；还可描述木星或土星等多种行星环境中的高能电子（Lejosne & Kollmann 2020）[28]。本文的主要局限在于仅研究了赤道俘获粒子，并忽略了边界效应；观测已知，边界效应是高能电子通量的损失源（Millan& Thorne 2007）。越来越多的原位 实验表明，高能电子可能在与几个漂移周期相当的时间尺度内耗减（Turner等 2012；Jaynes等 2018；Olifer等 2018）。尽管理论上可以用局部波粒相互作用解释这类突发损失（Zhang等 2022），但在某些事件中，小尺度波似乎不足以解释这些损失（Albert 2014）。由于超低频波能够在较短时间尺度内有效输运高能电子，因此值得研究它们对粒子损失的净影响。第3.4.2节所述的非线性帕克情景与磁场的突然对称减弱相伴，将导致粒子向外输运至外磁层顶边界。未来的研究将量化径向输运在损失过程中的作用；这些损失发生的时间尺度与漂移周期相当，因此过快，无法用径向扩散解释。

[28]不过需要注意，能量低于 10 千电子伏的离子可以维持涨落，从而违反漂移动力学的尺度分离条件 $k_\perp \rho \simeq 1$ (Crabtree & Chen 2004).

致谢

AO获得的支持来自芬兰科学院“物质与材料”重点领域计划（资助编号：318913）。OA衷心感谢埃克塞特大学、伯明翰大学以及英国研究与创新署（UKRI）自然环境研究理事会（NERC）独立研究奖学金 NE/V013963/1 提供的经费支持。我们感谢 Yohei Kawazura、Sol`ene Lejosne、Lucile Turc、Jay Albert、Richard Horne、Leonid Olifer、Hannu Koskinen 和 Jacob Bortnik 对本研究的讨论与交流。

附录

A. 准线性方程的推导

在本附录中，我们详细推导准线性方程（31）。对于具有守恒的第一绝热不变量 μ 且与 Mead场相互作用的赤道粒子，动理学方程形式如下：

$$gB_0\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{3\mu B_0}{q\gamma r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi}+\sum_m e^{im\varphi}\left[\frac{\mu A_m}{q\gamma r}+i\frac{r\dot{A}_m}{7m}\right]\frac{\partial f}{\partial \varphi}=-\left[\frac{r\dot{S}}{2}+\sum_m e^{im\varphi}\left(\frac{8r^2\dot{A}_m}{21}-im\frac{\mu A_m}{q\gamma}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial r}$$

函数 $g(r,\varphi,t)=1-S(t)/B_0-\sum_m e^{im\varphi}rA_m(t)/B_0$。将扰动波动沿方位角在傅里叶空间中分解为 $f(r,\varphi,t)=f_0(r,t)+\sum_m e^{im\varphi}\delta f_m(r,t)$ 后，动理学方程具有以下形式：

$$\begin{aligned}g\frac{\partial f_0}{\partial t}=&-\sum_m e^{im\varphi}\left[\frac{\partial \delta f_m}{\partial t}+im\Omega_d\delta f_m+\left(\frac{8r^2\dot{A}_m}{21B_0}-im\frac{\mu A_m}{qB_0\gamma}+\frac{r\dot{S}}{2B_0}\delta_{m0}\right)\frac{\partial f_0}{\partial r}\right]\\&-\sum_m\sum_n e^{i(m+n)\varphi}\left[\left(i\frac{m\mu A_n}{qB_0\gamma r}-\frac{mr\dot{A}_n}{7nB_0}\right)\delta f_m+\left(\frac{8r^2\dot{A}_n}{21B_0}-in\frac{\mu A_n}{qB_0\gamma}+\frac{r\dot{S}}{2B_0}\delta_{n0}\right)\frac{\partial \delta f_m}{\partial r}\right]\\&+\sum_m\sum_n e^{i(m+n)\varphi}\left(\frac{S}{B_0}\delta_{n0}+\frac{A_n r}{B_0}\right)\frac{\partial \delta f_m}{\partial t},\end{aligned}\tag{A1}$$

其中克罗内克δ函数为，

$$\delta_{mn}=\begin{cases}1, & \text{if } m=n,\\0, & \text{if } m\neq n.\end{cases}\tag{A2}$$

方程（A1）括号中的第一项包含线性项，而后面两个带双重求和的括号包含非线性项。我们借助傅里叶卷积定理求解该方程：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{F}(\varphi)\mathcal{G}(\varphi)e^{-ip\varphi}\,d\varphi&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_m\mathcal{F}_m e^{im\varphi}\right)\left(\sum_n\mathcal{G}_n e^{in\varphi}\right)e^{-ip\varphi}\,d\varphi\\&=\sum_m\sum_n\mathcal{F}_m\mathcal{G}_n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi e^{i(m+n-p)\varphi}\\&=\sum_m\sum_n\mathcal{F}_m\mathcal{G}_n\delta_{m+n,p}\\&=\sum_m\mathcal{F}_m\mathcal{G}_{p-m},\end{aligned}\tag{A3}$$

这给出了

$$\left(1-\frac{S}{B_0}-\frac{A_p r}{B_0}\right)\frac{\partial f_0}{\partial t}=-\left[\frac{\partial \delta f_p}{\partial t}+ip\Omega_d\delta f_p+\left(\frac{8r^2\dot{A}_p}{21B_0}-ip\frac{\mu A_p}{qB_0\gamma}+\frac{r\dot{S}}{2B_0}\delta_{p0}\right)\frac{\partial f_0}{\partial r}\right]$$
$$-\sum_m\left[\left(i\frac{m\mu A_{p-m}}{qB_0\gamma r}-\frac{mr\dot{A}_{p-m}}{7B_0(p-m)}\right)\delta f_m-\left(\frac{S}{B_0}\delta_{p-m,0}+\frac{A_{p-m}r}{B_0}\right)\frac{\partial \delta f_m}{\partial t}\right]$$
$$-\sum_m\left(\frac{8r^2\dot{A}_{p-m}}{21B_0}-i(p-m)\frac{\mu A_{p-m}}{qB_0\gamma}+\frac{r\dot{S}}{2B_0}\delta_{p-m,0}\right)\frac{\partial \delta f_m}{\partial r}. \tag{A4}$$

为了得到准线性方程，我们首先设定 $p=0$，它对应于动理学方程的空间平均，

$$\left(1-\frac{S}{B_0}-\frac{A_0 r}{B_0}\right)\frac{\partial f_0}{\partial t}=-\left[\frac{\partial \delta f_{p=0}}{\partial t}+\left(\frac{8r^2\dot{A}_0}{21B_0}+\frac{r\dot{S}}{2B_0}\right)\frac{\partial f_0}{\partial r}\right]$$
$$-\sum_m\left[\left(i\frac{m\mu A_{-m}}{qB_0\gamma r}+\frac{r\dot{A}_{-m}}{7B_0}\right)\delta f_m-\left(\frac{S}{B_0}\delta_{m,0}+\frac{A_{-m}r}{B_0}\right)\frac{\partial \delta f_m}{\partial t}\right]$$
$$-\sum_m\left(\frac{8r^2\dot{A}_{-m}}{21B_0}+im\frac{\mu A_{-m}}{qB_0\gamma}+\frac{r\dot{S}}{2B_0}\delta_{m,0}\right)\frac{\partial \delta f_m}{\partial r}. \tag{A5}$$

然后执行方程（27）中定义的时间平均，以得到方程（31），

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}=-\sum_m\left(\frac{im\mu}{qB_0\gamma r}\langle A_m^*\delta f_m\rangle+\frac{r}{7B_0}\langle\dot{A}_m^*\delta f_m\rangle-\frac{r}{B_0}\left\langle A_m^*\frac{\partial\delta f_m}{\partial t}\right\rangle+\frac{8r^2}{21B_0}\frac{\partial}{\partial r}\langle\dot{A}_m^*\delta f_m\rangle+\frac{im\mu}{qB_0\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\langle A_m^*\delta f_m\rangle\right)$$
$$=-\sum_m\left[\frac{im\mu}{qB_0\gamma r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\langle A_m^*\delta f_m\rangle\right)+\frac{8}{21}\frac{1}{rB_0}\frac{\partial}{\partial r}\langle r^3\dot{A}_m^*\delta f_m\rangle-\frac{r}{B_0}\langle\frac{\partial}{\partial t}(A_m^*\delta f_m)\rangle\right] \tag{A6}$$

(A6) 的右端描述了涨落效应导致的背景分布的慢演化。

B. 非线性扰动方程的推导 (32)

为了得到傅里叶模态$m\neq 0$对应的分布函数扰动部分的方程，我们用式 (A5) 减去式 (A4)，得到式 (32)

$$\frac{\partial\delta f_m}{\partial t}+im\Omega_d\delta f_m=\frac{A_m r}{B_0}\frac{\partial f_0}{\partial t}-\left(\frac{8r^2\dot{A}_m}{21B_0}-im\frac{\mu A_m}{qB_0\gamma}\right)\frac{\partial f_0}{\partial r}-\sum_{m'}\mathcal{Q}[A_{m-m'};\delta f_{m'}]. \tag{B7}$$

其中非线性项为

$$\mathcal{Q}[S;A_{m-m'};\delta f_{m'}]=\left[\left(i\frac{m'\mu A_{m-m'}}{qB_0\gamma r}-\frac{m'r\dot{A}_{m-m'}}{7B_0(m-m')}\right)\delta f_{m'}-\left(\frac{S}{B_0}\delta_{m,m'}+\frac{A_{m-m'}r}{B_0}\right)\frac{\partial\delta f_{m'}}{\partial t}\right]$$
$$+\left(\frac{8r^2\dot{A}_{m-m'}}{21B_0}-i(m-m')\frac{\mu A_{m-m'}}{qB_0\gamma}+\frac{r\dot{S}}{2B_0}\delta_{m,m'}\right)\frac{\partial\delta f_{m'}}{\partial r}. \tag{B8}$$

线性波粒相互作用仅取决于反对称磁场涨落A_m。然而，非线性扰动也是真对称磁场涨落的函数，即 $S(t)$。传统的准线性假设包括通过设定 $\mathcal{Q}=0$ 来忽略非线性效应，从而计算由反对称超低频波引起的快速线性响应。然而，如第（3.4.2）节所示，通过考虑与对称超低频扰动相关的非线性项，可以推导出时间尺度小于漂移周期的快速非线性响应，以及适用于长时间尺度的非线性准线性理论。

C. 在线性响应中忽略背景分布时间变化的合理性 (32)

我们注意到，(B7)中的线性方程包含一个与$\frac{A_m r}{B_0}\frac{\partial f_0}{\partial t}$ 成正比的项。在短自相关的准线性极限下，该项将在扩散方程中引入一个额外项，从而得到以下修正

$$\left(1+\sum_m \frac{8}{3}\frac{r^2|A_m|^2}{B_0^2}\right)\frac{\partial f_0}{\partial t}=L^2\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{D_L L}{L^2}\frac{\partial f_0}{\partial L}\right) \tag{C9}$$

因此，在由Mead场 $|\delta B_m|^2=r^2|A_m^2|\ll B_0^2$且修正使扩散降低一个远小于一的因子的超低频波振幅较小的极限下。

还可以通过量纲分析来忽略方程（B7）右侧的第一项，从而在准线性假设下计算线性响应。扩散系数 D_{LL} 的单位是时间的倒数，并受粒子的漂移周期Ω_d 限制。结合 $D_{LL}\ll\Omega_d$ 并因此得到 $D_{LL}\ll 1$，扩散方程要求 $\frac{\partial f_0}{\partial t}\simeq D_{LL}\frac{\partial^2 f_0}{\partial L^2}$。如果背景分布的时间变化和空间变化都很慢，并分别由无量纲小参数 $\varepsilon_t\ll 1$ 和$\varepsilon_L\ll 1$决定，那么将 $\overline{f_0}=f_0(\overline{\varepsilon_t t},\varepsilon_L L)$代入扩散方程可得到以下标度关系：$\varepsilon_t\simeq D_{LL}\varepsilon_L^2$。因此，在线性响应中，背景分布的时间变化比背景分布的径向梯度小 $\frac{\partial f_0/\partial t}{\partial f_0/\partial L}\simeq D_{LL}\varepsilon_L\ll 1$倍。我们注意到，即使将扩散系数人为增大到与漂移周期相当的数值，从而意味着在一个漂移周期内可以横跨一个漂移壳层进行输运，短自相关时间极限$\overline{\Omega_d\tau_c}<1$ 仍然成立；上述量纲分析依然适用，并证明了在线性化方程（B7）中忽略 f_0 的偏时间变化是合理的。

D. 符号列表

a_m 波模振幅$A_m(t)$超低频非对称扰动振幅B 磁场B_0 地球磁场偶极矩大小B_E 地球磁场偶极矩B^{EK} Elkington等人（1999年）的非对称磁场模型c 光速C_i 相关器D 反对称磁场扰动振幅的均方根 $A_m D_{LL}$ 准线性径向扩散系数δB磁场扰动δE 电场扰动 E电场E_c 相对论动能f 分布函数$\langle f \rangle$ 陀螺平均分布函数δf_m^L 分布函数的线性扰动δf_m^{NL}分布函数的非线性扰动f_0 背景分布函数$\mathcal{J}$ 第二绝热不变量I_1& I_2 与对称超低频扰动相关的非线性判据I_3& I_4 与反对称超低频扰动相关的非线性判据l 特征尺度大小L 相对于地球中平面的归一化径向距离L^* 磁漂移壳层和第三绝热不变量m_s 粒子种类“s”的静质量m 波数$\mathcal{Q}$ 非线性项$\mathrm{p}_\parallel$ 沿局部磁场方向的相对论动量$\mathrm{p}_\perp$ 垂直于局部磁场方向的相对论动量q_s 粒子种类的电荷 $s\mathrm{r}$位置 R_E 地球半径$S(t)$ 方位对称扰动振幅s 粒子种类的标签 $s = i, et$ 时间t_{eq} 达到稳态所需的时间尺度v 特征速度

α 俯仰角ϵ 无量纲小参数γ 洛伦兹因子γ_m 波模增长率μ 第一绝热不变量$\tilde{\mu}$ 第一绝热不变量修正φ 方位角ρ 拉莫尔半径τ_C 反对称ULF扰动的相关/衰减时间τ_C^s 对称ULF扰动的相关/衰减时间τ_D 漂移周期θ 极角θ_g 陀螺相位χ 高斯白噪声Φ 第三绝热不变量和磁通量ω 频率ω_m ULF波模频率 Ω_d 方位漂移频率 Ω_s 物种的拉莫尔频率 s

参考文献

Adkins, T., & Schekochihin, A. 2018, 《等离子体物理学杂志》, 84, doi: https://doi.org/10.1017/S0022377818000089Agapitov et al., O. 2015, 《地球物理研究快报》, 42, 3715, doi: https://doi.org/10.1002/2015GL064145Albert, J. 2014, 《地球物理年鉴》, 32, 10.5194/angeo Albert, J. M., Tao, X., & Bortnik, J. 2012, 非线性波粒相互作用的若干方面（美国地球物理联合会（AGU））,255–264, doi: https://doi.org/10.1029/2012GM001324Allanson, O., Elsden, T., Watt,C.,& Neukirch,T. 2022, Front. in Astron, and SpaceSci.,doi: https://doi.org/10.3389/fspas.2021.805699Artemyev et al., A. V. 2012, 《等离子体物理学》, 19, 122901, doi: 10.1063/1.4769726—. 2015, 《自然通讯》, 6, doi: https://doi.org/10.1038/ncomms8143Aryan, H., Agapitov, O., Artemyev, A., et al. 2020, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 125, e2020JA028018, doi: https://doi.org/10.1029/2020ja028018Barani, M., Tu, W., Sarris, T., Pham, K., & Redmon, R. J. 2019, 地球物理研究杂志：空间物理, 124, 5009, doi: https://doi.org/10.1029/2019JA026927Bernstein, I. B., Greene, J. M., & Kruskal, M. D. 1957, 《物理评论》, 108, 546, doi: 10.1103/PhysRev.108.546Bortnik, J., Thorne, R. M., & Inan, U. S. 2008, 《地球物理研究快报》, 35, doi: https://doi.org/10.1029/2008GL035500Bortnik et al., J. 2022, 《地球物理研究快报》, 49, doi: https://doi.org/10.1029/2022GL098365Brautigam, D., & Albert, J. 2000, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 105, 291, doi: doi:10.1029/1999JA900344.Brizard, A., & Chan,A. 2022, Front.Astron,andSpaceSciences, 9,doi: 10.3389/fspas.2022.1010133Cannon, P. S. 2013, 《空间天气》, 11, 138, doi: 10.1002/swe.20032Cary, J. R., & Brizard, A. J. 2009, 《现代物理学评论》, 81, 693 Case, K. M. 1959, 《物理学年鉴》, 7, 349, doi: 10.1016/0003-4916(59)90029-6Cattell et al., C. 2008, 《地球物理研究快报》, 35, L01105, doi: 10.1029/2007GL032009

Chen, Y., Reeves, G., & Friedel, R. 2007年, 《自然物理学》, 3, 614, doi: https://doi.org/10.1038/nphys655Claudepierre 等人,S. G. 2013年, 《地球物理研究快报》, 40, 4491, doi: https://doi.org/10.1002/grl.50901Crabtree, C., & Chen, L. 2004年, 《地球物理研究快报》, 31, doi: https://doi.org/10.1029/2004GL020660Cronin, J. 1999年, 《现代物理学评论》, 71, S165, doi: 10.1103/RevModPhys.71.S165Cully, C. M., Bonnell,J. W., &Ergun, R.E. 2008年, 《地球物理研究快报》, 35, 17, doi: 10.1029/2008GL033643Cunningham, G.2016年, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 121, 5149, doi: https://doi.org/10.1002/2015JA021981Datlowe, D., Imhof,W.,Gaines, E.,& Voss, H. 1985年, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 90,8333, doi: https://doi.org/10.1029/JA090iA09p08333Davidson,R. 2012年, 《非线性等离子体理论方法》（Elsevier） Degeling 等人, A. 2008年, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 113, doi: doi:10.1029/2007JA012411Desai 等人, R. T. 2021年, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 126, e2021JA029802, doi: https://doi.org/10.1029/2021JA029802Diamond, P.H., Itoh,S.-I.,&Itoh,K.2010年, 《现代等离子体物理学：湍流等离子体的物理动力学》（剑桥大学出版社，英国剑桥）, doi: https://doi.org/10.1017/CBO9780511780875Dupree, T. H. 1966年, 《流体物理学》, 9, 1773, doi: 10.1063/1.1761932Dupree, T. H. 1972年, 《物理学：流体》, 15, 334, doi: https://doi.org/10.1063/1.1693911Elkington, S. R.,Hudson, M. K.,& Chan,A.A. 1999年, 《地球物理研究快报》, 26, 3273, doi: https://doi.org/10.1029/1999GL003659—. 2003年, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 108, doi: https://doi.org/10.1029/2001JA009202F¨althammar,C.-G. 1965年, 《地球物理研究杂志》, 70, 2503, doi: https://doi.org/10.1029/JZ070i011p02503Fei, Y., Chan, A. A., Elkington,S.R., &Wiltberger, M. J. 2006年, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 111, doi: https://doi.org/10.1029/2005JA011211

George 等人, H. 2022年, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 127, doi: https://doi.org/10.1029/2022JA030751Goldreich, P., & Sridhar, S. 1995年, 《天体物理学杂志》, 438, 763, doi: https://doi.org/10.1086/304442Goldston, R. J., & Rutherford, P. H. 1995年, 等离子体物理学导论（CRC Press）Grach 等人, V. S. 2022年, 《地球物理研究快报》, 49, e2022GL099994, doi: https://doi.org/10.1029/2022GL099994Green, J., & Kivelson, M. 2004年, 《地球物理研究杂志》, 109, A03213, doi:10.1029/2003JA010153, doi: https://doi.org/10.1029/2003JA010153Hands 等人, A. D. P. 2018年, 《空间天气》, 16, 1216, doi: https://doi.org/10.1029/2018SW001913Hartinger 等人, M. 2013年, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 118, doi:10.1029/2012JA018349, doi: https://doi.org/10.1029/2012JA018349Hartinger 等人, M. 2020年, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 125, e2020JA027924, doi: https://doi.org/10.1029/2020JA027924Hazeltine, R. 1973年, 等离子体物理学, 15, 77, doi: 10.1088/0032-1028/15/1/009—. 2018年, 等离子体物理学框架（CRC Press）, doi: https://doi.org/10.1201/9780429502804Hazeltine, R., & Meiss, J. 2013年, 等离子体约束（Courier Corporation）Hendry等人, A. T. 2019年, 《地球物理研究快报》, 46, 7248, doi: https://doi.org/10.1029/2019GL082401Horne 等人, R. 2018年, 《空间天气》, 16, 1202, doi: https://doi.org/10.1029/2018SW001948Imhof, W., & Smith, R. 1965年, 物理评论快报, 14, 885, doi:https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.14.885Jaynes 等人, A. 2018年, 《地球物理研究快报》, 45, 10, doi: https://doi.org/10.1029/2018GL079786Jaynes 等人, A. N. 2015年, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 120, 7240, doi: https://doi.org/10.1002/2015JA021234Kalliokoski 等人 2023年, 《地球物理研究杂志》（空间物理学）, 已接收, doi: 10.1029/2022JA030708Kanekal 等人 2016年, 《地球物理研究杂志》（空间物理学）, 121, 7622, doi: https://doi.org/10.1002/2016JA022596Kawazura, Y., Barnes, M., & Schekochihin, A. A. 2019年, 美国国家科学院院刊, 116, 771, doi: https://doi.org/10.1073/pnas.181249111 C. F.Kennel& F.Engelmann. 1966年, 《流体物理学》, 9, 2377, doi: 10.1063/1.1761629Kokubun 等, S. 1977年, 《地球物理研究杂志》, 82, 2774, doi: https://doi.org/10.1029/JA082i019p02774Kulsrud, R.2005年, 《面向天体物理学的等离子体物理学》（新泽西州：普林斯顿大学出版社）Kunz, M. W.、Abel, I.G.、Klein, K.G.和Schekochihin, A. A. 2018年, 《等离子体物理学杂志》, 84, doi: https://doi.org/10.1017/S0022377818000296Landau, L. 1946年, 《实验与理论物理学杂志》, 10, 25 Lanzerotti, L.、Roberts, C. 和 Brown, W. 1967年, 《地球物理研究杂志》, 72, 5893, doi: https://doi.org/10.1029/JZ072i023p05893Lejosne, S.2019年, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 124, 4278, doi: https://doi.org/10.1029/2019JA026786Lejosne, S.、Boscher, D.、Maget, V.和Rolland, G.2013年, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 118, 3147, doi: https://doi.org/10.1029/2012JA018011Lejosne, S.、Fejer, B.、Maruyama, N.和 Scherliess, L. 2022年, 《天文学与空间科学前沿》, 9, 823695, doi: doi:10.2289/fspas.2022.823695Lejosne, S. 和Kollmann, P. 2020年, 《空间科学评论》, 216, 1, doi: https://doi.org/10.1007/s11214-020-0642-6Lejosne, S.和Mozer, F.2020a, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 125, e2020JA027889, doi: https://doi.org/10.1029/2020JA027889—。2020b, 《地球物理研究快报》, 47, e2020GL088564, doi: https://doi.org/10.1029/2020GL088564Lejosne, S. 和Roederer, J. 2016年, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 121, 507, doi: 10.1002/2015JA02192Li, L.、Zhou, X.、Omura, Y. 等。2018年, 《地球物理研究快报》, 45, 8773, doi: https://doi.org/10.1029/2018GL079038Li, X.、Selesnick, R.、Schiller, Q. 等。2017年, 《自然》, 552, 382, doi: https://doi.org/10.1038/nature24642Li 等。1993年, 《地球物理研究快报》, 20, 2423, doi: https://doi.org/10.1029/93GL02701Lichtenberg, A. J. 和Lieberman, M. A. 1983年, 《规则运动与随机运动》（施普林格出版社）Malaspina, D. M.、Andersson, L.、Ergun, R. E. 等。2014年, 《地球物理研究快报》, 41, 5693, doi: 10.1002/2014GL061109

Mead, G. D. 1964, 《地球物理研究杂志》, 69, 1181, doi: https://doi.org/10.1029/JZ069i007p01181 Meyrand, R., Kanekar, A., Dorland, W., & Schekochihin, A. 2019, 美国国家科学院院刊, 116, 1185, doi: https://doi.org/10.1073/pnas.181391311Millan, R., & Thorne, R. 2007, 《大气与太阳-地球物理学杂志》, 69, 362, doi: https://doi.org/10.1016/j.jastp.2006.06.019Mills, K. J., & Wright, A. N. 1999, 《地球物理研究杂志》, 104, 22667, doi: 10.1029/1999JA900280Morley 等, S. K. 2016, 空间天气, 14, 76, doi: 10.1002/2015SW001339Morley 等, S. K. 2017, 空间天气, 15, 283, doi: https://doi.org/10.1002/2017SW001604Mozer 等, F., Bale, S., Bonnell, J., 等。2013, 物理评论快报, 111, 235002, doi: 10.1103/PhysRevLett.111.235002Murphy, K. R., Mann, I. R., & Ozeke, L. G. 2014, 《地球物理研究快报》, 41, 6595, doi: https://doi.org/10.1002/2014GL061253Murphy 等, K. R. 2020, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 125, e27887, doi: 10.1029/2020JA027887O'Brien, T. P. 2014, 《地球物理研究快报》, 41, 216, doi: https://doi.org/10.1002/2013GL058712Olifer 等, L. 2018, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 123, 3692, doi: https://doi.org/10.1029/2018JA025190Omura, Y. 2021, 地球、行星与空间, 73, 1, doi: https://doi.org/10.1186/s40623-021-01380-wOrszag, S. A., & Kraichnan, R. H. 1967, 《流体物理学》, 10, 1720, doi: https://doi.org/10.1063/1.1762351Osmane, A., & Lejosne, S. 2021, 《天体物理学杂志》, 912, 142, doi: 10.3847/1538-4357/abf04bOsmane, A., Savola, M., Kilpua, E., 等。2022, 《地球物理年鉴》, 40, 37, doi: 10.5194/angeo-40-37-2022Osmane 等, A. 2016, 《天体物理学杂志》, 816, 51, doi: 10.3847/0004-637X/816/2/51—。2017, 《天体物理学杂志》, 846, 83, doi: 10.3847/1538-4357/aa8367Ozeke 等, L. 2014, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 119, 1587, doi: https://doi.org/10.1002/2013JA019204Papoulis, A. 1991, 《概率、随机变量与随机过程》, 电气工程系列（麦格劳-希尔）

Parker, E. 1960, 《地球物理研究杂志》, 65, 3117, doi: https://doi.org/10.1029/JZ065i010p03117Parra, F. 2019, 无碰撞等离子体物理. 牛津大学数学与数理物理硕士课程讲义, http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/FelixParra/CollisionlessPlasmaPhysics/CollisionlessPlasmaPhysics.htmlParra, F., & Catto, P. 2008, 等离子体物理与受控聚变, 50, 065014, doi: 10.1088/0741-3335/50/6/065014波普尔, K. 2005, 《科学发现的逻辑》（劳特利奇出版社） Quataert, E., & Gruzinov, A. 1999, 天体物理学杂志, 520, 248, doi:10.1086/307423Reeves等人, G. D. 2013, 《科学》, 341, 991, doi: 10.1126/science.1237743Roederer, J. G., & Zhang, H. 2014, 磁俘获粒子的动力学 辐射带与空间等离子体物理学基础（施普林格）, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-41530-2Sandhu等人, J. K. 2021, 《地球物理研究杂志》: 空间物理学, 126, e2020JA029024, doi: https://doi.org/10.1029/2020JA029024Santol´ıket al., O. 2014, 《地球物理研究快报》,41, 293, doi: 10.1002/2013GL058889Sarma等人, R. 2020, 《地球物理研究杂志》: 空间物理学, 125, e2019JA027618, doi: https://doi.org/10.1029/2019JA027618Sarris, T. E. 2014, 《地球物理研究杂志》: 空间物理学, 119, 5539, doi: https://doi.org/10.1002/2013JA019238Sarris等人, T. E. 2021, 《地球物理研究杂志》: 空间物理学, 126, e2020JA028891, doi: https://doi.org/10.1029/2020JA028891Sarris等人, T. E. 2022, 《地球物理研究杂志》: 空间物理学, e2022JA030469, doi: https://doi.org/10.1029/2022JA030469Sauvaud, J.-A., Walt, M., Delcourt, D., 等人 2013, 《地球物理研究杂志》: 空间物理学,118, 1723, doi: https://doi.org/10.1002/jgra.50125Schekochihin, A. 2017, 等离子体动理学理论与磁流体力学讲义, http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/AlexanderSchekochihin/KT/2015/KTLectureNotes.pdf, 牛津大学 Schekochihin等人, A. 2016, 《等离子体物理学杂志》,82, doi: https://doi.org/10.1017/S0022377816000374

Schekochihin 等人，A. A. 2008，等离子体物理与受控聚变，50，124024，doi：10.1088/0741-3335/50/12/124024Schulz, M., & Eviatar, A. 1969年，《地球物理研究杂志》，74，2182，doi：https://doi.org/10.1029/JA074i009p02182Schulz, M., & Lanzerotti, L. 1974，空间物理与化学，doi：https://doi.org/10.1007/978-3-642-65675-0Servidio 等人，S. 2017，物理评论快报，119，205101，doi：https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.205101Shprits 等人，Y. 2006，《地球物理研究杂志：空间物理学》，111，doi：https://doi.org/10.1029/2006JA011725Simms 等人，L. E. 2018，《地球物理研究杂志：空间物理学》，123，4755，doi：https://doi.org/10.1029/2017JA025003Sironi, L., & Narayan, R. 2015，天体物理学杂志，800，88，doi：10.1088/0004-637X/800/2/88Southwood, D. J., Dungey, J. W., & Etherington, R. J. 1969年，行星与空间科学，17，349，doi：10.1016/0032-0633(69)90068-3Southwood, D. J., & Kivelson, M. G. 1981，《地球物理研究杂志：空间物理学》，86，5643，doi：10.1029/JA086iA07p05643Summers, D. 2005，地球物理研究杂志：空间物理，110，doi：https://doi.org/10.1029/2005JA011159Takahashi, K., & Ukhorskiy, A. 2007，《地球物理研究杂志》（空间物理学），112，A11205，doi：10.1029/2007JA012483Takahashi 等人，K. 2022年，《地球物理研究杂志：空间物理学》，127，e2021JA030115，doi：https://doi.org/10.1029/2021JA030115Tao, X., Zonca, F., Chen, L., & Wu, Y. 2020年，中国科学：地球科学，63，doi：https://doi.org/10.1007/s11430-019-9384-6Thorne, R. M. 2010，《地球物理研究快报》，37，L22107，doi：10.1029/2010GL044990Thorne 等人，R. M. 2013，《自然》，504，411，doi：doi:10.1038/nature12889Tu 等人，W. 2012，《地球物理研究杂志：空间物理学》，117，doi：https://doi.org/10.1029/2012JA017901Turner 等人，D. L. 2012，《地球物理研究快报》，39，9101，doi：10.1029/2012GL051722

[{"id":0,"output":"Turner 等，D. L. 2017年，《地球物理研究杂志：空间物理学》，122，11,481，DOI：https://doi.org/10.1002/2017JA024554Turunen 等，E. 2009年，《大气与太阳-地球物理学杂志》，71，1176，DOI：https://doi.org/10.1016/j.jastp.2008.07.005Ukhorskiy, A.，& Sitnov，M. 2012年，《辐射带粒子的动力学》（施普林格），545–578，DOI：10.1007/s11214-012-9938-5Ukhorskiy，A.，Sitnov，M.，Mitchell，D.，等。2014年，《自然》，507，338，DOI：10.1038/nature13046Van Allen 等，J. 1958年，《喷气推进杂志》，28，588，DOI：https://doi.org/10.2514/8.7396Van Kampen，N. G. 1955年，《物理学》，21，949，DOI：https://doi.org/10.1016/S0031-8914(55)93068-8Vanden Eijnden，E. 1997年，《等离子体物理学》，4，1486，DOI：https://doi.org/10.1063/1.872548Volwerk，M. 2016年，美国地球物理联合会地球物理专著丛书，216，139，DOI：10.1002/9781119055006.ch9Walton 等，S. 2022年，《地球物理研究杂志：空间物理学》，127，e2021JA030069，DOI：https://doi.org/10.1029/2021JA030069Wang，C.，Rankin，R.，Wang，Y.，等。2018年，《地球物理研究杂志：空间物理学》，123，4652，DOI：https://doi.org/10.1029/2017JA025123Wu 等，H. 2019年，《天体物理学杂志》，870，106，DOI：10.3847/1538-4357/aaef77Zhang 等，X. 2022年，《自然·通讯》，13，1611，DOI：https://doi.org/10.1038/s41467-022-29291-8Zhao，H.，& Li，X. 2013年，《地球物理研究杂志：空间物理学》，118，6936，DOI：https://doi.org/10.1002/2013JA019240Zhdankin，V. 2022年，《物理评论X》，12，031011，DOI：https://doi.org/10.1103/PhysRevX.12.031011¨Ozt¨urk, M. K.，& Wolf，R. 2007年，《地球物理研究杂志：空间物理学》，112，DOI：https://doi.org/10.1029/2006JA012102"}]